SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Existensen av irrationella tal

av

Sara Albacha

2019 - No K15

Existensen av irrationella tal

Sara Albacha

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Gregory Arone

2019

Sammanfattning

Detta är ett arbete om upptäckten och existensen av irrationella tal. Vi ska alltså titta på hur irrationella tal upptäcktes, deras existens, samt vilka de är. Där behandlas även två områden, nämligen de algebraiska och transcendenta talen. I det sistnämnda området tittar vi närmare på två tal som upptäcktes vara transcendenta. I det arbetet bevisar vi olika satser, bland annat existensen av irrationella tal, transcendensen av e och π, och andra härrörande satser.

Jag vill tacka min handledare Gregory Arone som har hjälpt och väglett mig under arbetets gång.

Innehåll

Existensen av irrationella tal

Sara Al-Bacha

Juni 2019

1 Introduktion

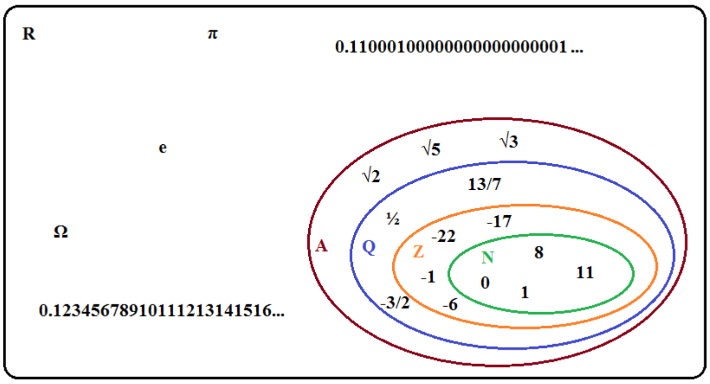
Det finns många tal idag som fascinerar oss, nämligen de konstanter som har oändligt många decimalutvecklingar. Sådana är till exempel: Pythagoras konstant $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, Arkimedes konstant π, Eulers konstant $\mathbf{e}$, gyllene snittet ϕ och många flera.

Under en tid där hela universum var uppbyggd av heltal enligt Pythagorerna, var existensen av irrationella tal, speciellt $\sqrt{2}$, inget godtagbart eller troligt för den grekiska matematikern Pythagoras. Enligt den Pythagoreiska skolan, kunde alla geometriska förhållanden uttryckas på ett rationellt sätt, och så var även antagandet om $\sqrt{2}$ som idag uttrycks som ett tal med en oändlig operiodisk decimalutveckling, nämligen $\sqrt{2} = 1.4142135623...$

Pythagoras trodde att förhållandet mellan sidorna i en enhetskvadrat och dess diagonal kunde uttryckas på ett rationellt sätt. Han menade alltså att $\sqrt{2}$ kunde skrivas på formen $\dfrac{p}{q}$. Men när en av hans elever, förmodligen Hippasos, visade att det inte gick att skriva talet i bråkform, vägrade Pythagoras att acceptera detta. Därifrån började upptäckten av existensen av irrationella tal.

Upptäckten av irrationella tal utvecklades senare av många matematiker som upptäckte andra tal som också var irrationella. Sedan började matematikerna upptäcka att det existerar även andra former av irrationella tal, nämlingen de transcendenta talen. Exempelvis var Joseph Liouville den första matematikern som bevisade att det existerar transcendenta tal. Han är bland annat berömd för sin konstant, Liouvilles tal. Senare kom andra upptäckter upp, såsom transcendensen av e och π. Det är sådana upptäckter som idag har underlättat mycket för oss inom matematiken.

Idag pratar vi om en komplexitet av tal. Vi har de reella talen, en större grupp av tal som omfattar alla andra mindre grupper såsom: rationella tal, heltal och naturliga tal. Dessutom består de reella talen av alla irrationella tal, de algebraiska såväl som de transcendenta. I figuren nedan ser vi en tydlig illustration av alla dessa tal.



Figur 1: En föreställning av de reella talen.

De irrationella talen är oändligt många. Med det sagt kan vi framstå att många sådana tal inte är bevisade att vara irrationella. Detsamma gäller för de transcendenta talen. Det finns än idag många tal vi inte vet om de är transcendenta eller inte. Exempel på sådana tal är: $\pi + e$, πe, π^π,e^e, π^e, och flera.

I den här studien ska vi visa existensen av de irrationella talen och hur de upptäcktes. Vi ska även visa att irrationella tal kan antigen vara algebraiska eller transcendenta. Därmed ska vi bevisa transcendensen av några berömda tal.

2 Begrepp

I detta kapitel definierar vi begrepp som ska användas i studien och som troligtvis är bra för läsaren att känna till för att förstå hela studien. De kommer att ordnas efter alfabetsordning.

Algebraiskt tal: Ett tal är algebraiskt om det är en lösning till en polynomekvation med heltalskoefficienter.

Bijektion: En bijektiv funktion f, från en mängd X till Y, alltås $f : X \to Y$, är en funktion som är både injektiv och surjektiv. Det vill säga att exakt ett element i X associeras med ett element i Y, och omvänt.

GCD(p,q): GCD är en engelsk förkortning för termen Greatest Common Divisor"vilket betyder: Största Gemensamma Delare". $GCD(p, q)$ betyder att det är den största gemensamma delaren för p och q.

Irrationella tal: Ett tal som är reellt och icke-rationell. Den kan alltså inte skrivas på formen p/q, där p och q är heltal och $q \neq 0$.

Moniskt polynom: Ett polynom vars högstagradskoefficient är 1.

Relativt prima: Två heltal sägs vara relativt prima om och endast om deras största gemensamma delare är 1.

Rationella tal: Ett reellt tal som kan skrivas i bråkform, det vill säga p/q.

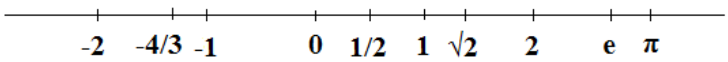
Transcendent tal: Ett reellt tal som är irrationellt och icke-algebraiskt.

Union: En union av två mängder A och B, är elementen som tillhör A eller B.

3 De reella talen

Definition 3.0.1

De reella talen brukar vi beteckna med $\mathbf{R}$. De definieras som alla tal på en oändlig tallinje och som är överuppräkneliga. Varje tal är associerat till en punkt på tallinjen som visas i figuren nedan. Till det hör alla *rationella*, $\mathbf{Q}$, och *irrationella tal* samt de naturliga talen och heltalen, som har beteckningen $\mathbf{N}$ respektive $\mathbf{Z}$.



Figur 2: En tallinje av de reella talen.

Sats 3.0.2

Mängden av de rationella talen är uppräknelig.

