



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Det matematiska arbetet i att försöka motverka effekten
av gerrymandering i USA

av

Josef Landén

2019 - No K23

Det matematiska arbetet i att försöka motverka effekten av gerrymandering i USA

Josef Landén

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2019

Innehåll

1	Introduktion	2
1.1	Bakgrund	2
1.2	Syfte	4
2	Matematisk kontroll av gerrymandering	5
2.1	Befolkningsdisposition	5
2.2	Kompakthet	9
2.2.1	'Polsby-Popper'-förhållandet	9
2.2.2	'Längsta axel'-förhållandet	13
2.2.3	'Den omskrivna cirkel'-förhållandet	14
2.2.4	'Tröghetsmomentets'-förhållande	16
2.3	" <i>Bounded efficiency gap</i> "	21
2.4	Problematiken i formlerna	25
2.4.1	Missformad $\neq$ gerrymanderad	25
2.4.2	Kan ett distrikt klara alla tester?	28
3	En alternativ lösning	37
3.1	Fair Majority Voting	37
3.2	Hur FMV fungerar	40

1 Introduktion

1.1 Bakgrund

Ett aktivt ämne i amerikansk media de senaste åren har handlat om den politiska manipulationen av distriktgränser i de amerikanska delstaterna i syfte att utöka eller påverka ett partis politiska inflytande. Denna form av manipulation kallas för "gerrymandering" och har fått sitt namn efter Massachusetts guvenör under tidigt 1800-talet, Elbridge Gerry. Under Gerrys regim drogs nya distriktsgränser i Massachusetts i syfte att upprätthålla hans och partiets, "Demokratisk-republikanska partiet" (föregångaren till "Republikanska-" och "Demokratiska partiet"), politiska inflytande i delstaten. När dessa nya distrikt tillkännagavs reagerade många på distriktens konstiga utseenden, speciellt ett av dem som en satirkonstnär för Boston Gazette likställde med en salamander. Denna liknelse fick snabbt fäste i den tidens media under namnet *gerry-mander-ing* (ett teleskopord av guvenörens efternamn och salamander), och fenomenet diskuteras än idag under samma namn [1].



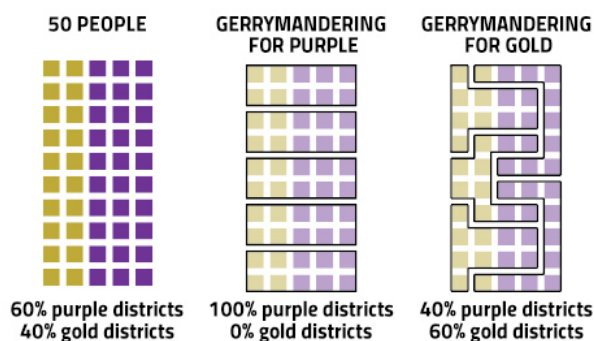
Figur 1: Massachusetts "Gerry-mander"-distrikt

Vad är egentligen gerrymandering och hur påverkar det egentligen den politiska demografin? Gerrymandering är som sagt den politiska handlingen att dra nya distriktgränser i syfte att utöka eller påverka ett partis inflytande. I USA drar man nya distrikt var fjärde år i syfte att fördela befolkningen lika

mellan de olika distrikten inför kommande val. I jämförelse med Sverige där valsystemet bygger på att få största andelen röster i landet, så bygger den amerikanska valsystemet på att få största andelen röster i så många distrikt som möjligt. Antalet "vunna" distrikt i USA bestämmer antalet platser ett parti får i kongressen, vilket kan liknas med hur platserna i riksdagen fördelas utefter andelen röster de olika partierna får i Sverige. Av denna anledning är det alltså en nödvändighet att dra nya distriktsgränser inför kommande val, eftersom fokuset inte ligger på vad flest personer röstar på, utan i hur många distrikt som ett parti får störst andel röster. Ett distrikt med dubbelt så många väljare får alltså enligt detta valsystem lika mycket politiskt inflyttande i kongressen som ett distrikt med betydligt färre väljare. Därför är det viktigt att dra nya distriktsgränser för att fördela befolkningen lika mellan distrikten och på så sätt fördela det politiska inflyttandet i delstaten. Problemet med allt detta ligger däremot i det faktum att det är de invalda politikerna som drar de nya distriktsgrensarna i delstaterna. Detta ger partierna med stark majoritet i sin delstat möjligheten att upprätthålla sitt politiska inflyttande eller till och med utöka det genom exempelvis gerrymandering.

Vad folk ofta reagerar på när de misstänker att ett distrikt tagits fram genom gerrymandering är att distriktet har en väldigt underlig form (precis som "salamanderdistriktet") eller att antalet vunna distrikt inte överensstämmer med röstningsstatistiken. Ett exempel på detta är North Carolina där republikanerna införskaffade 53% av rösterna i valet 2016, men där de kom att tilldelas 77% av platserna i kongressen för denna delstat. Ett resultat som är möjligt att uppnå genom gerrymandering [2].

För att illustrera tydligare vad gerrymandering egentligen innebär kan vi titta på figur 2,



Figur 2: Beskrivande exempel på effekten av gerrymandering

Beroende på hur man drar nya distriktsgränser kommer man alltså få olika resultat. Genom att titta på en del distrikt i USA så kan man spekulera kring hur långt politiker är beredd att gå för att få resultatet man önskar, där ett av de kändare kallas "earmuffs-distriktet" (Illinois 4.de distrikt). Ett distrikt bestående av två rektangulära områden som bara hålls ihop av en motorväg.

Då kommer frågan om hur detta kan vara lagligt. Att dra nya distriktgränser är en nödvändighet inom det amerikanska valsystemet. Eftersom populationen varierar hela tiden och med kravet på att varje distrikt ska bestå av ett snarlikt antal invånare så måste man dra nya distriktgränser för att detta ska gälla. Gerrymandering innebär just att man ritar distrikten i syfte att vinna marginal eller påverka partiets utseende. Gerrymandering blir bara olaglig om man ritar distrikten på ett sätt som skapar rasifierade fördelningar, rasifierad gerrymandering" [3]. Politisk gerrymandering är laglig, men det är främst för att USA:s högsta domstol ("U.S. Supreme Court") ännu inte kunnat ge objektiva kriterier för när ett distrikt är en produkt av gerrymandering.

"One of the legal guidelines courts have established is that districts must be "compact," though no proper definition of this term has been provided." [4].

1.2 Syfte

Syftet med detta arbete är att betrakta problemet utifrån ett matematiskt perspektiv, där jag kommer redogöra för och kritiskt granska de matematiska formler man tagit fram för att beräkna om ett distrikt utsatts för gerrymandering eller inte. Jag kommer också undersöka den matematiska formel som en del jurister och matematiker menar på ska motverka möjligheterna för gerrymandering helt och hållet, *Fair Majority Voting*.

Syftet av detta arbete är alltså inte att presentera och bevisa de matematiska formlerna som diskuteras i denna text. Syftet är just att undersöka hur väl matematiken kan samspela med juridiska lagstiftningen, speciellt i fallet med juridisk kartografi.

2 Matematisk kontroll av gerrymandering

Användandet av matematik inom det amerikanska lagsystemet är inget nytt, utan är något som har förekommit i flera arkiverade rättsfall. På grund av detta så bör det inte komma som en chock att man också försökt lösa problemet med gerrymandering genom olika matematiska formler. Några av dessa idéer och formler kan man dela in i tre olika kategorier, nämligen

1. befolkningsdisposition
2. ”kompakthet”
3. ”bounded efficiency gap.”

I detta kapitel kommer vi gå igenom några av formlerna från dessa kategorier och presentera matematiken bakom dem [5]. Vi kommer granska vad de bygger på, hur man räknar med dem, men också se hur hållbara de egentligen är.

De matematiska formlerna som vi kommer arbeta med i detta kapitel bygger på antingen mängden röster lagda mellan olika distrikt i en specifik delstat, eller arean av ett specifikt distrikt. Av denna anledning kommer detta arbete fokusera på att studera Illinois 18 distrikt, med ett speciellt fokus på dess fjärde distrikt (”the earmuff”-distriktet). Eftersom Illinois fjärde distrikt är känt för att vara en produkt av gerrymandering känns det som ett bra distrikt att introducera formlerna med, eftersom det finns befintlig data som stödjer våra uträkningar. Fokuset kommer alltså inte ligga i att undersöka om ett distrikt är manipulerat eller inte, utan snarare visa på hur våra formler fungerar och hur resultatet av dem kan utläsas [6].

2.1 Befolkningsdisposition

Vi börjar vår redogörelse med att titta på den matematiska formeln för disponeringen av röstberättigade medborgare i en delstats distrikt. Eftersom det amerikanska valsystemet bygger på att ett partis politiska inflytande ökar för varje distrikt de vinner och inte efter andelen röster i hela landet, så är det viktigt att distrikten ger en rättvis bild över befolkningen i varje delstat. Därför har man tagit fram en matematisk formel som beskriver på ett ungefär hur befolkningen i en delstat ska fördelas mellan distrikten för att en sådan bild ska ges, med en viss avvikelse.

Vi säger att vi har n partier $[P_1, P_2, P_3, \dots, P_n]$ i ett distrikt i ($i = 1, 2, \dots, k$, där k är det sammanlagda antalet distrikt i delstaten). Mängden röster som de olika partierna har fått i delstaten kan betecknas som $[V_1, V_2, V_3, \dots, V_n]$ och D_i betecknar den sammanlagda mängden röster som lagts i distrikt i .

Vår matematiska formel bygger på att befolkningsdispositionen, eller snarare antalet röster som avgivits i ett val, i ett distrikt i skiljer sig så lite som möjligt

ifrån den "perfekta" dispositionen i en delstat. Denna disposition kan man enkelt få fram genom att räkna samman mängen röster som alla partier i delstaten har fått och dividera det med antalet distrikt som finns i delstaten,

$$\frac{|V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n|}{k}.$$

Ett problem som däremot kan uppstå här är att det exempelvis finns ett ojämnt antal invånare i en delstat med ett jämnt antal distrikt. Detta kommer ge oss en befolkningsdisposition i decimalform, vilket inte kan finnas. Vi kommer därför tvingas avrunda vår division i två fall, ett där vi får det största heltalet mindre än vår division och ett där vi får det minsta heltalet större än vår division, vilket kommer ge oss olikheten,

$$\left\lfloor \frac{|V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n|}{k} \right\rfloor \leq \frac{|V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n|}{k} \leq \left\lceil \frac{|V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n|}{k} \right\rceil.$$

Alla tre av dessa divisioner beskriver en nästintill perfekt fördelning av delstatens befolkning. Eftersom vi nu vill att befolkningen i vårt distrikt i ska vara så nära den "perfekta" befolkningsdispositionen i delstaten så ska vi alltså kunna byta ut uttrycket för den perfekta befolkningsdispositionen med uttrycket för antalet invånare i distrikt i ,

$$\left\lfloor \frac{|V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n|}{k} \right\rfloor \leq |(V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n) \cap D_i| \leq \left\lceil \frac{|V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n|}{k} \right\rceil.$$

Om denna olikhet nu gäller betyder det att vårt distrikt består av en nästintill perfekt andel av delstatens befolkning. Detta kriterium fungerar bra inom matematiken, men fungerar nödvändigtvis inte lika bra i verkligheten. Att dra nya distriktgränser som ger en "perfekt" fördelning av delstatens befolkning kommer inte alltid att vara möjligt, varav vi måste räkna med en viss avvikelse ifrån denna "perfekta" fördelning. Denna avvikelse kan vi uttrycka på två sätt, antingen som att det finns färre invånare i distriktet, multiplicerar det ideala antalet med $(1 - \delta)$, eller att det finns fler invånare i distriktet, multiplicerar det ideala antalet med $(1 + \delta)$, där $\delta \in [0, 1)$,

$$(1-\delta) \left\lfloor \frac{|V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n|}{k} \right\rfloor \leq |(V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n) \cap D_i| \leq (1+\delta) \left\lceil \frac{|V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n|}{k} \right\rceil.$$

Vi har nu fått ett intervall för vilket befolkningen i vårt distrikt ligger, varav det är värdet av δ som berättar hur mycket distriktets befolkning skiljer sig från den "perfekta" andelen. Tanken med detta kriterium är att olikheten ska gälla för ett så litet δ som möjligt, där $\delta = 0$ betyder att distriktet innehåller en

nästintill perfekt andel av delstatens befolkning. Värdet på δ kommer från detta sedan kunna gå mot 1, där det ökade värdet för δ berättar om en ökad skillnad mellan befolkningsandelen i vårt distrikt och den perfekta befolkningsandelen, men där δ aldrig kan anta värdet 1. Detta är på grund av att olikheterna för vilket vårt intervall bygger på inte klarar av ett sådant värde. Vår vänstra olikhet skulle exempelvis läsas som en befolkningsfördelning med noll väljare för $\delta = 1$, vilket inte är möjligt. Detta är också anledningen till varför δ inte kan vara mindre än 0, då olikheterna inte kan beskriva en befolkningsfördelning med negativt antal väljare. Vi kommer därför lämnas med $\delta \in [0, 1)$ som det ända rimliga värdeintervallet för δ [5].

