



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Ekvidekomposabla figurer och volymsbegreppet hos Euklides

av

Victor Rocha

2018 - No K8

Ekvidekomposabla figurer och volymsbegreppet hos Euklides

Victor Rocha

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2018

Ekvidekomposabla figurer och volymsbegreppet hos Euklides

Victor Rocha

22 januari 2018

Sammanfattning

Att två polygoner i planet med samma area kan delas ändligt och pusslas ihop så att de blir kongruenta, är en känd sats från Bolyai-Gerwen. Däremot är en naturlig fråga att ställa sig om samma gäller för polyedrar i rummet. Detta arbete kommer att redogöra för ursprunget till Hilberts tredje problem. Samt utifrån Euklides definition och nya formaliseringar av area- och volymbegrepp konstatera att två tetraedrar med samma bas och höjd inte är ekvidekomposabla.

Nyckelord: volym, area, polygoner, tetraedrar.

Innehåll

1	Euklides	3
1.1	Inledning	3
1.2	Area i Euklides Geometri	4
1.3	Area av en cirkel	8
1.3.1	Kort om bakgrunden till cirkelns area	8
1.3.2	Eudoxos Uttömningsmetod	9
2	Ekvidekomposabla figurer	13
2.1	David Hilbert (1862 - 1943)	13
2.2	Farkas Wolfgang Bolyai	15
2.2.1	Wallace-Bolyai-Gerwiens sats	15
3	Euklides om volymer	18
3.0.1	Definition av viktiga polyedrar	19
3.0.2	Euklides åstadkommande	19
3.0.3	Bok XII och Uttömningsmetoden	21
4	Slutsats	28
4.1	Hilberts tredje problem och Max Dehn	28
	Referenser	31

1 Euklides

1.1 Inledning

En kort tid efter Plato, cirka 300 fKr, skrev Euklides boken *Elementa* som var en systematisk redovisning av geometrin i hans tid men som utgör grunden till geometriundervisningen ända tills idag. Euklides var en grekisk matematiker som utbildades vid den Platonska Akademien men hans verksamhet ägde rum i Alexandria (Mehrpooyan, 2015). Euklides samlade ihop och utvecklade arbeten av matematiker som bland andra Pythagoras och Theaetetus (Mehrpooyan, 2015). När man öppnar boken Euklides *Elementa*, upptäcker man populära geometriska figurer, linjer och cirklar. Hartshorne (2013), skriver: "Utan noggrannt studium av Euklides *Elementa*, är det omöjligt att uppnå den perfekta kunskapen om geometri och följaktligen av någon av de andra matematiska vetenskaperna" (s.3). Euklides axiomatiska metod har varit obestridd i två tusen år, men den har blivit ifrågasatt under 1800-talet. En del matematiker, som Gauss (1777,1855), János Bolyai (1802,1860) och N.I. Lobachevski (1893,1856), började ungefär samtidigt men oberoende av varandra att fundera närmare på Euklides axiom. Vad dessa matematiker kom fram till var att några egenskaper hos Euklides axiom var tagna för givet. Till exempel propositionen att på en given sträcka AB konstruera en liksidig triangel ABC. Metoden går ut på att bilda två omskrivna cirklar med sträckan AB som radier, och man antar att cirkelarna har en gemensam skärningspunkt C, som inte är bevisad. Denna problematik tillsammans med andra frågor ledde David Hilbert till att utveckla en ny uppsättning av axiom. Hilberts axiom byggdes på att "förbättra" och säkerställa Euklides geometri och utesluta antagandena som odefinierade. Detta medförde andra konsekvenser, bland annat att Euklides area- och volymbegrepp var tvungna att omdefinieras. Med nya definitionsbegrepp av bland annat area, uppmärksammade Hilbert Bolyais påstående om att två polygoner med samma area kan sönderföras i samma antal parvisa kongruenta trianglar. Detta ledde Hilbert till att tänka på en följdiskussion om volym, om samma sak kunde gälla för polygoner i rummet. David Hilbert funderade på Euklides proposition om att två tetraedrar med samma bas och höjd har samma volym, men kan dessa tetraedar också vara ekvidekomposabla? Denna frågeställning besvarades av en av Hilberts studenter, Max Dehn.

1.2 Area i Euklides Geometri

För att förstå Euklides volymsbegrepp och hur det kom till, är det viktigt att först prata om dess grund, nämligen areabegreppet. Euklides har inte gett en strikt definition av area i Elementa. I sin första bok står det att två parallelogram med vissa egenskaper är lika med varandra (Heiberg, 2007). Detta begrepp "lika", skiljer sig från det sättet som man behandlar area idag, nämligen som ett numeriskt mått. Icke desto mindre, så kan man dra slutsatsen att Euklides betraktar det som en ekvivalensrelation som satisfierar följande egenskaper:

1. Kongruenta figurer är "lika".
2. Summor av "lika" figurer är "lika".
3. Om man tar lika från lika blir resultaten "lika".
4. Halvor av "lika" figurer är "lika".
5. Det hela är större än delen.

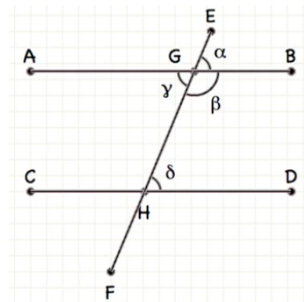
Dessa egenskaper är vad man kallar "Euklides Axiom". Beteckningen CN kommer användas för att referera till dessa fem axiom ovan, där CN står för den engelska förkortningen "Common Notions".

För att förtydliga Euklides areabegrepp och vad det betyder är det lämpligt att visa propositionen om arean av två parallelogram. Euklides använder sig huvudsakligen av två andra propositioner för att bevisa den:

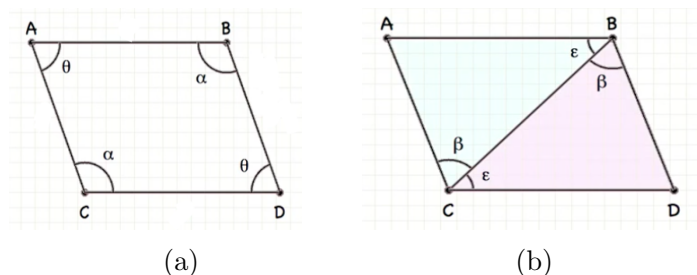
Proposition 1.1. *En rak linje (EF) skär två parallella raklinjer (AB och CD), blir alternatvinklarna (AGH och GHD) lika med varandra. Dessutom blir den externa vinkeln (EGB) lika med den inre och motsatta vinkeln (GHD). Summan av de inre vinklarna ($\beta + \delta$) är lika med två rätvinklar¹.*

Det vill säga:

$$\gamma = \delta, \alpha = \delta \text{ och } \beta + \delta = 180^\circ$$



¹Heiberg, 2007 s.32 Proposition I.29



(a)

(b)

Proposition 1.2. *I en parallelogram är motsatta sidor och vinklar lika med varandra, och en diagonal skär dem i hälften².*

Om man tittar på figur (b) ovan, så är påståendet helt enkelt följande:

$$AB \parallel CD$$

$$AC \parallel BD$$

$$\triangle ABC = \triangle BCD, \text{ eftersom } BC \text{ skär } ABCD \text{ i hälften}$$

