



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Projektiv Geometri

av

Jimmy Kjellström

2018 - No K9

Projektiv Geometri

Jimmy Kjellström

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2018

Innehållsförteckning

Inledning.....	2
Centralprojektion.....	2
Egenskaper vid projektion.....	4
Projektion av parallella linjer.....	5
Praktisk användning av parallella linjer.....	9
Projektiv geometri inom konsten.....	10
Desargues sats.....	13
Projektioner på oändligheten.....	14
Projektion av parallella linjer på oändligheten.....	16
Desargues sats i planet.....	17
Pappos sats.....	19
Referenslista.....	23

Inledning

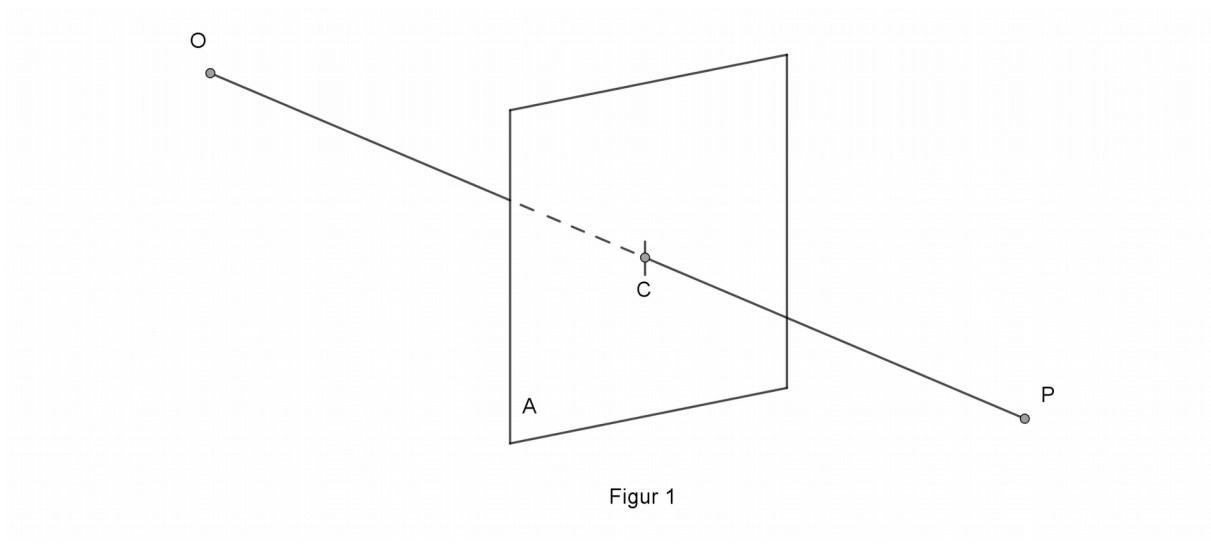
Att försöka avbilda verkligheten på en två-dimensionell yta har vi människor gjort sedan urminnes tider. Man har funnit målningar på väggar i stenåldersgrottor så långt som 17 000 år tillbaka (Lascaux i Frankrike). Men att måla eller teckna perspektiviskt rätt har inte alltid varit lätt och det var först under renässansen (1400-1600-talet) man kom till insikt om hur man skulle måla perspektiviskt riktigt. Dock har konsten eller konstnären inte alltid haft för avsikt att avbilda verkligheten perspektiviskt rätt, ibland har konsten tjänat andra syften. Exempelvis använde man sig av värdeperspektivet i det gamla Egypten där betydelsefulla personer, t.ex. faraoner, avbildades i en mycket större skala i jämförelse med andra, mindre viktiga personer, oavsett var på bilden de befann sig djupmässigt. Lite närmare vår tid försökte man få fram djupdimensionen i den västeuropeiska konsten under medeltiden (400-1400-talet). Man använde sig då av spelkortsperspektivet som innebär att föremålen på bilden delvis skymmer varandra för att betraktaren skall förstå vilka föremål som ligger nära och vilka som befinner sig längre bort.

Arkitekten Filippo Brunelleschi (1377-1446) var verksam i Florens och brukar tillskrivas upptäckten av perspektivet. Några av hans mest berömda byggnadsverk finns i Florens, därav b.l.a. katedralen Santa Maria del Fiori. Men själva teorin för perspektivisk avbildning beskrevs dock först i boken *Della pittura* av konstteoretikern Leon Battista Alberti (1404-1472) utgiven år 1435, som också var verksam Florens. Bara för att nämna några berömda tidiga perspektivmålare: Masaccio (1401-28), Rafael (1483-1520), Albrecht Dürer (1471-1528) och Leonardo da Vinci (1452-1519). En av de mest berömda perspektivmålningarna är da Vincis *Nattvarden* i klostret Santa Maria delle Grazie i Milano. Men nu ska vi dyka in i den matematiska teorin bakom perspektivmåleriet.

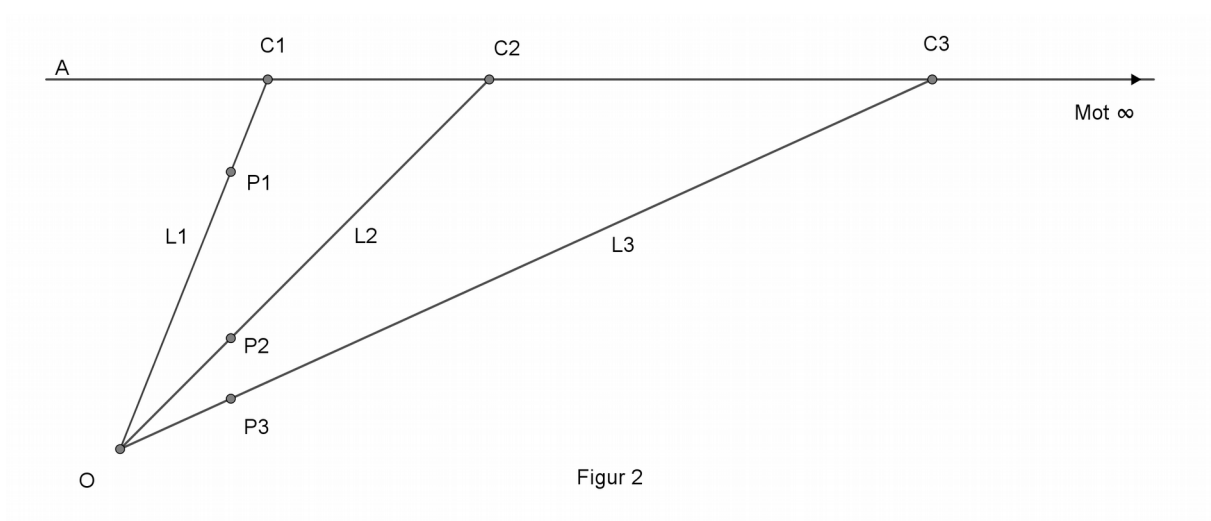
Vi har alltså följande problem: Hur ska vi avbilda en tredimensionell värld på en tvådimensionell yta, duken, så att bilden ser ”verklig” ut och verkar ha en djupdimension? Genom vår empiriska kunskap vet vi att saker ser mindre ut på avstånd och att parallella linjer, exempelvis två vägrenar, tycks närma sig varandra ju längre bort de kommer för att till slut gå ihop vid horisonten. Hur skall vi avbilda detta på en plan yta? Att avbilda en tredimensionell värld på en tvådimensionell yta är ett exempel på det som inom matematiken kallas för *projektion* där vi kommer titta på en typ av projektion, nämligen centralprojektion som är grunden för projektiv geometri.

Centralprojektion

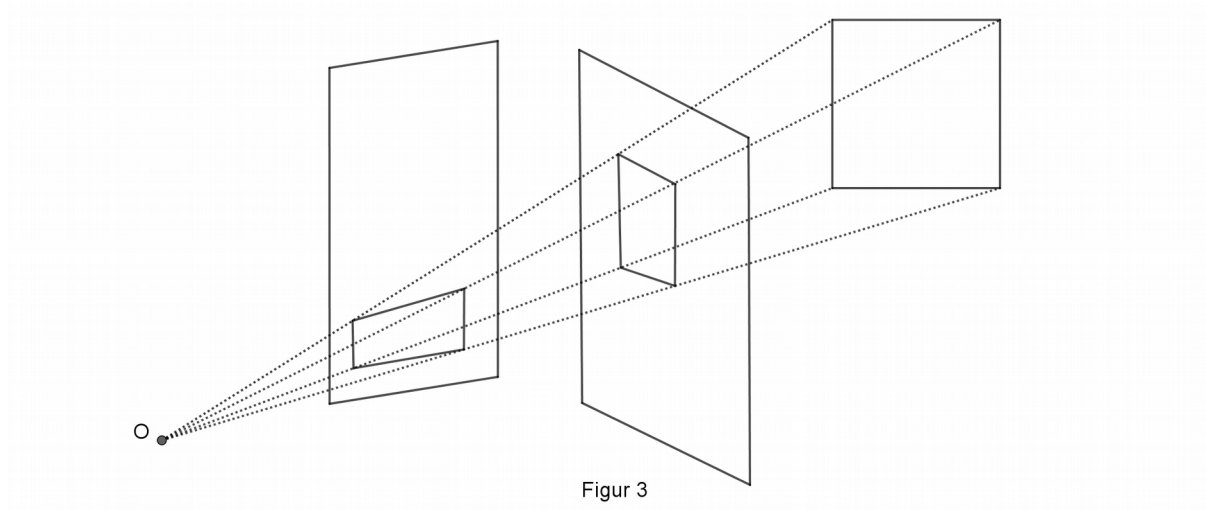
Därmed skall vi nu börja med att definiera vad centralprojektion på ett plan A är, med avseende på en punkt O . Vi tänker oss förstås att A är duken och O ögat. Sedan låter vi P vara en punkt i rummet och förenar O och P med en linje (se figur 1).



Linjen skär planet A i en ny punkt C och då kallas punkten C för *centralprojektion* av punkten P på planet A, med avseende på punkten O. Det kan hända att linjen genom O och P inte skär planet och man säger då att P inte kan projiceras på planet med avseende på O. Vi kommer att behandla denna typ av projektion senare i uppsatsen men lite kort så innebär det att planet och linjen är parallella och inom matematiken säger man då att punkten P projiceras på oändligheten. Detta är en viktig egenskap och det kan vara bra att redan nu få en uppfattning om vad det innebär. I figuren nedan ser vi hur projektionen av de tre punkterna P_1 , P_2 och P_3 kommer allt längre och längre bort. Observera att det inte spelar någon roll om punkterna ligger på samma sida om projektionsplanet som O eller på andra sidan. Linjen som förenar O och P blir densamma.



Vi inför lite notation och kallar planet A för *projektionsplan* och punkten O för *projektionscentrum*. Vid centralprojektion av ett föremål, exempelvis en linje, projiceras varje punkt i föremålet på planet, vilket vi kommer se senare i figur 5. Projektionen beror på både O och A (se figur 3).

