SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Grunderna i grafteorin

av

Mayckel Chamoun

2019 - No K26

Grunderna i grafteorin

Mayckel Chamoun

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Pavel Kurasov

2019

Sammanfattning:

Grafteorin har använts under en lång tid för att beskriva matematiska relationer mellan objekt. Genom tiden så har matematiken utvecklats och framtigit nya verktyg som har nyttjats av grafteorin för att utveckla beskrivningen mellan objekt som är relaterade till varandra genom att modellera matematiska strukturer. Matematiska strukturer beskrivs genom grafer och två grafer kan ha likadana spektrum som kallas då för isospektrala. I det här arbetet så kommer det att tas upp bland annat hur objekt som är relaterade till varandra kan beskrivas med matematiska strukturer samt att två olika grafer kan vara isospektrala.

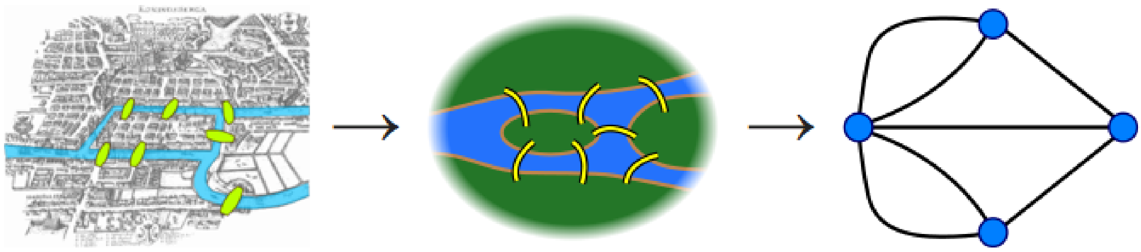
Abstract:

The graph theory has been used for a long time to describe mathematical relationships between objects. Through time, mathematics has been developed and new tools have been developed that have been used by graph theory to develop the description between objects that are related to each other by modelling mathematical structures. Mathematical structures are described by graphs and two graphs can have the same spectrum, which is then called isospectal. In this work it will be discussed, among other things, how objects that are related to each other can be described with mathematical structures and that two graphs can be isospectral.

Innehållsförteckning

1 Inledning

Grafteorin anses uppstod år 1736 av den schweiziske matematikern Leonhard Euler, när han försökte lösa problemet med Königsbergs sju broar. Han försökte hitta en promenadväg som går förbi varje bro precis en gång. Han kom fram till att det inte fanns någon lösning, alltså att det inte gick att göra en sådan promenad. Han formulerade sin undersökning genom en abstrakt graf som visas nedantill, där punkterna är öarna och linjerna är broarna.

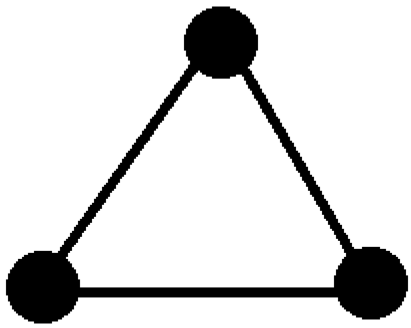


[1].

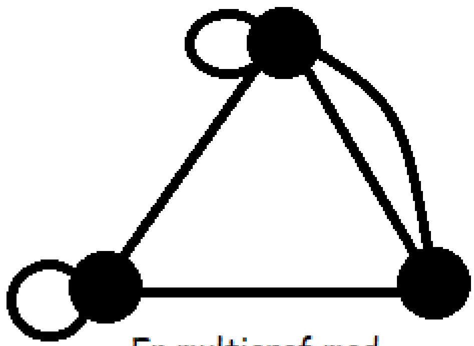
Inom matematiken så är grafteori ett område som undersöker egenskaper hos grafer. Grafer är matematiska strukturer som används för att modellera relationer mellan objekt. En matematisk graf består av punkter, som även kallas noder eller hörn, som är sammanbundna med linjer, som även kallas bågar eller kanter. Punkterna beskriver objekten och linjerna beskriver relationen mellan objekten. En linje kan gå från en punk till samma punk, som kallas då för en loop. Grafer kan vara riktade eller oriktade, där riktade grafer har en definierad riktning mellan objekten medan oriktade grafer inte har någon speciell definierad riktning, alltså gäller relationerna åt båda riktningarna mellan de sammanbundna objekten. Det finns även viktade grafer, där varje linje har ett associerat värde. Grafer finns i olika varianter men i det här arbetet så kommer endast oriktade grafer utan loopar att behandlas samt isospektrala grafer [2].