Bevis. Eftersom linjen BC skär två parallella linjer (AB och CD), så gäller enligt 1.1 att:

$$\angle ABC = \angle BCD = \epsilon$$

På samma sätt, eftersom linjen BC skär två parallella linjer (AC och BD), så gäller enligt 1.1 att:

$$\angle ACB = \angle CBD = \beta$$

Om man tittar på de två triangelarna $\triangle ABC$ och $\triangle BCD$, så har de gemensamma vinklar ϵ och β , dessutom den gemensamma linjen BC . Således, enligt I.26³, så blir även de kvartstående sidorna och vinkeln lika med varandra, alltså:

$$AB = CD, AC = BD$$

$$\angle BAC = \angle BDC$$

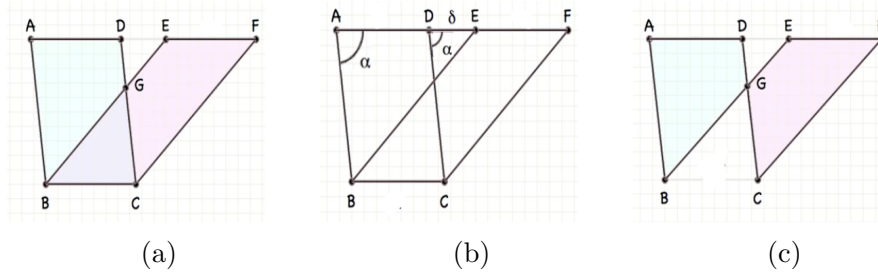
²Heiberg, 2007 s.36 Proposition I.34

³Heiberg, 2007 s.28 Proposition I.26

Därmed följer påståendet att diagonalen BC skär parallelogrammen $ABCD$ i hälften.

Det följer nu att $\angle ABD = \angle ACD$ eftersom båda dessa vinklar är en summa av $\theta + \beta$. Då följer påståendet att i en parallelogram är motsatta vinklar och sidor lika. $\square$

Proposition 1.3. : *Två parallelogram som har samma bas och befinner sig mellan samma parallella linjer är lika med varandra⁴.*



Figur 2: Area av en parallelogram

Enligt propositionen så ska parallelogrammerna $ABCD$ och $EBCF$ i figur 2 (a) vara lika i area, eftersom de har samma bas och ligger mellan samma parallella linjer AF och BC .

Bevis. Av proposition 1.2 följer en del likheter:

$$AD = BC$$

$$EF = BC$$

$$AD = EF$$

$$AE = DF \text{ eftersom } DE (\delta) \text{ är gemensam [C.N.2]}$$

$$AB = DC$$

$$EB = FC$$

⁴Heiberg, 2007 s.37 Proposition I.35

Enligt proposition 1.1 så är vinklarna FAB och EDC lika (figur 2b), vilket ger att $\triangle ABE = \triangle DFC$. Låt DGE subtraheras från dessa båda trianglar (se figur 2c), kvar blir då trapets $ABGD$ som är lika med trapets $EGCF$. [C.N.3]

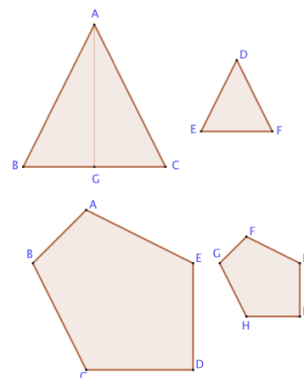
Låt triangel GBC adderas till varje, således hela parallelogrammen $ABCD$ är lika med parallelogrammen $EBCF$. [C.N.2] $\square$

Med hjälp av tidigare nämnda axiom visar Euklides vad likhet mellan figurer innebär. Man kan se i proposition 1.3 att Euklides baserar sitt areabegrepp på att addera och subtrahera kongruenta figurer. Men vad själva arean av figuren är för något framgår ej. Så man måste ställa sig frågan vad Euklides menar när han påstår att de två parallelogrammerna i 1.3 är lika. Lika i den meningen “att vara kongruent som tillämpas förut på linjer, vinklar och även trianglar, utvidgas nu utan att det sägs explicit till andra figurer” (Mehrpooyan, 2015 s.6). Det Euklides vill visa är att figurer är lika i area fast de inte behöver vara av samma form. För att avsluta denna sektion om area enligt Euklides så kommer även propositionen om cirkelns area att introduceras. Denna proposition är av speciellt intresse eftersom det är samma metod som Euklides använder för att beräkna volymen av polygoner, nämligen “uttömningsmetoden”.

1.3 Area av en cirkel

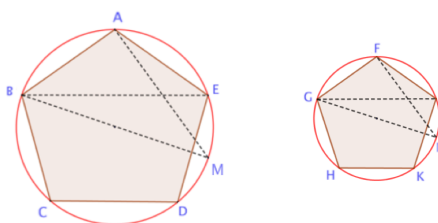
1.3.1 Kort om bakgrunden till cirkelns area

Elementa bok XII innehåller 18 propositioner som behandlar area av cirklar och volym av pyramider och koner (Kartz, 2013). Den centrala idén i denna bok är vad man kallar uttömningsmetoden som kommer från den grekiska matematikern Eudoxos. Benämningen av metoden började användas under 1700-talet och anses vara det första steget till vad som i moderna språk kallas för gränsvärde. Beviset för cirkelns area i bok XII har sina rötter från resultaten i bok VI. Där visar Euklides att arean av två likvinkliga trianglar förhåller sig som kvadraten av motsvarande sidor, som bilden till höger visar, $\triangle ABC : \triangle DEF = AB^2 : DE^2$. Vidare visar



Euklides att samma påstående gäller för arean av två polygoner, det vill säga $ABCDE : FGHIK = CD^2 : HK^2$. Areal av figurerna förhåller sig på samma sätt till alla andra motsvarande sidor. Med dessa två propositioner som grund, börjar Euklides visa cirkelns area i bok XII. Första steget är att visa förhållandet mellan arean av inskrivna polygoner och diametrarna till cirkelarna.

Proposition 1.4. *Kongruenta polygoner (inskrivna) i cirklar förhåller sig till varandra som diametrarna i kvadrat⁵.*



Figur 3

Kort om beviset: Huvudidén i denna proposition är att visa att eftersom $\triangle ABM$ är likvinklig med $\triangle FGN$ så förhåller sig diametrarna BM och GN

⁵Heiberg, 2007 s.472 Proposition XII.1

som sidorna BA och GF , alltså:

$$BM : GN = BA : GF$$

och som redan nämnts, från bok VI vet man att

$$ABCDE : FGHLK = BA^2 : GF^2$$

då gäller också att

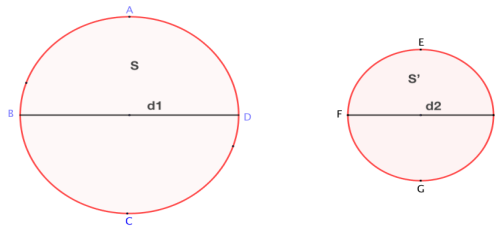
$$ABCDE : FGHLK = BM^2 : GN^2$$

och därmed är påståendet bevisat.