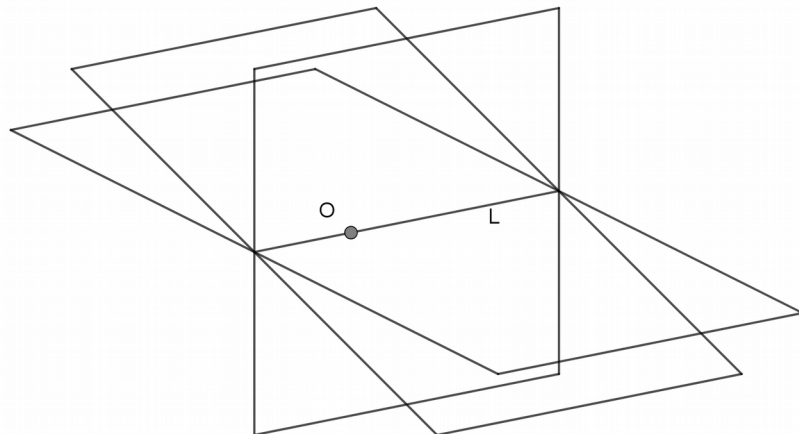


Figur 3

Egenskaper vid projektion

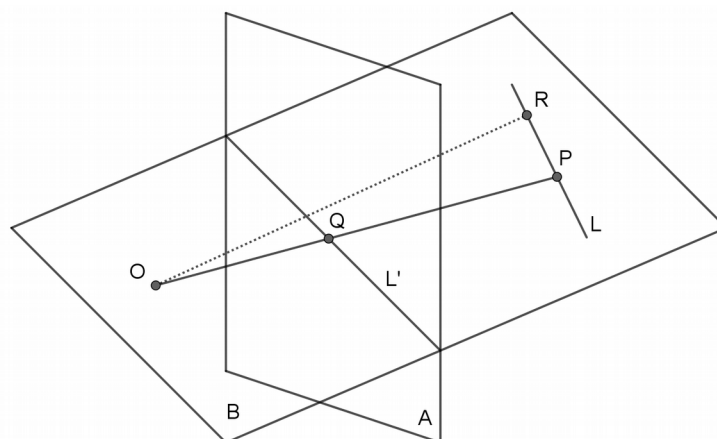
Projektionen av en linje är antingen en linje eller en punkt. Detta är en viktig egenskap hos centralprojektion och vi tar oss en titt på denna egenskap i de båda fallen. Händelsen att en linje projiceras på en punkt sker då linjen går genom O och är väldigt enkelt att uppfatta. Håll i ena änden av en penna med fingertopparna, vår tänkta linje, och låt den hänga lodrät mot ett bord. Håll nu ett sudd under bordet rakt nedanför pennan och låt suddet representera punkten O . Vi projicerar nu vår tänkta linje, d.v.s. pennan, med projektionscentrum i O och låter bordet vara vårt projektionsplan. Vi ser då hur vår linje projiceras som en punkt på bordet. Lägg märke till att om vi flyttar suddet vågrätt till vänster eller höger och låter pennan och bordet vara som innan kommer centralprojektion av pennan inte längre bli en punkt. Vi antar att linjen inte går genom projektionscentrumet O som den gjorde med pennan och suddet. Vi döper linjen till L och låter den ligga i ett plan B som även innehåller projektionscentrum O . Det finns bara ett sådant plan som innehåller O och L när L inte går genom O . Detta på grund av att O inte ligger på linjen. Skulle O däremot ligga på linjen finns det oändligt många plan som innehåller dem. I figur 4 ser vi tre sådana plan där O ligger på linjen L . Vi har alltså två

scenarion där O antingen ligger på L eller inte.



Figur 4

För att återgå till egenskapen att projektionen av en linje är en linje låter vi A vara vårt projektionsplan som tidigare. A och B skär varandra längs en viss linje som vi kallar L' . Nu tar vi en punkt på L och kallar den punkten för P. Linjen som förenar O och P skär planet A i en punkt som vi kallar Q (kom ihåg att detta var möjligt eftersom A inte var parallellt med L). Punkten Q ligger således i plan A. Men den ligger ju även i plan B eftersom den ligger på L som ligger i B. Alltså ligger punkten Q på skärningslinjen L' mellan A och B. Kom nu ihåg att vid centralprojektion av en linje projiceras varje punkt i linjen. Vi kan därmed föra samma resonemang för alla punkter och förena dessa med O (exempelvis den streckade linjen mellan O och R). Vi får då att projektionen av alla punkter på linjen L, och därmed hela linjen L, är precis skärningslinjen L' mellan A och B.



Figur 5

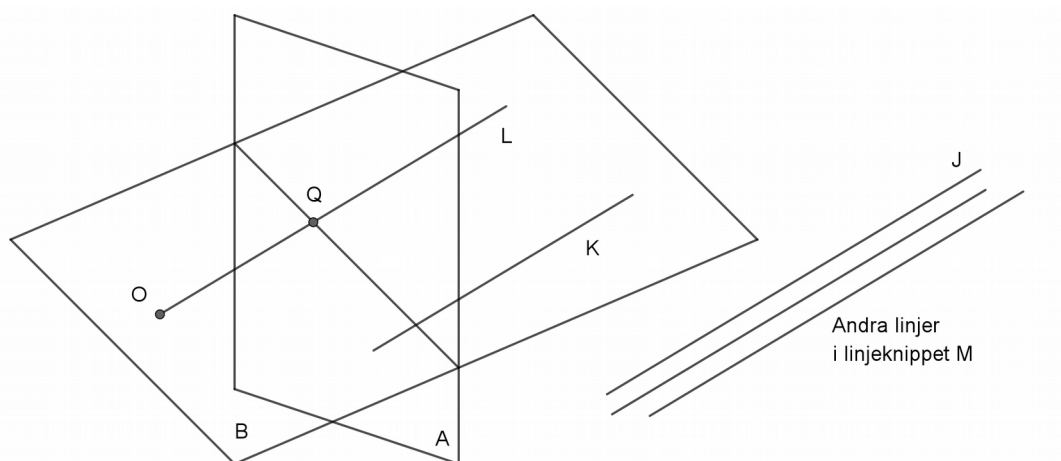
Vi har nu sett att en linje antingen projiceras till en linje eller till en punkt och att denna egenskap bevaras under centralprojektion. Det finns däremot inte många andra geometriska egenskaper som bevaras, exempelvis vinklar och avstånd; projektionen av en kvadrat måste

inte nödvändigtvis projiceras till en kvadrat (se figur 3). Om däremot två linjer skär varandra så kommer även deras projektioner att skära varandra, så *skärningar* mellan linjer bevaras. Denna egenskap är nästintill banal, men kommer visa sig viktig längre fram. Vi tar oss nu en titt på hur parallella linjer projiceras.

Projektion av parallella linjer

Vi börjar med att införa ytterligare en notation och kommer härnäst att kalla en mängd parallella linjer för ett *linjeknippe*. Vi låter M vara ett linjeknippe och L vara en linje som både går genom projektiionscentrum O och är parallell med vårt linjeknippe M . Vi antar att linjerna i M inte är parallella med projektiionsplanet A , ty vore det så skulle projektionen av linjerna också vara parallella. Vi tittar på linjen L som går genom O , vad kan vi säga om den? Jo vi vet att L skär planet A i en punkt Q för det har vi sett tidigare. Nu gäller att *projektionen av alla linjerna i M går genom punkten Q* . Hur kommer det sig? Jo, låt nämligen K vara en linje i M som inte går genom O . Vi ska då visa att projektionen av linjen K på planet A går genom punkten Q . Kan vi visa detta kan vi föra samma resonemang för övriga linjer i linjeknippet M och därmed visa att projektionen av alla linjer i M går genom Q .

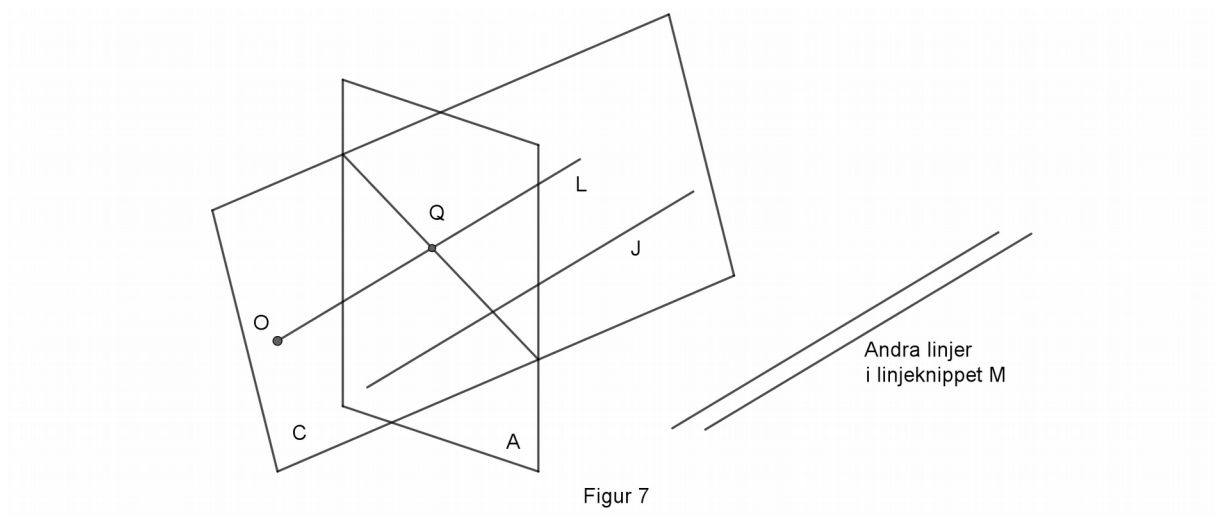
Vi döper planet som innehåller både K och O till B . Betrakta detta plan som ett hjälpplan som vi använder för att kunna förstå projektionen av K . Om vi projicerar K på A kommer projektionen att bli skärningslinjen mellan dessa två plan, enligt vad vi så i ett av styckena ovanför (kom ihåg figur 5). Eftersom K och L är parallella vet vi att planet B är parallellt med L och innehåller O . Men eftersom L går ju genom O måste även L ligga i B . Punkten Q , som var centralprojektionen av L på A , ligger således i både plan A och i plan B . Alltså kommer projektionen av K på A bli skärningslinjen mellan A och B . Men på skärningslinjen ligger ju Q . Alltså kommer projektionen av K också att gå genom punkten Q .



