SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Partiellt ordnade mängder, incidensalgebra och Möbius inverteringsformel

av

Karin Hedlund

2019 - No K19

Partiellt ordnade mängder, incidensalgebra och Möbius inverteringsformel

Karin Hedlund

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Dan Petersen

2019

Partiellt ordnade mängder, incidensalgebra och Möbius inverteringsformel

Karin Hedlund

Innehåll

1 Inledning

Många gånger kan två till synes helt olika ting visa sig härstamma från samma källa. Som en blyertspenna och en diamant. På samma sätt som olika förhållanden påverkar utgången i organisk kemi, så kan samma gälla i matematik. Principen om inklusion-exklusion används för att beräkna unionen av olika mängder genom en alternerande addition och subtraktion av olika snittvärden. Möbiusfunktionen såsom den introduceras i talteori ger ett värde utifrån ett tals primtalsfaktorisering. Två vid första anblick vitt skilda beräkningar, men det visar sig att de båda är specialfall av en mer generell formel: Möbius inverteringsformel. Denna uppsats kommer undersöka hur dessa två fall uppstår ur Möbius interteringsformel med grund i kapitel 3 i *Enumerative Combinatorics*[3] av Richard P. Stanley.

2 Principen om inklusion-exklusion

Låt X vara en ändlig mängd, låt $A_1, A_2, ..., A_n$ vara delmängder av X. Vi är intresserade av $\mid X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \mid$, alltså hur många element som finns i X och inte i någon av delmängderna. För att finna svaret på detta kan vi använda principen om inklusion-exklusion.

Sats 2.1. Så som principen om inklusion-exklusion är beskriven av Biggs[1, s. 113] så gäller att om $A_1, A_2, ..., A_n$ är ändliga mängder så är

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - ... + (-1)^{n-1}\alpha_n$$

där α_i är summan av kardinaliteten på snitten av mängderna där snitten tas på i mängder i taget.

Exempel 2.1. På ett sjukhus befinner sig 35 patienter. Av dem har 14 halsont, 12 har hosta och 10 har feber. Det finns 7 patienter som har både halsont och hosta, 4 patienter som har hosta och feber samt 3 patienter som har halsont och feber. Det är 2 patienter som har alla tre symptom. Hur många patienter på sjukhuset har inget av dessa symptom?

Lösning. Vi betecknar symptomen sådana att S=halsont, C=hosta och F=feber. Först löser vi med hjälp av principen om inklusion-exklusion. Då är

$$\alpha_1 = |S| + |C| + |F| = 14 + 12 + 10 = 36$$

$$\alpha_2 = |S \cap C| + |S \cap F| + |C \cap F| = 7 + 3 + 4 = 14$$

$$\alpha_3 = |S \cap C \cap F| = 2.$$

Med definitionen av inklusion-exklusion får vi då

$$|S \cup C \cup F| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 36 - 14 + 2 = 24.$$

Alltså var det 35-24=11 patienter som inte hade något av dessa tre symptom.

3 Talteoretiska Möbiusfunktionen

Den talteoretiska Möbiusfunktionen betecknas μ och karaktäriseras av

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ om } d = 1 \\ 0, \text{ om } d \text{ innehåller minst en upprepad primfaktor} \\ (-1)^k, \text{ om } d \text{ består av } k \text{ unika primfaktorer.} \end{cases}$$

Exempel 3.1. $\mu(60) = 0$ eftersom $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, alltså innehåller 60 en upprepad primfaktor, 2^2.

Möbiusfunktionen har den speciella egenskapen för delare d till ett tal n att

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0 \text{ om n} > 1 \\ 1 \text{ om n=1.} \end{cases}$$

Bevis. Antag att $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_r^{e_r}$ där p_i är primtal och $e_i \in \mathbb{N}$. Varje delare till n är på formen $d = p_1^{f_1} p_2^{f_2} ... p_r^{f_r}$. Möbiusfunktionen $\mu(d)$ är lika med noll om inte varje f_i är lika med 0 eller 1. Därmed är varje delare d där $\mu(d) \neq 0$ en delmängd till $\{p_1, p_2, ..., p_r\}$ som innehåller de primfaktorer p_i där $f_i = 1$. Antalet sådana delmängder av storlek k är $\binom{r}{k}$ och $\mu(d)$ är $(-1)^k$, så vi får

$$\sum_{d|n} = 1 - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - ... + (-1)^r \binom{r}{r} = 0.$$

Där vi använder symmetrin kring de binomiala talen för att se att summan blir lika med 0 [1, s. 117].

Exempel 3.2.

$$\sum_{d|60} \mu(d) =$$

$$= \mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\mu(4)+\mu(5)\mu(6)+\mu(10)+\mu(12)+\mu(15)+\mu(20)+\mu(30)+\mu(60) =$$

$$= 1 - 1 - 1 + 0 - 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 = 0.$$

Vi kan även i talteori formulera Möbiusinversionen.