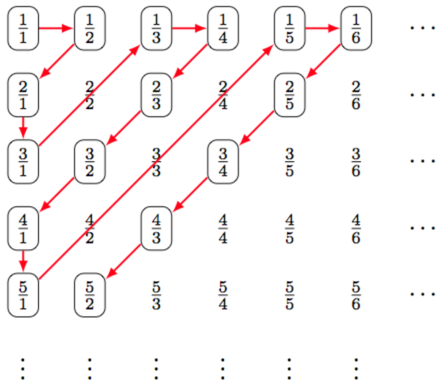
Bevis av sats 3.0.2[1]

En mängd av rationella tal är uppräknelig endast om den har en *bijektion.* $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$. Vi kan i detta fall använda ett liknande sätt som vi använder för att visa att mängden av heltal är uppräknelig. Heltalen brukar man skriva som en linje, och sedan räkna upp dem. Beviset går ut på att vi gör ett rutnät med varje rationella tal $\frac{p}{q}$ i en ruta (p, q) om $gcd(p, q) = 1$. Varje $x \in \mathbf{Q}$ finns på exakt en ruta.

Vi radar upp alla rationella tal på rutnätet. Vi börjar från ett visst tal, till exempel 1, som vi associerar med ett naturligt tal, och fortsätter att räkna de andra talen i diagonalform. Vi kommer att observera att det finns tal som upprepas. Dessa tal elimineras och på så sätt kan vi räkna alla återstående rationella tal och associera dem till något heltal. Vi har därmed visat att det finns en bijektion $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$, och därför är mängden av alla rationella tal uppräknelig.

Ett exempel på hur man räknar de rationella talen visas i figuren nedan.

[1] `https://theoremoftheweek.wordpress.com/2010/02/24/theorem-18-the-rational-numbers-are-countable/`



Figur 3: Uppräkning av rationella tal.

□

Sats 3.0.3

Mängden av tal inom intervallet [0,1] är överuppräknelig. Då finns det ingen bijektion $f : \mathbf{N} \to [0, 1]$.

Vi ska bevisa satsen med hjälp av Cantors diagonalförfarande[2] som på engelska heter *Diagonalisation argument*. Georg Cantor publicerade denna sats år 1891. Det är hans andra sats som går ut på att bevisa att mängden av de reella talen är överuppräknelig.

Bevis av sats 3.0.3

Vi antar motsatsen och påstår att mängden av tal inom intervallet [0,1] är uppräknelig och att vi kan lista dem. Då finns det en bijektion $f : \mathbf{N} \to [0, 1]$. Alltså, för varje element i $\mathbf{N}$ finns det en decimal sekvens som vi kan associera till. Decimalutvecklingen presenterar vi som en lista av n-rader.

$$r_0 \to 0.\ a_{0,0}\ a_{0,1}\ a_{0,2}\ a_{0,3}\ a_{0,4}\ a_{0,5}\ldots$$

$$r_1 \to 0.\ a_{1,0}\ a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3}\ a_{1,4}\ a_{1,5}\ldots$$

$$r_2 \to 0.\ a_{2,0}\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3}\ a_{2,4}\ a_{2,5}\ldots$$

$$r_3 \to 0.\ a_{3,0}\ a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3}\ a_{3,4}\ a_{3,5}\ldots$$

$$r_4 \to 0.\ a_{4,0}\ a_{4,1}\ a_{4,2}\ a_{4,3}\ a_{4,4}\ a_{4,5}\ldots$$

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor%27s_diagonal_argument`

$$r_5 \to 0.\ a_{5,0}\ a_{5,1}\ a_{5,2}\ a_{5,3}\ a_{5,4}\ a_{5,5}...$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$r_n \to 0.\ a_{n,0}\ a_{n,1}\ a_{n,2}\ a_{n,3}\ ...\ a_{n,n}$$

Vi kan fortsätta skapa listor med oändligt många siffror efter varje decimalpunkt. Vi ska i fortsättningen konstruera ett nytt reellt tal r_n sådana att den har n-decimalutveckling. Den konstruktionen gör vi med hjälp av en diagonal och skriver talet som:

$$b \to 0.\ b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5...$$

Talet vi får kommer att skilja sig från alla tal som finns på listan. Vi tittar på diagonalen av decimalerna för varje tal i listan. För att definiera decimalerna i det nya talet, väljer vi $a_{0,0} \neq b_0$, sedan $a_{1,1} \neq b_1$, sedan $a_{2,2} \neq b2$, osv, tills vi bestämmer $b_n \neq a_{n,n}$. Det vill säga om till exempel $a_{n,n}$ är 1, kan vi välja b_n som 2. Till slut kommer vi fram till ett helt nytt reellt tal som inte är på listan och som inte associeras till något av $[r_0, r_n]$. Därmed kommer vi att alltid kunna skapa ett nytt reellt tal i $[0, 1]$ som inte är i listan. På det viset är detta en motsägelse, det finns alltså ingen bijektion $f : \mathbf{N} \to [0, 1]$ eftersom vi har kunnat skapa minst ett helt nytt tal. Därmed är mängden av tal inom intervallet [0,1] överuppräknelig.

□

Följdsats 3.0.4

Mängden av alla reella tal är överuppräknelig. Vi har visat att $[0, 1]$ är överuppräknelig och vi vet att $[0, 1] \subset \mathbf{R}$, därför gäller följdsatsen.

Sats 3.0.5

De irrationella talen är överuppräkneliga.

Bevis av sats 3.0.5

Vi följer Nivens bevis, 1956, på sida 5[3].
Vi antar att mängden av irrationella tal är uppräknelig. Då kan vi skriva

[3] Ivan Niven: Irrational numbers. Mathematical Association of America, New York, 1956.

ner dem som följande: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$. Vi vet även att redan mängden av de rationella talen är uppräkneliga, då kan vi skriva dem som

$$r_1, r_2, r_3, ...$$

I detta fall skulle vi kunna skriva ner de reella talen som en sekvens av

$$\alpha_1, r_1, \alpha_2, r_2, \alpha_3, r_3, ...$$

Men detta motsäger sats 3.0.3 som säger att $[0, 1]$ är ett överuppräkneligt intervall, och därför är även hela mängden av reella tal det. Detta visar därmed att mängden av irrationella tal är överuppräknelig.

$\square$

4 Rationella rotteoremet

Det rationella rotteoremet beskriver vilka rationella rötter ett polynom kan ha. Det handlar om förhållandet mellan rötterna och polynomets heltalskoefficienter.

Utifrån denna sats har matematiker kunnat upptäcka att det existerar irrationella tal, vilket i sin tur ledde till att man upptäckte de *transcendenta talen*. Nästa sats visar några begränsningar på de möjliga rationella rötterna för ett polynom med heltalskoefficienter.
Vi kommer att följa beviset av det rationella rotteoremet som finns på Wikipedia: Rational root theorem[4].