Figur 6

Tar vi en annan linje i M , säg linjen J och projicerar den på planet A , kommer vi ta hjälp av ett annat plan C som innehåller linjen J och projektiionscentrum O och upprepa resonemanget (se figur 7). Vi kommer se att projektionen av J på A blir skärningslinjen mellan de båda planen A

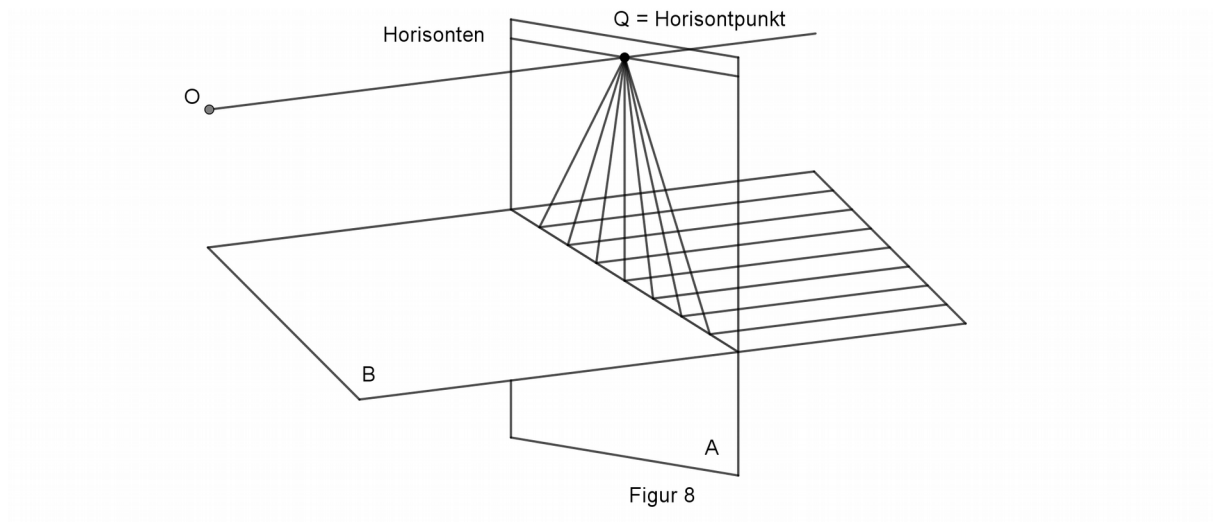
och C och att linjen L, som var parallell med planet C och innehöll O, också måste ligga i planet C. Alltså ligger punkten Q i både A och C och således kommer projektionen av J på A att innehålla punkten Q.



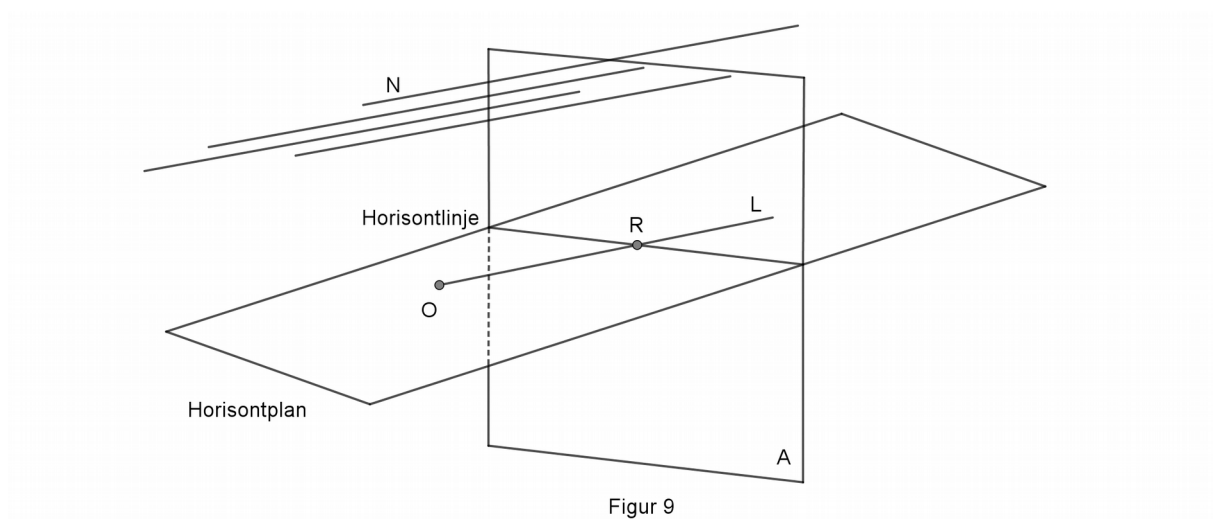
Figur 7

Vi har nu observerat att parallellitet inte bevaras vid centralprojektion (förutom i de fall då linjeknippet vi ska projicera är parallell med vårt projektionsplan). Hädanefter kommer punkten Q att kallas *gränspunkten* för linjerna i M. Om vi minns tillbaka till inledningen så läste vi om ett första exempel på projektion av parallella linjer, nämligen avbildningen av två väggrenar. Väggrenarna motsvaras av linjeknippet M och gränspunkten är den punkt där väggrenarna tycks smälta samman i horisonten.

Nu ska vi tänka oss ett annat scenario, nämligen att de parallella linjerna i M faller in vinkelrätt mot projektionsplanet A. Projektionen av dem går alla genom gränspunkten Q (se figur 8) som i detta fall kallas för *horisontpunkt*. I fallet då man t.ex. avbildar väggrenar ligger alla linjerna i M (väggrenarna) i ett och samma plan B, (markplanet). Vi kan nu dra en linje i projektionsplanet A som går genom Q och är parallell med markplanet B. Denna linje kallas för *horisonten*. Parallella linjer som faller in vinkelrätt mot horisonten ser med andra ord ut att komma från en enda punkt på horisonten, precis som när vi tittar ut över en plogad åker eller en mycket lång och rak väg.



Det finns emellertid andra linjeknippen som har sina gränspunkter på horisonten. Vi utgår ifrån figur 8 och betraktar det plan som innehåller horisonten och är vinkelrät mot projektionsplanet A. Vi kallar det för horisontplanet och låter N vara ett linjeknippe vars linjer är parallella med detta horisontplan. Det betyder inte nödvändigtvis att linjerna i N ligger i horisontplanet. I vårt kommande resonemang tänker vi oss att linjeknippet ligger ovanför horisontplanet (se figur 9). Eftersom projektionscentrum O ligger i horisontplanet, så ligger den linje L som går genom O och är parallell med linjerna i N också i horisontplanet. Nu följer att gränspunkten R för linjeknippet N ligger på horisontlinjen vid projektion enligt det vi sa om parallella linjer. Skulle vi projiceras en linje i N på A skulle den bli skärningslinjen mellan A och det hjälpplan som denna linje ligger i (kom ihåg figur 6 och 7). På samma sätt blir det om vi skulle projicera en annan linje i N , projektionen av den linjen blir skärningslinjen mellan A och ett hjälpplan. Således kommer projektionen av alla linjer i N att gå genom gränspunkten R .

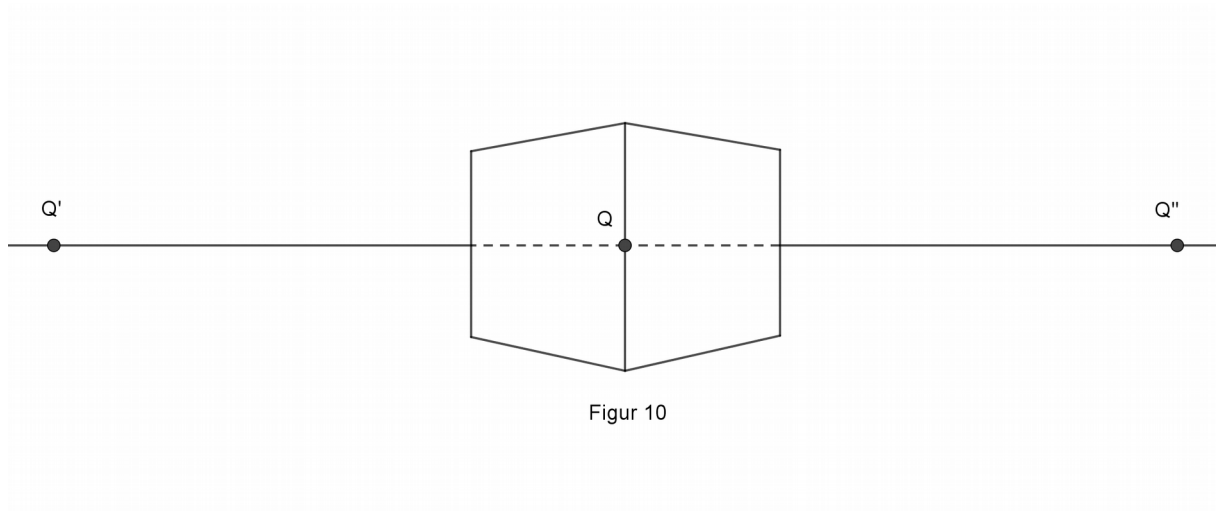


Vi kan tänka samma sak fast omvänt. Om R' är en punkt på horisontlinjen och K en linje genom O och R' så ligger K i horisontplanet och därmed har ett linjeknippe som är parallellt

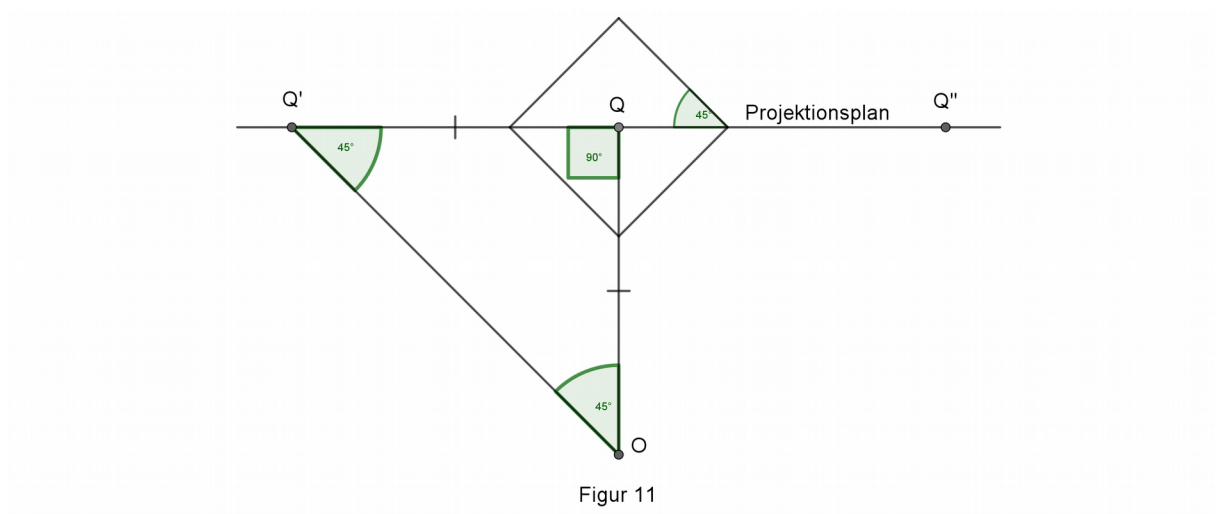
med K punkten R' som sin gränspunkt, eftersom linjeknipet även är parallellt med horisontplanet och vi kan således upprepa resonemanget som i figur 6 och 7.