Sats 3.1. Låt g vara en funktion på $\mathbb{N}$ och antag att f är funktionen som erhålls genom

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d).$$

Då fås g genom

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Bevis. Genom substitution av $f\left(\frac{n}{d}\right)$ i den andra ekvationen fås

$$\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{c|n/d} g(c) = \sum_{(c,d)\in S} \sum \mu(d) g(c).$$

Summan tas över mängden S av alla par (c, d) för vilka $d \mid n$ och $c \mid n/d$. Detta är samma mängd av par där $c \mid n$ och $d \mid n/c$ så vi kan skriva om summan som

$$\sum_{c|n} g(c) \left(\sum_{d|n/c} \mu(d) \right).$$

Summan över μ är lika med noll när $n/c \geq 2$ som vi såg tidigare, därför är den enda återstående termen $n = c$, vilket ger oss

$$g(n) \sum_{d|1} \mu(d) = g(n)\mu(1) = g(n).$$

Vilket skulle visas [1, s.118].

4 Partiellt ordnade mängder

Innan vi kan formulera Möbius inverteringsformel så måste vi ställa upp några grundläggande definitioner hos partiellt ordnade mängder.

4.1 Grundläggande definitioner

En *partiellt ordnad mängd* (pomängd) P är en mängd tillsammans med en relation $\leq$ som uppfyller följande tre axiom.

1. För alla $t \in P$ så gäller det att $t \leq t$ (reflexivitet).
2. Om $s \leq t$ och $t \leq s$ så är $s = t$ (antisymmetri).
3. Om $s \leq t$ och $t \leq u$ så är $s \leq u$ (transitivitet).

Vi säger att två element t och s i P är *jämförbara* om $s \leq t$ eller $t \leq s$. Vidare säger vi att s och t är *ojämförbara* om $s \nleq t$ eller $t \nleq s$.

Exempel 4.1. Låt $n \in P$. Mängden $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ med sin vanliga ordningsföljd bildar en partiellt ordnad mängd med n element med den speciella egenskapen att alla element är jämförbara.

Exempel 4.2. Låt $n \in \mathbb{N}$. Mängden $[2]^n$ av alla delmängder av $[n]$ kan göras till en pomängd B_n, den boolska algebran, genom att definiera $S \leq T$ om $S \subseteq T$ som mängder. Vi säger då att B_n innehåller delmängderna av $[n]$ ordnat av inklusion.

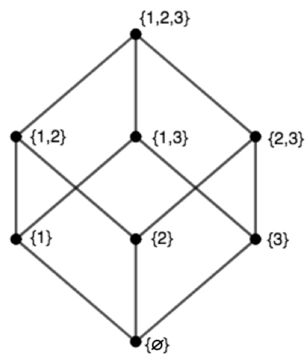
Exempel 4.3. Låt $n \in P$. Mängden av alla positiva heltal som delar n bildar en pomängd D_n genom att definiera $i \leq j$ i D_n om j är delbar med i.

Definition 4.1. Om $s, t \in P$, så säger vi att t *täcker* s om $s < t$ och det inte finns något element u som uppfyller $s < u < t$. Vi betecknar detta som $s \lessdot t$.

En ändlig pomängd bestäms helt och hållet av denna relation. Det går att rita upp pomängder i en graf kallad *Hassediagram*, där punkterna är elementen i P och kanterna är täckningsrelationen. Relationen ritas på ett sådant sätt att om t täcker s, så ritas t ovanför s.

Exempel 4.4. Nedan visas Hassediagrammen för pomängderna med maximalt tre element.

Exempel 4.5. Hassediagrammet för B_3 visas nedan.



Definition 4.2. Vi säger att P har ett minsta element $\hat{0}$ om det existerar ett element $\hat{0} \in P$ sådant att $t \geq \hat{0}$ för alla $t \in P$. På samma sätt säger vi att P har ett största element $\hat{1}$ om det existerar ett element $\hat{1} \in P$ sådant att $t \leq \hat{1}$ för alla $t \in P$.

Definition 4.3. Ett maximalt element i en pomängd P är ett element som inte är mindre än något annat element i P. Ett minimalt element är ett element som inte är större än något annat element i P.

Definition 4.4. Om P är en ändlig pomängd så är P^{op} samma pomängd P med elementen i omvänd ordning sådant att

$$x \leq y \; i \; P \iff y \leq x \; i \; P^{op}$$

Definition 4.5. En *delpomängd* Q av P är en delmängd av P med en partiell ordning i Q där $s \leq t$ om och endast om $s \leq t$ i P.

Definition 4.6. Ett slutet intervall i en pomängd P är en delpomängd på formen $[s,t] = \{u \in P : s \leq u \leq t\}$ för några $s \leq t$.