Sats 4.0.1

Låt

$$P\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

vara ett polynom av grad n med heltalskoefficienter där $a_n \neq 0$. Låt även $r = \pm\dfrac{p}{q}$ vara en rationell rot för $P(x)$, med p och q relativt prima. Då är a_0 delbart med p och a_n delbart med q.

Bevis av sats 4.0.1

Vi sätter in $x = \dfrac{p}{q}$ i polynomet $P\left(x\right)$ så att

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Vi multiplicerar polynomet med q^n och flyttar konstanttermen till högerledet så att

$$a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + ... + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n$$

Vi faktoriserar p från vänsterledet så att

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} q p^{n-2} + ... + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n$$

Detta visar att p delar $a_0 q^n$ eftersom faktorn p multiplicerad med parentesen är lika med $-a_0 q^n$. Därmed ska p även dela faktorn a_0 enligt Euclides lemma, eftersom p och q är *relativt prima*, och därmed är även p och q^n det. Euclides lemma säger att om ett primtal p delar en produkt ab av två heltal a och b, så måste p även dela minst en av dessa heltal, a och b.

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Rational_root_theorem

Låt oss nu titta på högstatermskoefficienten. Vi multiplicerar båda leden med q^n och flyttar över högstagradstermen åt högerledet så att

$$a_{n-1}qp^{n-1} + a_{n-2}q^2p^{n-2} + ... + a_0q^n = -a_np^n$$

Vi faktoriserar ut q från vänsterledet och får

$$q\left(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}qp^{n-2} + ... + a_0q^{n-1}\right) = -a_np^n$$

På samma sätt och för samma anledning enligt Euclides lemma, ser vi att termen q delar a_n.

Vi har nu alltså visat att ett polynom kan ha en rationell rot på formen $x = \dfrac{p}{q}$ och att dessa delar högstagradstermen samt konstanttermen av ett polynom $P(x)$.

$\square$

Följdsats 4.0.2 (Gauss Lemma)

Antag att $a_n = 1$. Då är

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

Det följer att varje reell rot av ett *moniskt polynom* med heltalskoefficienter är antingen ett heltal eller ett irrationellt tal.

Vi kommer att följa Gilats bevis av Gauss lemma[5].

Bevis av följdsats 4.0.2

Låt r vara en reell rot till det moniska polynomet

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

för $n \in \mathbf{Z}_{\geq}$, positiv heltal, och $a_0, \ldots, a_{n-1}$ heltal.

Vi antar att r är icke-irrationell i detta fall. Då måste r vara i form av ett bråk och representera p/q med $gcd(p, q) = 1$. Vi har visat från sats 4.0.1 att a_n är delbart med q. Det följer att om $a_n = 1$ då är även $q = 1$ eller $q = -1$. Det medför att p/q är ett heltal och därför även r.

$\square$

[5] `https://www.researchgate.net/publication/259735388_Gauss's_Lemma_and_the_Irrationality_of_Roots`

5 Upptäckten av irrationella tal

Vi har redan tidigare visat att de irrationella talen är många och överuppräkneliga. Dock, existerar det ett tal som var hela orsaken till att man under antiken upptäckte existensen av irrationella tal. Det talet är $\sqrt{2}$ och kallas bland annat för Pythgoras konstant. Vi kan representera $\sqrt{2}$ som ett konvergent kedjebråk, alltså

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

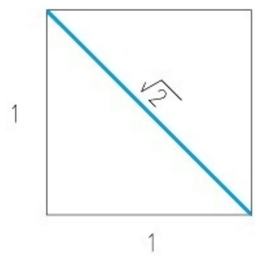
Vi ska vidare i detta kapitel definiera talet och titta lite på historien bakom den upptäkten, samt visa att det är ett irrationellt tal.

Geometrisk definition 5.0.1

Vi definierar $\sqrt{2}$ geometriskt med hjälp av Pythagoras sats.
Vi föreställer oss en kvadrat vars sidor har längden 1. Vi drar ena diagonalen och får en rätvinklig triangel. Vi benämner kateterna med a och b, samt hypotenusan med c. Enligt Pythagoras sats som säger att

$$a^2 + b^2 = c^2$$

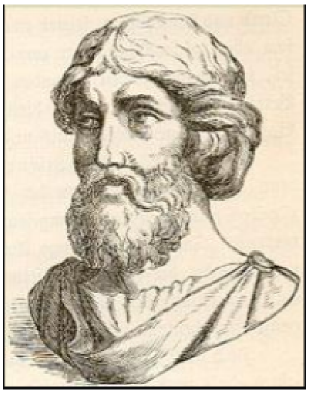
följer det att diagonalen, alltså c, är $\sqrt{2}$. Figuren nedan illustrerar den geometriska definitionen av talet $\sqrt{2}$.



Figur 4: En enhetskvadrat med diagonalen $\sqrt{2}$.

5.1 Historien bakom det berömda talet $\sqrt{2}$

"Allt är tal". Detta var vad Pythagorerna förespråkade. Hippasos, den gregiska filosofen och samtidigt en av Pythagoras lärjungar, var den som bröt Pythagorernas uppfattning om tal. Det sägs att han var den första som bevisade att talet $\sqrt{2}$ inte kan skrivas i bråkform, och därmed att talet är irrationellt. Myten säger att Pythagoras blev chockad av upptäckten och till följd av detta straffades Hippasos och drunknade i havet. Vi kan inte vara säkra på den berättelsen, men idag finns det några moderna forskare som väljer att referera upptäckten av irrationella tal till Hippasos.



Figur 5: Hippasos, född omkring 550 f.Kr.

Följdsats 5.1.1

Det följer från **följdsats 4.0.2** att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal. Det är en rot till det moniska polynomet $x^2 - 2 = 0$.

6 Algebraiska och transcendenta tal

6.1 De algebraiska talen

Definition 6.1.1

Ett komplext tal α sägs vara *algebraiskt* om det är roten till ett polynom, $P(\alpha)$, med heltalskoefficienter, $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Polynomet har formen

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n = 0$$

Alla rationella tal är algebraiska. Exempelvis är 0.97, -3, $\sqrt{16}$, $7/8$, algebraiska. Däremot är inte alla irrationella tal algebraiska. Exempel på irrationella tal som är algebraiska är $\sqrt{2}$ som uppfyller ekvationen $x^2 - 2 = 0$, och $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ som uppfyller ekvationen $2x^3 - 1 = 0$. Listan kan gå långt.

Irrationella tal som inte är algebraiska kallas för transcendenta.

Sats 6.1.2

Mängden $\mathbf{A}$ av algebraiska tal är uppräknelig.