Vi kan nu försöka tillämpa detta för att studera befolkningsdispositionen för Illinois fjärde distrikt. Vi kommer här bara att arbeta med dem två dominerade parterna i USA (Demokratiska partiet och Republikanska partiet).

I det amerikanska deltidsvalet införskaftade demokraterna (Dem) 2.751.992 röster (R_{Dem}) i Illinois, medans republikanerna (Rep) införskaftade 1.751.994 röster (R_{Rep}), vilket ger oss sammanlagda 4.503.986 röster lagda under detta val i Illinois 18 distrikt. Av dessa röster lades 166.189 i Illinois fjärde distrikt (D_4) [7]. Detta ger oss,

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \left\lfloor \frac{|V_{Dem} \cup V_{Rep}|}{18} \right\rfloor &\leq |(V_{Dem} \cup V_{Rep}) \cap D_4| \leq (1 + \delta) \left\lceil \frac{|V_{Dem} \cup V_{Rep}|}{18} \right\rceil \\ \Rightarrow (1 - \delta) \left\lfloor \frac{4.503.986}{18} \right\rfloor &\leq |166.189| \leq (1 + \delta) \left\lceil \frac{4.503.986}{18} \right\rceil \\ \Rightarrow (1 - \delta) \cdot 250.221 &\leq 166.189 \leq (1 + \delta) \cdot 250.222. \end{aligned}$$

Nu är frågan vad δ måste vara för att denna olikhet ska stämma. För att få fram detta kan vi räkna som två fall, där första fallet bygger på den vänstra olikheten och det andra fallet bygger på den högra olikheten.

Fall 1:

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \cdot 250.221 &\leq 166.189 \\ \Leftrightarrow -\delta &\leq \frac{166.189}{250.221} - 1 \\ \Leftrightarrow \delta &\geq -\frac{166.189}{249.744} + 1 \approx 0,335831. \end{aligned}$$

Fall 2:

$$166.189 \leq (1 + \delta) \cdot 250.222$$

$$\Leftrightarrow \frac{166.189}{250.222} - 1 \approx -0,335833 \leq \delta.$$

Vi har från dessa två fall fått två olika olikheter för δ , varav $-0,335833 \leq \delta$ inte ingår i vår intervall $\delta \in [0, 1)$. Detta betyder att vi bara har ett minsta värde för δ , nämligen 0,335831. Genom att sätta in detta värde i vår olikhet så ser vi att olikheten stämmer på båda sidorna av vår befolkningsmängd i distriktet. δ är alltså lika med 0,335831, vilket betyder att befolkningsandelen i vårt distrikt utgör ungefär två tredjedelar av den perfekta fördelningen i vår delstat.

Frågan blir nu bara om vårt δ är tillräckligt litet och om befolkningsantalet i vårt distrikt är tillräckligt nära den perfekta fördelningen. Det finns nämligen ingen bestämd gräns för vilket δ måste vara för att ett distrikt ska anses bestå av en rättvis andel av delstatens befolkning, utan intervallet för vad δ får vara bestäms vid varje specifikt rättsfall utav USAs högsta domstol. Vad vi har gjort är att beräkna för vilket δ våra olikheter gäller, varav vi bara kan spekulera kring dess rättsliga betydelse. Konkreta exempel på när denna formel använts för att avgöra ifall ett distrikt tagits fram genom gerrymandering är Georgia-fallet *Gray vs. Sanders* 1963, Alabama-fallet *Raynolds vs. Sims* 1963-1964, samt Texas-fallet *Avery vs. Midland Country* 1967-1968. Vid alla dessa fall argumenterade man för att distrikten i respektive delstat bestod av en orättvis befolkningsandel, vilket man kunde demonstrera genom den presenterade formeln ovan. På grund av detta beslöt USAs högsta domstol i samtliga fall att distriktens gränser skulle dras på nytt i syfte att fördela befolkningen lika mellan distrikten. Efter dessa fall kom även nya federala lagar att införas i samtliga delstater med syfte att förhindra samma form av distriktsmanipulering från att upprepas.

I detta arbete kommer vi läsa om flera likande värden och poäng, som δ i formeln ovan, som har som syfte att berätta till vilken grad ett distrikt kan ha tagits fram genom gerrymandering. För vilka värden och poäng som vi kan anta att ett distrikt tagits fram genom gerrymandering är inte alltid bestämda, utan varierar ofta från rättsfall till rättsfall. Av denna anledning kommer vi i detta arbete bara räkna på de olika formlerna, för att därefter spekulera kring vad de olika värdena och poängen vi fått fram kan betyda i ett rättsligt sammanhang [5].

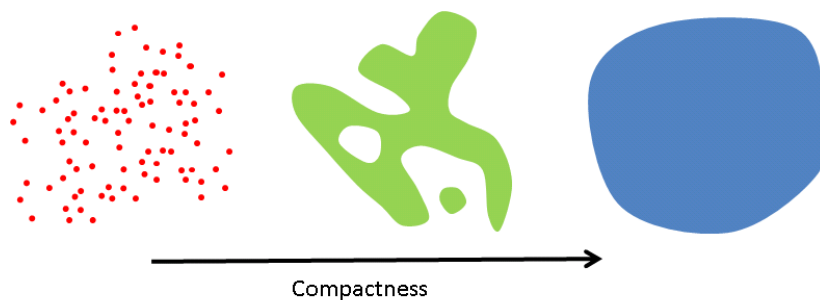
2.2 Kompakthet

Kompakthet är ett ganska svårgreppat begrepp inom detta område. Inte bara för att det finns flera olika legitima metoder man kan använda sig av för att bestämma kompakthet, men också för att begreppet i sig är väldigt dif-fust. Definitionen vi kommer jobba med här är den i *"The American Heritage Dictionary"* som definierar kompakthet på två sätt,

"....closely or firmly united or packed toghether; solid; dense...."

och

".....packed into or arranged within a relative small space....."



Figur 3: Beskrivande bild på ökad kompakthet

The American Heritage Dictionary har tillsammans med dessa definitioner målat upp en bild över vad ett icke-kompaktområde skulle kunna vara, vilket är en väldigt utspridd area, vars omkrets är väldigt lång i förhållande till dess area. Den perfekta kompaktheten kommer utifrån dessa definitioner från cirkel-figurer, vilket är en svår form att dela in alla distrikt i. Däremot kommer alla våra matematiska formler för kompakthet baseras på cirkelskivor, där vi jämför kompaktheten av ett distrikt med kompaktheten av en cirkel med snarlika, geo-metriska förutsättningar.

2.2.1 'Polsby-Popper'-förhållandet

Den första av dessa kompakthetstester är Polsby-Popper testet som framtogs av de amerikanska juridik professorerna Daniel Polsby och Robert Popper. Testet bygger på att man studerar förhållandet mellan arean A_D av ett distrikt och arean av en cirkel med samma omkrets p som distriktet [8].

Normalt sätt när man räknar med en cirkelarea så har man ofta en känd radie eller diameter att jobba med. Något som vi inte har när vi jobbar med Polsby-Popper. I detta test har vi bara cirkels omkrets att utgå ifrån, vilket innebär att vi behöver skriva om formeln för vår cirkelarea.

Omkretsen p för en cirkel med radie r är,

$$p = 2\pi r,$$

vilket innebär att

$$\frac{p}{2\pi} = r.$$

Med hjälp av detta uttryck för radien r kan vi nu skriva om formeln för cirkelarean till att bero på cirkelns omkrets p ,

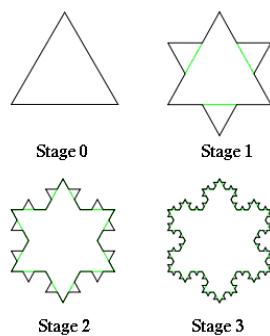
$$Cirkelarean = \pi r^2 = \pi \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = \frac{p^2}{4\pi}.$$

Vi kan nu använda denna formel för cirkelarean med avseende på dess omkrets p för att studera förhållandet mellan cirkeln och distriktets area. Detta gör vi enkelt genom att dividera distriktets area A_D med cirkelarean vars omkrets p är lika med distriktets,

$$K_1 = \frac{A_D}{\frac{p^2}{4\pi}} = \frac{4\pi A_D}{p^2} \quad .$$

Vad K_1 säger här är till vilken grad distriktgränserna dragits utefter specifika syften, på ett sätt som kan liknas med *Koch snowflakes*. Likheten mellan dessa två matematiska områden är inte matematiken i sig, utan snarare koncepten bakom dem. Om vi skulle zooma in på vår distriktkarta skulle vi exempelvis se hur vad vi trodde var raka linjer i vissa områden egentligen är mindre zick zack mönster som uppkommit genom att kartritarna dragit distriktgränsen upp och ner för mindre kvarter och områden ("fraktal"). Precis som i *Koch snowflake* kommer dessa fraktal inte påverka själva arean av området jätte mycket, utan istället dess omkrets. För att ta reda på till vilken grad dessa fraktal utgör distriktgränsen dividerar vi därför distriktets area med en cirkel som bygger på distriktets fraktala omkrets. Om distriktet är helt fritt från fraktaler och utformad efter den kompaktaste formen (cirkeln) kommer K_1 ge oss ett värde som är godtyckligt nära 1. Om vi däremot jobbar med en omkrets bestående av fraktaler kommer K_1 gå mot 0 eftersom arean av vårt cirkulära område, beroende av omkretsen för distriktet, kommer öka i takt med mängden fraktal. Detta kommer göra vår cirkulära area godtyckligt stor, vilket kommer leda till att när vi dividerar arean av vårt distrikt med detta godtyckligt litet. Vad K_1 beräknar är

alltså andelen fraktal, vilket berättar om till vilken grad distriktgränsen dragits på ett sätt som ramar in specifika hus, kvarter och områden i specifika distrikt. Något som i sin tur lägger grund för misstankar om gerrymandering.

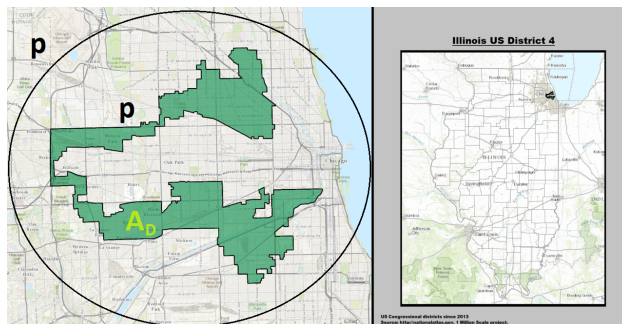


Figur 4: Beskrivande bild för "Koch Snowflake"

Nu när vi har förståelse för vad denna formel egentligen bygger på att studera och hur den fungerar kan vi använda den för att studera kompaktheten av Illinois fjärde distrikt och till vilken grad dess omkrets består av ändamålsenliga fraktaler. Arean av distriktet beräknas ligga på $130km^2$ (eller 52 squar miles) och beräknas ha en omkrets på ungefär $171km$ [9]. Detta ger oss då ett kompakthetspoäng på,

$$K_1 = \frac{4\pi \cdot 130}{171^2} = \frac{520\pi}{29241} \approx 0.0558.$$

Alla kompakthetstester i denna text kommer som sagt alltid ge ett poäng mellan 0 och 1, där ett högre kompakthetspoäng tyder på ett kompaktare område med färre fraktal och ett lägre kompakthetspoäng det motsatta. Vad som är intressant med just Polsby-Popper testet är däremot det faktum att det finns en bestämd gräns för när något bör utredas vidare för gerrymandering. Polsby och Popper menar på att alla distrikt som får mindre än 0,2 poäng på detta test kan vara en produkt av gerrymandering [5]. Eftersom vårt distrikt hamnade under denna gräns så kan vi anta att den skulle utredas vidare för gerrymandering, men som jag skrev ovan (i kapitel 2.1) så är det USAs högsta domstol som sätter de slutgiltiga gränserna.



Figur 5: Polsby-Popper testet, Illinois 4.de distrikt

Från detta kompakthetstest har man även tagit fram ett annat kriterium för kompakthet och andelen fraktal, nämligen att det ska finnas ett $C > 0$, sådan att distriktets area A är större eller lika med distriktets omkrets p upphöjt med två,

$$p^2 \leq C \cdot A,$$

där målet är att hitta det minsta värdet för C där olikheten gäller. Det är sedan upp till USAs högsta domstol att avgöra huruvida stort C får vara innan det att distriktet anses påvisa allt för stor sannolikhet för att vara en produkt av gerrymandering.

Om vi nu skulle applicera detta på Illinois fjärde distrikt får vi,

$$171^2 \leq C \cdot 130$$

$$\Leftrightarrow 29241 \leq C \cdot 130$$

$$\Rightarrow \frac{29241}{130} \approx 224,9308 \leq C.$$

För att olikheten i vårt kompakthetskriterium ska gälla måste alltså C vara som minst cirka 224,9308, varav det är upp till högsta domstolen att avgöra huruvida detta är ett acceptabelt värde för C .