1.3.2 Eudoxos Uttömningsmetod

När man nu vet relationen mellan arean av inskrivna polygoner och cirk-larnas diametrar, överförs samma påstående till arean av cirklar och dess diametrar. Euklides approximerar arean av cirklarna med hjälp av polygoner med växande antal sidor. Den viktiga punkten är att varje approximation kan göras så att skillnaden mellan arean av den ursprungliga figuren och den inskrivna figuren minskar med åtminstone hälften vid varje steg. Denna approximation är vad man kallar för uttömningsmetoden. Beviset till följande proposition delas i två delar, först att visa att efter varje approximation minskar arean med minst hälften, och andra delen, ett algebraiskt bevis av själva påståendet.

Proposition 1.5. *Cirklar förhåller sig till varandra som diametrarna i kvadrat⁶.*

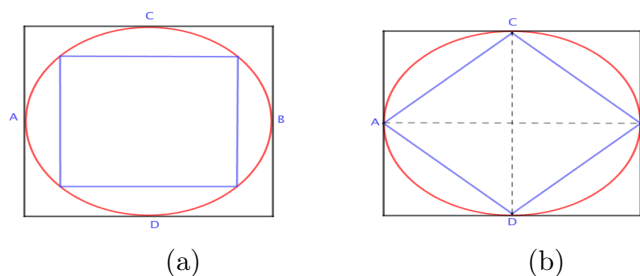


Figur 4: Proposition 1.5

⁶Heiberg, 2007 s.473 Proposition XII.2

Om man låter S stå för arean av cirkel $ABCD$ och d_1 dess diameter, och om S' står för arean av $EFGH$ och d_2 för dess diameter, så säger påståendet att:

$$S : S' = d_1^2 : d_2^2$$



Figur 5

Bevis. Figur 5(a) visar en cirkel med en omskriven och en inskriven kvadrat. Figur 5(b) är samma figur som i (a) fast kvadraten står på spetsen. Poängen med att ändra positionen är att visa att den inskrivna kvadraten är hälften så stor som den omskrivna kvadraten. Om man kallar arean av den inskrivna kvadraten för A_i , och arean av cirkeln för A_c och av den omskrivna kvadraten för A_o så får man likheten:

$$A_i < A_c < A_o$$

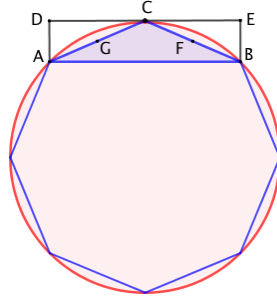
Men $A_o = 2A_i$, vilket ger:

$$A_c < 2A_i$$

$$\frac{A_c}{2} < A_i$$

Med andra ord, när man bildar den inskrivna kvadraten “uttöms”, “försvinner” mer än hälften av cirkelns area (Kline, 2014). Man upprepar samma metod fast vid nästa steg bildas en oktagon.

Figur 6 visar nästa approximation, då nu fokus ligger på att betrakta vad som händer på ena sidan av oktagonen. Man behåller ena sidan av kvadraten, och sedan kan man bilda triangeln ABC , då C ligger i mitten av bågen AB (se figur 6). En tangent är dragen på punkt C så att därefter AD och BE kan



Figur 6: Cirkel med inskriven oktagon

bildas vinkelrät mot tangenten. Som i föregående steg, är arean av rektangeln $ABDE$ dubbelt så stor som triangel ABC , alltså $|ABDE| = 2|ABC|$. Man får:

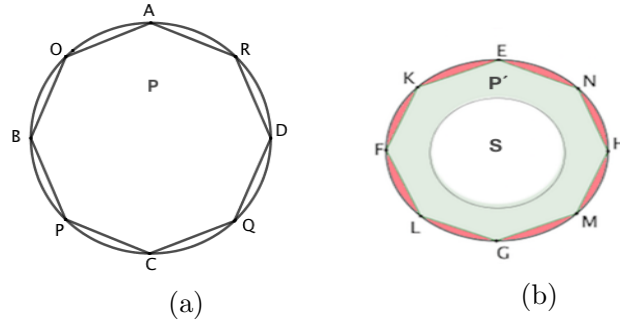
$$\begin{aligned} |ABC| &< |\text{segmentet } ABC| < |ABDE| \\ |\text{segmentet } ABC| &< 2|ABC| \\ \frac{|\text{segmentet } ABC|}{2} &< |ABC| \end{aligned}$$

Först “uttöms” mer än hälften av cirkelns area med hjälp av en kvadrat. Av det som är kvar “uttöms” ytterligare mer än hälften med hjälp av en oktagon, och samma kommer att gälla för polygoner med 16, 32, 64 hörn och så vidare. Euklides använder första propositionen i boken X för att bekräfta att skillnaden mellan cirkelns area och arean av polygonen med tillräckligt stort antal sidor kan göras mindre än vilken annan storhet som helst. $\square$

Andra steget i beviset är ett dubbelt bevis av en motsägelse (Kline, 2014). Låt $ABCD$ stå för arean av cirkel $ABCD$ och på samma sätt $EFGH$ för arean av cirkel $EFGH$, och låt d_1 och d_2 vara deras respektive diametrar. Euklides inför en ny kropp S och gör tre möjliga antaganden utifrån proposition 1.5.

1. $ABCD : S = d_1^2 : d_2^2$ (då $S < EFGH$)
2. $ABCD : S = d_1^2 : d_2^2$ (då $S > EFGH$)
3. $ABCD : S = d_1^2 : d_2^2$ (då $S = EFGH$)

Fall (1) och (2) visar sig vara en motsägelse. Genom att eliminera dessa fall återstår (3) som den enda möjligheten. Det mesta av beviset spenderas i fall (1) eftersom samma härledning gäller för (2).



Figur 7

Bevis. Antag en motsats till påståendet, alltså fall (1). Tag arean av en cirkel S sådant att $S < EFGH$, det ger:

$$ABCD : S = d_1^2 : d_2^2$$

Tag polygonen P' sådant att $EFGH - P'$ (röd area) $< EFGH - S$ (röd + grön area). Polygonen P' går att konstrueras, det följer av första delen av beviset. Således:

$$S < P' < EFGH$$

På samma sätt konstruera en polygon P i cirkeln $ABCD$, och enligt proposition 1.4 fås:

$$P : P' = d_1^2 : d_2^2$$

Men enligt antagandet (1) så gäller också att

$$ABCD : S = d_1^2 : d_2^2$$

då är

$$P : P' = ABCD : S$$

eller

$$P : ABCD = P' : S$$

$P < ABCD$ då borde också $P' < S$ för att $P : ABCD = P' : S$ ska stämma, men $P' > S$, vilket ger en motsägelse.