Lemma 4.1. Det går att namnge elementen $t_1 < t_2 ... < t_n$ i en ändlig pomängd P på sådant sätt att om $t_i \leq t_j$ så implicerar det att $i \leq j$.

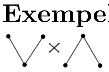
Bevis. Om P är ändligt så har P maximala element. Låt x vara ett maximalt element och namnge det t_n. Vidare har mängden $P \setminus \{t_n\}$ maximala element. Således kan ett maximalt element y väljas och namnges t_{n-1}. Upprepas detta argument fås en namngiven ordning där om $t_i \leq t_j$ så implicerar det att $i \leq j$ [2, s. 14].

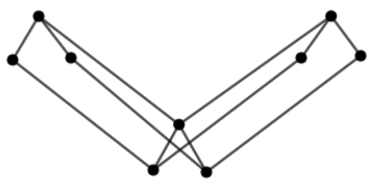
Definition 4.7. En kedja är en pomängd i vilken alla element är jämförbara.

Exempel 4.6. De naturliga talen $\mathbb{N}$ bildar en kedja.

Definition 4.8. Om P och Q är pomängder är den direkta produkten av P och Q pomängden $P \times Q$ på mängden $\{(s,t) : s \in P, t \in Q\}$ sådant att $(s,t) \leq (s',t')$ i $P \times Q$ om $s \leq s'$ i P och $t \leq t'$ i Q.

För att rita Hassediagrammet för produkten $P \times Q$ så ritas först Hassediagrammet för P. Sedan ersätts varje element $t \in P$ med en kopia av Q som vi betecknar Q_t. Slutligen dras kanter mellan respektive element Q_s och Q_t om s och t är sammankopplade i P.

Exempel 4.7. Hassediagrammet för den direkta produkten av pomängderna  ritas enligt nedan.



Definition 4.9. Två pomängder P och Q är *isomorfa* om det existerar en ordningsbevarande bijektion $\phi : P \to Q$ vars invers också är ordningsbevarande, det vill säga

$$s \leq t \text{ i } P \iff \phi(s) \leq \phi(t) \text{ i } Q$$

4.2 Boolska algebran B_n

Sats 4.1. Pomängden av delmängder till en mängd med n element, B_n, är isomorf med pomängden $\{0,1\}^n$, produkten av kedjan med två element n gånger.

För att visa att dessa två pomängder är isomorfa så hjälper det att påminna sig om att antalet delmängder till en mängd med n element är 2^n och hur man bevisar det. Antag att vi har en mängd med n element, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, och Y är ett alfabet som består av ett och noll, $Y = \{0, 1\}$. Varje delmängd S av X ger ett ord av längd n i Y genom följande funktion

$$S_i = \begin{cases} 0, \text{ om } \mathrm{x}_i \notin S \\ 1, \text{ om } \mathrm{x}_i \in S. \end{cases}$$

Vilket då motsvarar att om ett element från X finns i S så fås en etta i ordet. Därmed blir antalet delmängder så många ord av längd n som man kan konstruera av $\{0, 1\}$, vilket är 2^n[1, s.98]. Det som återstår nu är att visa att denna bijektion är ordningsbevarande. I B_n ordnas mängderna efter inklusion, så $S \leq T$ om $S \subseteq T$. På liknande sätt i $\{0, 1\}^n$ så ordnas mängderna genom att $S \leq T$ om det är så att varje position i T är större än eller lika med elementet på samma position i S. Därmed är bijektionen ordningsbevarande.

Exempel 4.8. För B_2 blir detta

$$\{1, 2\} \mapsto 11$$

$$\{1\} \mapsto 10$$

$$\{2\} \mapsto 01$$

$$\varnothing \mapsto 00$$

Sats 4.2. Den boolska algebran av en pomängd med n element är isomorf med den omvända pomängden, $B_n \cong B_n^{op}$.

Bevis. $B_n = \{S \subseteq [n]\}$. Definiera funktionen $\phi : B_n \to B_n^{op}$ sådan att

$$\phi(S) = [n] \setminus S = S^{\complement}.$$

ϕ är en bijektion, ty $\phi^{-1} = \phi$ då vi återfår samma mängd om vi applicerar ϕ två gånger. Funktionen är även ordningsbevarande eftersom

$$S \subseteq T \iff S^{\complement} \supseteq T^{\complement}$$

så gäller att

$$S \leq T \text{ i } B_n \iff \phi(S) \leq \phi(T) \text{ i } B_n^{op}.$$

4.3 Pomängden av delare D_n

Sats 4.3. Om $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ så är $D_n \cong [a_1 + 1] \times [a_2 + 1] \times ... \times [a_k + 1]$.