För att kunna bevisa att mängden $\mathbf{A}$ är uppräknelig ska vi använda oss av en annan sats som bevisar att mängden P av polynom är uppräknelig.

Sats 6.1.3

Mängden av polynom med heltalskoefficienter är uppräknelig.

Bevis av sats 6.1.3[6]

Låt P_n vara mängden av polynom av grad högst n med $n \in \mathbf{Z}_{\geq}$, heltalskoefficienter. P_n har formen

$$P_n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

Vi definierar en funktion $f : P_n \to \mathbf{Z}^{n+1}$ av

$$c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \longmapsto (c_0, c_1, \ldots, c_n)$$

Vi ser att funktionen f är en bijektiv funktion. Då är P_n uppräknelig då $\mathbf{Z}^{n+1}$

[6] https://math.hawaii.edu/~myounsi/teaching/mat200/Homework9Solution.pdf

är det. Vi har nu att P, mängden av alla polynom med heltalskoefficienter, är unionen av mängden P_n över alla $n \in \mathbf{Z}_{\geq}$. Den skrivs som

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$$

Den mängden är en uppräknelig *union* av uppräkneliga mängder, P_n. Då är alltså mängden av alla polynom med heltalskoefficienter P en uppräknelig mängd.

$\square$

Bevis av sats 6.1.2[7]

Vi har från den föregående satsen bevisat att det finns en bijektion från P_n till $\mathbf{Z}^{n+1}$, där P_n var mängden av alla polynom av grad n. Vi fick fram att P, mängden av alla polynom med heltalskoefficienter var en uppräknelig mängd, och som följd var P_n också det.

Låt $\mathbf{A}$ vara mängden av alla algebraiska tal. Vi vet att P är uppräknelig då varje polynom av grad n har en ändlig mängd av rötter. Då är unionen av alla mängder av rötter uppräknelig, eftersom en uppräknelig union av ändliga mängder är uppräknelig. Därmed är $\mathbf{A}$ en uppräknelig mängd.

$\square$

6.2 De transcendenta talen

Definition 6.2.1

Till skillnad från ett algebraiskt tal är ett transcendent tal ett tal som inte är en rot till ett polynom med heltalskoefficienter.
Det existerar alltså inget polynom $f(t)$ där $f(t) = 0$ för t ett transcendent tal.

Exempel på transcendenta tal är de mest kända talen, π och e. Det finns oändligt många transcendenta tal, då vi redan hade bevisat att nästan alla reella tal är transcendenta tal. Till exempel är också $2^{\sqrt{2}}$ transcendent eftersom $f(2^{\sqrt{2}}) \neq 0$ för alla polynom med heltalskoefficienter.

Sats 6.2.2

Mängden av transcendenta tal är överuppräknelig.

[7] http://faculty.bard.edu/belk/math351/Homework2Solutions.pdf

Bevis av sats 6.2.2[8]

Denna sats ska vi bevisa med en motsägelse. Vi vet redan att $\mathbf{R} = \mathbf{A} \cup \mathbf{T}$, där $\mathbf{A}$ motsvarar de algebraiska talen och $\mathbf{T}$ motsvarar de transcendenta talen. Antag nu att $\mathbf{T}$ är en uppräknelig mängd. Då följer det att även $\mathbf{R}$ är en uppräknelig mängd eftersom $\mathbf{A}$ är det, som vi redan har bevisat. Detta är däremot en motsägelse eftersom $\mathbf{R}$ är en överuppräknelig mängd, och därför är $\mathbf{T}$ en överuppräknelig mängd. Beviset är klart.

$\square$

Det finns överuppräkneligt många transcendenta tal, vilket vi bevisade. Däremot är det svårt att bevisa att ett tal är det.

[8] `http://faculty.bard.edu/belk/math351/Homework2Solutions.pdf`

7 Upptäckten av transcendenta tal

7.1 Liouvilletal, 1851

Joseph Liouville var den första matematikern som före Cantor visade att det existerar transcendenta tal. Detta gjorde han när han visade att alla Liouvilles konstanter är transcendenta. Liouville grundade år 1836 en matematisk tidskrift vid namnet *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* Han publicerade år 1851 sitt teorem och bevis om existensen av transcendenta tal i denna journal i kapitlet *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques.*

Liouvilles bevis grundar sig på rationella approximationer till algebraiska tal. Låt oss ge en definition av vad ett Liouvilletal är. Vi kommer i detta kapitel att följa bevisen som finns på Wikipedia: Liouville number[9] för att bevisa transcendensen av ett Liouvilletal samt bevisa att ett sepcifikt reellt tal faktiskt är ett Liouvilletal.

Definition 7.1.1 Liouvilletal

Ett reellt tal α kallas för ett Liouvilletal om det för varje positivt heltal n, existerar heltal p och q med $q > 0$, som uppfyller olikheten

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

Sats 7.1.2

Alla Liouvilletal är transcendenta.

Lemma 1 för sats 7.1.2

Låt α vara ett irrationellt och algebraiskt tal som är roten till $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbf{Z}[\mathbf{x}]$, ett nollskilt polynom, $f(x) \neq 0$. Då existerar det ett positivt tal c som endast beror på α, $c = c(\alpha)$, på så sätt att

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n} \tag{1}$$

för p och q heltal och $q > 0$.

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Liouville_number

Låt M vara maximum av $|f'(x)|$ över intervallet $[\alpha - 1, \alpha + 1]$. Låt även $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vara de entydiga rötterna till $f(x)$ som skiljer sig från α. Vi väljer ett värde $c > 0$ och ställer upp

$$c < min(1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, |\alpha - \alpha_2|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|)$$

Antag att det existerar p och q med $q > 0$ som motsäger lemmat (1). Då är

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{c}{q^n} \leq c < min(1, |\alpha - \alpha_1|, |\alpha - \alpha_2|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|)$$

Således är

$$\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$$

och

$$\frac{p}{q} \notin (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)\frac{p}{q}$$

inte en rot till $f(x)$ och därför ingen rot till $f(x)$ mellan α och p/q.

Enligt medelvärdesatsen, existerar det ett x_0 mellan p/q och α så att

$$f(\alpha) - f(p/q) = (\alpha - p/q)f'(x_0)$$

Vi ser att $|f'(x_0)| > 0$ och då är α en rot till $f(x)$ men inte p/q.

Vi får i fortsättningen att

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{f(p/q) - f(\alpha)}{f'(x_0)}\right| = \frac{|f(p/q)|}{|f'(x_0)|}$$

Nu kan vi skriva polynomet f som en summa av

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

där a_j är ett heltal. Och eftersom $f(p/q) \neq 0$ kan vi skriva den som

$$|f(p/q)| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_j p^j q^{n-j}\right| \frac{1}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}$$

I och med att $|f'(x_0)| \leq M$, av definitionen av M och att $\dfrac{1}{M} > c$ av definition av c så erhåller vi

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Mq^n} > \frac{c}{q^n} \geq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

vilket är en motsägelse och lemmat är bevisat.