Till skillnad från de andra matematiska kriterierna och testerna i denna text så har vi ingen information för hur värdet av C kan betraktas och tolkas. Anledningen till varför den tas upp är främst för att den har en avgörande roll senare i ett bevis för problematiken mellan de olika kriterierna och testerna för gerrymandering (se kapitel 2.4.2.).

2.2.2 'Längsta axel'-förhållandet

Precis som titeln antyder bygger nästa test på att vi ska undersöka förhållandet mellan arean av ett distrikt och arean av en cirkel vars diameter L är lika med längsta axeln (avståndet mellan två orter) i vårt distrikt. För att beräkna detta förhållande så gör vi som ovan och dividerar distriktets area med cirkelns area.

För att få fram arean av en cirkeln så arbetar vi ofta med dess radie r , vilket är detsamma som halva diametern L av cirkeln. Detta ger oss då formeln,

$$\text{Cirkelarean} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{L}{2}\right)^2,$$

vilket i vår formel för förhållandet mellan distriktets och cirkelns area ger oss

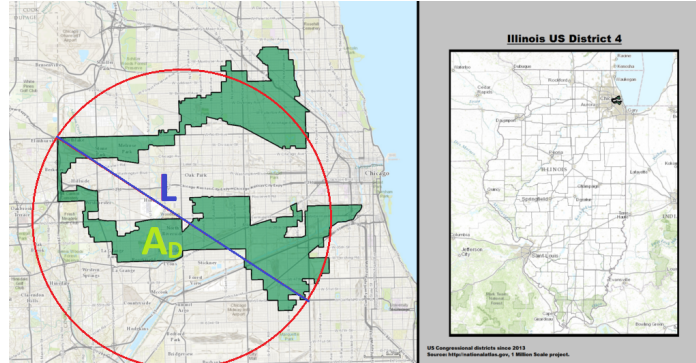
$$K_2 = \frac{A_D}{\pi \left(\frac{L}{2}\right)^2}.$$

Vad denna formel bygger på att studera är huruvida väljarna är utspridda i distriktet, genom att arbete med det absolut längsta avståndet mellan två möjliga väljare. Om man teckna upp en cirkel som bygger på detta längsta avstånd, och beräkna arean av cirkeln, får man ett uttryck som beskriver den kompakthet spridningen av väljare för distriktet. Dividerar vi arean av vårt distrikt med detta får vi ett värde som berättar hur mycket vårt distrikt avviker från denna kompakthet och därmed hur irreguljär spridningen i distriktet är. Är spridningen allt för irreguljär i distriktet kan detta utläsas som att kartritarna haft som avsikt att rama in vissa kvarter och områden i ett distrikt och undvika andra, vilket i sin tur skulle tyda på gerrymandering. Vad vi söker här är alltså ett kompakthetspoäng godtyckligt nära 1, vilket skulle betyda att det finns en kompakt spridning av möjliga väljare i distriktet, medans om kompakthetspoängen skulle gå mot 0 skulle betyda det motsatta.

Vi kan nu använda denna formel för att åter beräkna kompaktheten av Illinois fjärde distrikt, som har en area på ungefär 130km^2 och vars längsta raksträcka (axel) är ungefär 23,2km. Detta ger oss då en kompakthetspoäng på,

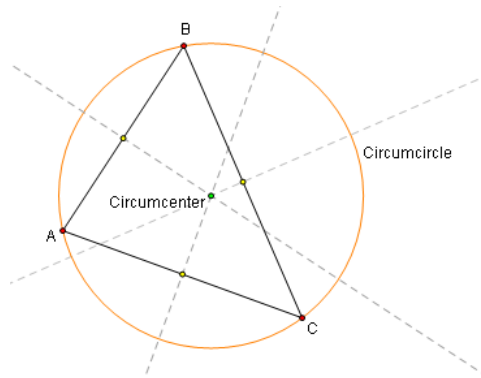
$$K_2 = \frac{130}{\pi \left(\frac{23,2}{2}\right)^2} = \frac{130}{134,56\pi} \approx 0,3077.$$

Eftersom vårt distrikt inte fick mer än 0,3077 så betyder det att de möjliga väljarna i vårt distrikt är relativt irreguljärt spridda, vilket i sin tur tyder på att distriktet kan ha tagits fram genom gerrymandering. Det är dock upp till USAs högsta domstol att tolka detta resultat, precis som jag nämnde ovan i kapitel 2.1.



Figur 6: "Längsta axeln"-förhållandet, Illinois 4.de distrikt

2.2.3 'Den omskrivna cirkel'-förhållandet



Figur 7: Beskrivande exempel på "den omskrivna cirkeln"

Vår tredje formel är den enklaste av våra kompakthetstester där vi ska jämföra arean A_D av vårt distrikt och arean A_C av den omskrivna cirkeln (den minsta cirkeln som innesluter vårt distrikt).

$$K_3 = \frac{A_D}{A_C}.$$

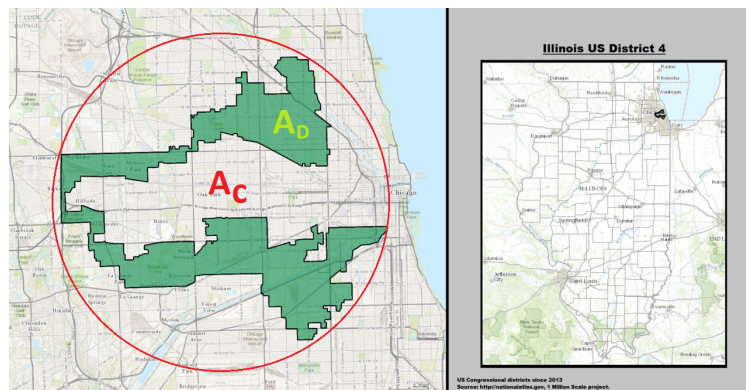
Vad denna formel studerar är hur kompakt distriktet är utifrån dess storlek. Genom att dividera distriktets area med arean från den minsta möjliga cirkeln som innesluter vårt distrikt får vi en uppskattning på hur mycket distriktet utnyttjar den yta den upptar. Om ett distrikt exempelvis slingrar sig fram i en stad kan detta tolkas som att kartritarna aktivt försökt att rama in vissa

kvarter och områden i ett distrikt och undvika andra, vilket i sin tur leder till misstankar om gerrymandering. Vad denna formel gör är att beräkna till vilken grad ett distrikt kan ha tänks utelämna vissa kvarter från sitt distriktsområde, där ett distrikt som till fullo utnyttjar sin yta kommer få ett resultat godtyckligt nära 1 och ett distrikt som aktivt undvikit specifika kvarter och därmed lämnat luckor i sin distriktkarta kommer få ett värde som går mot 0.

Vi har nu en ökad förståelse för vad denna formel gör, varav vi nu kan använda för att beräkna kompaktheten i Illinois fjärde distrikt som har en area på ungefär 130km^2 och vars omskrivna cirkel har en area på ungefär $463,5\text{km}^2$. Detta ger oss då en kompakthetspoäng på,

$$K_3 = \frac{130}{463.5} \approx 0,2805.$$

Eftersom vi nu får ett kompakthetspoäng på 0,2805 så kan vi tolka detta som distriktet bara utnyttjar ungefär 28% av den yta den upptar, vilket skulle kunna peka mot att distriktet tagit fram genom gerrymandering. Om denna slutsats stämmer överens med USAs högsta domstol kan vi däremot inte säga med säkerhet, precis som jag nämnde i kapitel 2.1.



Figur 8: "Den omskrivna cirkeln"-förhållandet, Illinois 4.de distrikt

2.2.4 'Tröghetsmomentets'-förhållande

Det sista testet vi kommer arbeta med i denna text är den som baseras på fysikens tröghetsmoment. Detta är ett vanligt mått inom fysiken för att mäta vridmomentet som krävs för en given förändring per tidsenhet av kroppsrotationshastigheten kring en given axel, genom tyngdpunkten av området,

$$\int \int_A r^2 dA,$$

där r är avståndet mellan en punkt i arean och dess geometriska centrum (tyngdpunkt). För att beräkna kompaktheten av ett distrikt med hjälp av detta kommer vi beräkna roten ur tröghetsmomentet för cirkeln med samma area A_D som distriktet dividerat med tröghetsmomentet för distriktet som polygon [8]. För att vi ska kunna göra detta så måste vi först veta uttrycket för tröghetsmomentet av vår cirkel som har samma area som vårt distriktet.

Detta gör vi genom att beräkna dubbelintegralen för en generell cirkelskiva B med radie r_1 och centrum i origo.

$$I = \int \int_B (x^2 + y^2) dx dy$$

som vi skriver om till polära koordinater,

$$I = \int \int_B (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta.$$

När vi väl fått fram detta så kan vi försöka förenkla detta så långt som möjligt,

$$\begin{aligned} I &= \int \int_B (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int \int_B r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int \int_B r^3 dr d\theta, \end{aligned}$$

för att därefter försöka lösa ut dubbelintegralen. För att göra detta måste vi känna till intervallen för r och θ . r betecknar radien av vår cirkel vilket kan vara allt mellan 0 och r_1 (en punkt i distriktet), medans θ beteckna vinkeln i polära koordinater, vilken går mellan 0 och 2π . Detta kommer då ge oss

$$I = \int_0^{r_1} r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta,$$

vilket vi enkelt kan lösa till,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{r_1} r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{r_1} \cdot [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{r_1^4}{4} \cdot 2\pi \\ &= \frac{r_1^4 \pi}{2} \\ &= \frac{(r_1^2 \pi)^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

I täljaren kan vi nu se uttrycket för cirkelarean, vilket i vårt fall ska vara detsamma som arean A_D för vårt distrikt. Vi kan därmed skriva om vårt uttryck ovan till,

$$I = \frac{A_D^2}{2\pi},$$

vilket är uttrycket för tröghetsmomentet för vår cirkel med samma area A_D som vårt distrikt. Med hjälp av detta får vi fram formel för kompaktheten i ett distrikt med hjälp av tröghetsmomentet genom att dividera vårt uttryck ovan med den allmänna formeln för tröghetsmomentet,

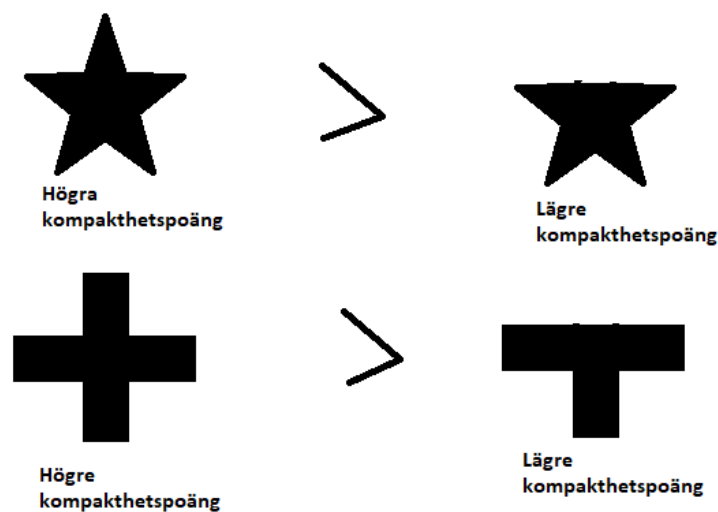
$$\frac{\frac{A_D^2}{2\pi}}{\iint_A r^2 dA} = \frac{A_D^2}{2\pi \iint_A r^2 dA},$$

vilket vi sedan kan ta roten ur för att få ett förenklat uttryck för divisionen mellan arean av vårt distrikt och tröghetsmomentet för vårt distrikt som polygon,

$$K_4 = \sqrt{\frac{A_D^2}{2\pi \iint_A r^2 dA}} = \frac{A_D}{\sqrt{2\pi \iint_A r^2 dA}}.$$

Vad K_4 undersöker här är den geometriska fördelningen av distriktet från dess geometriska centrum, på ett liknande sätt som K_2 . Vad K_4 undersöker

är huruvida distriktsgränserna dragits i syfte att rama in specifika kvarter och områden i ett distrikt. För att få fram till vilken grad kartritarna kan ha gjort detta är genom att dividera distriktets area med roten ur tröghetsmomentet för distriktet geometriska utformning multiplicerat med 2π . Om distriktet är jämt fördelat från sitt geometriska centrum kommer vi få ett värde godtyckligt nära 1, varav om distriktet har irreguljära avvikelser från detta, i form av exempelvis utbucklingar, kommer vi få ett värde som går mot 0.



Vi kan nu försöka beräkna kompaktheten ännu en gång i vårt distrikt, Illinois fjärde distrikt. Problemet som däremot uppstår här är att det blir väldigt svårt att räkna på detta med papper och penna, då det finns flera variabler som är mycket svåra att få fram för ett distrikt, däribland dess geometriska centrum och avståndet mellan den och en punkt i distriktet. Av denna anledning kommer vi jobba med ett matematiskt program på datorn för att beräkna kompaktheten av vårt distrikt, nämligen *Wolfram Mathematica 11.3 Student Edition*. Med Wolfram Mathematica behöver vi inte leta eller räkna fram specifik data för distriktets geometri, utan allt finns redan i programmet. Det blir vårt jobb att programmera programmet att ta fram den data vi behöver och sedan räkna med den.