2 Graf

Definition 1. En graf $G(N(G), B(G))$ består av en nodmängd $N(G)$ och en bågmängd $B(G)$, där nodmängden $N(G)$ är godtycklig och bågmängden $B(G)$ består av en mängd ordnade eller oordnade par av element ur nodmängden $N(G)$. Om bågmängden $B(G)$ är ordnad så kallas grafen för en riktad graf och om bågmängden $B(G)$ är oordnad så kallas grafen för en oriktad graf. En graf ritas oftast med punkter och linjer, där punkterna beskriver noderna och linjerna beskriver bågarna. Om grafen är riktad så ritas linjerna med pilar.



En enkel graf med tre noder och tre bågar.



En multigraf med tre noder och sex bågar där två av bågarna är loopar.

Enligt definition kan en graf även ha flera bågar som sammanbinder två noder samt ha loopar och kallas då för en **multigraf**, men sådana grafer ska inte studeras i det här arbetet.

En **enkel graf** är en graf som är oriktad, alltså består utav en oordnad bågmängd $B(G)$ och har endast en båge som sammanbinder två noder samt har inga loopar. I sådana grafer är endast antalet noder intressanta och det här arbetet kommer endast att behandla dessa varianter av grafer.

Grafer kan effektivt beskrivas med hjälp av matriser [3][4].

3 Grannmatris

En grannmatris är en matris som beskriver en graf genom att ange vilka noder som har sammanbundna bågar.

Definition 2. En grannmatris $A(G)$ till en enkel graf G med nodmängden $N(G) = \{n_1, n_2, ..., n_n\}$ och bågmängden $B(G)$ definieras som en $n \times n$ matris med element a_{ij} givna av $a_{ij} = 1$ om $(n_i, n_j) \in B(G)$ och $a_{ij} = 0$ annars.

För en enkel graf är grannmatrisen alltid reell och symmetrisk med noll i diagonalen. Sådana matriser kan därför endast ha reella egenvärden och har en bas av ortonormerade egenvektorer som beskriver spektrumet av A.

Det karakteristiska polynomet $det(\lambda I - A)$ av A kallas även för det karakteristiska polynomet av den enkla grafen G och betecknas $P_G(\lambda)$.

Egenvärdena för grannmatrisen A kallas även för egenvärdena för den enkla grafen G där egenvärdena ges utav $det(\lambda I - A) = 0$ och spektrumet består utav n egenvärden.

Egenvärdena för grannmatrisen A betecknas med λ_i som uppfyller matrisekvationen $A\vec{v_i} = \lambda_i \vec{v_i}$ för en vektor $\vec{v_i} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, och varje sådan vektor $\vec{v_i}$ kallas för en egenvektor för grannmatrisen A och därmed för den enkla grafen G.

Egenvektorerna som tillhör sina egenvärden är ortogonala med varandra. För multipla egenvärden kan egenvektorerna väljas vinkelräta. Det går att bestämma en ortonormal bas genom att normera egenvektorerna [3].

4 Enkla grafer

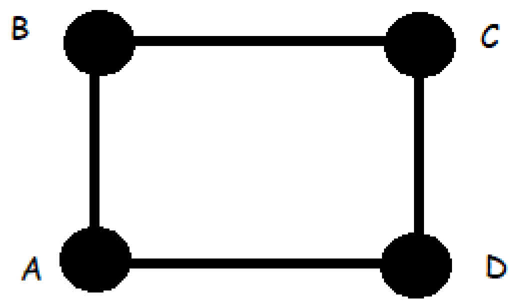
I det här avsnittet så kommer det att behandlas några olika varianter av enkla grafer.

4.1 Cyklisk graf

Definition 3. En cyklisk graf är en graf som har formen av endast en cykel och består utav minst tre noder. Den cykliska grafen betecknas C_n där n är antalet noder som är lika med antalet bågar, där varje nod är av grad två [3].

Exempel 4. Låt oss studera en cykliskgraf C_4.

Grafen C_4 ritas ut på följande vis



Grannmatrisen A för grafen C_4 blir följande

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena λ ges utav

$$det(\lambda I - A) = 0.$$

Karaktäriska polynomet av G följer

$$P_{C_4}(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Determinantens utveckling via första raden följer

$$P_{C_4}(\lambda) = \lambda \cdot det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^4 - 4\lambda^2$$

$$= \lambda^2(\lambda^2 - 4).$$

Den karaktäriska ekvationen är

$$\lambda^2(\lambda^2 - 4) = 0.$$

Egenvärdena är $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ och $\lambda_4 = -2$.