□

Bevis av sats 7.1.2

Låt α vara ett Liouvilletal. Innan vi kan bevisa att ett sådant tal är transcendent, behöver vi visa att den är irrationell. Vi antar därför att $\alpha = c/d$ för c och d heltal och $d > 0$. Låt m vara ett positivt heltal där $2^{m-1} > d$. Låt även p och q vara heltal med $q > 1$ där $p/q \neq c/d$. Då har vi

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{c}{d} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qd} > \frac{1}{2^{m-1}q} \geq \frac{1}{q^m}$$

Detta strider mot definitionen av ett Liouvilletal, och då kan inte α vara ett Liouvilletal, vilket är en motsägelse. Det finns alltså inget par (p, q) som uppfyller att $x = c/d$ är ett Liouvilletal, och därför kan den inte vara rationell.

Vi visar nu att α är transcendent med en motsägelse. Antag att α är ett irrationellt algebraiskt tal. Det existerar ett reellt tal $c > 0$ och ett positivt heltal n så att

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$$

gäller för alla heltal p och q där $q > 0$. Låt r vara ett positivt heltal så att $2^r \geq \dfrac{1}{c}$. Eftersom α är ett Liouvilletal så uppfyller den denna olikhet för varje heltal p och q med $q > 0$ så att

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+r}} \leq \frac{1}{2^r q^n} \leq \frac{c}{q^n}$$

Detta motsäger att

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$$

och därför följer det att α inte kan vara algebraiskt utan är transcendent.

□

7.2 Det första Liouvilletalet

Det första Liouvilletalet, det reella talet som bevisades vara transcendent var

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + \frac{1}{10^{120}} + \cdots = 0.110001000000000000000001\ldots$$

Detta är ett Liouvilletal eftersom den har en tät approximation av rationella tal.

Definition 7.2.1

Det reella talet

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{b^{k!}}$$

är ett Liouvilletal, för varje heltal $b > 1$ och $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\} \forall k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Bevis 7.2.2: x är ett Liouvilletal

Från definitionen av det reella talet x, är basen b en representation av

$$x = 0.a_1 a_2 000 a_3 00000000000000000 a_4 000 \ldots a_n [(nn! - 1) nollor] a_{n+1} \ldots)_b$$

Vi ser att x inte kan vara ett rationellt tal eftersom dess decimalutveckling är icke-periodisk och oändlig.

Vi ska nu visa att detta Liouvilletal uppfyller olikheten

$$0 < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}$$

Vi definierar p_n och q_n som följande. För varje heltal $n \geq 1$:

$$q_n = b^{n!}$$

och

$$p_n = q_n \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b^{k!}} = \sum_{k=1}^{n} a_k b^{n!-k!}$$

Vi sätter in p_n och q_n som vi har definierat i olikheten som vi ska bevisa. Vi får:

$$\text{”} \quad 0 < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| x - \frac{q_n \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b^{k!}}}{q_n} \right| = \left| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b^{k!}} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^{k!}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b^{k!}} \right| =$$

$$= \left| \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b^{k!}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{b^{k!}} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b^{k!}} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{b^{k!}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^{k!}} <$$

$$< \sum_{k=(n+1)!}^{\infty} \frac{b-1}{b^k} = \frac{b-1}{b^{(n+1)!}} + \frac{b-1}{b^{(n+1)!+1}} + \frac{b-1}{b^{(n+1)!+2}} + \cdots =$$

$$= \frac{b-1}{b^{(n+1)!}b^0} + \frac{b-1}{b^{(n+1)!}b^1} + \frac{b-1}{b^{(n+1)!}b^2} + \cdots = \frac{b-1}{b^{(n+1)!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^k} =$$

$$= \frac{b-1}{b^{(n+1)!}} \cdot \frac{b}{b-1} = \frac{b}{b^{(n+1)!}} \leq \frac{b^{n!}}{b^{(n+1)!}} = \frac{1}{b^{(n+1)!-n!}} = \frac{1}{b^{(n+1)n!-n!}} =$$

$$= \frac{1}{b^{n(n!)+n!-n!}} = \frac{1}{b^{(n!)n}} = \frac{1}{q_n^n} \quad \text{”.}$$ [10]

Då har vi bevisat att alla tal som talet x är ett Liouvilletal, och därmed är även

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

ett Liouvilletal.

□

Som vi redan tidigare har visat så är alla Liouvilles tal transcendenta, men faktum är att inte alla transcendenta tal är Liouvilles tal. Liouville hade en gång i tiden försökt att bevisa att e är transcendent. Här nedan bevisar vi transcendensen av två väldigt berömda tal, men som däremot inte är Liouvilletal. Dessa är e och π.

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Liouville_number

7.3 Hermite, 1873: e är transcendent

Charles Hermite var en fransk matematiker som var den första att bevisa att talet e är transcendent år 1873. Beviset grundar sig på en motsägelsebevis där vi bevisar att e inte är algebraisk. Till den ska vi använda oss av några lemma som vi ska bevisa, för att åstadkomma till det centrala beviset av transcendensen av e. Vi kommer här att följa Dave Richesons[11] bevis, samt delar av Kleins bevis, 1956[12], sida 61, och delar av Hersteins bevis [13].

Sats 7.3.1

e är transcendent.

Bevis av sats 7.3.1

Lemma 1 för sats 7.3.1

Antag att e är en rot till polynomet

$$p(e) = a_N e^N + a_{N-1}e^{N-1} + \cdots + a_1 e + a_0 = 0$$

Låt även f vara ett polynom och $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x)$. Då existerar det en ekvation

$$a_1\epsilon_1 + \cdots + a_N\epsilon_N = a_0F(0) + a_1F(1) + \cdots + a_NF(N)$$

där

$$\epsilon_N = -Ne^{N(1-\theta_N)}f(N\theta_N)$$

för $\theta_1, \ldots, \theta_N \in (0,1)$.

Antag att f är ett polynom av grad r med reella koefficienter. Vi bestämmer en ny funktion $F(x)$ som är en ändlig summa

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(r)}(x)$$

Vi definierar en ny funktion $g(x) = e^{-x}F(x)$ och deriverar den med hjälp av produktregeln. Notera att derivatan av $F(x)$ har detta utseendet

$$F'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots + f^{(r+1)}(x) =$$

[11] `https://divisbyzero.com/2010/09/28/the-transcendence-of-e/`

[12] Felix Klein:FAMOUS PROBLEMS OF ELEMENTARY GEOMETRY.DOVER PUBLICATIONS, INC, NEW YORK, 1956.