På samma sätt fås en motsägelse i fall (2). Således kan S varken vara större eller mindre än $EFGH$, vilket lämnar $S = EFGH$ som den enda möjligheten och därmed är påståendet bevisat. $\square$

2 Ekvidekomposabla figurer

2.1 David Hilbert (1862 - 1943)

David Hilbert var en av de senaste världsberömda matematikerna som bidragit med mycket inom olika matematiska områden (Katz, 2013). Med utvecklingen av "icke-Euklidisk geometri" (mer om det i nästa avsnitt), undersökte Hilbert naturen av åtskilliga axiomer. År 1899 publicerade Hilbert boken *Grundlagen der Geometrie* (Foundations of geometry). Hilbert ansträngde sig för att förtydliga och etablera Euklides arbete som en stark grund för geometri genom att skapa en komplett uppsättning av axiom utan motsägelser (Katz, 2013). Hilberts idé var att starta med tre odefinierade termer, nämligen punkt, raklinje och plan, och definiera dessa ömsesidiga relationer. Hilbert grupperade sina axiom i fem uppsättningar: incidensaxiomen, ordningsaxiomen, kongruensaxiomen, parallellaxiomen och kontinuitetsaxiomen. Som redan visat, hade Euklides ett odefinierat likhetsbegrepp i beviset för proposition 1.3 om area av två parallelogrammer. Hilbert använder begreppet "lika i innehåll" som motsvarar Euklides areabegrepp.

Definition 2.1. Två figurer P, P' är ekvidekomposabla om det är möjligt att skriva dem på en *icke-överlappande union av trianglar*, där för varje i , triangeln T_i är kongruent med triangeln T'_i (Hartshorne 2013, s.196).

Observera, två figurer är icke-överlappande om inga av deras inre punkter är gemensamma.

$$P = T_1 \cup \dots \cup T_n$$

$$P' = T'_1 \cup \dots \cup T'_n$$

Om $T_i = T'_i$ för alla i så är P och P' ekvidekomposabla.

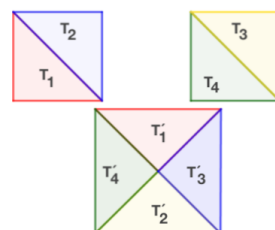
Exempel: Låt P vara unionen av två kongruenta kvadrater som består av triangelarna $T_1, \dots, T_4$ och låt P' vara en kvadrat byggd på diagonalen av en utav kvadraterna från P union. Då är P och P' ekvidekomposabla, man kan dela figurerna sådana att:

T_1 är kongruent med T'_1

T_2 är kongruent med T'_2

T_3 är kongruent med T'_3

T_4 är kongruent med T'_4



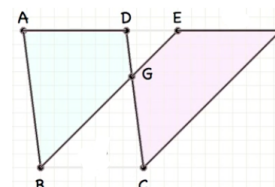
Definition 2.2. Två figurer P , P' är *lika i innehåll* om det finns andra figurer Q , Q' sådana att:

P och Q är icke-överlappande

P' och Q' är icke-överlappande

Q och Q' är ekvidekomposabla

$P \cup Q$ och $P' \cup Q'$ är ekvidekomposabla



Exempel: I proposition 1.3 visar Euklides att de två parallelogrammerna är lika i innehåll. Sannerligen, om man låter $P = ADBC$ och $P' = BCEF$, och låt Q och Q' vara = triangel DGE . Då blir:

$$P \cup Q = \triangle ACE + \triangle BCG \text{ och } P' \cup Q' = \triangle BDF + \triangle BCG$$

2.2 Farkas Wolfgang Bolyai

Farkas Wolfgang Bolyai (1775–1856) kom från en ungersk familj, och hade en livslång vänskap med en världsberömd matematiker K.F Gauss (Haesen, 2016). Hösten 1875 studerade Bolyai i Göttingen och dedikerade sitt liv till att bevisa Euklides femte parallellpostulat. Ett postulat är ett antagande utan bevis, det tas som grund för ett matematiskt-logiskt system. Bolyai och Gauss accepterade de fyra första postulaten, som säger att (1) man kan alltid dra en linje mellan två punkter, (2) varje begränsad rät linje kan förlängas obegränsat, (3) kring varje medelpunkt kan man rita en cirkel med given radie och (4) alla räta vinklar är lika⁷. Problemet för Bolyai och Gauss var det femte postulatet som sade att given en linje a och en punkt b som inte ligger på linjen a , så kan man dra en linje c genom punkten b som är parallellt med a , och de skär aldrig i varandra. Detta ledde till vad man kallar för hyperbolisk geometri, där till exempel summan av vinklarna i en triangel inte är 180° . Hyperbolisk geometri uppfyller de fyra första postulaten från Euklides men inte den femte, eftersom Bolyai använder sig av krökta ytor, ett sadelformat plan. Detta ledde till icke-Euklidiska geometrin, det vill säga, geometrin som behandlar det femte parallellpostulatet som en sats som uppfylls med avseende till planformat.

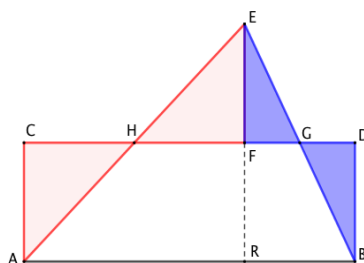
2.2.1 Wallace-Bolyai-Gerwiens sats

I slutet av 1700-talet formulerade Bolyai en frågeställning om ekvidekomposabla polygoner på planet genom dissektion, som bevisades av Bolyai själv, tillsammans med två andra matematiker oberoende av varandra, William Wallace och Paul Gerwien. De visade att två polygoner med samma area kan sönderföras i samma antal parvisa kongruenta trianglar. En ekvivalent formulering är att två polygoner är ekvidekomposabla om och endast om de har samma area. Med andra ord kan en av polygonerna dissekteras i polygonala bitar, som efter justeringar kombineras i den andra polygonen. För beviset kommer först två hjälpsatser bevisas.

Lemma 2.1. *Alla trianglar är kongruenta genom dissektion till en rektangel (Salehyan, 2015).*

Bevis. Se figur 8, given triangel EAB , kan man göra följande konstruktion: Betrakta höjden ER och dess mittpunkt F , konstruera rektangel $ABDC$

⁷<http://matmin.kevius.com/geoaxiom.php>



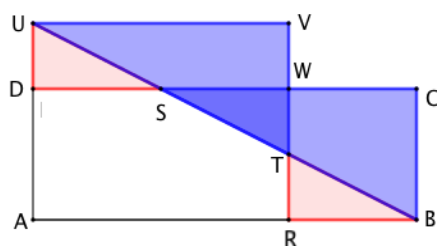
Figur 8: Lemma 1

sådant att DC går genom F . Man får $\triangle EFH \cong \triangle AHC$ och $\triangle EGF \cong \triangle GDB$. Därmed konkluderas att varje triangel EAB och rektangel $ABDC$ är kongruenta genom dissektion. Icke desto mindre är det lätt att se att arean av triangel EAB är lika arean av rektangel $ABDC$. $\square$

Lemma 2.2. *Två rektanglar med samma area är kongruenta genom dissektion⁸.*

Betrakta konstruktionen i figur 9 av två rektanglar med samma area $ADCB$ och $AUVR$. Man vill visa att $\triangle UDS$ och $\triangle TRB$ är kongruenta, och det görs genom att visa att $DS = RB$

Bevis. $\triangle UDS$ och $\triangle UAB$ är likformiga och har samma vinkel U , det följer att $\frac{DS}{AB} = \frac{UD}{UA}$ eller