Det vi börjar med att göra är att programera in filen som innehåller all geometrisk information om distriktet och ber sedan programmet att plocka ut den information som ger oss en polygon av distriktet. Denna programmering döper vi sedan till "*DD*",

```
In[]: DD := EntityValue[Entity["USCongressionalDistrict",
"Illinois:District4"], "Polygon"]
Out[]: {Polygon[GeoPosition[CompressedData[]]]}.
```

Vi skriver sedan ut de 102 koordinatpunkter vi fått fram, vilket tillsammans tecknar ut vårt distrikt. Denna lista med punkter döper vi till *PP*,

```
In[]: PP = First[DD[[1]][[1]]]
Out[]: {{41.8863, -87.9206}, {41.9068, -87.9204}, {41.9107, -87.8058},
{41.9326, -87.8066}, {41.9386, -87.7665}, {41.9521, -87.762},
{41.9568, -87.7671}, {41.9605, -87.7623}, {41.9606, -87.7574},
{41.9533, -87.7571}, {41.9535, -87.7425}, {41.9462, -87.7424},
{41.9465, -87.7188}, {41.9574, -87.7228}, ..., {41.8622, -87.9201}}.
```

Dessa koordinater är longitud/latitud för polygonens hörnpunkter, snarare än karteriska koordinater. Dock ger de en approximativ karta av en liten del av jordklotet, där K_4 är dimensionslös, därav kan vi använda dem för att få K_4 . Med hjälp av dessa koordinater kan programmet rita ut vårt distrikt och hämta all relevant data rörande dess geometri. Vi kan nu enkelt få fram informationen om tröghetsmomentet ("Moment of Inertia") för vårt distrikt, uttryckt som två vektorer,

```
In[]: MomentOfInertia[Polygon[PP]]
Out[]: {{0.0000718792, 1.80637*10^-6}, {1.80637*10^-6, 0.0000322745}}
```

där outputen ska läsas i formen,

$$\begin{pmatrix} \iint x^2 dA & \iint -xy dA \\ \iint -xy dA & \iint y^2 dA \end{pmatrix}$$

Genom att addera första koordinaten i första vektorn med andra koordinaten i andra vektorn (vilket demonstreras i rutan nedan) kan vi nu få fram tröghetsmomentet från vårt distrikt. Vi döper detta till *TT*,

```
In[]: TT = 0.0000718792 + 0.0000322745
Out[]: 0.0001041537.
```

$$\begin{aligned}
& \iint x^2 dA + \iint y^2 dA \\
&= \iint (x^2 + y^2) dx dy \\
&= \iint (r^2 \cdot \cos^2 \delta + r^2 \cdot \sin^2 \delta) dA \\
&= \iint r^2 dA
\end{aligned}$$

Nu har vi fått fram tröghetsmomentet för vårt distrikt. Nu behöver vi bara dividera arean av vårt distrikt med kvadratroten av tröghetsmomentet för vårt distrikt multiplicerat med 2π . Vi kan dock inte använda samma area som vi använt i tidigare exempel. Detta beror på att Wolfram Mathematica inte arbetar med karteriska koordinater, utan med en approximativ kartbild som inte speglar verkliga förhållanden. Detta ger oss två valmöjligheter. Antingen att vi översätter tröghetsmomentet vi fick ovan för vårt distrikt till att stämma överrens med distriktets egentliga skala eller att vi ber Wolfram Mathematica att ge oss distriktets area i samma skala som vårt tröghetsmomentet räknades i. Lättast blir det vid det här laget att skriva om distriktets area till samma skala som tröghetsmomentet ovan och kalla denna nya area för "AA",

```
In[]: AA = Area[Polygon[PP]]
Out[]: 0.0149413.
```

Nu är det bara att programera in våra variabler så kommer i kompakthets-testet, vilket då kommer ge oss

```
In[]: AA/(Sqrt[2*Pi*TT])
Out[]: 0.584065.
```

Vi får nu ett kompakthetspoäng på 0,584065, vilket är betydligt högre än vad vi fått på dem andra testerna. Detta beror på att vi i detta test ser mer till den geometriska fördelningen runt en bestämd punkt och inte så mycket till formen. Ett distrikt som exempelvis är format efter en "donut", med andra ord en ihålig cirkel, skulle också få ett högre kompakthetspoäng här på grund av den jämna fördelningen runt dess geometriska centrum.

Av denna anledning kan vi inte hålla detta kompakthetstest efter samma kriterier som dem tidigare, varav vi återigen bara kan spekulera kring vad kompakthetspoänget säger om distriktets sannolikhet att vara en produkt av gerrymandering i ett rättsligt sammanhang. Det är åter USA:s högsta domstol som har sista ordet i fråga om vilket kompakthetspoäng som är godtagbart, precis som jag nämnde i kapitel 2.1..

2.3 ”Bounded efficiency gap”

Den avslutande formeln vi ska titta närmare på i detta kapitel är den politiska forskaren Eric McGhees och juridik professorn Nicholas Stephanopoulos ”*bounded efficiency gap*”, vilket bygger på att undersöka hur stor andel av de lagda rösterna i en delstat som är ”bortkastade” (röster som inte hade någon effekt på valetresultatet). Informationen från denna formel kan man sedan använda för att utläsa hur rösterna är fördelade i de olika distrikten och på sätt utläsa eventuell spår av gerrymandering. Jag kommer förklara detta tydligare senare.

Till skillnad från kapitel 2.1 kommer vi här utgå ifrån att vi bra har två partier i varje distrikt i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$ där k är sammanlagda antalet distrikt i en delstat). Formeln för ”*bounded efficiency gap*” är applicerbar i situationer där flera partier tävlar mot varandra, men för att kunna redogöra för formeln så tydligt som möjligt kommer vi för enkelhetens skull bara jobba med två partier, P_1 och P_2 . Mängden röster som de olika partierna får benämner vi fortfarande som V_1 och V_2 och D_i betecknar den sammanlagda mängden röster som lagts i distrikt i .

Första steget i arbetet med ”*bounded efficiency gap*” är att beräkna andelen bortkastade röster för varje parti i respektive distrikt i . Definitionen av bortkastade röster är i denna kontext de röster som inte hade någon påverkan på valresultatet i distriktet. Antingen överflödiga röster för det vinnande partiet, eller röster för ett parti som inte vann i distriktet. I ett distrikt med bara två partier behöver ett parti bara införskaffa lite mer än hälften av alla röster för att vinna valet, varav resten av rösterna är överflödiga och därmed bortkastade. Detta betyder i sin tur att ett parti som får mindre än hälften av alla röster i samma distrikt förlorar, vilket gör också dessa röster bortkastade. Vi får alltså att strax över 50% av rösterna i varje distrikt är nödvändiga för att ett parti ska vinna, varav strax under 50% av rösterna alltid är bortkastade.

För att beräkna hur många röster som är bortkastade för ett parti i ett distrikt kan vi arbeta med ett exempel där parti P_1 vinner valet mot parti P_2 i distrikt i (nämligen att $|V_1 \cap D_i| > |V_2 \cap D_i|$). För att få fram antalet bortkastade röster för parti P_1 behöver vi bara subtrahera antalet röster partiet fått i distriktet med hälften av alla röster som lades i samma distrikt,

$$|V_1 \cap D_i| - \frac{1}{2} |(V_1 \cup V_2) \cap D_i| = w_{P_1,i}.$$

Vad vi får fram är då antalet överflödiga röster för parti P_1 som översteg 50% markören som garanterade dem en vinst, vilket vi betecknar som $w_{P_1,i}$. Antalet bortkastade röster för parti P_2 får vi fram genom att betrakta partiets sammanlagda röster i samma distrikt. Eftersom dessa röster inte kunde garantera dem en seger gör detta alla deras röster i distriktet bortkastade, vilket vi betecknar som $w_{P_2,i}$,

$$|V_2 \cap D_i| = w_{P_2,i}.$$

Nu när vi har denna formel känd för oss kan vi tillämpa den för att beräkna antalet bortkastade röster för våra partier i Illinois fjärde distrikt, där det Demokratiska partiet vann halvtidsvalet 2018 över det Republikanska partiet. Under detta val införskaffade demokraterna (*Dem*) sammanlagt 2.751.995 röster (V_{Dem}) i Illinois, varav 143.895 kom ifrån dess fjärde distrikt. Under samma val införskaffade republikanerna (*Rep*) sammanlagt 50.595.506 röster (V_{Rep}) i Illinois, varav 22.294 röster kom ifrån dess fjärde distrikt. Detta ger oss siffrorna

$$\begin{aligned} w_{Dem,4} &= |V_{Dem} \cap D_4| - \left\lceil \frac{1}{2} |(V_{Dem} \cup V_{Rep}) \cap D_4| \right\rceil \\ &= |143.895| - \left\lceil \frac{1}{2} |166189| \right\rceil \\ &= |143.895| - |83.095| = 60.800. \end{aligned}$$

I vårt distrikt var alltså 60.800 av demokraternas och alla av republikanernas 22.294 röster bortkastade, då dessa röster inte påverkade valresultatet.

Nu vet vi hur man beräknar antalet bortkastade röster för varje parti i respektive delstat, varav vi nu kan gå över till andra steget i formeln för "*bounded efficiency gap*", nämligen att beräkna "*the efficiency gap*" (*EG*).

För att få fram "*the efficiency gap*" i en delstat börjar man med att beräkna differensen av antalet bortkastade röster i samtliga k distrikt, varav vi åter utgår ifrån att parti P_1 vunnit i samtliga distrikt över parti P_2 . Vi summerar därefter ihop samtliga differenser från samtliga distrikt och dividerar denna nya summa med det sammanlagda antalet lagda röster i hela delstaten,

$$EG(D_1, D_2, \dots, D_k; P_1, P_2) := \frac{1}{|V_1 \cup V_2|} \sum_{i=1}^k (w_{P_1,i} - w_{P_2,i}).$$

Vad vi får är då den sammanlagda procentuella skillnaden mellan antalen bortkastade röster för partiet med flest vunna distrikt och partiet med minst vunna distrikt. Om vi istället hade utgått ifrån att P_2 vunnit i samtliga distrikt över P_1 , skulle vi istället beräkna "*the efficiency gap*" som

$$EG(D_1, D_2, \dots, D_k; P_1, P_2) := \frac{1}{|V_1 \cup V_2|} \sum_{i=1}^k (w_{P_2,i} - w_{P_1,i}).$$

Placeringen av $w_{P_1,i}$ och $w_{P_2,i}$ är därför beroende av deras värde, där vi alltid subtraherar antalet bortkastade röster för det vinnande partiet med antalet bortkastade röster för det fölorande partiet i samtliga distrikt. Placeringen av $w_{P_1,i}$ och $w_{P_2,i}$ kommer alltså kunna skifta position hela tiden i summaberäkningen beroende på valresultaten i varje distrikt.

Värdet från denna uträkning kommer alltid vara positivt och variera mellan $0 - 0,5$ (vilket kan utläsas som $0 - 50\%$), där ett värde godtyckligt nära 0 tyder på en jämn fördelning av röster i delstaten och alla värden över detta berättar om till vilken grad rösterna kan vara ojämnt fördelade och manipulerade. Om rösterna i delstaten exempelvis är jämnt fördelad skulle vår täljare vara godtyckligt nära 0 och därmed ge oss en godtycklig liten kvot. Om fördelningen av röster däremot är ojämnt fördelad i delstaten, där ett parti exempelvis alltid vinner med höga marginal, skulle vi få en godtycklig hög täljare som i sin tur skulle ge oss en kvot godtyckligt nära 0,5. Det är däremot svårt att få en perfekt fördelning av röster i en delstat, varav McGhee och Stephanopoulos anser att ett resultat mindre än 0,08 (8%) frikänner ett distrikt från misstankar om gerrymandering [5].

Vi kan nu försöka räkna på detta med vår egen data, men istället för att bara jobba med Illinois fjärde distrikt kommer vi här att arbeta med alla delstatens 18 distrikt. Jag tänker inte redogöra för hur jag fått fram antalet bortkastade röster för varje parti i respektive distrikt, utan jag har istället sammanfattat allt i tabellen nedan. Det är upp till läsaren själv om hen vill kontrollera om dessa siffror stämmer med hjälp av formeln som introducerades i början av kapitlet.