Egenvektorerna bestäms utav följande matris ekvation, och med hjälp av Gausselimination

$$(\lambda_n I - A)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} \lambda_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_n & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda_n & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda_n & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v}_1$ för egenvärdet $\lambda_1 = 2$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$ för egenvärde $\lambda_1 = 2$.

Egenvektorerna $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$ för egenvärdena $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorerna $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$ för $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ kan väljas ortogonala enligt $\vec{v}_2 = (1, 1, -1, -1)^T$ och $\vec{v}_3 = (-1, 1, 1, -1)^T$.

Egenvektor $\vec{v}_4$ för egenvärdet $\lambda_4 = -2$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v}_4 = (1, -1, 1, -1)^T$ för egenvärde $\lambda_4 = -2$.

Egenvektorerna kan sedan normeras för att bli ortonormerade enligt följande

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2}}(1, 1, 1, 1)^T = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}(1, 1, -1, -1)^T = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^T$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}}(-1, 1, 1, -1)^T = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)^T$$

$$\vec{u}_4 = \frac{\vec{v}_4}{\|\vec{v}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}}(1, -1, 1, -1)^T = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T.$$

4.2 Komplett graf

Definition 5. En komplett graf är en enkel graf där varje nod är sammanbunden med alla övriga noder. En komplett graf betecknas K_n, där n är antalet noder [3].

Definition 6. En nods grad är antalet bågar som är sammanbundna till noden.

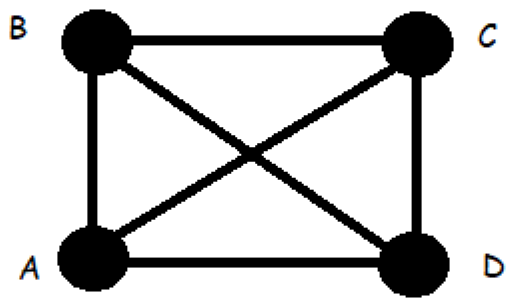
I en komplett graf så har varje nod samma grad $n-1$.

Låt G vara en komplett graf med n antal noder. Eftersom det inte existerar några loopar så har varje enskild nod graden $n-1$, vilket skulle visas.

Antalet distinkta bågar i en komplett graf ges utav $B_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Låt G vara en komplett graf med n antal noder där varje enskild nod har graden $n-1$. Detta ger antalet bågar $n(n-1)$, men eftersom en båge mellan två noder $(n_1, n_2) = (n_2, n_1)$ så måste det divideras med 2 för att endast räkna med distinkta bågar. Alltså är totalt antalet distinkta bågar $n(n-1)/2$, vilket skulle visas.

Exempel 7. Ett exempel på en komplett graf K_4 visas nedan



Varje nod har samma grad, där graden ges utav

$$n - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Antalet bågar ges utav

$$B_4 = \binom{4}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = 6.$$

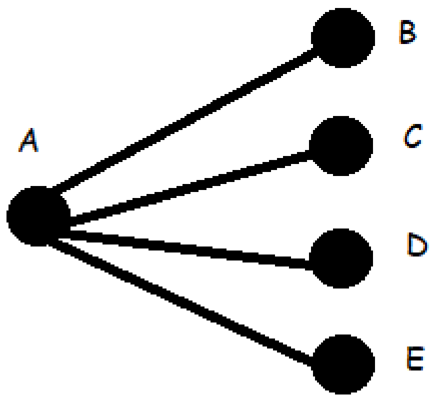
4.3 Bipartit graf

Definition 8. En bipartit graf är en graf som har sin nodmängd $N(G)$ partionerad i två delmängder $N(G) = X \cup Y$ där $X \cap Y = \emptyset$ och där varje båge $b \in B(G)$ kan skrivas på formen $b = \{x, y\}$ där $x \in X$ och $y \in Y$. På detta vis sägs att grafen G har bipartionen (X, Y) och betecknas $G = (X, Y, B)$, där noderna i samma delmängd inte kan vara sammansbundna med varandra [3].

Definition 9. En komplett bipartit graf är en bipartit graf där varje nod i den ena delmängden är sammanbunden med alla övriga noder i den andra delmängden och betecknas $K_{n,m}$ där n och m är nodmängder i respektive delmängd [3].

Exempel 10. Låt oss studera en komplett bipartit graf $K_{1,4}$.