Bevis. Om $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ så kan är varje delare $d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{b_i}$ där $0 \leq b_i \leq a_i$. Varje delare kan skrivas om som ett ord av längd k där $d \mapsto (x_1 x_2 ... x_k)$ och där varje element x_i ges av följande funktion.

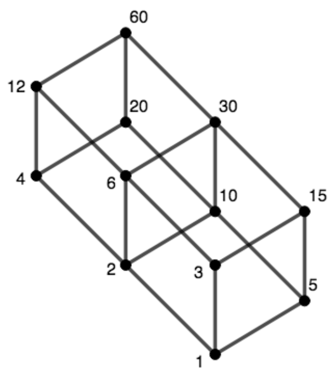
$$x_i = max\{b : p_i^b \mid$$

Vilket innebär att bokstaven i ordet motsvarar multipliciteten av primtalsfaktorerna i d. Alltså kan d skrivas som en produkt av kedjor med respektive längd lika med exponenten till vardera primtalsfaktor. Enligt aritmetikens fundamentalsats så är detta en bijektion då varje tal har en unik primtalsfaktorisering. Dessutom får vi även att bijektionen är ordningsbevarande enligt aritmetikens fundamentalsats som säger att ett tal n är delbart med ett tal d om varje primtalsfaktor i n har större multiplicitet än motsvarande i d.

Exempel 4.9. För D_{45} blir detta

$$45 \mapsto 21$$
$$15 \mapsto 11$$
$$9 \mapsto 20$$
$$5 \mapsto 01$$
$$3 \mapsto 10$$
$$1 \mapsto 00.$$

Exempel 4.10. Hassediagrammet för delarna till 60 visas i nedan figur.



Här är alltså $D_{60} \cong [3] \times [2] \times [2]$.

Sats 4.4. Pomängden av delare till n, D_n är isomorf med den omvända pomängden D_n^{op}.

Bevis. Definiera funktionen $\varphi : D_n \to D_n^{op}$ sådan att $\varphi(d) = \frac{n}{d}$. Detta är en bijektion, ty $\varphi = \varphi^{-1}$ eftersom $\varphi(\varphi(d)) = \frac{n}{n/d} = d$. och $d \mid e \iff \frac{n}{e} \mid \frac{n}{d}$ Funktionen är även ordningsbevarande eftersom

$$d_1 \leq d_2 \iff \frac{n}{d_1} \geq \frac{n}{d_2}$$

så gäller att

$$d_1 \leq d_2 \; i \; D_n \iff \varphi(d_1) \leq \varphi(d_2) \; i \; D_n^{op}.$$

5 Incidensalgebra

Om P är en pomängd så låter vi $Int(P)$ beteckna mängden av slutna intervall i P. Låt K vara en kommutativ ring, hädanefter kommer ringen av komplexa tal, $\mathbb{C}$, användas. Då definierar vi incidensalgebran $I(P)$ över $\mathbb{C}$ som ringen av alla funktioner

$$f : Int(P) \to \mathbb{C}$$

där multiplikation är definierad av

$$fg([s,u]) = \sum_{s \leq t \leq u} f([s,t])g([t,u]).$$

Hädanefter skrivs $f([s,u])$ som $f(s,u)$.

Proposition 5.1. Incidensalgebran $I(P)$ har en multiplikativ identitet δ som definieras av

$$\delta(s,t) = \begin{cases} 1, \text{ om s=t} \\ 0, \text{ om s} \neq t. \end{cases}$$

Sats 5.1. Gruppen $I(P)^{\times}$ av inverterbara element i $I(P)$ verkar från höger på mängden av alla funktioner $P \to \mathbb{C}$.

Bevis.För att verifiera att detta är en gruppverkan så måste vi verifiera att

$$f\delta(s,u) = f(s,u)$$

och

$$f(\xi\eta)(s,u) = (f\xi)\eta(s,u).$$

Först beräknar vi $f\delta(s,u)$.

$$f\delta(s,u) = \sum_{s \leq t \leq u} f(s,t)\delta(t,u) = f(s,u).$$

Sedan beräknar vi $f(\xi\eta)(s,u)$ och $(f\xi)\eta(s,u)$.

$$f(\xi\eta)(t) = \sum_{s \leq t \leq u} f(s,t)(\xi\eta)(t,u) = \sum_{s \leq t \leq u} f(s,t) \sum_{t \leq w \leq u} \xi(t,w)\eta(w,u) =$$

$$= \sum_{s \leq t \leq w \leq u} f(s,t)\xi(t,w)\eta(w,u)$$

och

$$(f\xi)\eta(s,u) = \sum_{s\leq w\leq u}(f\xi)(s,w)\eta(w,u) = \sum_{s\leq t\leq w} f(s,t)\xi(t,w)\sum_{s\leq w\leq u}\eta(w,u) =$$

$$= \sum_{s\leq t\leq w\leq u} f(s,t)\xi(t,w)\eta(w,u).$$

Därmed verkar gruppen $I(P)^{\times}$ från höger på alla funktioner $P \to \mathbb{C}$.