Illinois	V_{Dem}	V_{Rep}	$w_{Dem,i}$	$w_{Rep,i}$	
Distrikt 1	189.560	50.960	69.300	50.960	
Distrikt 2	183.816	43.875	69.970	43.875	
Distrikt 3	169.053	57.885	55.584	57.885	
Distrikt 4	143.895	22.294	60.800	22.294	
Distrikt 5	213.992	65.134	74.429	65.134	
Distrikt 6	169.001	146.445	11.278	146.445	
Distrikt 7	215.746	30.497	92.624	30.497	
Distrikt 8	130.054	67.073	31.490	67.073	
Distrikt 9	213.368	76.983	68.192	76.983	
Distrikt 10	151.860	80.361	35.749	80.361	[7].
Distrikt 11	145.407	82.358	31.524	82.358	
Distrikt 12	118.724	134.884	118.724	8.080	
Distrikt 13	134.458	136.516	134.458	1.029	
Distrikt 14	156.035	141.164	7.435	141.164	
Distrikt 15	74.309	181.294	74.309	53.492	
Distrikt 16	104.569	151.254	104.569	23.342	
Distrikt 17	142.659	87.090	27.784	87.090	
Distrikt 18	95.486	195.927	95.486	50.220	
Totalt	2.751.992	1.751.994	1.163.705	1.088.282	

Med hjälp av denna tabell kan vi enkelt beräkna "*the efficiency gap*" för Illinois där demokraterna var det största partiet med 2.751.992 röster, medans republikanerna bara införskaffade 1.751.995 röster vid halvtidensvalet 2018. Av dessa röster var sammanlagt 1.798.913 av de demokratiska rösterna och sammanlagt 1.224.814 av republikanernas röster bortkastade. Med dessa siffror får vi att Illinois "*efficiency gap*" ligger på,

$$\begin{aligned}
EG(D_1, D_2, \dots, D_{18}; Dem, Rep) &:= \frac{1}{|V_{Dem} \cup V_{Rep}|} \sum_{i=1}^{18} (w_{Dem,i} - w_{Rep,i}) \\
&= \frac{1}{|4.503.986|} (1.163.705 - 1.088.282) \\
&= \frac{75.423}{4.503.986} \approx 0,016746.
\end{aligned}$$

Vi får alltså att Illinois "*efficiency gap*" ligger på cirka 1,7%, vilket McGhee och Stephanopoulos menar är en acceptabel skillnad i andelen bortkastade röster mellan de olika partierna. Detta går dock att diskutera vidare i tredje steget för "*bounded efficiency gap*", nämligen " $\alpha\beta$ "-kriteriet. Önskar läsaren att fördjupa sin förståelse för detta kriterie hänvisar jag hen till dem amerikanska

matematikprofessorerna Mira Bernstein och Moon Duchins artikel "*A Formula goes to Court: Partisan Gerrymandering and The Efficiency Gap*" där detta förklaras och exemplifieras djupare [13].

2.4 Problematiken i formerna

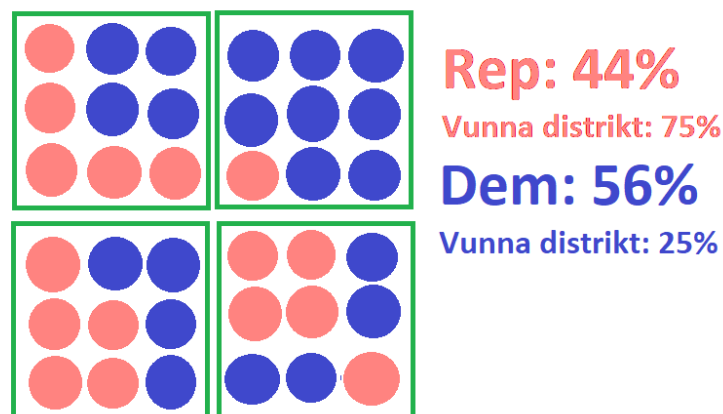
Nu har vi fått bekanta oss med några av de formler som USAs högsta domstol har arbetat med när dem försökt avgöra om ett åttal distrikt är en produkt av gerrymandering. Då kommer frågan om hur gerrymandering fortfarande kan vara ett problem i USA om det finns så många matematiska formler man kan använda för att mäta sannolikheten för gerrymandering. Detta beror på att formler har sina brister som gör dem opålitliga i vissa fall. I detta kapitel kommer vi titta närmare på dessa formler igen och se när dess matematiska resonemang inte längre fungerar, eller ger oss en felaktig uppfattning om distriktet.

2.4.1 Missformad $\neq$ gerrymanderad

I kapitel 2.2 redogjorde vi för fyra olika kompakthetstester med syfte att avgöra om ett distrikt är en produkt av gerrymandering eller inte. Alla fyra tester för detta byggde på att man jämför arean av ett distrikt med en cirkel som delar minst en geometrisk egenskap med vårt distrikt. Dessa gemensamma egenskaper kan variera från en gemensam omkrets till en gemensam längsta axel. Problemet med dessa tester är dock att ju mer ett distrikt avviker ifrån att vara cirkelformad, ju större blir risken att dem misslyckas i kompakthetstesterna.

Former	K_1	K_2	K_3	K_4	[8].
Cirkel	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
Hexagon	0,9069	0,8269	0,8269	0,9969	
Kvadrat	0,7854	0,6370	0,6370	0,9772	
Rektangel (1:2)	0,6981	0,5099	0,5099	0,8740	
Liksidig triangel	0,6046	0,5509	0,4132	0,9094	

Testerna ser alltså inte så mycket till hur folken i distrikten röster, utan mer till hur distrikten är formade. Detta kan leda till att vi får missledande resultat från testerna. Det går exempelvis att rita helt kvadratiske distrikt, distrikt som antagligen skulle bli godkända enligt kompakthetstesterna (se kompakthetspoängen i tabellen ovan), trots att de är manipulerande. I bilden nedan kan vi exempelvis se hur distrikt kan ritas kvadratiske och ändå ge ett missvisande resultat.



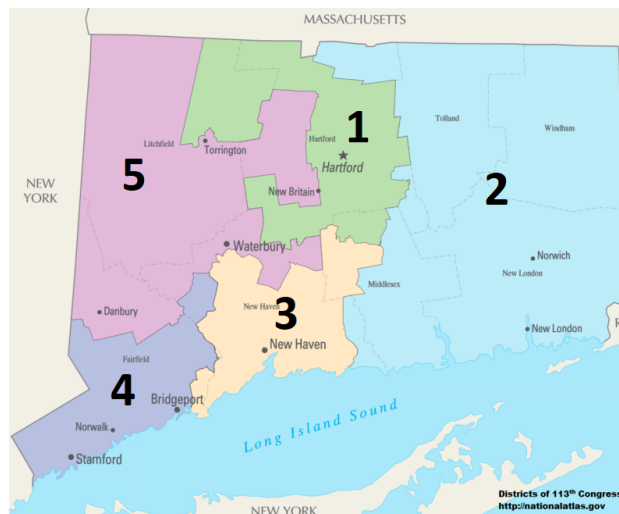
Detta fungerar eftersom kompakthetstesterna bara tittar på formen och inte på väljardemografin. När man diskuterar gerrymandering så brukar två bergrepp ofta dyka upp, vilket i engelskan kallas "*packing*" ("samla") och "*cracking*" ("splittra"). *Packing* betyder att kartritarna försöker samla in så många väljare av ett parti som möjligt i så få distrikt som möjligt, så partiet har det överlägsna övertaget i få distrikt och nästintill inga röstare i resten. *Cracking* betyder att kartritarna försöker fördela så många väljare för ett parti mellan så många distrikt som möjligt, så att partiet är i minoritet i de flesta distrikten. När kartritarna arbetar med att manipulera distriktgränserna för politisk vinning arbetar de alltid med någon av dessa metoder, om inte båda samtidigt. I exemplet ovan har jag exempelvis använt mig av *packing* i det övre, högra distriktet för att därefter tillämpa *cracking* i den övriga distrikten. Detta gjorde jag för att begränsa demokraternas vinst till bara ett distrikt, för att därefter fördela resten av deras väljare i alla andra distrikt där de hamnade i minoritet [10].

Detta är i och för sig enkelt att göra på bild. Det är bara att rita upp fyra kvadrater och därefter placera ut lika många brickor i varje kvadrat. På 5 minuter kan man säkert få tre olika resultat från detta. Däremot går det inte att flytta runt människor på detta sättet och placera dem i perfekta, kvadratiske distrikt. För att exempelvis med kvadraterna ovan ska gälla i verkligheten måste väljarna redan bo på ett sådant sätt att det går att rita perfekta, kvadratiske distrikt runt dem. Sannolikheten att sedan få samma typ av resultat från detta som från kvadraterna ovan är otroligt osannolikt. Eller är det?

I USA kan man inte bara flytta omkring människor som färgade brickor, men man kan genom exempelvis gentrifiering och annan statsplanering indirekt flytta omkring människor i en delstat. På *Pew Research Center* kan man bland

annat läsa hur de flesta väljarna med spansk bakgrund eller i åldrarna 18-29 år röstade på en demokratisk kandidat i sina distrikt [11]. Med en sådan vetskap kan politikerna i delstaten påverka den ekonomiska demokratin och statsplaneringen för att indirekt flytta omkring dessa väljare. Antingen i syfte att samla eller fördela dem i så få/många distrikt som möjligt. Genom att exempelvis höja levnadskosterna i ett område och sänka i ett annat kan man indirekt tvinga folk med lägre inkomster att flytta från ett område till ett annat, däribland yngre och immigranter. Man kan också genom nya renovationer, omplaceringen av företag och lanserandet av nya butiker och privatskolor locka högre inkomsttagare att flytta till dess hökostnads områden istället, vilket oftare röstar på en republikansk kandidat. Det går alltså inte att flytta omkring människor som färgade brickor, men genom politiska maktspelet kan man indirekt manipulera väljarna till att bosätta sig i specifika områden [12].

Ett exempel där detta kan ha hänt, eller där kartritare ändå har lyckats dra nya distriktgränser med reguljära former som fortfarande ger ett valresultat som skiljer sig ganska mycket ifrån röstningsstatistiken, är Connecticut. Connecticut är en helt demokratisk delstat, trots att republikanerna införskaffade 35% av rösterna vid valet 2018. När man betraktar Connecticuts distriktkarta så finns det inga direkt synliga tecken på gerrymandering,



Figur 9: Karta över Connecticuts fem distrikt

men ändå överensstämmer inte valresultatet med andelen röster som de två partierna fått. Utan ytterligare data över den politiska demografin i delstaten kan vi bara spekulera kring vad valresultatet kan bero på. Om de republikanske väljarna är utspridda över hela delstaten, och i sådana fall om detta skedde

genom politiska instanser, eller om kartritarna ändå lyckats dra manipulerade distriktgränser utan att ge distrikten en allt för underlig form. Utan ytterligare data arbetar vi egentligen bara med spekulationer.

Connecticut	V_{Dem}	V_{Rep}	
Distrikt 1	173.133	95.874	
Distrikt 2	179.203	102.409	
Distrikt 3	144.452	9.825	
Distrikt 4	165.279	106.171	[7].
Distrikt 5	149.714	118.408	
Totalt	811.781	432.687	
Procent	ca.65 %	ca.35%	

Detta är ett av de största problemen när det kommer till gerrymandering. Eftersom gerrymandering inte är en färdig produkt, utan en process i vilket man drar nya distriktsgränser i syfte att utöka sitt politiska inflytande, är det svårt att direkt avgöra vad som är gerrymandering utan att läsa kartritarens tankar. Det är nämligen svårt att avgöra om ett valresultat som inte stämmer överens med rådande röststatistik varit planerad eller om det bara är en slump. Vad kompakthetstesterna gör är att testa sannolikheten för att distriktgränserna tagits fram med just denna avsikt, genom att studera utformningen av distriktgränserna. Kompakthetstesterna ser till vilken grad distriktgränser kan ha dragits för att rama in specifika kvarter och områden i ett distrikt, vilket i sin tur berättar om sannolikheten att distriktet tagits fram genom gerrymandering. Det är upp till USAs högsta domstol att bestämma den matematiska gränsen för när man anser att ett distrikt tagits fram genom gerrymandering. Om distriktet verkligen har tagits fram med denna avsikt kan man åter inte säga helt säkert, precis som med alla andra matematiska formler och tester som presenterats i denna text. Utifrån det rådande valsystemet som finns i dagens USA är detta en av de mer legitima metoder som finns för att motverka problemet och förhindra valmanipulation. Kompakthetstesterna har sina brister, men ger oss samtidigt viktig information om till vilken grad kartritare kan ha manipulerat distriktgränserna för att förra in specifika kvarter och områden i ett distrikt för att påverka valresultatet i hela delstaten. Resultaten från dessa tester bör däremot inte ses som definitiva på egen hand, utan bör studeras parallellt med resultat från andra tester.