Praktisk användning av parallella linjer

Med detta kan vi nu visa hur man avbildar ett hus som vi betraktar från ett hörn som i figur 10.

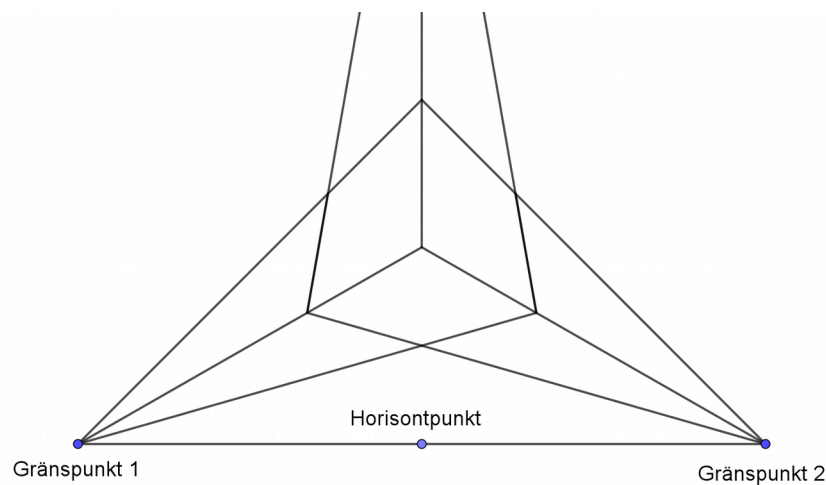


Horisontplanet är parallellt med markplanet där avståndet mellan de olika planen är lika med ögats, d.v.s. O:s, höjd över marken. Linjerna som ligger parallella med varandra i golvet och taket kan vi betrakta som ett linjeknippe M. Dessa linjer ligger till vänster i figur 10. Medan linjerna som ligger parallella med varandra till höger i figur 10 kan vi betrakta som ett linjeknippe N. Vi vet sedan tidigare att projektionen av dessa två linjeknippen kommer få varsin gränspunkt, Q' och Q'' som båda ligger på horisonten. Nu kan vi ställa oss frågan hur långt bort från horisontpunkten Q de ligger. Vi betraktar figur 11 nedan.



Om vi antar att vi, d.v.s. O:s placering, står så att husväggen bildar vinkeln 45° med projektionsplanet, så är vinkeln $\angle OQ'Q$ också 45° . Detta följer ur resonemanget om projektion av parallella linjer. För att hitta gränspunkterna vid projektion av linjeknippena för husväggen till höger och till vänster på huset behöver vi dra en linje genom O som är parallell med respektive knippe för att finna deras gränspunkter. I figuren motsvarar detta linjen OQ' , men samma resonemang gäller även för linjen OQ'' . Eftersom väggen bildar vinkeln 45° gentemot projektionsplanet följer det att linjen OQ' också bildar vinkeln 45° mot projektionsplanet, ty den var ju parallell med väggen. Eftersom vi står så att $\angle OQQ'$ är rät så är $\triangle OQQ'$ en likbent, rätvinklig triangel. Därmed är kateterna OQ och QQ' lika långa. Alltså är avståndet mellan horisontpunkten Q och gränspunkterna Q' lika med avståndet mellan ögat O och horisontpunkten Q. På samma sätt kan vi få att avståndet mellan O och Q är lika långt som avståndet mellan Q och Q'' . Det vi har tittat på nu är ett exempel på ett perspektiv som kallas för tvåpunktperspektivet. Vi fördjupar oss lite och tittar på ett exempel som kallas för trepunktperspektivet.

Vi betraktar figur 12 som är en kub som svävar ovanför horisontplanet och tänker oss att vi ska avbilda den. Vi vet att två av de tre linjeknippen som bestäms av kubens kanter har gränspunkter på horisonten. Medan det tredje knippet bestäms av de vertikala sidorna i kuben och har en gränspunkt som ligger ovanför kuben. Detta perspektiv kallas även grodperspektivet och används ofta inom film på olika sätt. Motsatsen till grodperspektivet är fågelperspektivet (då tittar man alltså ner på det man vill avbilda).

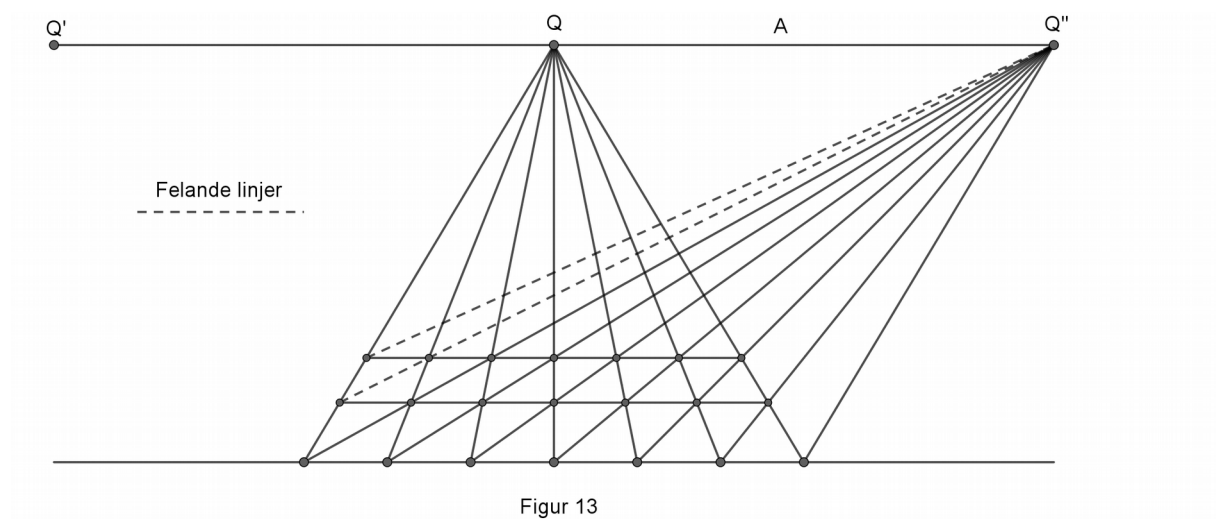


Figur 12

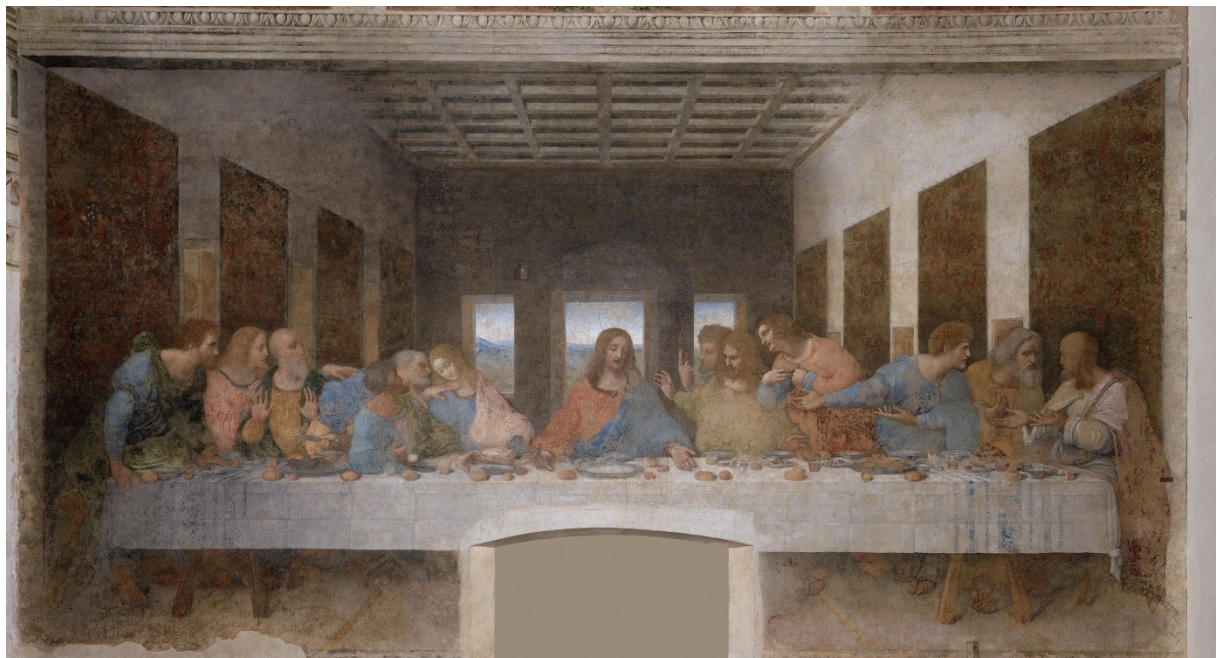
Projektiv geometri inom konsten

Ett av de större problemen som man känner till inom renässansens perspektivmåleri är hur man ska avbilda ett rutigt golv. Detta problem ligger nära till hands med problemet att avbilda ett hus som vi löste tidigare. Vi tänker oss att de kvadratiska rutorna ligger så att ena sidan är parallell gentemot projektionsplanet A och den andra sidan är vinkelrät mot den. De sidor som är vinkelräta gentemot A vet vi hur de avbildas vid det här laget, alla linjer projiceras till punkten Q (figur 8). Men hur tätt ska sidorna som ligger parallellt med planet ligga?

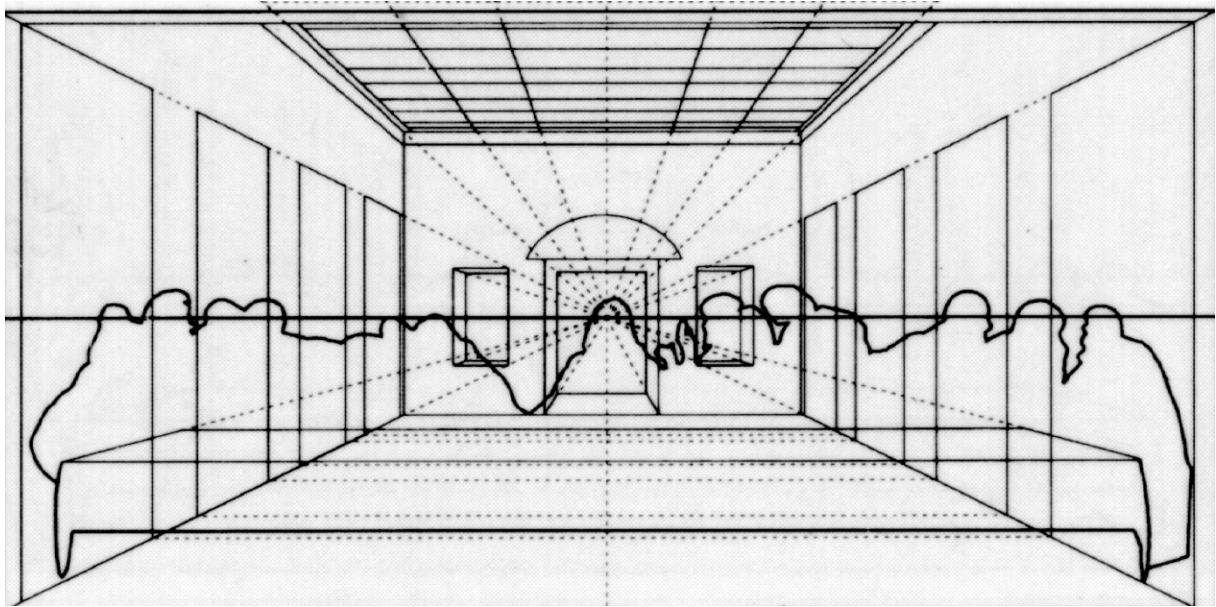
Lösningen på problemet blir följande: Diagonalerna i det kvadratiska rutmönstret bildar nämligen vinkeln 45° gentemot planet A och var diagonalernas linjeknippen (som är två stycken) har sina gränspunkter vet vi enligt utredningen vi gjorde innan. Dessutom vet vi avståndet mellan de två gränspunkterna och horisontpunkten, som ju var avståndet mellan ögat O och horisontpunkten Q. När man har ritat in diagonalerna kan man enkelt komplettera med de felande linjerna.