Definition 5.1. $Mat(P)$ är mängden av $n\times n$-matriser $M = (m_{ij})$ sådana att $m_{ij} = 0$ om inte $t_i \leq t_j$.

Sats 5.2. Incidensalgebran $I(P)$ av en pomängd är isomorf med $Mat(P)$ under matrismultiplikation.

Bevis. Identifiera incidensalgebran med mängden av alla funktioner $f : P\times P \to \mathbb{C}$, där $f(t_i,t_j) = 0$ om $t_i \not\leq t_j$. Identifiera $m_{ij} = f(t_i,t_j)$.För den $j:e$ kolonnen i matrisen gäller följande.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1j} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{j1} & m_{j2} & \dots & m_{jj} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & m_{(j+1)j} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{jj} \end{pmatrix}$$

För elementen på raderna i med $1 \leq i \leq j$ så gäller att elementen är nollskilda om $t_i \leq t_j$ och elementen är lika med noll om t_i och t_j är ojämförbara. För elementen på raderna $j < i \leq n$ gäller att elementen är lika med noll i och med att $i \geq j$ för dessa element. Upprepas detta på alla kolonner j med $1 \leq j \leq n$ så fås en övertriangulär $n\times n$-matris.

För att incidensalgebran ska vara isomorf med matrisalgebran så gäller att multiplikation ska bevaras. Multiplikation i incidensalgebran är definierad av

$$fg(i,j) = \sum_{i\leq\ k\leq j} f(i,k)g(k,j).$$

Samtidigt är matrismultiplikation mellan två $n\times n$-matriser $M = (m_{ij})$ och $N = (n_{ij})$ definierad av

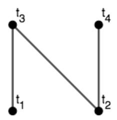
$$MN = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj}.$$

Eftersom m_{ij} kan definieras som $f(i,j)$ enligt tidigare definition och n_{ij} som $g(i,j)$ på samma sätt så blir det tydligt att multiplikation bevaras.

I och med att incidensalgebran är isomorf med $Mat(P)$ under matrismultiplikation är det enkelt att se att identiteten i incidensalgebran är precis den definierad i Proposition 5.1. Identitetsmatrisen för övertriangulära matriser är just matriserna där elementen m_{ij} är lika med 1 om $i = j$ och 0 annars, vilket blir den vanliga enhetsmatrisen.

Exempel 5.1. Incidensalgebran $I(P)$ till pomängden P i figur 2 är isomorf med algebran av alla matriser på formen i figur 1.

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{Figur 1.}$$



Figur 2.

Sats 5.3. Låt $f \in I(P)$. Då är följande ekvivalent.

a. f har en vänsterinvers.
b. f har en högerinvers.
c. f har en dubbelsidig invers som är den unika vänster- och högerinversen.
d. $f(t,t) \neq 0$ för alla $t \in P$.

Bevis. I och med att incidensalgebran är isomorf med ringen av övertriangulära matriser där detta gäller, så följer det att a,b och c är ekvivalenta.
Att $fg = \delta$ är ekvivalent med

$$f(s,s)g(s,s) = 1 \; för \; alla \; s \in P$$

och

$$f(s,u)g(s,u) = 0.$$

Vilket enligt definitionen blir

$$\sum_{s \leq t \leq u} f(s,t)g(t,u) = 0.$$

Om vi tar ut termen när $s = s$ från summan så fås

$$f(s,s)g(s,u) + \sum_{s < t \leq u} f(s,t)g(t,u) = 0.$$

Sedan flyttas summan över till högerledet och vi tar inversen av f på båda sidor.

$$g(s,u) = -f(s,s)^{-1} \sum_{s<t\leq u} f(s,t)g(t,u) \text{ } för\ alla\ s < u \in P.$$

Det följer att f har en högerinvers g om och endast om $f(s,s) \neq 0$ för alla $s \in P$. På samma sätt visar $hf = \delta$ att f har en vänsterinvers h om och endast om $f(s,s) \neq 0$ för alla $s \in P$. Om $fg = \delta$ och $hf = \delta$ följer det att $g = h$ och a,b,c och d är ekvivalenta.

Exempel 5.2. En funktion i $I(P)$ att betrakta är zetafunktionen ζ som definieras av

$$\zeta(t,u) = 1$$

för alla $t \leq u$ i P.
Det följer då att

$$\zeta^2(s,u) = \sum_{s\leq t\leq u} \zeta(s,t)\zeta(t,u) = \sum_{s\leq t\leq u} 1 = \#[s,u].$$

Zetafunktionen i kvadrat räknar därmed antalet element i intervallet mellan s och u.