[13] `http://www.cs.toronto.edu/~yuvalf/Herstein%20Beweis%20der%20Transzendenz%20der%20Zahl%20e.pdf`

$$=f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots + f^{(r)}(x) =$$

$$=F(x) - f(x)$$

Derivering av den nya funktionen $g(x) = e^{-x}F(x)$ ger oss

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-x}F(x) + e^{-x}F'(x) \\ &= -e^{-x}F(x) + e^{-x}(F(x) - f(x)) \\ &= -e^{-x}f(x) \end{aligned}$$

Vi kan nu använda oss av differentialkalkylens medelvärdesats på funktionen $g(x) = e^{-x}F(x)$ inom intervallet $[0, 1]$. Detta ger oss

$$\frac{e^{-1}F(1) - F(0)}{1} = -e^{-\theta_1}f(\theta_1), \quad 0 < \theta_1 < 1$$

Multiplikation av höger- och vänsterled med e ger oss

$$F(1) - eF(0) = -e^{1-\theta_1}f(\theta_1) =: \epsilon_1$$

Vi tillämpar på samma sätt differentialkalkylens medelvärdesats på intervallet $[0, 2]$. Vi får

$$\frac{e^{-2}F(2) - F(0)}{2} = -e^{-2\theta_2}f(2\theta_2), \quad 0 < \theta_2 < 1$$

Multiplikation med 2 och e^2 ger oss

$$F(2) - e^2F(0) = -2e^{2(1-\theta_2)}f(2\theta_2) =: \epsilon_2$$

Vi upptäcker en likhet i båda ekvationerna. Vi kan nu skriva en mer allmän ekvation för intervallet $[0, N]$. Vi får alltså

$$F(N) - e^NF(0) = -Ne^{N(1-\theta_N)}f(N\theta_N) =: \epsilon_N, \quad 0 < \theta_N < 1$$

Vi kombinerar polynomet $p(x)$ med resultatet vi fick från differentialkalkylens medelvärdesats

$$a_1\epsilon_1 + \cdots + a_N\epsilon_N =$$

$$= a_1(F(1) - eF(0)) + a_2(F(2) - e^2F(0)) + \cdots + a_N(F(N) - e^NF(0))$$
$$= a_1F(1) - a_1eF(0) + a_2F(2) - a_2e^2F(0) + \cdots + a_NF(N) - a_Ne^NF(0)$$

Förenkling av ekvationen ger

$$a_1F(1) + \cdots + a_NF(N) - F(0)(a_1e + a_2e^2 + \cdots + a_Ne^N)$$

Vi har nu fått ett intressant uttryck, nämligen koefficienterna i polynomet $p(x)$. Vi har därmed att

$$a_1e + a_2e^2 + \cdots + a_Ne^N = -a_0$$

Vi har nu alltså kommit fram till att

$$a_1\epsilon_1 + \cdots + a_N\epsilon_N = a_0F(0) + a_1F(1) + \cdots + a_NF(N)$$

Vi har bevisat lemma 1.

$\square$

I nästa steg ska vi välja ut ett polynom f för lemma 1.

Låt nu $p \gg N, a_0$, där p är ett primtal. Vi kunde hitta ett primtal som är större än N och a_0 eftersom det finns oändligt många primtal.

Låt även $f(x) = \dfrac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (N-x)^p$ vara ett polynom.
Vi låter även $F(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(r)}(x)$, med grad r av f.

Vi vill i detta steg visa att $a_NF(N) + \cdots + a_0F(0)$ är ett nollskilt heltal, alltså ett heltal som inte är delbar med p. Detta gör vi genom att visa några egenskaper hos $F(x)$. Vi ska alltså visa att för $j = 1, \ldots, N$ är $F(j)$ ett heltal och delbart med p samt att $F(0)$ är ett heltal som är icke-delbart med p. Men innan vi börjar bevisa detta, ska vi använda oss av ännu ett relevant lemma.

Lemma 2 för sats 7.3.1

Om g är ett polynom med heltalskoefficienter och $h(x) = \dfrac{g(x)}{(p-1)!}$, då är $h^{(i)}$, för $i \geq p$, ett polynom med heltalskoefficienter som i sin tur är delbara med p.

Vi antar först att $g(x)$ är ett polynom av högst grad n med heltalskoefficienter

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

och $h(x)$ är

$$h(x) = \frac{g(x)}{(p-1)!} = \frac{a_0}{(p-1)!} + \frac{a_1}{(p-1)!}x + \cdots + \frac{a_k}{(p-1)!}x^k$$

Vi tar sedan derivatan av $h(x)$ ett flertal gånger upp till p gånger. Första derivatan blir då:

$$h'(x) = \frac{a_1}{(p-1)!} + 2 \cdot \frac{a_2}{(p-1)!}x + 3 \cdot \frac{a_3}{(p-1)!}x^2 + \cdots + k \cdot \frac{a_k}{(p-1)!}x^{k-1}$$

Vi tar nu andra derivatan av $h(x)$ och får:

$$h''(x) = 1 \cdot 2\frac{a_2}{(p-1)!} + 2 \cdot 3\frac{a_3}{(p-1)!}x + \cdots + (k-1)k\frac{a_k}{(p-1)!}x^{k-2}$$

Derivatan av $h(x)$ p-gånger blir:

$$h^{(p)}(x) = 1{\cdot}2{\cdot}\cdots{\cdot}p{\cdot}\frac{a_p}{(p-1)!} + 2{\cdot}3{\cdot}\cdots{\cdot}(p+1)\frac{a_{p+1}}{(p-1)!}x + \cdots + (k-p+1)(k-p+2){\cdot}\cdots{\cdot}k\frac{a_k}{(p-1)!}x^{k-p}$$

Vi ser här att $\dfrac{k!}{(k-p)!p!}$ är ett heltal. Därmed är $\dfrac{k!}{(k-p)!(p-1)!}$ ett heltal delbart med p.

Om vi nu deriverar $h(x)$ i-gånger får vi:

$$h^{(i)}(x) = \sum_m \frac{(m-i+1) \cdot \cdots \cdot m \cdot x^{m-i}}{(p-1)!}$$

Därmed får vi

$$\frac{m!}{(m-i)!i!}$$

som är ett heltal.

Följaktligen är

$$\frac{m!}{(m-i)!(p-1)!} = \frac{m! \cdot (i(i-1) \cdot \cdots \cdot p}{(m-i)!i!}$$

ett heltal delbart med p.

Då är $h^{(i)}(x)$ delbart med p och lemma 2 är bevisat.