2.4.2 Kan ett distrikt klara alla tester?

I denna text har vi kunnat läsa om tre kategorier av tester för att avgöra om ett distrikt är en produkt av gerrymandering eller inte, nämligen "befolkningsdisposition", "kompakthet" och "*bounded efficiency gap*". Frågan är dock om det ens är möjligt att bli godkänd på alla dessa tester samtidigt. Dem amerikanska matematikerna Boris Alexeev och Dustin G. Mixon [5] redogör i en av sina artiklar att detta inte är möjligt,

Theorem 1 [5, Theorem 2]. There is no districting system that simultaneously satisfies all three desiderata below. In particular, for ever $\delta \in [0, 1)$, $C > 0$ and $k \in \mathbb{N}_{>0}$, there exist V_1 and V_2 such that every choice of districts $\{D_i\}_{i=1}^k$ violates one of (1), (2) and (3),

$$(1 - \delta) \left\lfloor \frac{|V_1 \cup V_2|}{k} \right\rfloor \leq |(V_1 \cup V_2) \cap D_i| \leq (1 + \delta) \left\lceil \frac{|V_1 \cup V_2|}{k} \right\rceil$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad (1),$$

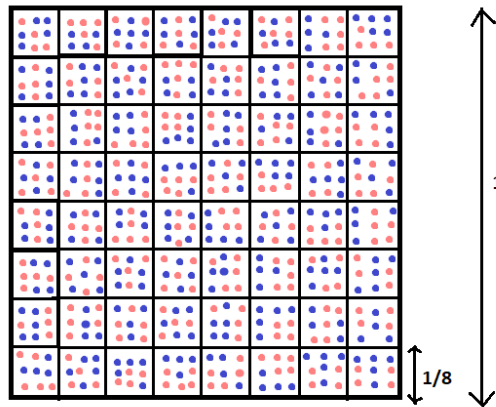
$$|\partial D_i| \leq |D_i|C \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad (2),$$

$$|EG(D_1, \dots, D_k : P_1, P_2)| < 0,08 \quad (3),$$

där (1) syftar på formeln för befolkningsdispositionen, (2) på kompakthetskriteriet från Polsby-Popper och (3) på formelerna för "bounded efficiency gap". Vad denna sats säger är att det inte finns någon distriktfördelning som tillfredställer samtliga tester och formler som vi gått igenom i denna text, utan att det kommer finnas ett V_1 och V_2 i varje distrikt i som alltid kommer bryta eller misslyckas i minst en av våra formler. Något Alexeev och Mixon menar kommer gälla för alla godtagbara värden för δ och C , vars värden varierar från rättsfall till rättsfall och som bestäms av USAs högsta domstol.

Alexeev och Mixon bevisar detta tydligare genom att arbetar utifrån en idealiserad delstatsbeskrivning med en likformig fördelning av distrikt.

Bevis. Vi börjar med att anta att vi har ett fixt värde för k (antal distrikt i delstaten). För ett stort n kan vi dela in $[0, 1]^2$ (en enhetskvadrat som svarar mot den idealiserade delstaten) i mindre kvadrater med längderna $\epsilon = \frac{1}{n}$ (i vårt fall $\epsilon = \frac{1}{8}$),



Vi väljer sedan v_1, v_2 och l sådana att $v_1 + v_2 = l^2$ och där L betecknar gittret (den periodiska anordningen av väljare i vår enhetskvadrat),

$$L = \left(\frac{1}{n \cdot l} \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\right)^2.$$

Vi definierar sedan att parti P_1 har v_1 antalet röster i varje ϵ -kvadrat som korsar L , och att parti P_2 har v_2 antalet röster i varje ϵ -kvadrat som korsar L . Detta betyder att $v_1 + v_2 = l^2$ är den sammalagda mängden röster i varje ϵ -kvadrat.

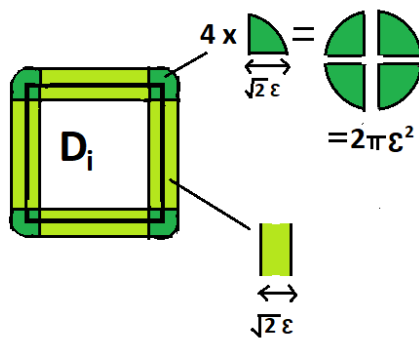
Vi delar nu upp vår enhetskvadrat i önskat antal distrikt k ,

$$D_1 \sqcup D_2 \sqcup \dots \sqcup D_k = [0, 1]^2,$$

där varje distrikt D_i uppfyller kriterierna gällande befolkningsdispositionen (1) och kompaktheten (2).

Vi har nu klargjort för de ideala primiserna för beviset. Vad vi vill göra nu är att teckna ett villkor för vilket ett parti bör uppfylla för att kunna vinna i ett distrikt i och därefter härleda detta till våra kriterium (1), (2) och (3) för att visa på att kriterierna är inkompatibla.

För kunna teckna detta villkor måste vi först få en uppskattning på hur många ϵ -kvadrater varje distrikt består utav. ϵ -kvadraterna som korsar randen $|\partial D_i|$ (omkretsen av distrikt i) ingår i ett randområde som är $\epsilon\sqrt{2}$ -tjockare än $|\partial D_i|$, vilket ger randområdet en area på $\sqrt{2}\partial D_i\epsilon + 2\pi\epsilon^2$ a.e..



Genom att dividera denna area med arean för en ϵ -kvadrat får vi ett uttryck för hur många ϵ -kvadrater, E , som randområdet runt vår omkrets $|\partial D_i|$ innehåller,

$$E = \frac{\sqrt{2}|\partial D_i|\epsilon + 2\pi\epsilon^2}{\epsilon^2} = \frac{\sqrt{2}|\partial D_i|}{\epsilon} + 2\pi.$$

Med hjälp av detta kan vi nu teckna ett uttryck för det sammanlagda antalet ϵ -kvadrater som vårt distrikt i består av, där det består av som minst $\frac{|D_i|}{\epsilon^2} - E$ olika kvadrater (alla ϵ -kvadrater i distrikt i , borträknad dem som ligger/korsar distriktets rand) och som mest $\frac{|D_i|}{\epsilon^2}$ olika kvadrater (alla ϵ -kvadrater i distrikt i som inte ligger i eller korsar distriktets rand), där $|D_i|$ betecknar distriktets area. Alltså är D_i innehållen helt i $\frac{|D_i|}{\epsilon^2} + E$ kvadrater, där P_1 vinner v_1 röster och P_2 vinner v_2 röster i varje kvadrat. P_2 vinner alltså i D_i som högst $v_2(\frac{|D_i|}{\epsilon^2} + E)$ röster och som minst vinner P_1 $v_1(\frac{|D_i|}{\epsilon^2} - E)$ röster.

Detta ger oss att $|V_1 \cap D_i| \geq v_1(\frac{|D_i|}{\epsilon^2} - E)$ och $v_2(\frac{|D_i|}{\epsilon^2} + E) \geq |V_2 \cap D_i|$. Alltså har vi att följande olikhet,

$$v_1(\frac{|D_i|}{\epsilon^2} - E) \geq v_2(\frac{|D_i|}{\epsilon^2} + E),$$

medför att parti P_1 vinner i D_i (men detta är inte en nödvändighet). Vi kommer nu kunna bygga vidare från denna olikhet för att bevisa att resultaten från dem tre kategorierna av tester och formler för gerrymandering (i synnerhet "kompakthet" och "efficiency gap") alltid kommer gå emot varandra.

Eftersom ett parti inte kan få negativt antal röster ($v_1, v_2 > 0$) och eftersom vi inte kan ha ett negativt antal kvadrater så kan vi dividera båda sidorna av olikheten med v_1 och $\frac{|D_i|}{\epsilon^2} + E$, vilket ger oss

$$\begin{aligned} \frac{\frac{|D_i|}{\epsilon^2} - E}{(\frac{|D_i|}{\epsilon^2} + E)} &\geq \frac{v_2}{v_1} \\ \Leftrightarrow \frac{|D_i| - \epsilon^2 E}{|D_i| + \epsilon^2 E} &\geq \frac{v_2}{v_1}. \end{aligned}$$

Vi har nu fått ett nytt uttryck för vårt villkor som medför att parti P_1 vinner i D_i . Vad vi vill göra nu är att visa på att villkoret gäller för alla distrikt som uppfyller våra grundantaganden innan gällande kriterierna för befolkningsdispositionen (1) och kompakthet (2). Detta gör vi genom att härleda vårt villkor till dessa kriterium. För att göra detta kan vi börja arbeta med kompakthetskriteriet som var inspirerat av Polsby-Popper (se kapitel 2.2.1.),

$$|\partial D_i|^2 \leq C \cdot |D_i|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\partial D_i|^2}{C} \leq |D_i|$$

Utifrån *Lemma 1* kan vi substitutionera uttrycket för distriktets area med uttrycket för distriktets omkrets upphöjt med två, dividerat med C , vilket förenklat kommer ge oss det nya villkoret som medför vinst för parti P_1 i D_i ,

$$\frac{|\partial D_i|^2 - E\epsilon^2 C}{|\partial D_i|^2 + E\epsilon^2 C} \geq \frac{v_2}{v_1} \quad (2),$$

vilket vi sedan kan skriva ut till

$$\begin{aligned} & \frac{|\partial D_i|^2 - (\frac{\sqrt{2}|\partial D_i|}{\epsilon} + 2\pi)\epsilon^2 C}{|\partial D_i|^2 + (\frac{\sqrt{2}|\partial D_i|}{\epsilon} + 2\pi)\epsilon^2 C} \geq \frac{v_2}{v_1} \\ \Leftrightarrow & \frac{|\partial D_i|^2 - C\epsilon\sqrt{2}|\partial D_i| - C\epsilon^2 2\pi}{|\partial D_i|^2 + C\epsilon\sqrt{2}|\partial D_i| + C\epsilon^2 2\pi} \geq \frac{v_2}{v_1}. \end{aligned}$$

Denna olikhet beskriver villkoret för vilket parti P_1 vinner i distrikt i , varav värdet på C för när denna olikhet gäller också berättar om hur kompakt distriktet är. Om värdet på C anses för högt så bryter distriktet mot kompakthetskriteriet och valresultatet kommer utredan vidare för gerrymandering, men utifrån vårt grundantagande innan så utgår vi ifrån att vi har ett godkänt värde för C .

Lemma 1:

Om $\frac{|\partial D_i|^2}{C} \leq |D_i|$ (2) gäller så gäller även $\frac{|D_i| - E\epsilon^2}{|D_i| + E\epsilon^2} \leq \frac{|\partial D_i|^2 - E\epsilon^2 C}{|\partial D_i|^2 + E\epsilon^2 C}$.

Bevis:

$$\begin{aligned}
& \frac{|\partial D_i|^2}{C} \leq |D_i| \\
\Leftrightarrow & \frac{|\partial D_i|^2}{C} + E\epsilon^2 \leq |D_i| + E\epsilon^2 \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{\frac{|\partial D_i|^2}{C} + E\epsilon^2} \geq \frac{1}{|D_i| + E\epsilon^2} \\
\Leftrightarrow & \frac{-2E\epsilon^2}{\frac{|\partial D_i|^2}{C} + E\epsilon^2} \leq \frac{-2E\epsilon^2}{|D_i| + E\epsilon^2} \\
\Leftrightarrow & 1 - \frac{2E\epsilon^2}{\frac{|\partial D_i|^2}{C} + E\epsilon^2} \leq 1 - \frac{2E\epsilon^2}{|D_i| + E\epsilon^2} \\
\Leftrightarrow & \frac{\frac{|\partial D_i|^2}{C} + E\epsilon^2 - 2E\epsilon^2}{\frac{|\partial D_i|^2}{C} + E\epsilon^2} \leq \frac{|D_i| + E\epsilon^2 - 2E\epsilon^2}{|D_i| + E\epsilon^2} \\
\Leftrightarrow & \frac{|D_i| - E\epsilon^2}{|D_i| + E\epsilon^2} \leq \frac{|\partial D_i|^2 - E\epsilon^2 C}{|\partial D_i|^2 + E\epsilon^2 C} \quad \square.
\end{aligned}$$

Vi har nu kunnat härleda vårt villkor för P_1 till vårt komapkhetskriterium. Vi vill nu kunna visa på samma sak för befolkningsdispositionen från vilket vi får olikheten

$$|(V_1 \cup V_2) \cap D_i| \geq (1 - \delta) \left\lfloor \frac{|V_1 \cup V_2|}{k} \right\rfloor \geq (1 - \delta) \frac{|V_1 \cup V_2|}{2k} = (1 - \delta) \frac{n^2 l^2}{2k},$$

där den sista likheten gäller eftersom n^2 betecknar det sammanlagda antalet ϵ -kvadrater i vår enhetskvadrat och l^2 betecknar sammanlagda antalet röster i varje ϵ -kvadrat. Produkten av dem kommer beteckna det sammanlagda antalet röster i hela enhetskvadraten (vår idealiserade delstat).

Vad vi vill göra nu är att fokusera på första och sista uttrycket i vår olikhet,

$$|(V_1 \cup V_2) \cap D_i| \geq (1 - \delta) \frac{n^2 l^2}{2k},$$

vilket vi kan dividera med den totala mängden röster i enhetskvadraten. Detta kommer ge oss en olikhet som beskriver förhållandet mellan ett distrikt i s area $|D_i|$ och en fördelning av punkter ("väljare") i en enhetskvadrat,

$$\Leftrightarrow \frac{|(V_1 \cup V_2) \cap D_i|}{n^2 l^2} \geq \frac{(1-\delta) \frac{n^2 l^2}{2k}}{n^2 l^2}$$

$$|D_i| \geq \frac{(1-\delta)}{2k}.$$

Lemma 2 kommer då ge att längsta avståndet i vårt "kompakta" distrikt i (diametern av en cirkel) upphöjt med två är större eller lika med $\frac{(1-\delta)}{2k}$,

$$d^2 \geq \frac{(1-\delta)}{2k},$$

vilket då också betyder att det längsta avståndet i samma cirkel (diametern av cirkeln) är större eller lika med $\sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}$,

$$d \geq \sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}.$$

Från samma lemma får vi då att längsta möjliga avståndet mellan två punkter ("väljare") i vår enhetskvadrat är $\sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}$ i.e., vilket vi kan beteckna som F .