6 Möbiusinversionen

Zetafunktionen av en pomängd P är inverterbar och dess invers kallas för Möbiusfunktionen av P. Möbiusfunktionen betecknas μ och karaktäriseras av

$$\mu(s,s) = 1, \quad för\ alla\ s \in P.$$
$$\mu(s,u) = -\sum_{s\leq t<u} \mu(s,t), \quad för\ alla\ s < u \in P.$$

Det här följer från Sats 5.3 där μ är inversen till ζ. Eftersom zetafunktionen alltid antar värdet 1 för alla (s,t) så fås ovanstående definition.

Sats 6.1. (Möbius inverteringsformel). Låt P vara en ändlig pomängd. Låt $f, g : P \to \mathbb{C}$. Då är

$$g(t) = \sum_{s\leq t} f(s) \text{ } för\ alla\ t \in P$$

om och endast om

$$f(t) = \sum_{s\leq t} g(s)\mu(s,t) \text{ } för\ alla\ t \in P.$$

Bevis. Enligt Sats 5.1 verkar gruppen $I(P)^{\times}$ från höger på alla funktioner $P \to \mathbb{C}$, formeln för Möbiusinversionen är då påståendet att

$$f\zeta = g \iff f = g\mu.$$

Som är sant eftersom ζ och μ är varandras inverser.

Sats 6.2. Låt P vara en ändlig pomängd. Låt $f, g : P \to \mathbb{C}$. Då är

$$g(t) = \sum_{t \leq s} f(s) \;\; för \; alla \; t \in P$$

om och endast om

$$f(t) = \sum_{t \leq s} g(s)\mu(s,t) \;\; för \; alla \; t \in P.$$

Bevis. Gruppen $I(P^{op})^{\times}$ verkar från vänster på mängden av alla funktioner $P \to \mathbb{C}$ genom

$$(\xi f)(t) = \sum_{t \leq s} \xi(t,s) f(s).$$

Formeln för Möbiusinversionen är då påståendet att

$$\zeta f = g \iff f = \mu g.$$

Som även det är sant eftersom ζ och μ är varandras inverser.

Exempel 6.1. Möbiusfunktionen på en kedja är följande.

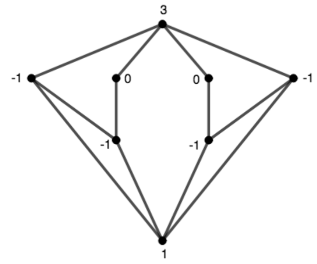
$$\mu(i,j) = \begin{cases} \text{1, om i = j} \\ \text{-1, om i+1 = j} \\ \text{0, annars.} \end{cases}$$

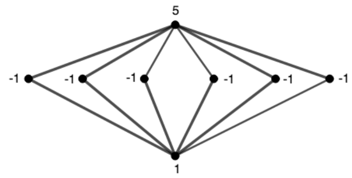
Bevis. Från ekvationerna

$$\mu(s,s) = 1, \quad för \; alla \; s \in P$$
$$\mu(s,u) = -\sum_{s \leq t < u} \mu(s,t), \quad för \; alla \; s < u \in P$$

så följer det från den första ekvationen att $\mu(i,j) = 1$ om $i = j$. Från den andra ekvationen så följer det att summan av Möbiusfunktionen på alla elementen som ligger under u när vi beräknar $\mu(s,u)$ ska vara lika med noll. Därmed får vi att Möbiusfunktionen blir lika med noll när avståndet mellan i och j är större än två.

Exempel 6.2. Beräkningen av $\mu(\hat{0}, t)$ på olika pomängder kan se ut som följande:





På samma sätt som vid beräkningen av Möbiusfunktionen av en kedja så följer det även här att summan av Möbiusfunktionen av alla element som ligger under det elementet vi räknar till ska bli samma som värdet av Möbiusfunktionen av det elementet. Därmed kan vi se det som att summan av Möbiusfunktionen från ett element tillsammans med alla som ligger under det ska bli lika med noll. Därför får vi till exempel i den andra figuren att alla element som täcker $\hat{0}$ får värdet -1 medan $\hat{1}$ får värdet 5.

6.1 Olika beräkningar av Möbiusfunktionen

Möbius inverteringsformel kan användas på olika typer av pomängder med olika syften. Här följer ett par exempel på hur Möbius inverteringsformel beräknas och hur den generella formeln utmynnar i specifika fall. För att kunna bevisa hur man beräknar Möbiusfunktionen för olika pomängder behöver vi först produktsatsen.