Grafen $K_{1,4}$ ritas ut på följande vis



Grannmatrisen A för grafen $K_{1,4}$ blir följande

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena λ ges utav

$$det(\lambda I - A) = 0.$$

Karaktäriska polynomet av G följer

$$P_{K_{1,4}}(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Determinantens utveckling via andra kolumnen följer

$$P_{K_{1,4}}(\lambda) = det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \lambda \cdot det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \cdot det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \lambda \cdot det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \lambda^2 \cdot det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(-\lambda^2) + \lambda(-\lambda^2) + \lambda^2(\lambda^3 - 2\lambda)$$

$$= \lambda^5 - 4\lambda^3$$

$$= \lambda^3(\lambda^2 - 4)$$

$$= \lambda^3(\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

Den karaktäriska ekvationen är

$$\lambda^3(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0.$$

Egenvärdena är $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ och $\lambda_5 = -2$.

Egenvektorerna bestäms utav följande matris ekvation, och med hjälp av Gausselimination

$$(\lambda_n I - A)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} \lambda_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_n & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda_n & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda_n & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda_n & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v}_1$ för egenvärdet $\lambda_1 = 2$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v}_1 = (-2, 1, 1, 1, 1)^T$ för egenvärdet $\lambda_1 = 2$.

Egenvektorerna $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ och $\vec{v}_4$ för egenvärdena $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorerna $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ och $\vec{v}_4$ för $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ kan väljas ortogonala enligt $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, -1, -1)^T, \vec{v}_3 = (0, -1, 1, 1, -1)^T$ och $\vec{v}_4 = (0, 1, -1, 1, -1)^T$.

Egenvektor $\vec{v}_5$ för egenvärdet $\lambda_5 = -2$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Egenvektor $\vec{v}_5 = (2, 1, 1, 1, 1)^T$ för egenvärdet $\lambda_5 = -2$.

Egenvektorerna kan sedan normeras för att bli ortonormerade enligt följande

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2}}(-2, 1, 1, 1, 1)^T = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-2, 1, 1, 1, 1)^T$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}(0, 1, 1, -1, -1)^T = \frac{1}{2}(0, 1, 1, -1, -1)^T$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}}(0, -1, 1, 1, -1)^T = \frac{1}{2}(0, -1, 1, 1, -1)^T$$

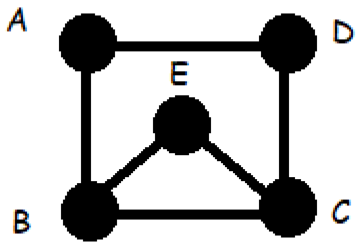
$$\vec{u}_4 = \frac{\vec{v}_4}{\|\vec{v}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}}(0, 1, -1, 1, -1)^T = \frac{1}{2}(0, 1, -1, 1, -1)^T.$$

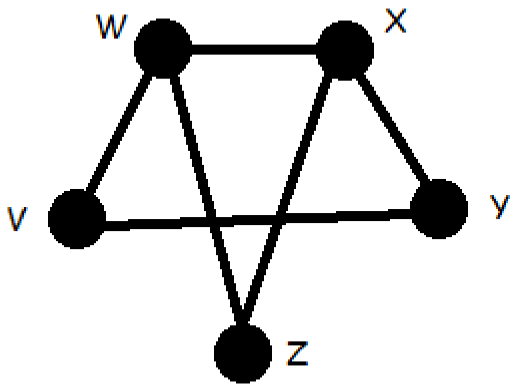
$$\vec{u}_5 = \frac{\vec{v}_5}{\|\vec{v}_5\|} = \frac{1}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2}}(2, 1, 1, 1, 1)^T = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2, 1, 1, 1, 1)^T.$$

5 Isomorfa grafer

Definition 11. Två grafer $G = (N, B)$ och $G' = (N', B')$ sägs vara isomorfa om det existerar en bijektiv funktion $\beta : B \leftrightarrow B'$ sådan att $(\beta(x), \beta(y)) \in N'$ om och endast om $(x, y) \in N$ [4].

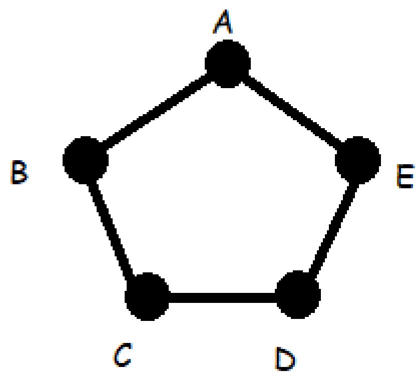
Exempel 12. Två isomorfa grafer visas nedan

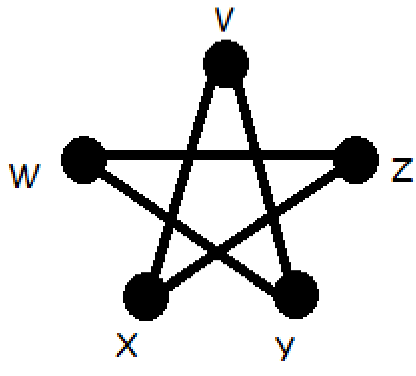




Eftersom det finns en bijektiv funktion $A \to V, B \to W, C \to X, D \to Y, E \to Z$ så är graferna isomorfa.