$\square$

Vi går nu tillbaka till att bevisa att $F(j)$ är ett heltal delbart med p och att $F(0)$ är ett heltal som är icke-delbart med p.

Vi hävdar först att $F(j)$ är heltal och en multipel av p. Detta gäller eftersom f har en rot av multiplicitet p i $1, 2, \ldots, N$. Detta implicerar att $f(j) = 0$. Om vi dessutom räknar derivatan av f kommer vi att få att $f'(j) = 0$. Detta eftersom vi har en rot av multiplicitet p och p är stort, så därför kommer även derivatan att ha en rot. Det visar sig i slutändan att vi kan derivera f upp till $f^{(p-1)}$ och fortfarande ha en rot. Vi har alltså $f^{(p-1)} = 0$.

Vi vill nu se vad som händer om vi tar flera derivator. Det visar sig att vi inte längre kommer att få 0. Däremot vill vi istället visa att det är ett heltal.

Så låt säga att $i \geq p$. Om vi utvecklar f får vi

$$f(x) = \frac{(N!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{a_0}{(p-1)!}x^p + \frac{a_1}{(p-1)!}x^{p+1} + \ldots$$

där de minstagradstermen går mot noll, $\dfrac{(N!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} \to 0$.

Så om vi nu ska derivera f flera gånger kommer vi att få, för $i \geq p$,

$$f^{(p)}(x) = a_0\frac{p(p-1)\ldots(1)}{(p-1)!} + a_0\frac{(p+1)\ldots(2)x}{(p-1)!} + \ldots$$

En förkortning ger oss

$$f^{(p)}(x) = a_0 p + a_0(p+1)(p)x + \ldots$$

Det visar sig alltså att om man multiplicerar p med varandra följande heltal och delar med $(p-1)!$ så kommer vi att få en multipel av p.

Det visar sig att $f^{(p)}(x)$ är ett polynom vars koefficienter är en multipel av p. Detsamma gäller för $f^{(i)}(x)$, för $i \geq p$. Framför allt är även $f^{(i)}(j)$, för $j = 1, 2, \ldots, N$, en multipel av p.

Om vi nu utvecklar $F(j)$, får vi

$$F(j) = \underbrace{f(j) + f'(j) + \cdots + f^{(p-1)}(j)}_{0} + \underbrace{f^{(p)}(j) + \cdots + f^{(r)}(j)}_{\div p}$$

Addition av allt ger oss att $F(j)$ är delbar med p och därmed ett heltal.

Nu ska vi titta närmare på $F(0)$ och ska visa att detta är ett heltal men icke-delbart med p. Vi använder i princip samma metod som förut när vi tog hand om den linjära kombinationen för $j = 1, \dots, N$.

Vi tar flera derivator av funktionen

$$f(x) = \frac{(N!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{a_0}{(p-1)!}x^p + \frac{a_1}{(p-1)!}x^{p+1} + \dots$$

Vi får alltså

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \dots, f^{(p-2)}(0) = 0$$

Tar man flera derivator kommer vi inte att få 0. Vi tar $f^{(p-1)}(x)$ och får

$$f^{(p-1)}(x) = (N!)^p + (\dots)x + (\dots)x^2 + \dots$$

Insättning av 0 ger oss

$$f^{(p-1)}(0) = (N!)^p$$

Vi har här fått faktorer som är mindre än p eftersom vi hade valt $p \gg N$ och därför kan inte p dela dessa faktorer. Alltså p delar inte $f^{(p-1)}(0) = (N!)^p$.

Vi utvecklar nu denna för högre derivator, vi tar $i \geq p$. Vi får $f^{(i)}(x)$ ett polynom vars koefficienter är delbara med p. Utveckling i 0 ger $f^{(i)}(0)$ som är ett heltal delbart med p. Per definition har vi alltså att

$$F(0) = f(0) + \dots + f^{(p-2)}(0) + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \dots + f^{(r)}(0)$$

och har visat att:

1. p delar $f(0) + \dots + f^{(p-2)}(0)$
2. p delar inte $f^{(p-1)}(0)$
3. p delar $f^{(p)}(0) + \dots + f^{(r)}(0)$

Då har vi kommit fram till att $F(0)$ är icke-delbar med p.
Vi återgår nu till den linjära kombinationen och drar några slutsatser. Vi avgör vilka faktorer som är delbara samt icke-delbara med p. Så i

$$a_0F(0) + a_1F(1) + \dots + a_NF(N)$$

ser vi att p delar $F(1)$ och därmed delar den produkten $a_1F(1)$. Samma sak gäller för produkten $a_N F(N)$. När det kommer till $F(0)$ har vi redan visat att p inte delar den. Men den kan i vissa fall ändå dela a_0. I det fallet delar p inte a_0 just eftersom p är ett primtal och $p > a_0$. Därmed kan p inte heller dela produkten $a_0 F(0)$ eftersom p är ett primtal. Vi har kommit fram till ett viktigt resultat nämligen att den linjära kombinationen, $a_0 F(0) + a_1 F(1) + \cdots + a_N F(N)$, är ett heltal men icke-delbart med p. Det resultatet kommer vi att använda oss av i nästa steg.

Vi har från medelvärdesatsen fått fram att

$$a_0 F(0) + a_1 F(1) + \cdots + a_N F(N) = a_1 \epsilon_1 + \cdots + a_N \epsilon_N$$

Vi ska visa att $a_1 \epsilon_1 + \cdots + a_N \epsilon_N < 1$. Vi kommer få att den inte kan vara nollskilt, och vi kommer att ha vår motsägelse. Vi påminner oss om att vi hade

$$\epsilon_i = -ie^{i(1-\theta_i)} f(i\theta_i)$$

för $0 < \theta_i < 1$,

$$\epsilon_i = \frac{-ie^{i(1-\theta_i)}}{(p-1)!}(i\theta_i)^{p-1}(1-i\theta_i)^p \dots (N-i\theta_i)^p$$

Vi tar absolutbeloppet av ϵ_i och får

$$|\epsilon_i| \leq \frac{1}{(p-1)!} N e^N N^{p-1} 1^p \dots N^p$$

där $|(-i)| = N$ eftersom $i = 1, \dots, N$ och $|i(1-\theta_i)| = N$ eftersom $0 < \theta_i < 1$ och då är $0 < 1 - \theta_i < 1$ och $i(1-\theta_i) < i < N$.

Vidare får vi

$$|\epsilon_i| \leq \frac{1}{(p-1)!} N e^N N^{p-1} \underbrace{1^p \dots N^p}_{(1\dots N)^p (N!)^p} = \frac{e^N (N!)^p N^p}{(p-1)!}$$

för $p \gg N$

Vi tar gränsvärdet på sista olikheten då $p \to \infty$. Vi får

$$\lim_{p\to\infty} \frac{e^N (N!)^p N^p}{(p-1)!} = 0$$

Och då har vi olikheten

$$|\epsilon_i| \leq e^N \frac{(N!)^p N^p}{(p-1)!} \to 0 \tag{2}$$

då $p \to \infty$.