Figur 9: Lemma 2.2

⁸Salehyan, 2015

$$\frac{DS}{AB} = \frac{UA - DA}{UA} \rightarrow DS = \frac{AB \times UA - AB \times DA}{UA}$$

Men $AB \times DA$ är arean av rektangel $ADCB$, och arean av $ADCB$ är lika med arean av $AUVR$, det ger:

$$AB \times DA = UA \times AR$$

Således

$$DS = \frac{AB \times UA - UA \times AR}{UA} \rightarrow DS = AB - AR = RB$$

På ett analogt sätt kan man visa att $\triangle UVT \cong \triangle CBS$. Slutligen, låt a står för arean:

$$a(ADCB) = a(DSTRA) + a(CBS) + a(TBR)$$

och

$$\begin{aligned} a(AUVR) &= a(DSTRA) + a(UVT) + a(USD) \\ a(ADCB) &= a(AUVR) \end{aligned}$$

□

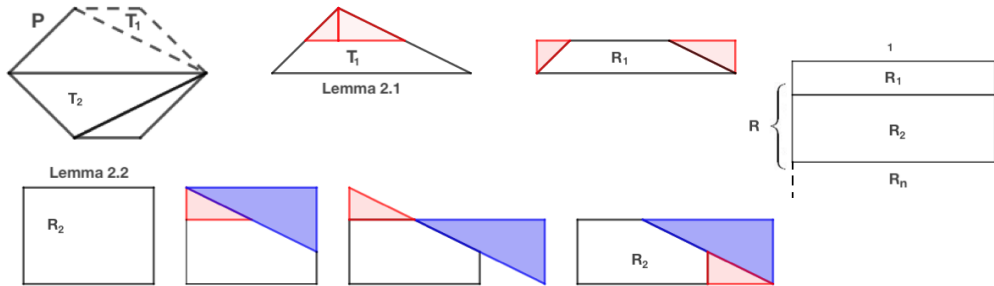
Med lemma 2.1 och 2.2 kan man nu visa Wallace-Bolyai-Gerwiens sats.

Sats 2.1. *Två polygoner (P, Q) är kongruenta genom dissektion, om och endast om de har samma area⁹.*

Bevis. Varje polygon P kan delas upp i ändligt antal trianglar $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ som figur 10 visar. Från lemma 2.1 är varje triangel kongruent genom dissektion till en rektangel. Viktigt att poängtera, från lemma 2.2 är varje triangel $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ kongruent genom dissektion till en rektangel som har en sida som är lika med 1. I figur 10 dissekteras T_1 till R_1 . Låt T_2 dissekteras också enligt lemma 2.1 sådant att man får R_2 . Enligt lemma 2.2 kan rektangel $R_2, \dots, R_n$ dissekteras sådant att de har samma bredd som R_1 . Till slut kan rektanglarna $R_1, \dots, R_n$ omgrupperas till en större rektangel R som har sidan 1, således:

$$P \sim R_1 + \dots + R_n = R$$

⁹Salehyan, 2015. Wallace-Bolyai-Gerwien sats

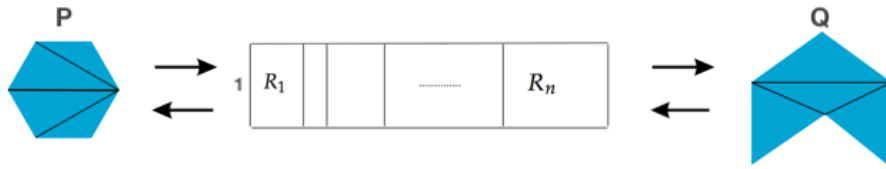


Figur 10: Wallace-Bolyai-Gerwiens sats

Vidare kan polygonen Q också dissekteras på samma sätt som P med hjälp av lemma 2.1 och 2.2. Eftersom Q har samma area som P , så är Q kongruent till R (Salehyan, 2015).

$$Q \sim R_1 + \dots + R_n = R$$

□



Som tidigare nämnt, är två figurer ekvidekomposabla om det är möjligt att skriva om dessa som icke-överlappande unioner av trianglar. I det här fallet anger Wallace-Bolyai-Gerwiens sats att två polygoner är ekvidekomposabla om och endast om de har samma area.

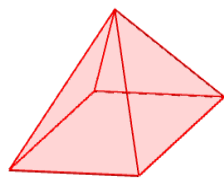
3 Euklides om volymer

I Elementa, bok XI, diskuterar Euklides tredimensionell geometri och behandlar volymer av diverse figurer. Som i areabegreppet använder Euklides inte begreppet volym, och därmed saknas både en definition och någon form av bekräftelse på att man handskas med en ny typ av likhet som skiljer sig från kongruens (Hartshorne, 2013). Volymen bestäms, liknande area, genom

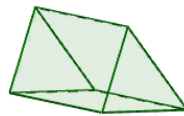
att addera och subtrahera kongruenta delar efter några dissektioner (Hartshorne, 2013).

3.0.1 Definition av viktiga polyedrar

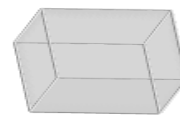
Fokuset är nu att visa hur Euklides bevisar volymlikheter mellan prismor och pyramider. Då är det lämpligt att först definiera dessa figurer (Hartshorne 2013).



(a) Pyramid



(b) Prisma



(c) Parallelepiped

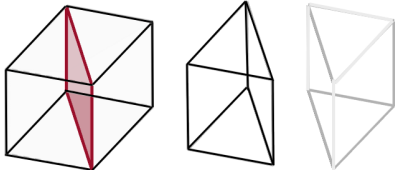
Figur 11: Olika polyedrar

Pyramid: En pyramid är en polyeder med en bas i form av en månghörning och tre eller flera sidoytor i form av trianglar. Pyramiden bestäms av basen och en punkt, pyramidens spets, som inte ligger i samma plan som basen. Om basen är triangulär så kallas pyramiden för en **tetraeder**.

Prisma: Ett prisma är en figur formad genom att ta två kongruenta figurer i parallella plan, med parallella kanter, och sammanfoga deras motsvarande vertex. Dess ytor består av de två ursprungliga kongruenta figurerna, plus parallelogrammerna som går ihop med motsvarande sidor. Om basen är en triangel, så är det ett **triangulärt prisma**.

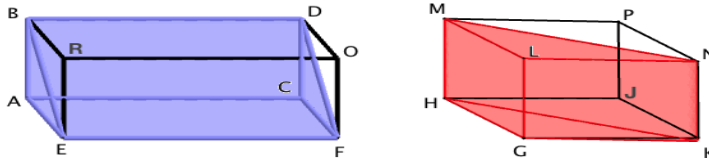
Parallelepiped: är ett prisma där basen är en parallelogram. Det är format av tre par parallelogrammer i parallella planer.