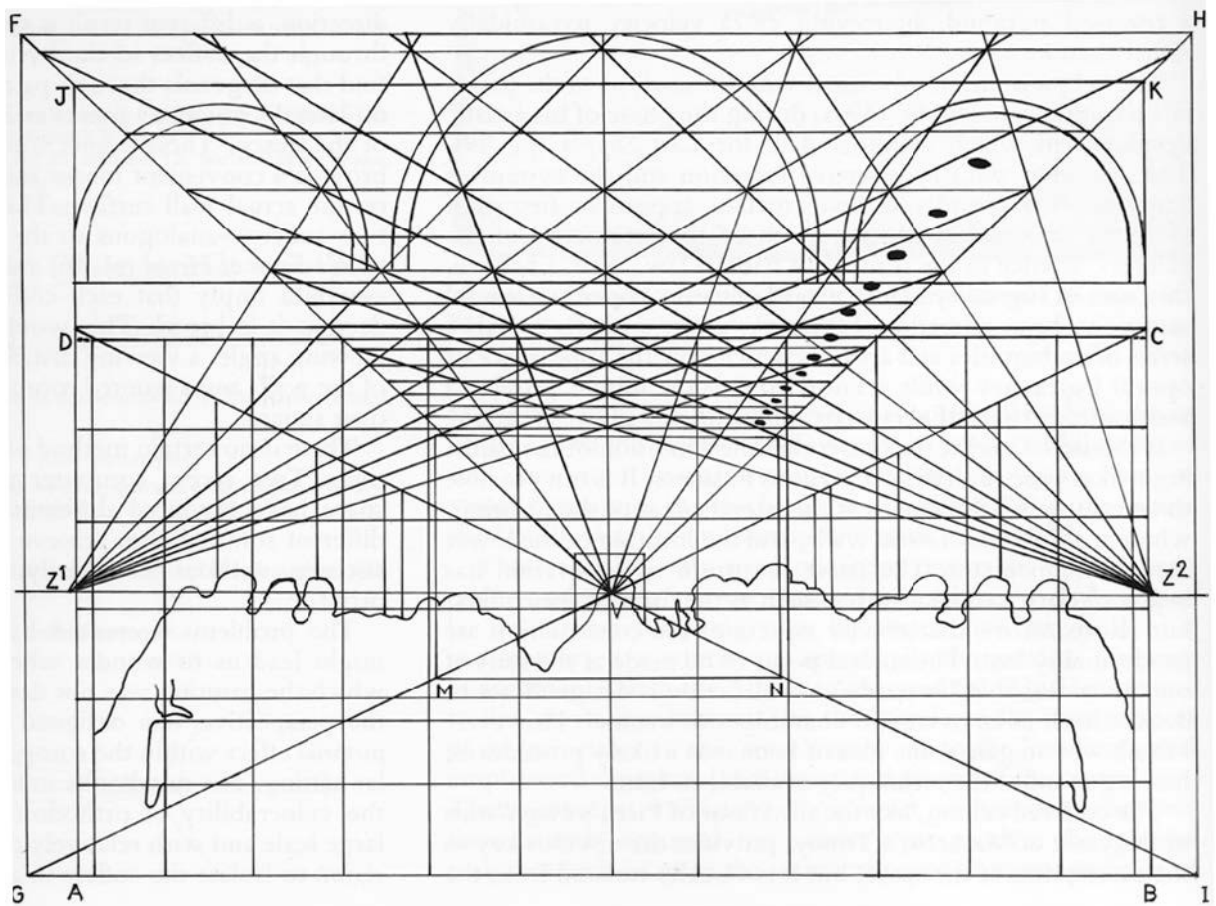
I många renässansmålningar kan man se rutiga golv, tak eller väggar. Vi ska titta på ett exempel och undersöka de olika linjerna, var deras horisontpunkt respektive gränspunkt är. Låt oss titta på Leonardo da Vincis målning, *Nattvarden* från 1495-98.



Vi ser att horisontpunkten är någonstans i mitten vid Jesus huvud för alla linjer i bilden går mot mitten. Om vi ignorerar människorna och förenklar bilden lite får vi följande bild där horisontlinjen syns allt tydligare.



Utifrån horisontlinjen och det rutiga takmönstret ser vi hur de felande linjerna alla sammanstrålar i varsin punkt till höger och vänster om horisontpunkten.



Perspektivets upptäckt har inte bara ett konsthistoriskt intresse, även om det emellertid är spännande att betrakta olika konstverk och se dem i alla dess olika perspektiv. Minns vi

tillbaka till början började vi att definiera vad centralprojektion är och vi så att centralprojektion är grunden för den *projektiva geometrin*. Detta är en viktig gren inom matematiken som uppstod under 15–1600-talet. För att särskilja den euklidiska geometrin och den projektiva geometrin kan man säga att man intresserar sig för egenskaper som att ”ligga på rät linje” och ”skära varandra” inom projektiv geometri istället för likformighet och kongruens som man intresserar sig av inom den euklidiska geometrin.

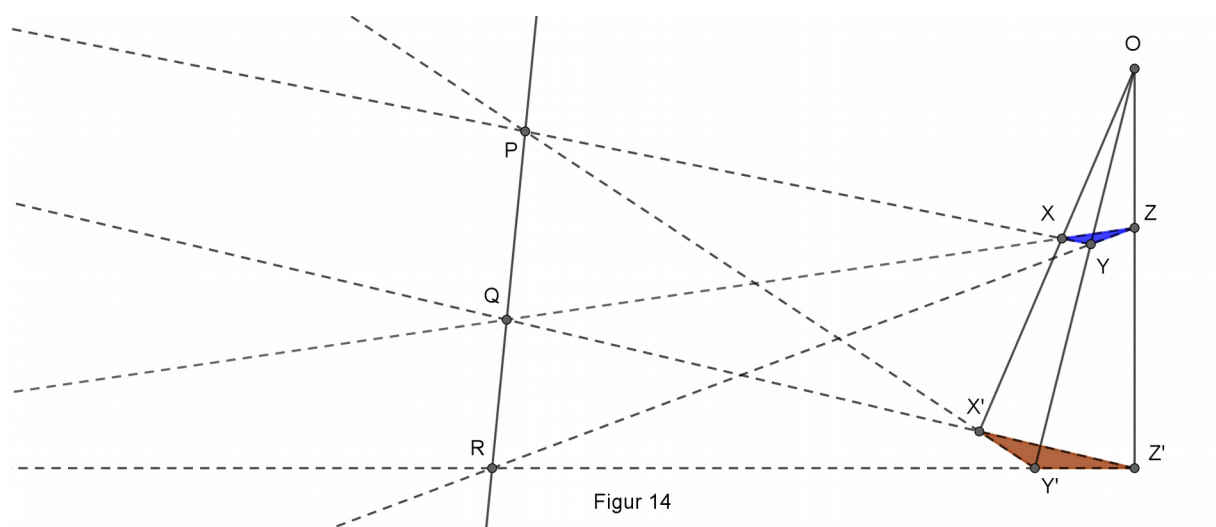
Vi ska nu gå vidare och introducera några intressanta satser och bevis inom projektiv geometri. Dessa satser kan ses som ett avstamp till den projektiva geometrin och de är vanliga att introducera när man börjar tala om projektiv geometri. Grunden till dessa satser bygger på centralprojektion och grundar sig mycket i det vi redan gått igenom.

Men innan vi går vidare inför vi ytterligare en notation som vi kommer använda oss av härnäst. Vi säger att om vi projicerar en linje eller en punkt, exempelvis linjen L och punkten Q , kallar vi deras avbildning efter projektion för L' respektive Q' . Vi lägger alltså till en apostrof för att förtydliga att det är linjens eller punktens bild efter projektion.

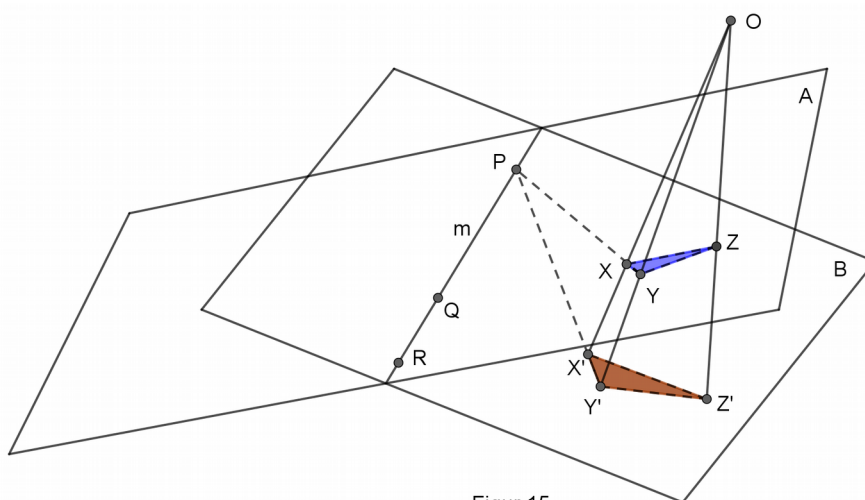
Desargues sats

Den första satsen är uppkallad efter Gérard Desargues (1591-1661) och kallas även Desargues sats och lyder som följer: Med utgångspunkt i O låter vi två trianglar XYZ och $X'Y'Z'$ befinna sig i rummet sådana att trianglarna ligger i perspektiv till varandra. Trianglarna är alltså projektioner av varandra med avseende på projektiionscentrum O . Då gäller att förlängningen av sidan XY och förlängningen av sidan $X'Y'$ skär varandra i en punkt. Detsamma gäller för de andra två förlängda sidorna i båda trianglarna, även de kommer skära varandra i en punkt vardera. Vi kallar de förlängda sidornas skärningspunkter för P , Q och R . Då gäller att P , Q , och R ligger på en och samma linje.