Vi vill däremot inte att $p \to \infty$, utan bara göra den tillräckligt stort. På det sättet kan vi göra andra olikheten i (2) väldigt liten. I sin tur kan vi göra $|a_1\epsilon_1 + \cdots + a_N\epsilon_N|$ väldigt liten.

Så om vi väljer p stort så har vi $|a_1\epsilon_1 + \cdots + a_N\epsilon_N| < 1$. Men detta har även en likhet, nämligen

$$|a_1\epsilon_1 + \cdots + a_N\epsilon_N| = |a_0F(0) + \cdots + a_NF(N)|$$

som vi hade visat vara ett heltal. Då måste det följa att $a_0F(0) + \cdots + a_NF(N) = 0$ och alltså delar p. Men detta är en motsägelse eftersom vi redan vet att $a_0F(0) + \cdots + a_NF(N)$ inte är delbar med p. Detta är även en motsägelse till att e är algebraisk. Vi har därmed visat att e inte är algebraisk. e är transcendent och beviset är klart.

□

7.4 Lindemann-Weierstrass och Eulers formel: π är transcendent

Ferdinand von Lindemann var den första som bevisade att π är transcendent, år 1882. *The quadrature of the circle*, alltså cirkelns kvadratur, har länge varit ett problem sedan antiken. Matematikerna i den tiden försökte konstruera en kvadrat som har samma area som cirkeln, alltså π, med endast en linjal och passare. Ett sådant försök finns beskrivet i *the Rhind Papyrus*, ett gammalt och känt matematisk dokument (c. 1650 B.C).

I samband med Lindemanns bevis om att π är icke-algebraisk, har det visat sig att det är omöjligt att lösa problemet med en linjal och en kompass. Hans bevis grundar sig på Hermites bevis om att e är transcendent. Man brukar därför kalla satsen för Hermite-Lindemann sats. Det intressanta i Lindemanns sats är att den visar att både e och π är transcendenta. Dock, så ska vi inte bevisa transcendensen av π med hjälp av Lindemanns sats.

Vi ska istället tillämpa Lindemann-Weierstrass sats och Eulers formel, där vi antar att e är transcendent, vilket vi bevisade i förra kapitlet.

Sats 7.4.1: Lindemann-Weierstrass

Om α är ett nollskilt algebraiskt tal då är e^α ett transcendent tal.

Från sats 7.4.1 kan vi visa att π är transcendent med en motsägelse.

Anmärkning

En produkt av två algebraiska tal är ett algebraiskt tal.

Bevis av sats 7.4.1 med motsägelse

Utifrån Eulers formel vet vi att

$$e^{i\pi} = -1$$

där i är ett imaginärt och algebraiskt tal, samt att -1 är ett algebraiskt tal och icke-transcendent.

Om vi nu tillämpar Lindemann-Weierstrass på Eulers formula vet vi att $i\pi$ inte kan vara ett algebraiskt tal. Därmed kan vi bevisa att π är transcendent med en motsägelse. Beviset är klart.

$\square$

Referenser

[1] A Math: Solutions for Homewok 1, http://amath.kaist.ac.kr/pde_lab/members/JaywanChung/MAS501_2011/MAS501-2011-Homework-01-sol.pdf
Nedladdat 2018-12-15

[2] Brilliant: Algebraic Number Theory, https://brilliant.org/wiki/algebraic-number-theory/
Nedladdat 2018-12-29

[3] CS.Toronto: The number e is transcendental, http://www.cs.toronto.edu/~yuvalf/Herstein%20Beweis%20der%20Transzendenz%20der%20Zahl%20e.pdf
Nedladdat 2018-11-25

[4] David Richeson, Division by Zero: The transcendence of e https://divisbyzero.com/2010/09/28/the-transcendence-of-e/
Nedladdat 2018-11-25

[5] Faculty Bard: Homework 2 Solutions, http://faculty.bard.edu/belk/math351/Homework2Solutions.pdf
Nedladdat 2018-12-16

[6] Felix Klein: *FAMOUS PROBLEMS OF ELEMENTARY GEOMETRY.* DOVER PUBLICATIONS, INC, NEW YORK, 1956.

[7] Gallica: Journale de matématiques pures et appliquées, http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1851_1_16_A5_0.pdf
Nedladdat 2018-11-27

[8] Ivan Niven: *Irrational numbers.* Mathematical Association of America, New York, 1956.

[9] Ivan Niven: *Numbers: Rational and Irrational.* THE L. W. SINGER COMPANY, New York, 1961.

[10] Julian Havil: *The irrationals: a story of the numbers you can't count on.* Princeton University Press, 2014.

[11] Math.CMU: Reals are uncountable, http://www.math.cmu.edu/~wgunther/127m12/notes/CSB.pdf
Nedladdat 2018-11-09

[12] Math Hawaii: Logic, Language and Proof, https://math.hawaii.edu/~myounsi/teaching/mat200/Homework9Solution.pdf
Nedladdat 2018-12-16

[13] Michel Wladschmidt: History of irrational and transcendental numbers https://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/SurveyIrrationalityColloquium2007.pdf
Nedladdat 2018-12-20

[14] Researchgate: Gauss's Lemma and the Irrationality of roots, https://www.researchgate.net/publication/259735388_Gauss's_Lemma_and_the_Irrationality_of_Roots
Nedladdat 2018-11-14

[15] Wikipedia, the free encyclopedia: Cantor's diagonal argument, https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor%27s_diagonal_argument
Nedladdat 2018-11-14

[16] Wikipedia, the free encyclopedia: Eulers formel, https://sv.wikipedia.org/wiki/Eulers_formel
Nedladdat 2019-01-11

[17] Wikipedia, the free encyclopedia: Hippasus https://en.wikipedia.org/wiki/Hippasus
Nedladdat 2019-05-01

[18] Wikipedia, the free encyclopedia: Liouville number, https://en.wikipedia.org/wiki/Liouville_number
Nedladdat 2019-04-29

[19] Wikipedia: the free encyclopedia: Rational root theorem, https://en.wikipedia.org/wiki/Rational_root_theorem
Nedladdat 2018-11-10

[20] Wikipedia, the free encyclopedia: Transcendenta tal, https://sv.wikipedia.org/wiki/Transcendenta_tal
Nedladdat 2018-11-05

[21] Wordpress: Theorem of the week, https://theoremoftheweek.wordpress.com/2010/02/24/theorem-18-the-rational-numbers-are-countable/
Nedladdat 2018-11-19