3.0.2 Euklides åstadkommande



I de kommande avsnitten kommer de viktigaste propositionerna för volym av tetraeder att redogöras. Men som i areavsnittet behöver man känna till några påståenden från föregående böcker. Därför

är det lämpligt att prata om bok XI på ett översiktligt sätt, dock så kommer proposition XI.39 visas mer detaljerat. I bok XI behandlar Euklides volym av parallelepiped och prismor. Det sägs att om en parallelepiped halveras (bisected) av ett plan genom två motsatta kanter, så dissekeras parallelepipeden till två prismor med samma volym¹⁰(Heiberg, 2013). Propositionerna XI.29, 30 och 31 behandlar likheten av volymen mellan två prismor som har samma bas och samma höjd men som ser olika ut. Proposition XI.32 säger att två parallelepiped med samma höjd förhåller sig som sina baser, med andra ord, volymerna förhåller sig som basareorna. De nämnda propositionerna fungerar som i alla andra böcker, de ger grund för att bevisa mer invecklade påståenden.



Figur 12: Proposition 3.1

Proposition 3.1. *Låt två prismor $ABCDEF$ och $GHKLMN$ ha samma höjd, där en av dem har en parallelogram som bas, och den andra en triangel. Om parallelogrammens area är dubbelt så stor som triangelns, så har prismorna $ABCDEF$ och $GHKLMN$ samma volym¹¹.*

Bevis. Låt det bildas två parallelepiped, genom att lägga till prismen $BEFDO$ till $ABCDEF$ och $MNPJ$ i den andra, eftersom:

$$ACFE = 2GHK$$

och

$$HJGK = 2GHK$$

¹⁰Heiberg, 2007 s.454 proposition XI.28

¹¹Heiberg, 2007 s.470 proposition XI.39

så är

$$ACFE = HJGK$$

Enligt propositionen XI.31 är två parallelepipeder med samma bas och höjd också lika i volym. Slutligen:

$$ABRECDOF = HMIGJPNK$$

$$2ABCDEF = ABRECDOF$$

$$2GHKLMN = HMIGJPNK$$

$$ABCDEF = GHKLMN$$

□

3.0.3 Bok XII och Uttömningsmetoden

Boken inleder med att behandla arean av en cirkel, som redan visats här. Det som är av stort intresse för detta arbete är Euklides påstående om volymförhållandet av två tetraedrar. Men största delen av beviset för detta påstående byggs på tidigare propositioner, där de viktigaste kommer att redogöras nedan:

Proposition 3.2. *Varje pyramid med en triangulär bas kan uppdelas i fyra delfigurer, två mindre kongruenta pyramider med triangulära baser, och två kongruenta prismor. De två prismorna utgör mer än hälften av hela pyramiden¹².*

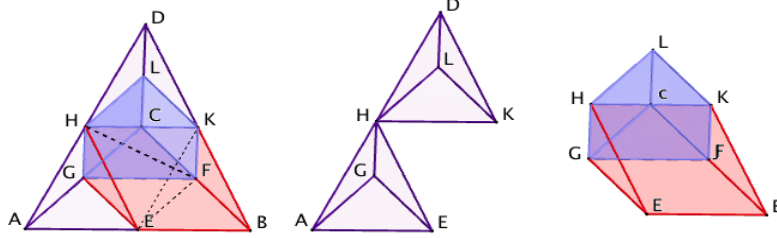
Betrakta figur 13. Den stora pyramiden ABCD består av fyra delfigurer.

- prisma med baser CFG och LKH
- prisma med baser BFK och EGH
- pyramiden $AEKH$

¹²Heiberg, 2007 s.475 proposition XII.3. Alla propositioner i detta arbete är av egen översättning

- pyramiden $HKLD$

Den grundläggande observationen i denna proposition är att volymen av de två kongruenta prismorna längst till höger i figur 13 utgör mer än hälften av volymen till hela pyramiden $ABDC$. Vidare, om man delar upp de två små pyramiderna $AEGH$ och $HKLD$ ännu en gång, så att var och en innehåller två pyramider och två prismor, så utgör de fyra små pyramiderna mindre än $1/4$ av volymen till pyramiden $ABCD$. Dissektionen av de fyra små pyramiderna ger åtta nya pyramider som är mindre än $1/8$ av volymen till $ABCD$, och så vidare.



Figur 13: Proposition 3.2

Bevis. Beviset går ut på att bestämma några viktiga egenskaper hos pyramiden $ABCD$ och sedan hänvisar Euklides till tidigare propositioner för att visa själva påståendet. Proposition 3.1. blir en viktig del av beviset.

1. E, F, G, H, K, L är mittpunkterna på pyramiden $ABCD$:s kanter, det medför likheten mellan många linjer, $AE = EB, AH = DH, HK = KB, AH = EA$ och så vidare, vilket i sin tur ger att $HEBK$ är en parallelogram, på samma sätt $GEFB$. [PropI.34].
2. I andra steget vill Euklides visa likheten mellan pyramiderna $AEGH$ och $HKLD$. Det görs genom att jämföra vinklarna, linjerna och trianglarna. $\angle EAH = \angle KHD$, och linjen $EH = KD$, det ger att $\triangle AEH = \triangle HKD$. På samma sätt $\triangle AHG = \triangle HLD$, $\triangle EHD = \triangle KDL$, $\triangle AEG = \triangle HKL$. Alla dessa likheter tillsammans ger till slut att $AEGH$ är kongruent med $HKLD$. Genom att försätta jämföra vinklar och trianglar fås på samma sätt att pyramiderna $AEGH$ och $HKLD$ är likformiga med hela $ABDC$.

3. Tredje steget är att använda propositionen 3.1. Eftersom $FB = FC$ så är parallelogrammen $EBFG$ dubbelt så stor som triangel GFC , då uppfylls propositionen 3.1 som redan visats här, det vill säga att prisma $GEBKH$ har samma volym som prisma $GFKHLC$.
4. Nu visas att volymen till de två prismorna är större än hälften av volymen för hela pyramiden. Eftersom $\triangle ABC$ delas i fyra mindre kongruenta trianglar: $\triangle AGE$, $\triangle GEF$, $\triangle FEB$, $\triangle GFC$, då har $EBFG$ dubbelt så stor area som GFC . Eftersom prisma $GEBKH$ innehåller pyramiden $FEBK$ som är kongruent med pyramiderna $AEGH$ och $HKLD$, då har man nu bevisat att den sammanlagda volymen av de två prismorna är större än volymen av hela pyramiden.

□

När Euklides nu visat att volymen till prismorna utgör mer än hälften av volymen till $ABCD$ kan man gå vidare för att visa nästa proposition. Denna är ett avgörande steg i beviset för volymen av tetraedrar som är slutmålet för volymdiskussionen.

Proposition 3.3. *Givet två pyramider av samma höjd med triangulära baser, där var och en av dem är uppdelad i två kongruenta pyramider och i två lika stora prismor, så gäller att volymen av prismorna förhåller sig som pyramidernas basareor¹³.*

Låt v stå för volymen och a för area, propositionen 3.3 påstår att

$$v(ABCG) : v(DEFH) = a(ABC) : a(DEF)$$

För en lättare uppföljning som i föregående bevis, uppdelas beviset i fyra huvudsakliga steg:

Bevis. 1. Analogt från föregående proposition, så är K, L, O, P, M, N mittpunkten till pyramiden $ABCG$:s sidor. Vilket ger

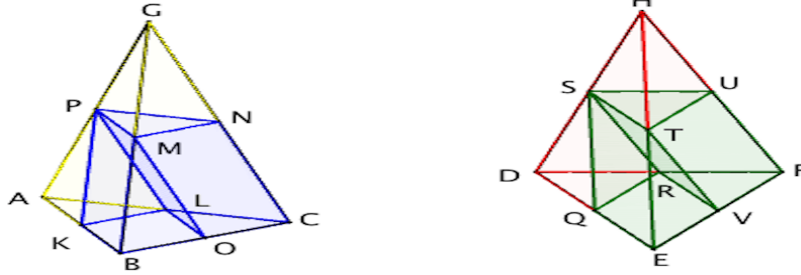
$$\triangle LOC \sim \triangle ABC$$

på samma sätt

$$\triangle DEF \sim \triangle RVF$$

.