(C. Stanley Ogilvy, 1990).



Beviset är relativt enkelt. De två planen som innehåller varsin triangel kallar vi för A respektive B (se figur 15 nedan). Planen skär varandra längs en linje och vi kallar skärningslinjen mellan planen för m . Punkterna O, X, Y, X', Y' ligger alla i samma plan per definition och vi kallar det planet för C. De två sidorna XY och $X'Y'$ ligger också i plan C och deras förlängningar (linjer) kommer således att skära varandra i en punkt. Enligt bilden ovan motsvarar detta punkten P. Eftersom linjen XY ligger i A och linjen $X'Y'$ ligger i B och planen skär varandra, kommer skärningen mellan dessa linjer att inträffa någonstans på skärningslinjen mellan A och B, d.v.s. på m , ty det är den enda linjen som delas av A och B. Samma resonemang gäller även för de andra två sidorna i de båda trianglarna: alla tre par av sidor skär i m .



Figur 15

Vid konstruktion av dessa trianglar går det att konstruera dem så att plan A och plan B är parallella. Man säger då att de skär varandra vid oändlighetslinjen där oändlighetslinjen motsvarar vår linje m . På samma sätt kan man i vissa konstruktioner få att en av sidorna i ena triangeln är parallell med motsvarande sida i den andra triangeln. Då är de två linjerna som bildas (om man förlänger sidorna) parallella och man säger då att de har sin skärningspunkt på oändlighetslinjen. Men mer om detta längre ner.

Desargues sats gäller inte enbart i det tredimensionella rummet utan håller även i det tvådimensionella planet, men det är något svårare att bevisa. Innan vi går in på beviset behöver vi först definiera vad som händer när en punkt eller en linje projiceras på oändligheten.

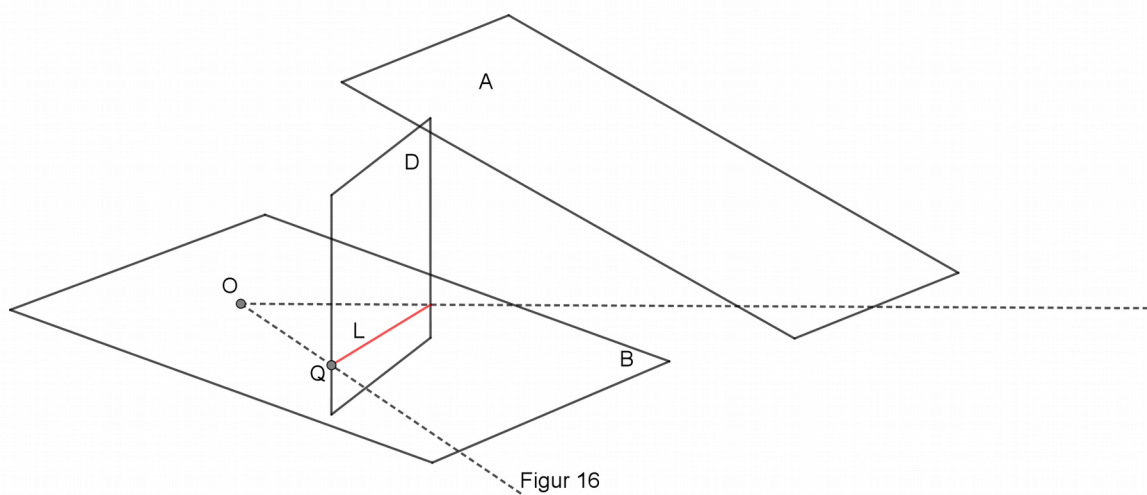
Projektioner på oändligheten

Om vi minns tillbaka till då vi definierade centralprojektion kommer vi kanske ihåg att projektionen av en punkt vars linje var parallell med projektiionsplanet projicerades på oändligheten. Vi är nu framme i den delen av uppsatsen där vi ska definiera vad det innebär. Vi behöver alltså införa en definition som är konsekvent och genomförbar som också kommer

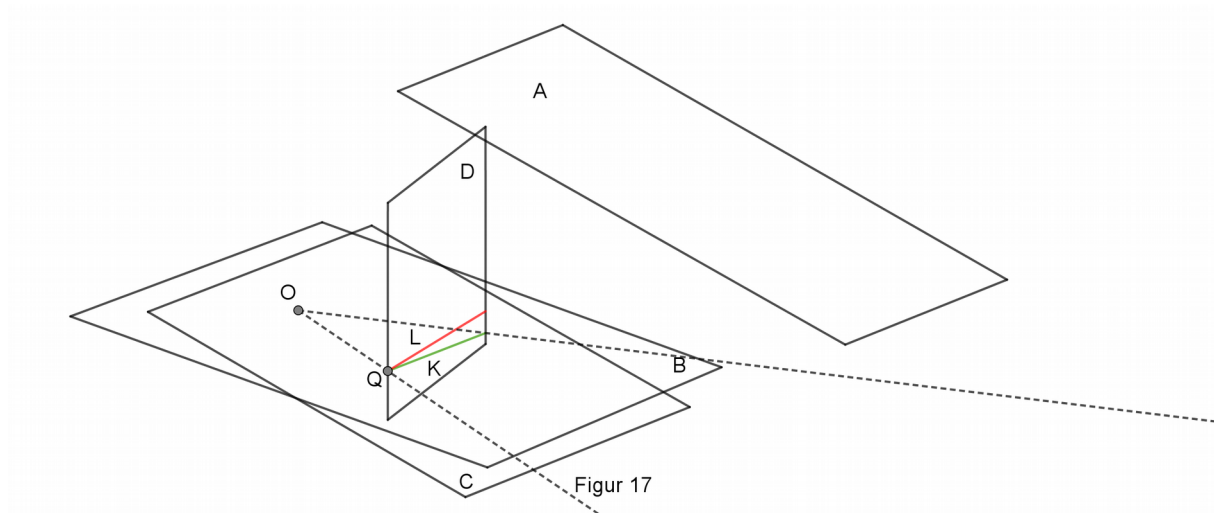
fungera inom geometrin utan att det uppstår motsägelser eller specialfall. Låt oss därmed undersöka vad som händer vid projektion av en linje i rummet.

Vi låter L vara vår linje i rummet och P en punkt på linjen. Vi låter dessutom O ligga på L . Den linje som bestäms av O och P är alltså L själv. Om L skär vårt plan, A , så projiceras P på skärningspunkten som vi kallar Q . Därmed kommer hela L att projiceras på en enda punkt, Q . Detta är vi bekanta med sedan tidigare (se figur 1). Om vi däremot inte har någon skärning mellan L och A har vi scenariot där L och A är parallella som vi pratade om nyss (figur 2). Nu frågar vi oss hur bilden av P blir på A . I vår definition är det att föredra om *varje* punkt projiceras på en punkt. Därför är det gynnsamt att bestämma att projektionen av P blir en ny punkt, oändlighetspunkten ∞ , som inte tillhör A och vi kallar den punkten för projektionen av P .

Vi tittar på några egenskaper. Antag att O inte ligger på L . Låt B vara ett plan som innehåller både O och L . Om A är ett plan som inte är parallellt med B , skär de varandra. Om vi nu projicerar L (röd linje) på A kommer projektionen av L att bli skärningslinjen L' mellan A och B för alla punkter på L förutom en punkt, säg Q . Denna punkt ligger i B . Det som är speciellt med Q är att linjen OQ , till skillnad från alla andra linjer vi kan få genom att förena O med en punkt på L , är att linjen OQ är parallell med A . För att projektionen av L ska bli L' , kompletterar vi L med oändlighetspunkten. Vi kallar projektionen av oändlighetspunkten för den saknade punkten på L' . I bilden nedan kan vi förstå vårt resonemang.



Om vi tittar i figur 17 lägger vi märke till linjen K och planet C . C är ett godtyckligt plan och K en godtycklig linje som ligger i C tillsammans med projektiionscentrum O men också tillsammans med punkten Q . Q ligger således i både B och C . Eftersom både Q och O ligger i C ligger även linjen som vi får om vi förenar O med Q också i C . Men vi sa ju att linjen OQ var parallell med A och det innebär att hela plan C är parallell med A .



Om vi nu skulle projicera linjen K , som är parallell med A , så kompletterar vi A med en hel linje, oändlighetslinjen. Observera att K inte projiceras på A på samma sätt som vi är vana vid eftersom K är parallell med A . I vår definition var det att föredra om varje punkt projicerades på en punkt och på samma sätt är det fördelaktigt att *varje* linje projiceras på en linje och därför kompletterar vi A med en hel linje, oändlighetslinjen, och säger att K projiceras på oändlighetslinjen.

Lägg märke till att det bara finns en linje i D som tillsammans med O bilda ett plan som är parallellt med A som figur 17 visar. Lägg även märke till att det till varje plan hör till en oändlighetslinje och till varje linje en oändlighetspunkt.

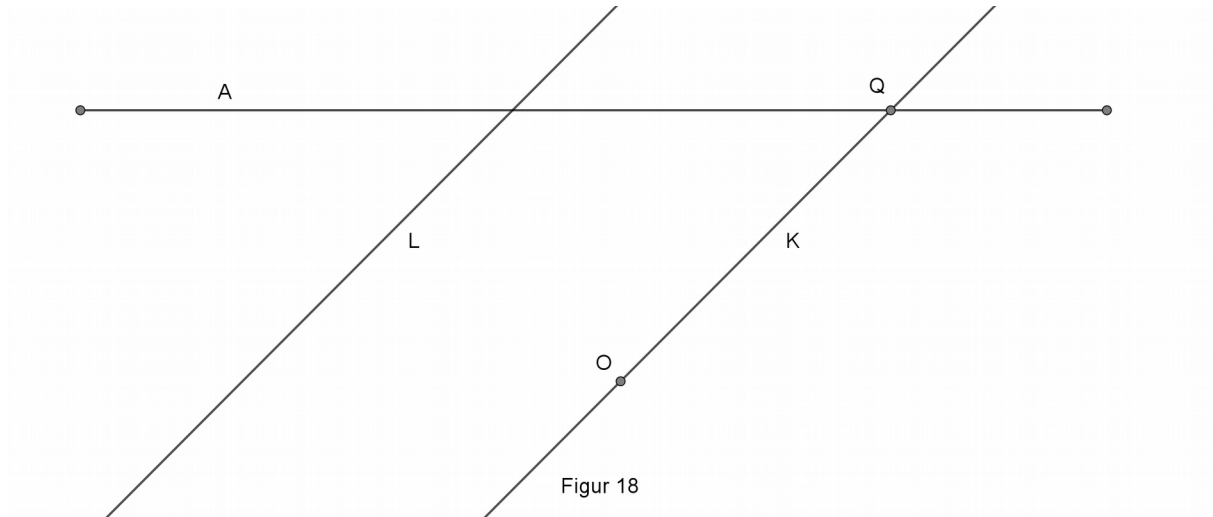
Projektion av parallella linjer på oändligheten

Innan vi kan bevisa att Desargues sats även håller i planet måste vi undersöka vad som händer med parallella linjer vid projektion. Vi har redan gått igenom det här en gång men ska nu komplettera med det vi känner till om oändligheten.