Sats 6.3. Låt P och Q vara ändliga pomängder och låt P $\times$ Q vara deras produkt. Om $(s,t) \leq (s',t')$ i $P \times Q$ så är

$$\mu_{P\times Q}((s,t),(s',t')) = \mu_P(s,s')\mu_Q(t,t').$$

Bevis. Låt $(s,t) \leq (s',t')$. Då är

$$\sum_{(s,t)\leq(u,v)\leq(s',t')} \mu_P(s,u)\mu_Q(t,v) = \left(\sum_{s\leq u\leq s'} \mu_P(s,u)\right)\left(\sum_{t\leq v\leq t'} \mu_Q(t,v)\right) =$$

$$= \delta_{ss'}\delta_{tt'} = \delta_{(s,t)(s',t')}.$$

δ i det här fallet är *Kronecker delta*, som definieras precis som i Proposition 5.1. Det som detta betyder för beviset är just att enligt tidigare definition så gäller att summan

$$\sum_{s \leq u \leq s'} \mu_P(s, u) = 0$$

om inte $s = s'$ då den är lika med 1, och summan

$$\sum_{t \leq v \leq t'} \mu_Q(t, v) = 0$$

om inte $t = t'$, då den är lika med 1. Vilket då ger Kronecker deltat.

6.1.1 Möbiusfunktionen av B_n

Exempel 6.3. Låt P = B_n, den boolska algebran av rang n. Då är $B_n \cong [2]^n$ och Möbiusfunktionen på kedjan $[2]^n = \{0{,}1\}$ ges av $\mu(0,0) = \mu(1,1) = 1$ och $\mu(0,1) = -1$. Från Exempel 4.1 kan vi erinra oss delmängderna S och T som ord av längd n med ettor och nollor, där de också är ordnade på sådant sätt att om $S \leq T$ så gäller det att om ett element finns i S så ska det också finnas i T. Alltså om en etta finns i S så ska den också finnas i T. Enligt produktsatsen blir då

$$\mu_{B_n}(S,T) = \mu_{B_n}((s_1 s_2 ... s_n), (t_1 t_2 ... t_n)) = \mu_{[2]}(s_1, t_1)\mu_{[2]}(s_2, t_2)...\mu_{[2]}(s_n, t_n).$$

Eftersom varje $\mu_2(s_i, t_i)$ är antingen lika med 1 om $s_i = t_i$ och lika med -1 om $s_i \neq t_i$, alltså om ett element finns med i både S och T eller bara i T, så blir Möbiusfunktionen lika med

$$\mu(S,T) = (-1)^{|T \setminus S|}.$$

Möbiusinversionen för B_n blir då

$$g(T) = \sum_{S \subseteq T} f(S), \quad för\ alla\ S \subseteq X$$

om och endast om

$$f(T) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T \setminus S|} g(S), \quad för\ alla\ S \subseteq X.$$

Vilket är principen om inklusion-exklusion.

Om vi har en universell mängd X med delmängderna $A_1, ..., A_n \subseteq X$ så kan vi definiera en funktion $\varphi : X \to B_n$ där ett element $x \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x))$ i $B_n \cong [2]^n$ sådant att

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 \text{ om x} \notin A_i \\ 1 \text{ om x} \in A_i. \end{cases}$$

Informellt kan vi betrakta detta som att en etta betyder "Ja" för att x är ett element i mängden A_i och en nolla betyder "Nej".

Sedan definierar vi en funktion $f : B_n \to \mathbb{C}$, där $f(w) = \#\{x \mid \phi(x) = w\}$, som räknar antalet element som endast uppfyller kraven för de mängder i vilken de räknas. Vi definierar även en funktion $g : B_n \to \mathbb{C}$, där $g(w) = \#\{x \in X \mid \phi(x) \geq w\}$, som räknar alla element i en mängd A_i, men där även element som uppfyller andra mängder också räknas in. Applicering av Möbius inverteringformel blir sedan att antalet element i olika mängder och snitten på dessa adderas respektive subtraheras såsom i Principen om Inklusion-Exklusion.

I Sats 2.1 så adderas och subtraheras kardinaliteten när snittet tas på i mängder i taget. Att räkna snittet på i mängder kan här översättas i den boolska algebran som att det kommer finnas i st ettor i "ordet".

Exempel 6.4. I Exempel 2.1 så användes principen om inklusion-exklusion för att räkna ut hur många patienter som inte hade något av de listade symptomen. Om vi nu istället vill nyttja Möbiusfunktionen så tecknar vi först om mängderna till en boolsk algebra med tre element. Då får vi:

$g(100)$ = antal patienter med halsont = 14
$g(010)$ = antal patienter med hosta = 12
$g(001)$ = antal patienter med feber = 10
$g(110)$ = antal patienter med både halsont och hosta = 7
$g(101)$ = antal patienter med både halsont och feber = 3
$g(011)$ = antal patienter med både hosta och feber = 4
$g(111)$ = antal patienter med halsont, hosta och feber = 2.