Lemma 2 (Bieberbach):

Cirkelskivan med radie $\frac{d}{2}$ är den geometriska figur A med maximal area givet ett maximalt avstånd mellan punkter som är mindre än eller lika med sträcka d .

Alltså,

$$\text{Area}(A) \leq \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi = d^2 \cdot \frac{\pi}{4} \leq d^2.$$

Eftersom ett områdes omkrets alltid är större eller lika med sin längsta raksträcka så följer det att omkretsen av D_i också är större eller lika med $\sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}$,

$$|\partial D_i| \geq d \geq \sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}.$$

Enligt *Lemma 3* kan vi arbeta med denna olikhet för att härleda vårt villkor för P_1 till kriteriet gällande befolkningsdispositionen (1). Detta gör vi genom att substitutionera uttrycket för distriktets omkrets med $\sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}$ ($= F$),

$$f(|\partial D_i|) = \frac{|\partial D_i|^2 - C\epsilon\sqrt{2}|\partial D_i| - C\epsilon^2 2\pi}{|\partial D_i|^2 + C\epsilon\sqrt{2}|\partial D_i| + C\epsilon^2 2\pi} \geq \frac{v_2}{v_1}$$

$$\Leftrightarrow f(F) = \frac{\left(\sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}\right)^2 - C\epsilon\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}\right) - C\epsilon^2 2\pi}{\left(\sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}\right)^2 + C\epsilon\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}\right) + C\epsilon^2 2\pi} \geq \frac{v_2}{v_1}.$$

Lemma 3:

Funktion $f(x) = \frac{x^2 - Ax - B}{x^2 + Ax + B}$ är växande för alla $x \geq 0$ då $A, B > 0$.

Bevis:

$$f(x) = \frac{x^2 - Ax - B}{x^2 + Ax + B}$$

$$= \frac{x^2 + Ax + B - 2(Ax + B)}{x^2 + Ax + B}$$

$$= 1 - \frac{2(Ax + B)}{x^2 + Ax + B}$$

$$f'(x) = \frac{-2A(x^2 + Ax + B) - (-2Ax - 2B)(2x + A)}{(x^2 + Ax + B)^2}$$

$$= \frac{2x(Ax + 2B)}{(x^2 + Ax + B)^2} > 0$$

Detta gäller då $x > 0$, vilket innebär att $f(x)$ är växande. $\square$

Vi har återigen fått ett nytt uttryck för villkoret som beskriver för vilket parti P_1 vinner i D_i , varav värdet på δ berättar om huruvida befolkningsandelen i distriktet avviker ifrån den idealiska befolkningsandelen i delstaten. Om värdet på δ anses för högt så bryter distriktet mot kriteriet gällande befolkningsdispositionen och valresultatet utreds vidare för gerrymandering, men utifrån vårt grundantagande i början av beviset så utgår vi precis som för C att vårt värde för δ är godkänt. Vi har med detta alltså kunnat härleda vårt villkor för P_1 till kriteriet för befolkningsdispositionen.

Vi förenklar olikheten genom att skriva om $\left(\sqrt{\frac{(1-\delta)}{2k}}\right)$ till F , vilket kommer ge oss den finare olikheten,

$$\frac{F^2 - C\epsilon\sqrt{2}F - C\epsilon^2 2\pi}{F^2 + C\epsilon\sqrt{2}F + C\epsilon^2 2\pi} \geq \frac{v_2}{v_1}.$$

Nu är vi på upploppet för att göra klart beviset. Om olikheten ovan är sann innebär den som sagt att parti P_1 vinner i varje distrikt i , eftersom den är oberoende av i . Då n är godtyckligt stort (vilket gör ϵ godtyckligt litet) kan vi välja ett ϵ sådant att vänsterledet i vår olikhet ovan blir godtyckligt nära 1. Sedan kan vi välja ett v_1 och v_2 sådana att $1 - \frac{v_2}{v_1} = \gamma > 0$ blir godtyckligt litet, samtidigt som olikheten ovan är sann. Värdena för v_1 och v_2 måste däremot fortfarande uppfylla villkoret $v_1 + v_2 = l^2$.

Om olikheten ovan är sann innebär detta i sin tur också att parti P_2 förlorar i varje distrikt i . Antalet bortkastade röster för P_2 kan då beräknas som $v_2 n^2$ (alla deras röster V_2), vilket är detsamma som $(1 - \gamma)v_1 n^2$. Antalet bortkastade röster för P_1 kan på samma sätt beräknas som $v_1 n^2 - v_2 n^2$, vilket är detsamma som $\gamma v_1 n^2$.

Om vi nu räknar på vårt tredje kriterium, ”*bounded efficiency gap*” (3) får vi att

$$|EG(D_1, D_2, \dots, D_k : P_1, P_2)| \leq \left| \frac{\gamma v_1 n^2 - v_2 n^2}{v_1 n^2 + v_2 n^2} \right| = \left| \frac{2\gamma - 1}{2 - \gamma} \right|,$$

vilket är godtyckligt nära $\frac{1}{2}$ (50%), eftersom γ kunde fås godtyckligt litet, och strider därför emot kravet för ”*bounded efficiency gap*”, nämligen att $|EG| \leq 0,08$.

Därmed kan vi se att varje distrikt som blir godkänd i formlerna för befolkningsdisposition och kompakthet istället bli underkända i fråga om ”*bounded efficiency gap*” $\square$.

Vi har alltså i detta bevis kunnat visa på att de olika formlerna som tagits fram för att undersöka sannolikheten för gerrymandering är inkompatibla när vi arbetar utifrån en enhetskvadrat, som i vårt bevis svarar mot idealiserade delstats- och distriktsförhållanden. Detta medför i sin tur att samma slutsats också kommer gälla för alla andra former av delstats- och distriktsförhållanden.

Slutsatsen från detta blir alltså att resultatet av ett distrikts sannolikhet för att ha tagits fram genom gerrymandering är beroende av vilken/vilka formler man bestämmer att använda i ett rättsfall [5] och att jämförelser mellan de olika resultaten från formlerna kommer kunna gå emot varandra.

3 En alternativ lösning

Det tycks alltså finnas brister med dessa tester och kriterium för gerrymandering, där de antingen löper stor risk för att ge en felaktig bild över distriktet eller där kriterierna inte är nödvändigtvis kompatibla med varandra.

Frågan som uppstår är om det finns en egentlig, matematisk lösning till gerrymandering.

En lösning skulle kunna vara att eliminera effekten av gerrymandering helt och hållet, vilket går att uppnå genom att göra om det amerikanska valsystemet. Istället för att fokusera på antalet vunna distrikt skulle man istället kunna fokusera på det sammanlagda antalet röster som varje parti får i hela delstaten. Ett bra exempel skulle kunna vara det svenska valsystemet.

Vi vill däremot behålla systemet med distriktrepresentanter på ett sådant sätt att det alltid finns en vald representant till varje distrikt som aktivt arbetar med att förbättra levnadsvillkoren och förhållandena i distriktet, samtidigt som de arbetar tillsammans representerar i kongressen med landsomfattande frågor. Vi vill alltså behålla systemet i vilket de valda representanterna fungera som kommunpolitiker som för samarbetet mellan distriktet och den landsomfattande kongressen. Dessa representanter bör i sin tur vara kopplad till distriktet de ska representera för att kunna bygga upp en bättre relation och förståelse för befolkningen i distriktet. Det räcker alltså inte heller att man placerar ut de representanter som fått flest röster för partiet, utan dessa representanter bör redan vara bosatta i och ha en redan existerande handlingsplan för det distrikt de blivit valda inom.

Vad vi vill ha är ett valsystem som fokuserar på andelen röster som partierna får i delstaten, där idén är att varje röst har samma effekt. Ett system som försäkrar att representanterna till kongressen väljs från alla olika delar av delstaten på ett sätt som kommer förstärka samarbetet mellan hela delstaten och den landsomfattande kongressen. Ett alternativt valsystem som gör detta är "*Fair Majority Voting*".

3.1 Fair Majority Voting

Fair Majority Voting ("FMV") är ett valsystem som bygger på att varje person röstar på ett parti i sitt distrikt, där antalet röster sedan räknas ihop mellan de olika distrikten. Platserna i kongressen fördelas därefter mellan de olika partierna utefter den sammanlagda andelen röster partiet fått i delstaten. Vilka politiker som får dessa platser bestäms genom att betrakta vilka politiker som fått största stöden för sitt parti i delstaten, vilket inte ska blandas ihop med

att ha "vunnit" i sitt distrikt. Vi kan illustrera detta med ett exempel, vilket vi hämtar från Connecticut's valresultat från 2004s "United States House of Representatives elections".

Distrikt	1st	2nd	3dje	4de	5te	Totalt
Rep	73.273	165.558	68.810	149.891	165.440	622.972
Dem	197.964	139.987	199.652	136.481	105.505	779.589

I Connecticut vann en republikansk representant i 3 av 5 distrikt, trots att demokraterna införskaffade en större andel av rösterna i delstaten (ca. 55%). Utifrån det rådande valsystemet i USA så skulle detta ändå ge det Republikanska partiet 3 av delstatens 5 platser i kongressen. Om vi däremot tillämpande FMV skulle resultatet se annorlunda ut, där demokraterna skulle få 3 av delstatens 5 platser i kongressen. Eftersom demokraterna bara fått flest röster i två av distrikten måste vi beräkna i vilket tredje distrikt det Demokratiska partiet fått störst stöd, för att kunna avgöra vilken ytterligare representant som är bäst lämpad att representera sitt parti, distrikt, och delstat i kongressen.

Det finns två metoder för att avgöra detta, varav det ena är att procentuellt öka andelen röster varje demokratisk representant fått i sitt distrikt, tills dess att vi har tre vinnande demokrater. I vårt exempel arbetade vi med multiplern 1,0983, vilket vi får genom att dividera antalet röster för den republikanska representanten i distrikt 4 med antalet röster för den demokratiska representanten i samma distrikt ($149.891/136.481 \approx 1,0983$). Denna multipel kommer vara den enda som ger oss en sista unik representant för demokraterna (då vi redan har två demokratiska representanter som vunnit i sina distrikt). Divisionen av antalet röster mellan andra republikanska och demokratiska representanter kommer ge oss multipler som höjer antalet röster för samtliga demokrater och ger oss fler vinnande representanter för partiet. Genom att arbeta med vår funna multipel kommer vi bara få tre vinnande representanter för demokraterna, nämligen

Distrikt	Multipel	1st	2nd	3dje	4de	5te
Rep	1	73.273	165.558	68.810	149.891	165.440
Dem	1,0983	217.416	153.743	219.270	149.892	115.872

Vi ser nu i vilka tre distrikt som det Demokratiska partiet har störst stöd och därav vilka demokratiska representanter som borde få träda in i kongressen, nämligen representanterna från distrikt 1, 3 och 4.

Den andra metoden för få fram detta resultat är genom att arbeta med vilka representanter som fått flest, samt minst röster i sina respektive partier. Om vi tittar på vilka representanter som fått flest röster i vårt exempel med Connecticut så upptäcker vi snabbt att distrikt 2 har två representanter som

fått bland de högsta antalet röster för sina partier, medans representanterna i distrikt 4 har fått bland de lägsta antalet röster för sina partier. Detta skulle betyda att distrikt 2 får två representanter i kongressen, medans distrikt 4 inte får någon.

Distrikt	1st	2nd	3dje	4de	5te
Rep	73.273	165.558	68.810	149.891	165.440
Dem	197.964	139.987	199.652	136.481	105.505

Vad vi måste göra är att antingen skala ner antalet röster i distrikt 2 så vi får bara en unik representant för detta distrikt, eller skala upp antalet röster i distrikt 4 så vi bara får en unik representant för detta distrikt. Vad vi vill göra är att sprida ut representanterna som fått bland de högsta antalet röster för sina respektive partier till olika distrikt så att ett distrikt inte har flera ledande representanter, medans ett annat distrikt inte har någon.

I vårt exempel kan vi därför skala ner antalet röster i distrikt 2 med hjälp av multiplern 0,9749 ($136.480/139.987 \approx 0,9749$), vilket kommer ge oss en unik särskiljning mellan representanterna som fått störst stöd i sina partier. Detta på ett sätt där representanterna blir utspridda mellan samtliga distrikt, där inget distrikt har flera representanter med störst stöd hos sitt parti och där inget distrikt saknar en representant med störst stöd för sitt parti. Vi kommer alltså få spridningen

Distrikt	1st	2nd	3dje	4de	5te
Rep	73.273	161.410	68.810	149.891	165.440
Dem	197.964	136.480	199.652	136.481	105.505
Multipl	1	0.9749	1	1	1

Vad vi nu kan se är att vi får samma resultat från båda våra metoder, där platserna i kongressen kommer gå till de demokratiska representanterna från distrikt 1, 3 och 4, samt de republikanska kandidaterna från distrikt 2 och 5. Detta gäller på grund av vår "*Theorem 3 [14, Theorem 2]*" (se kapitel 3.2).