Om vi har två parallella linjer som också är parallella med projekti^onsplanet A projiceras linjerna p^a parallella linjer. Vi kan t^anka oss att vi h^oller upp tv^o pennor som ^or parallella med varandra d^ar dessa pennor ocks^a ^or parallella gentemot v^aggen som motsvarar projekti^onsplanet A. Lyser vi med en ficklampa p^a pennorna kommer deras skuggor p^a v^aggen ocks^a att vara parallella. Vi unders^oker d^a vad som sker om v^ara pennor inte ^or parallella med A. Vi l^amnar pennorna och t^anker oss ist^allet att de motsvarar linjer.

Låt L vara en linje som varken är parallell med A eller går genom O . Vi låter sedan K vara en linje parallell med L som går genom O . Vi vet sedan tidigare att hela linjen K projiceras på en punkt Q i projektionsplanet. Det vi ska visa är att projektionen av L också går genom Q . Vi kallar det plan som innehåller både O och L för B . Eftersom K är parallell med L och dessutom går genom O så ligger K också i B . Punkten Q ligger alltså i både A och B , d.v.s. i skärningen mellan de båda planen A och B . Men skärningen mellan dessa två plan är ju projektionen av L . Alltså går projektionen av L genom punkten Q . Notera att punkten Q

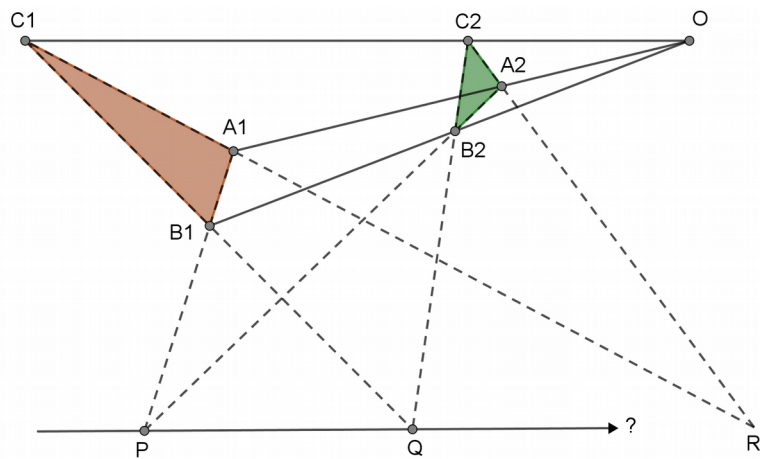
faktiskt inte är projektionen av någon punkt på linjen L utan är projektionen av oändlighetspunkten ∞ som vi gick igenom tidigare. För att kunna påstå att alla linjer som projiceras går genom Q måste vi komplettera linjerna med oändlighetspunkten ∞ som vi gjorde till figur 16.



Desargues sats i planet

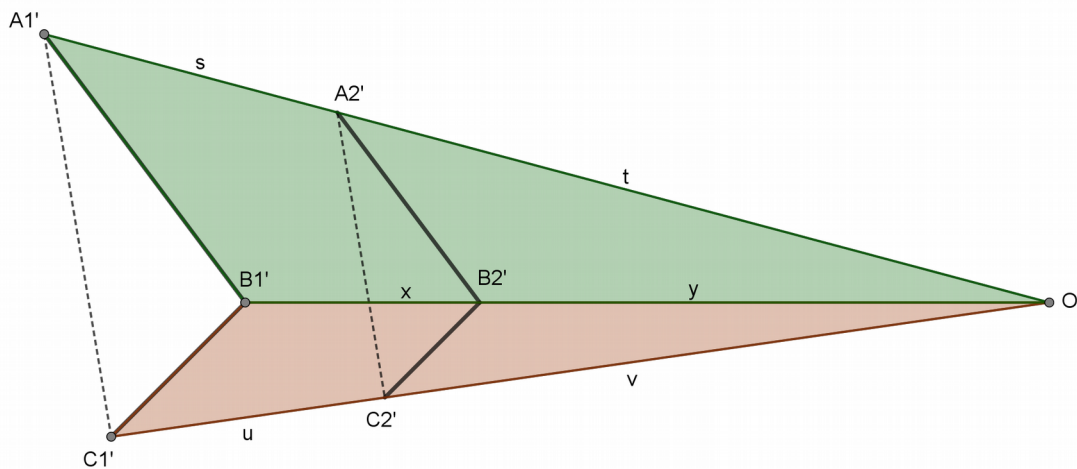
Vi är nu redo att bevisa Desargues sats i planet. Det vi behöver bevisa är att skärningspunkterna, som vi kallar för P, Q och R, ligger på en och samma linje, för det är det som satsen säger. Vi går tillbaka till figur 17 där linjen K projicerades på ∞ och linjen L projicerades på skärningslinjen L'. Att K projicerades på ∞ berodde på att K låg i ett plan som var parallellt med A, vilket inte L gjorde. Men skulle vi flytta O utanför B och välja A parallellt med det plan som innehåller O och L, kan vi projicera L på ∞ precis som vi gjorde med K. Vi kan alltså välja att projicera en önskad linje till ∞ så länge vi väljer en godtycklig punkt O och ett godtyckligt plan A att projicera på.

Tittar vi nu på figur 19 vet vi att alla dess punkter ligger i *ett* plan, inklusive punkten O. Använder vi nu vilket projektionscentrum som helst, som inte ligger i detta plan, kan vi välja en projektion som skickar linjen PQ till ∞ enligt det vi sade nyss. Kan vi dessutom visa att denna projektion också skickar R till ∞ vet vi att deras projektioner, P', Q' och R' också ligger på samma linje (oändlighetslinjen) och därmed vet vi att P, Q och R alla låg på en och samma linje innan projektion.



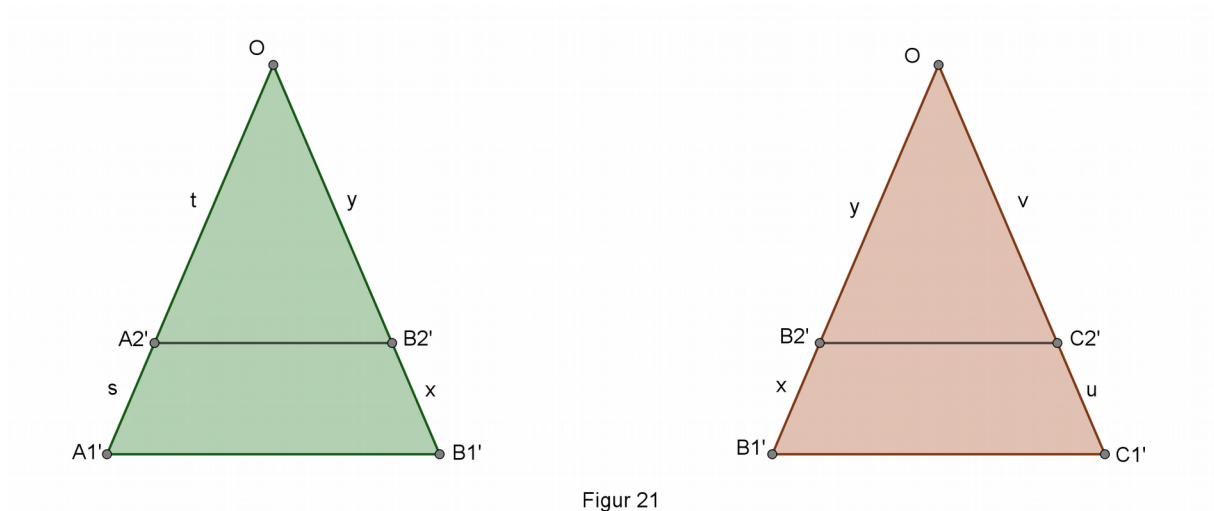
Figur 19

Vi vet att projektionen av P blir P' och att P' ligger på oändlighetslinjen utifrån hur vi har valt vårt projektiionscentrum O. Tidigare i uppsatsen sade vi att skärningar av linjer bevaras under projektionen och det är nu vi ser hur viktigt denna egenskap är. Eftersom skärningen mellan linjer bevaras under projektion måste linjerna $A_1'B_1'$ och $A_2'B_2'$ skära varandra i punkten P' eftersom de skär varandra i punkten P innan projektion. Men det enda sättet för två linjer att skära varandra vid ∞ är om de är parallella som vi såg tidigare i figur 18. Samma sak gäller för $B_1'C_1'$ och $B_2'C_2'$, eftersom de skär varandra i punkten Q' , även de måste vara parallella. Vi konsturerar det vi kommit fram till i figur 20 där vi även ger de olika sidorna beteckningar.



Figur 20

Enligt topptriangelnsatsen får vi nu två trianglar där vi kan utläsa följande



Figur 21

$$\frac{s}{t} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{u}{v}$$

och vi kan dra slutsatsen att

$$\frac{s}{t} = \frac{u}{v}$$

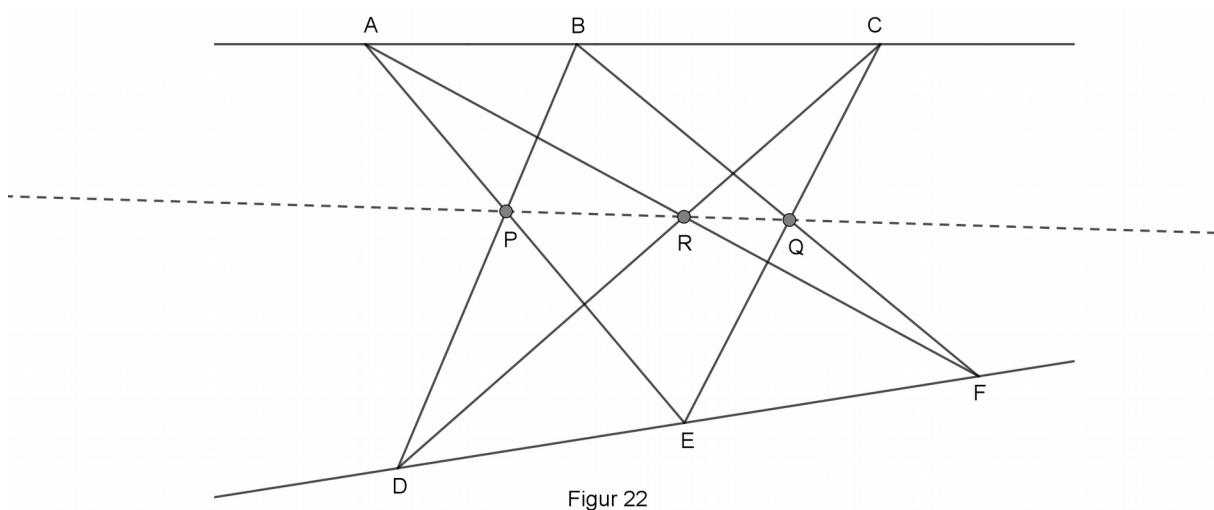
Den sista ekvationen säger oss att $A_1'C_1'$ är parallell med $A_2'C_2'$ och därmed att deras skärning R' ligger på oändlighetslinjen ∞ , vilket var det vi ville visa.