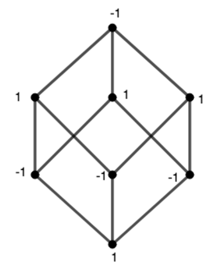
Det vi nu söker är f(000), alltså hur många element som inte tillhör någon av de tre mängderna. Möbius inverteringsformel ger då

$$f(000) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|S \setminus 000|} g(S) =$$

$$= (-1)^{|111 \setminus 000|} \cdot 2 + (-1)^{|011 \setminus 000|} \cdot 4 + (-1)^{|101 \setminus 000|} \cdot 3 + (-1)^{|110 \setminus 000|} \cdot 7 +$$
$$+ (-1)^{|001 \setminus 000|} \cdot 10 + (-1)^{|010 \setminus 000|} \cdot 12 + (-1)^{|100 \setminus 000|} \cdot 14 + (-1)^{|000 \setminus 000|} \cdot 35 =$$
$$= -2 + 4 + 3 + 7 - 10 - 12 - 14 + 35 = 11.$$

Precis som när vi använde inklusion-exklusion så får vi svaret att 11 patienter inte har något av de listade symptomen. Det visar sig att Möbiusinversionen på de boolska algebran ger samma slags alternerande addition och subtraktion av värdena på snitten som i principen om inklusion-exklusion.

Nu gjordes detta algebraiskt, men genom att rita upp Hassediagrammet för B_3 enligt Exempel 4.5 och beräkna Möbiusfunktionen $\mu(\hat{0}, t)$ så fås en grafisk representation av exakt de värden som uppstår när Möbius inverteringsformel används.



6.1.2 Möbiusfunktionen av D_n

Exempel 6.5. Låt f, g vara funktioner definierade på $\mathbb{N}$. Möbius inverteringsformel ger då att

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

om och endast om

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu(d, n).$$

Enligt Sats 4.3 så är $D_n \cong [a_1+1] \times [a_2+1] \times ... \times [a_k+1]$. Med produktsatsen blir då

$$\mu_{D_n}(d, n) = \mu_{[a_1+1]}(x_1, y_1)\mu_{[a_2+1]}(x_2, y_2)...\mu_{[a_k+1]}(x_k, y_k)$$

där

$$\mu_{[a_i+1]} = \begin{cases} \text{1 om } \mathrm{x}_i = y_i \\ \text{-1 om } \mathrm{x}_i + 1 = y_i \\ \text{0 annars.} \end{cases}$$

Väljer vi att beräkna Möbiusfunktionen från $\hat{0} = 1$ till en delare d, där $d \mid n$, fås den talteoretiska Möbiusfunktionen. Detta eftersom μ då räknas på kedjorna som längden till multipliciteten av en primfaktor, vilket då precis ger den talteoretiska Möbiusfunktionen.

Exempel 6.6.

$$\mu_{D_{60}}(1, 60) = \mu_{[3]}(0, 2)\mu_{[2]}(0, 1)\mu_{[2]}(0, 1) = 0 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0$$

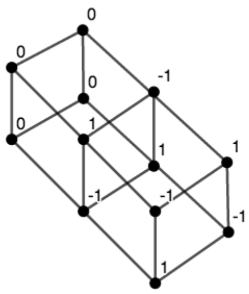
Här ser vi återigen att den kvadratiska faktorn 2^2 ger att Möbiusfunktionen får värdet 0.

Exempel 6.7.

$$\mu_{D_{42}}(1, 42) = \mu_{[2]}(0, 1)\mu_{[2]}(0, 1)\mu_{[2]}(0, 1) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = (-1)$$

På samma sätt kan vi här se att eftersom $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ så innehåller 42 tre unika primtalsfaktorer och Möbiusfunktionen blir $(-1)^3 = (-1)$, så som den definieras i talteori.

Exempel 6.8. I Exempel 4.10 visades Hassediagrammet för mängden av delare till 60. Att beräkna Möbiusfunktionen $\mu(\hat{0}, t)$ på denna pomängd ser ut som följer.



Det som kan observeras från ovanstående Hassediagram är just att när en delare innehåller en primfaktor i kvadrat så blir Möbiusfunktionen av det talet lika med noll.

7 Sammanfattning

Det som har visats är att beroende på förhållande så mynnar Möbius inverteringsformel ut i två välkända koncept. Detta genom att fokusera på två olika sorters partiellt ordnade mängder och hur Möbiusfunktionen beräknas på dem. Principen om inklusion-exklusion och den talteoretiska Möbiusfunktionen har alltså mer gemensamt än vad som uppfattas vid en första blick.

Källförteckning

[1] N.L. Biggs. *Discrete Mathematics*. Oxford University Press, 2002.

[2] E. O'Donnell C.J. Spegiel. *Incidence Algebras*. Dekker, 1997.

[3] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*. Cambridge University Press, 1997.