¹³Heiberg, 2007 s.477 proposition XII.4



Figur 14: Proposition 3.3

2. Betrakta figur 14, nu vill man visa att förhållandet mellan volymerna av prismorna $LOCPMN$ och $RFVSTU$ är lika med förhållandet mellan areorna av baserna LOC respektive RFV , alltså:

$$v(LOCPMN) : v(RFVSTU) = a(LOC) : a(RFV)$$

Det enda som behöver visas här är att prismorna $LOCPMN$ och $RFVSTU$ är av samma höjd. För enligt en tidigare proposition i bok XI så förhåller sig prismor av samma höjd som deras basareor.¹⁴

Låt två vinkelräta linjer dras (l_1, l_2), från punkten G och H till sina respektive baser ABC och DEF . Eftersom pyramiderna har samma höjd så är:

$$l_1 = l_2$$

Om två raka linjer (l_1, GC) skärs av parallella plan (PMN och ABC), så skärs de i samma förhållanden¹⁵. Det vill säga att GC skärs i mitten av plan PMN i punkten N , då gäller också att l_1 skärs i mitten av planet PMN . Analogt resonemang gäller för den andra pyramiden: l_2 skärs i mitten av planet STU . Avståndet från planet PMN till ABC och från STU till DEF är $\frac{l_1}{2}$ respektive $\frac{l_2}{2}$ och eftersom

$$l_1 = l_2$$

så är

$$\frac{l_1}{2} = \frac{l_2}{2}$$

¹⁴Heiberg, 2007 s.459, Proposition XI:39 säger att prismor av samma höjd förhåller sig som deras basareor

¹⁵Detta påstående hittar man i Heiberg, 2017 Proposition XI.17

Således är prismorna $LOCPMN$ och $RFVSTU$ av samma höjd, då följer att:

$$v(LOCPMN) : v(RFVSTU) = a(LOC) : a(RFV)$$

3. Visa att volymen till de fyra prismorna (blå- och grönfärgade i figur 14) förhåller sig som areorna ABC och DEF , alltså

$$v(LOCPMN)+v(BOMKLP) : v(RFVSTU)+v(EVTQRS) = a(ABC) : a(DEF)$$

I steg 1 visades:

$$\triangle LOC \sim \triangle ABC$$

$$\triangle DEF \sim \triangle RVF$$

. och från steg 3 vet vi att:

$$v(LOCPMN) : v(RFVSTU) = a(LOC) : a(RFV)$$

då gäller också att

$$v(LOCPMN) : v(RFVSTU) = a(ABC) : a(DEF)$$

Eftersom $LOCPMN$ har samma volym som $BOMKLP$, och motsvarande för den andra pyramiden, fås även:

$$v(BOMKLP) : v(EVTQRS) = a(ABC) : a(DEF)$$

Så att slutligen fås

$$(v(LOCPMN)+v(BOMKLP)) : (v(RFVSTU)+v(EVTQRS)) = a(ABC) : a(DEF)$$

Sista uttrycket följer från följande algebraiska räkning:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{p}{q}$$

$$a = \frac{p}{q}b$$

$$c = \frac{p}{q}d$$

$$a + c = \frac{p}{q}b + \frac{p}{q}d$$

$$a + c = b + d \times \left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{p}{q}$$

4. Efter godtyckligt många dissektioner, först av pyramiderna $AKLP$, $PMNG$, $DQRS$ och $STUH$ fås nya små pyramider och prismor. Upprepad process av stegen 1, 2 och 3 ovan ger att den sammanlagda volymen av prismorna i $ABCG$ och $DEFH$ förhåller sig till areorna av bastriangelarna ABC och DEF .

□

Den sista propositionen om volym för tetraedrar är viktig för diskussionen om ekvidekomposabla figurer.

Proposition 3.4. *Volymerna av två pyramider med samma höjd förhåller sig som basareorna*¹⁶.

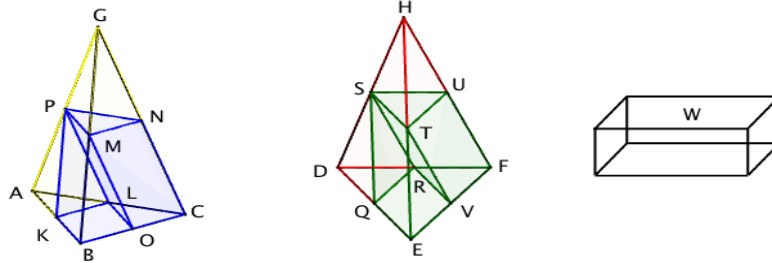
För beviset av propositionen 3.4 använder Euklides uttömningsmetoden på ett liknande sätt som areaförhållandet av cirklar. Euklides väljer en kropp W för att skapa tre möjliga antagaden, där två av dem visar sig vara en motsägelse. Eftersom det bara pratas om volym och area, så används i fortsättningen inte v för volym och a för area.

1. $ABCG : W = ABC : DEF$ då $W < DEFH$
2. $ABCG : W = ABC : DEF$ då $W > DEFH$
3. $ABCG : W = ABC : DEF$ då $W = DEFH$

Bevis. Antag en motsats till påståendet, alltså fall (1). Tag volymen av en kropp W sådant att $W < DEFH$, det ger

$$ABCG : W = ABC : DEF$$

¹⁶Heiberg, 2007 s.480 Proposition XII.5



Figur 15: Propostion 3.4

Nu uppdelas $DEFH$ precis som i 3.3, i prismor och pyramider. Då vet man att prismornas volym är mer än hälften av hela $DEFH$:s volym. Dessutom eftersom $DEGH > W$, så kan man göra uppdelningen tillräckligt många gånger. Låt pr står för volymen av en prisma. Således:

$$pr(DEFH) > W$$

. Man upprepar samma uppdelning för pyramiden $ABCG$, och enligt 3.3 fås

$$pr(ABCG) : pr(DEFH) = ABC : DEF$$

eller

$$pr(ABCG) : W > ABC : DEF$$

ty $pr(DEFH) > W$ men

$$ABCG > pr(ABC)$$

så detta ger att

$$ABCG : W > ABC : DEF$$

vilket motsäger det ursprungliga antagandet

$$ABCG : W = ABC : DEF$$

I sitt bevis upprepar Euklides metoden ovan fast med antagandet att kroppen $W > DEGF$, vilket också leder till en motsägelse. Slutsatsen blir då att eftersom kroppen W varken kan vara större eller mindre än $DEFH$ så måste de vara lika, alltså

$$ABCG : DEFH = ABC : DEF$$

□

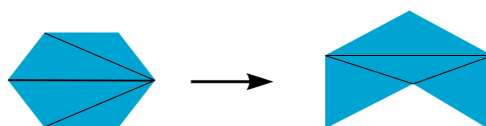
4 Slutsats

4.1 Hilberts tredje problem och Max Dehn

Genom åren har uttömningsmetoden och Euklides proposition XII.5 lett till stora diskussioner. Ty man såg en kontrast till William-Bolyai-Gerwiens sats, där två figurer i plan av lika area är ekvivalenta genom dissektion. Denna diskussion ledde David Hilbert till att inkludera denna fråga i ett av de 23 matematiska problemen som Hilbert presenterade på den Internationella Kongressen av Matematiker i Paris 1900.