Kort kommentar till bevis: Eftersom de tre skärningarna P' , Q' och R' alla ligger på en och samma linje, oändlighetslinjen, vet vi tack vare egenskapen om att skärningar bevaras under projektionen, att de således måste ha legat på samma linje i planet innan projektion.

Pappos sats

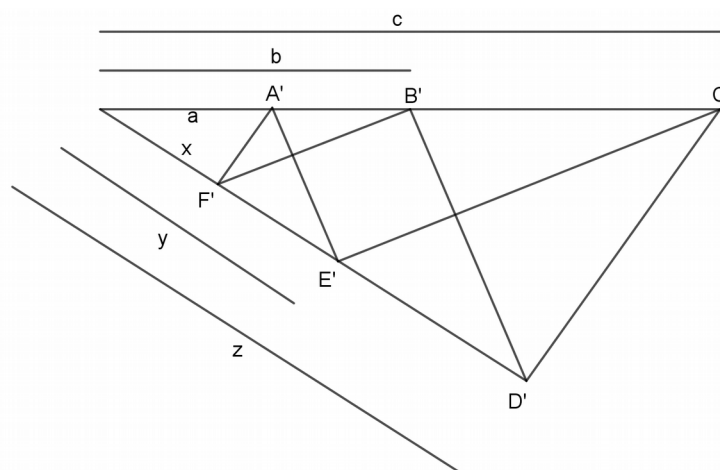
Vi ska avsluta denna uppsats med att bevisa en till sats, nämligen Pappos sats. Pappos sats säger att om A , B och C är tre punkter på en linje och D , E och F är tre punkter på en annan linje. Då ligger de tre skärningspunkterna mellan AE och DB , AF och DC , samt BF och EC på en och samma linje (se figur 22).

(C. Stanley Ogilvy, 1990).

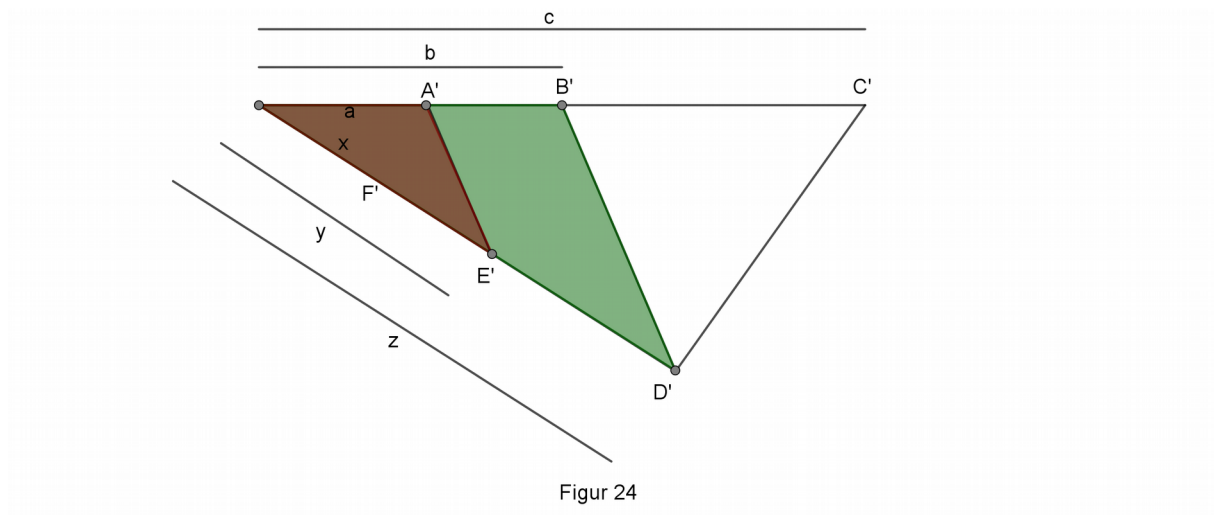


Beviset påminner en del om beviset för Desargues sats i planet. Vi utnyttjar att vi kan projicera en önskad linje till ∞ , så länge vi väljer ett godtyckligt projektionscentrum och ett godtyckligt projektionsplan att projicera på. Vi väljer således det och tänker oss att vi ska projicera figur 22 så att linjen PQ projiceras på oändlighetslinjen ∞ . Om vi nu kan visa att även R projiceras på oändlighetslinjen är vi klara. För då vet vi att skärningarna P', Q' och R' alla ligger på oändlighetslinjen efter projektion och således måste de ha legat på samma linje innan projektionen eftersom skärningar bevaras under projektion.

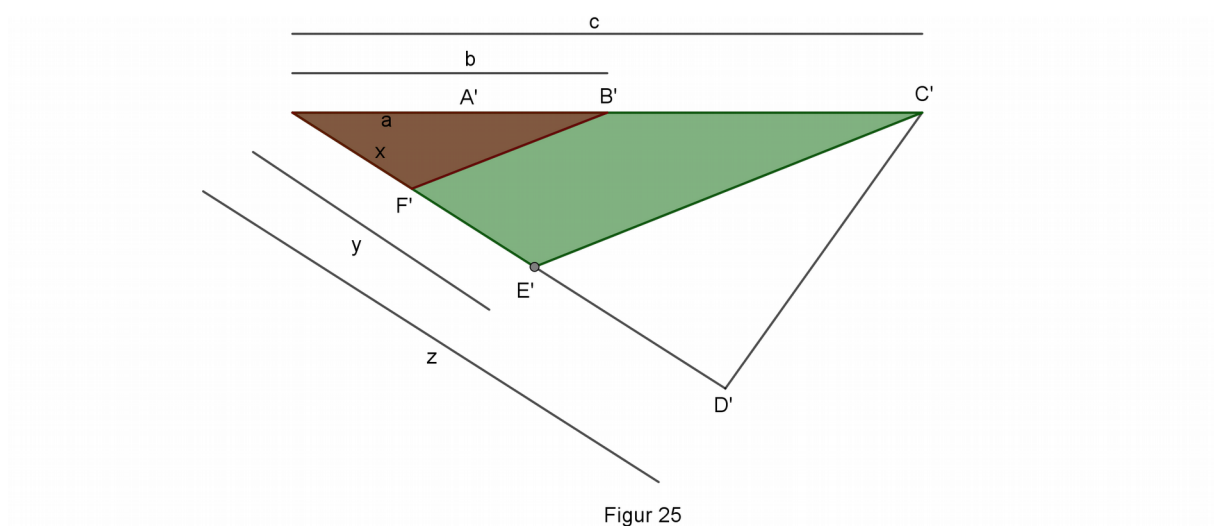
Eftersom linjen PQ ligger på oändlighetslinjen efter projektion, ty det är så vi har valt projektionscentrum och projektionsplan, måste linjerna som skär varandra i punkten P vara parallella, d.v.s. linjerna AE och DB är parallella (kom ihåg figur 18). På samma sätt måste linjerna som skär varandra i punkten Q vara parallella, d.v.s. linjerna BF och EC. Vi får då nedan konstruktion:



Tack vare de parallella linjerna får vi nu några likformiga trianglar.



och



Vi får följande resultat

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{z} \Rightarrow a = \frac{by}{z}$$

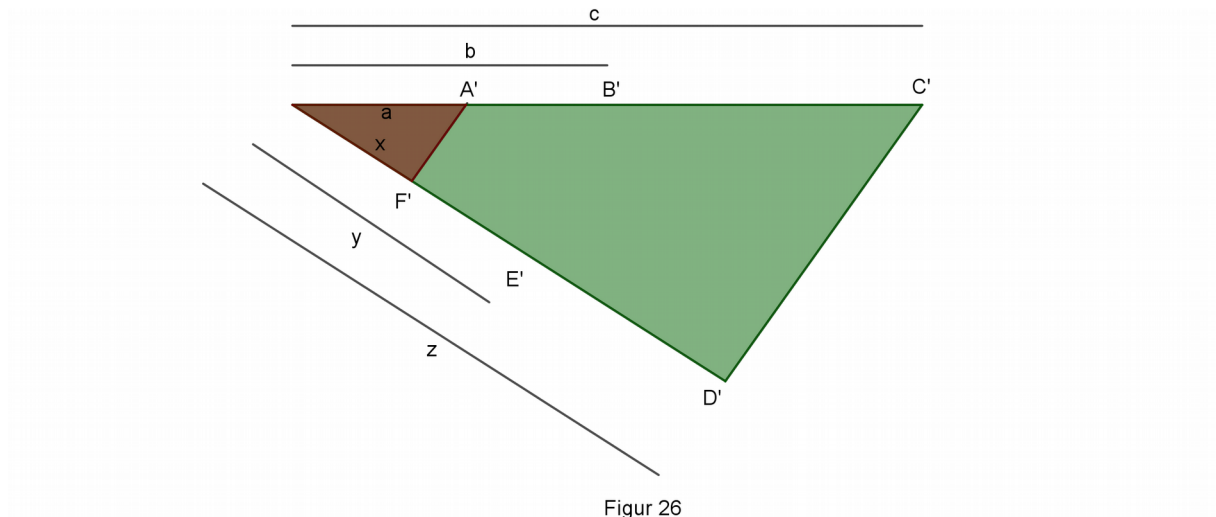
och att

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c} \Rightarrow x = \frac{yb}{c}$$

Om vi dividerar högerled med högerled och vänsterled med vänsterled för ekvationerna som står till höger får följande resultat:

$$\frac{a}{x} = \frac{c}{z}$$

Och tittar vi vad det innebär i figur 23 får vi följande likformiga trianglar:



Detta resultat säger oss att linjerna $A'F'$ och $D'C'$ är parallella (kom ihåg att apostrofen ' indikerade avbildningen efter projektion). Att $A'F'$ och $D'C'$ är parallella säger oss att R' ligger på oändlighetslinjen ∞ . Men på samma linje ligger P' och Q' vilket innebär att P , Q , och R låg på samma linje innan projektion, vilket vi ville visa.

Referenslista

Stanley Ogilvy, C. (1990). *Excursions in Geometry*. Dover: Dover Publications Inc.

LeonardoDaVinci. (u.å). *The last supper*. Hämtad 2018-01-15, från
<https://www.leonardodavinci.net/the-last-supper.jsp>

Google. (u.å). *da vinci perspective last supper*. Hämtad 2018-01-15, från
<https://i.pinimg.com/originals/a8/13/23/a81323b38b09098d8e9f5ad2c4e66c60.jpg>