I exemplerna ovan har vi bara jobbat med två partier, varav detta valsystem egentligen fungerar för n stycken partier. Vad som kan anses som bra med FMV är att den kan ge möjlighet för de mindre partierna att komma till en politisk maktposition, partier som annars är för små för att vinna i ett eget distrikt, exempelvis "*Liberterian Party*" eller "*Green Party of the United States*". Detta är dock inget måste, då FMV tillåter landets politiker att instifta en procentuell "ribba" som partierna måste ta sig över innan de kan bli tilldelad en plats i kongressen. Ett exempel på detta kan vara att ett parti först måste uppnå minst 20% av delstatens totala antal röster innan de kan tilldelas sin beskärda

del av platser i kongressen. Något som kan liknas med riksdagsgränsen i Sverige som för närvarande ligger på 4,3%.

Vi har alltså ett alternativt valsystem som både fokuserar på den totala andelen röster som läggs i delstaten, samtidigt som den tillåter folket att rösta på vilka politiker de vill ska representera dem i kongressen. Detta valsystemet ger folket en ökad politisk inflyttande samtidigt som den minskar effekten av gerrymandering och ger mindre partier en större möjlighet att komma till en maktposition.

3.2 Hur FMV fungerar

Om vi antar att en delstat med k representanter (distrikt) och n partier, där varje väljare får rösta på en kandidat för sitt distrikt.

Vi låter sedan $v = (v_{i,j})$ där $v_{i,j}$ betecknar den röst som lagts på parti i i distrikt j , och $p = (p_i)$ där $p_i = \sum_j v_{i,j}$ betecknar den totala mängden röster som parti i fått i delstaten. Vi låter även $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, där a_i beteckna antalet platser/sätten tilldelad till parti i i kongressen.

Vad FMV gör är att fördela k -sätten för en delstat mellan n partier utifrån den sammanlagda andelen röster partierna fått, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Denna fördelningen bygger på Jeffersons fördelningsmetoder där man beräkna $a_i = \lfloor \lambda p_i \rfloor$. Förenklat kan detta förklaras som att a_i ska vara lika med den största heltalsprodukten av p_i multiplicerad med vår multipel λ , som inte får vara största än själva a_i . Valet av vår multipel λ görs sådant att $\sum a_i = k$ (summan av alla platser tilldelad parti i är lika med antalet representanter/distrikt).

Vi låter $x = (x_{i,j})$, där $x_{i,j} = 1$ om en kandidat för parti i vinner i sitt distrikt j , varav $x_{i,j} = 0$ om kandidaten för parti i förlorar i sitt distrikt j .

Vad FMV gör är att konstruera en $(0, 1)$ -matris x som tillfredställer villkoren,

- $\sum_i x_{i,j} = 1 \quad (j = 1, \dots, k)$
- $\sum_j x_{i,j} = a_i \quad (i = 1, \dots, n)$
- $v_{i,j} = 0 \Rightarrow x_{i,j} = 0.$

Vad det första villkoret gör är att garantera att en representant blir vald i varje distrikt j , varav det andra villkoret garanterar att parti i tilldelas a_i sätten. Det sista villkoret är kanske den mest logiska, då den i princip säger att en kandidat som inte fått några röster i ett distrikt inte heller kan representera distriktet. Det finns flera möjliga x för när detta gäller. Mängden kandidater som väljs ut genom dess 1:or kallas "*en möjlig delegation*" (vilket vi också kommer att beteckna som x i denna text, trots att detta kommer bli grammatiskt fel).

Frågan som uppstår är huruvida vi alltid kan få en möjlig delegation. I tabellen nedan ser vi att svaret på detta är "Nej", varav vi måste bestämma för när detta inte är möjligt.

Distrikt	P ₁	P ₂	P ₃
1.st	+	+	+
2.nd	+	+	+
3.dje	+	+	+
4.de	+	+	0
5.te	+	+	0
6.te	+	+	0
7.nd	+	+	0
Förtjänade sätten	2	1	4

I scenariet ovan finns ingen möjlig delegation x eftersom bara tre av sju distrikt (distrikt 1–3) röstade för parti P_3 , som trots detta införskaffat tillräckligt många röster för att bli tilldelad fyra platser i kongressen. Scenariet kommer då bryta mot vårt tredje villkor med att en kandidat inte kan representera ett distrikt som partiet inte fått några röster inom. Dock är denna scenarie väldigt extrem och osannolik då det bland annat byggs på att väljarna för parti P_3 i distrikt 1, 2 och 3 skulle överskrida det totala antalet väljare i de restrerande distrikten [14].

Ett annat problem med denna scenarie är att det också är nästintill omöjligt för en kandidat att inte få en enda röst inom sitt distrikt, eftersom det amerikanska valsystemet, som med många andra länders valsystém, tillåter kandidaterna själva att rösta i valen. Detta betyder att en kandidat, med deras eventuella kampanjgrupp, tillåts rösta på sig själva och på så sätt garantera minst en röst i distriktet [14]. Den enda scenariot där detta inte skulle vara fallet är om kandidaten i fråga har ett kriminellt register. Enligt amerikansk lag fräntas en person som dömts för brott rätten att rösta i ett offentligt val eller sitta på ett offentligt, statligt sätt, men denna lag säger inget om att en person med kriminellt register inte skulle kunna ställa upp i ett offentligt val. Rent hypotetiskt kan vi fortfarande få ett sådant scenario där en kandidat inte får några röster i sin delstat, även om detta är en väldigt extrem scenario [15].

Vad vårt problem ovan demonstrerar är just att det kan finnas scenarion där det inte finns en möjlig delegation x , även om dessa scenarion är ganska osannolika. Från detta kan vi sammanställa ett "*Theorem*" ("sats") som beskriver det generella fallet för när en delegation x existerar. Vi definierar däremot först K som en delmängd av distrikten och $a(K)$ som summan av antalet platser varje parti i får i kongressen när partiet införskaffat mer än 0 röster i ett distrikt j , när j är en del av distriktdelmängden K , alltså $a(K) = \sum \{a_i : v_{i,j} > 0 \text{ för ett } j \in K\}$.

Theorem 2 [14, Theorem 1]. (Feasibility Conditions)

"There exists a feasible delegation x if and only if $a(K) \leq |K|$ for every subset K of the districts."

När en sådan delegation existerar kan vi lösa ett problem (v, a) som är definierad av en $n \times k$ -matris med rösterna v och en platsfördelning a som tillfredställer $\sum a_i = n$. Detta kan vi göra genom att konstruera en av tre matriser med en given radmultipel $\lambda = (\lambda_i) > 0$ och/eller en given kolumnmultipel $\rho = (\rho_i) > 0$,

- $\lambda \circ v = (\lambda_i v_{i,j}) \quad (i)$
- $v \circ \rho = (v_{i,j} \rho_j) \quad (ii)$
- $\lambda \circ v \circ \rho = (\lambda_i v_{i,j} \rho_j) \quad (iii),$

som beskriver de rättfärdigade rösterna för kandidaterna från de olika partierna inom de olika distrikten. Detta kan vi i sin tur sammanställa till satsen,

Theorem 3 [14, Theorem 2], (FMV Characterized)

"Suppose that the problem (v, a) is feasible. Then:

(i) There are row-multipliers λ such that electing a set of candidates with the most justified-votes $(\lambda \circ \rho)$ in each district j —a set of district-winners— gives every party i the number a_i of seats it deserves.

(ii) There are column-multipliers ρ such that electing a set of a_i candidates with the most justified-votes $(\lambda \circ \rho)$ of each party i —a set of party-winners—gives every district j exactly one seat.

(iii) There is a set of candidates that is at once a set of district-winners and a set of party-winners with respect to the justified-votes $(\lambda \circ v \circ \rho)$.

In each case the sets of designated candidates are one and the same, though different multipliers may be used to find them. These sets are FMV-delegations,

där vi redan har illustrerat punkterna (i) och (ii) (se sidorna 39-40), varav när de används samtidigt illustrerar (iii) . Något vi kan observera i vårt exempel för Connecticut nedan, där vi både arbetar med en radmultipel (λ) och en kolumnmultipel (ρ) ,

Distrikt	Multipel (λ)	1st	2nd	3dje	4de	5te
Rep	1	73.273	161.410	68.810	149.891	165.440
Dem	1,0983	217.416	149.891	219.270	149.891	115.872
Multipel (ρ)		1	0.9749	1	1	1

Flervariabellösningar är i dessa fall sällsynta, men när de förekommer så brukar samma multiplar som för fall (i) och (ii) fortfarande att gälla. Önskar

läsaren veta mer om detta och saterna ovan så rekommenderar jag läsaren att läsa Michel Balinskis artikel "*Fair Majority Voting (or How to Eliminate Gerrymandering)*" där han redogör för allt detta mer i detalj [14].

Det är dessa två "*theorem*" som utgör grundpelarna för vilket FMV fungerar och kan brukas som en alternativ metod i förhållande till den rådande valsyste- met i USA som tillåts påverkas och manipuleras genom gerrymandering.

Referenser

Litteratur:

- [1] "Gerrymandering". *Encyclopaedia Britannica*. 2014-11-05.
<https://www.britannica.com/topic/gerrymandering>. (Hämtad 2019-01-31).
- [2] "Gerrymandering Explained". *RepresentUS*. 2018-05-26.
<https://www.youtube.com/watch?v=JF4jvJNvCqY>.
(Hämtad 2019-01-31).
- [3] "Racial Gerrymandering Law and Legal Definition". *USLegal, Inc.*
<https://definitions.uslegal.com/r/racial-gerrymandering/>.
(Hämtad 2019-01-31).
- [4] Giansiracusa, Noah. Ricciardi, Cameron. "Geometry in the Courtroom".
The American Mathematical Monthly vol.10. Taylor and Francis Online.
(2017).
- [5] Alexeev, Boris. Mixon, Dustin G. "An Impossibility Theorem for
Gerrymandering". *The American Mathematical Monthly*. vol.125. Taylor and
Francis Online. (2018).
- [6] "The 12 Most Gerrymandered Districts In America". *Ranker*.
<https://www.ranker.com/list/most-gerrymandered-districts-in-america/eric-vega>.
(Hämtad 2019-02-19).
- [7] "Ballotpedia", https://ballotpedia.org/Main_page.
(Hämtad 2019-04-18).
- [8] Gillman, Rick. "Geometry and Gerrymandering". *Math Horizons* vol.10.
Taylor and Francis Online. (2018).
- [9] "Illinois's 4.th congressional district". Wikipedia.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Illinois>
(Hämtad 2019-02-07).
- [10] "Gerrymandering 101". *Fair Election Project*.
<https://www.fairelectionsproject.org/gerrymandering-101/>
(Hämtad 2019-04-19).
- [11] "The 2018 midterm vote: Divisions by race, gender, education".
Pew Research Center. 2018-11-08.
<https://www.pewresearch.org/fact-tank/2018/11/08/the-2018-midterm-vote-divisions-by-race-gender-education/>
(Hämtad 2019-04-19).
- [12] "Moved Out or Forced Out: The Arguments behind Gentrification".
Medium. 2018-05-15.
<https://medium.com/the-healthy-city/moved-out-or-forced-out-the-arguments-behind-gentrification-88bebc36e0be>
(Hämtad 2019-04-19).

- [13] Bernstein, Mira Duchin. Moon. "A Formula goes to Court: Partisan Gerrymandering and The Efficiency Gap". *Notice of the American Mathematical Society*. vol.64. nr.9 American Mathematical Society. (2017).
- [14] Balinski, Michel. "Fair Majority Voting (or How to Eliminate Gerrymandering)". *The American Mathematical Monthly*. vol.115. Taylor and Francis Online. (2018).
- [15] "Can Felons Run for Public Office?". *JobsForFelonsHub.com*. <https://www.jobsforfelonshub.com/can-felons-run-public-office/> (Hämtad 2019-05-21).

Bilder:

- Figur 1.** <https://janetsgoodnews.com/2017/10/31/election-integrity-gerrymandering/> (Hämtad 2019-01-31).
- Figur 2.** <https://act.represent.us/sign/gerrymandering/> (Hämtad 2019-01-31).
- Figur 3.** <http://37steps.com/738/compactness/> (Hämtad 2019-02-10).
- Figur 4.** <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:KochFlake.svg> (Hämtad 2019-06-06).
- Figur 5,6 och 8.** <https://en.wikipedia.org/wiki/Illinois> (Hämtad 2019-02-07).
- Figur 7.** <https://math.stackexchange.com/questions/660342/is-the-circumcenter-of-an-equilateral-triangle-equidistant-from-its-3-vertices> (Hämtad 2019-02-01).
- Figur 9.** <https://en.wikipedia.org/wiki/Connecticut> (Hämtad 2019-03-14).