Newson (1902) skriver om denna Kongress och bland annat om Hilberts tal:

I två brev till Gerling uttrycker Gauss sin ånger om att vissa satser om geometri i rummet är beroende av uttömningsmetoden [...], särskilt Euklides proposition, att de triangulära pyramiderna av samma höjd förhåller sig till varandra som deras baser. Men ett analogt problem har lösts i planet [...] Icke desto mindre, det verkar för mig som att ett bevis för Euklides nämnda proposition är omöjligt, och det är vår uppgift att ge ett strikt bevis på dess omöjlighet. (s.449)



(a) William-Bolyai-Gerwiens sats



(b) Hilberts tredje problem

Det tredje problemet kan formuleras på följande vis: Givet två polyedrar P och Q av lika stor volym, är det alltid möjligt att dissekera P i flertal mindre polyedrar som i sin tur kan göras om till Q ? Det är inte alltid möjligt. Problemet löstes av Max Dehn, som bevisade att svaret generellt är nej.

Särskilt visade Max Dehn att det är omöjligt att dissekera en pyramid i ändliga antal delar som kan pusslas ihop till en kub. Max Dehn uppfann vad man kallar för "Dehninvariant" för att ge en negativ lösning på Hilberts problem. Max Dehn kom fram till att om två polyedrar har samma volym och samma Dehninvariant så är de ekvidekomposabla. Men eftersom en kub har Dehninvariant noll och en tetraeder har Dehninvariant skilt från noll så är de icke ekvidekomposabla, det vill säga en pyramid kan inte dissekeras och göras om till en kub. På 1950-talet uppnådde flera matematiker ett antal intressanta resultat om ekvidekomposabla figurer, bland annat schweizaren Hadwiger och hans elever (Benko, 2007). Men Raoul Bricard formulerade redan 1896 en lösning till Hilberts problem innan kongressen i Paris, men som inte fick stor uppmärksamhet på flera år eftersom den ansågs vara felaktig (Aigner, 2010). Bricards lösning är vad man kallar för Bricards villkor och lyder på följande sätt:

Proposition 4.1. *Om två polyedrar P och Q med dihedrala vinklar $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, respektive $\beta_1, \dots, \beta_n$, är ekvidekomposabla, då existerar ett positiv heltal m_i ($i=1, \dots, s$) och n_j ($j=1, \dots, r$) sådant att*

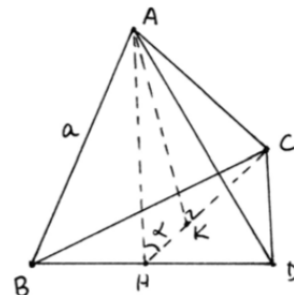
$$m_i \alpha_1 + \dots + m_s \alpha_s = n_1 \beta_1 + \dots + n_r \beta_r + p\pi$$

där p är ett heltal¹⁷.

En diedral vinkel är vinkeln mellan två skärande plan, till exempel i en kub är alla vinklar dihedrala $\frac{\pi}{2}$. I Bricards villkor antas motsägelsen att en tetraeder med diedral vinkel α är ekvidekomposabel med en kub.

Exempel¹⁸ Låt P vara en regelbunden tetraeder, det innebär att den utgörs av fyra liksidiga trianglar, och låt a vara dess kant. P har sex kanter med längd a , där alla har samma dihedrala vinkel α .

Man kan räkna ut α genom att dra höjden av två ytor. Enligt bilden får man AHC där $AC = a$ och $AH = HC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (höjden av en liksidig triangel). Mittpunkten K av



Figur 17

¹⁷Benko, 2007 s.665

¹⁸Detta exempel samt figur 17 är hämtad i Hartshorne (2013, s.234)

bastriangel BCD är ekvidistant från A, B, C . Då är K medianen av ABC $\frac{1}{3}HC$. Då konkluderas att

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

Då fås enligt proposition 4.1

$$m_1 \arccos \frac{1}{3} = n_1 \frac{\pi}{2} + p\pi$$

för de positiva heltal m_1, n_1 , och för ett heltal p . En omskrivning ger

$$\frac{2}{3\pi} \arccos \frac{1}{3} = \frac{n_1 + p}{m_1}$$

Men det motsäger faktumet att vänsterledet är irrationellt. Att vänsterledet ger ett irrationellt uttryck är inte så trivialt men man kan visa det. Till exempel Martin Aigner (2010), i åttonde kapitlet i boken *Proofs from the Book*, härleder en del påståenden om irrationella uttryck, bland annat för $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ (då n är ett ojämnt heltal är ≥ 3). Därför löser Bricards vilkor omedelbart Hilberts tredje problem (Benko, 2007).

Referenser

- [1] Aigner, M., Ziegler, G. M., Quarteroni, A. (2010). Proofs from the Book (Vol. 274). Berlin: Springer.
- [2] Benko, D. (2007). A new approach to Hilbert's third problem. American Mathematical Monthly, 114(8), 665-676.
- [3] DeSouza, C. (2012). The Greek Method of Exhaustion: Leading the Way to Modern Integration. (Electronic Thesis or Dissertation). Retrieved from <https://etd.ohiolink.edu/>
- [4] Gardner, R. (1985). A Problem of Salles on Equidecomposable Convex Bodies. Proceedings of the American Mathematical Society, 94(2), 329-332. doi:10.2307/2045399
- [5] Haesen, S., Verstraelen, L. (2016). Topics in Modern Differential Geometry. Atlantis Press.
- [6] Hartshorne, R. (2013). Geometry: Euclid and beyond. Springer Science Business Media.
- [7] Heiberg, J. L. (2007). Euclid's Elements. Lulu. com.
- [8] Katz, V. J. (2013). A History of Mathematics: Pearson New International Edition. Pearson Higher Ed.
- [9] Kline, M. (1990). Mathematical Thought From Ancient to Modern Times: Volume 1 (Vol. 1)
- [10] Mehrpooyan, Y. (2015). Areabegreppet från Euklides till Hilbert.
- [11] Newson, M. W. (1902). Mathematical problems: Lecture delivered before the international congress of mathematicians at Paris in 1900 by Professor David Hilbert. Bulletin of the American Mathematical Society, 8, 437-479.
- [12] Salehyan, P., Dias, R. (2015). Congruência por Corte e Terceiro Problema de Hilbert. Ciência e Natura, 37(3).