Exempel 13. Ytterligare två isomorfa grafer visas nedan





Eftersom det finns en bijektiv funktion $A \to V, B \to X, C \to Z, D \to W, E \to Y$ så är graferna isomorfa.

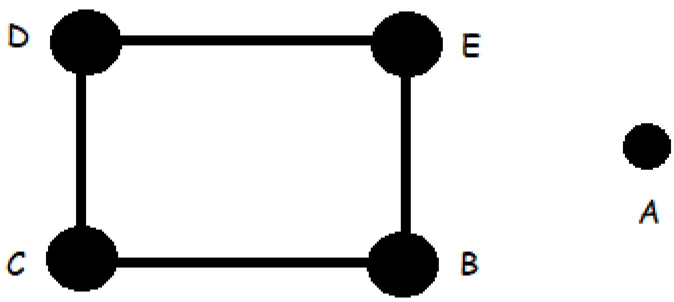
Observera att det existerar flera bijektiva funktioner i båda exemplen men det är tillräckligt att finna endast en bijektiv funktion för att konstatera att graferna är isomorfa.

6 Isospektrala grafer

Definition 14. Två grafer sägs vara isospektrala om deras grannmatriser har samma egenvärden (inklusive multiplicitet). Isospektrala grafer behöver inte vara isomorfa men isomorfa grafer är alltid isospektrala [3].

Exempel 15. Låt oss studera en graf $G = C_4 \cup K_1$.

Grafen $G = C_4 \cup K_1$ ritas ut på följande vis



Grannmatrisen A för grafen $G = C_4 \cup K_1$ blir följande

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena λ ges utav

$$det(\lambda I - A) = 0.$$

Karaktäriska polynomet av G följer

$$P_{C_4 \cup K_1}(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Determinantens utveckling via första kolumnen följer

$$P_{C_4 \cup K_1}(\lambda) = \lambda \cdot det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 \cdot det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} + \lambda \cdot det \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} + \lambda \cdot det \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2(\lambda^3 - 2\lambda) + \lambda(-\lambda^2) + \lambda(-\lambda^2)$$

$$= \lambda^5 - 4\lambda^3$$

$$= \lambda^3(\lambda^2 - 4)$$

$$= \lambda^3(\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

Den karaktäriska ekvationen är

$$\lambda^3(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0.$$

Egenvärdena är $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ och $\lambda_5 = -2$.

Egenvektorerna bestäms utav följande matris ekvation, och med hjälp av Gausselimination

$$(\lambda_n I - A)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} \lambda_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda_n & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda_n & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v}_1$ för egenvärdet $\lambda_1 = 2$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v}_1 = (0, 1, 1, 1, 1)^T$ för egenvärdet $\lambda_1 = 2$.

Egenvektorerna $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ och $\vec{v}_4$ för egenvärdena $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorerna $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ och $\vec{v}_4$ för $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ kan väljas ortogonala enligt $\vec{v}_2 = (1, 0, 0, 0, 0)^T, \vec{v}_3 = (0, 1, 0, -1, 0)^T$ och $\vec{v}_4 = (0, 0, 1, 0, -1)^T$.

Egenvektor $\vec{v}_5$ för egenvärdet $\lambda_5 = -2$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v}_5 = (0, -1, 1, -1, 1)^T$ för egenvärdet $\lambda_5 = -2$.

Det visade sig att grannmatrisen för grafen $G = C_4 \cup K_1$ har samma spektrum som grannmatrisen för grafen $K_{1,4}$ som undersöktes i kapitel 4.3, alltså är dessa två grafer isospektrala.

För varje graf går det att bestämma ett spektrum, men för ett spektrum går det inte att bestämma grafen.

Två isospektrala grafer har samma antal noder och spåret $Tr(A) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ [4].

7 Antal vägar i en enkel graf

Definition 16. En väg är en sekvens av riktade bågar $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ i en graf, där start punkten för bågen b_j är lika med slut punkten för b_{j+1} [3].

Sats 17. I en enkel graf G så kan antalet vägar med en viss längd beräknas genom att kolla potensen av grannmatrisen A, där värdet på elementet a_{ij}^k i matrisen A^k är lika med antalet vägar med längden k från noden i till noden j, enligt formeln

$$(A^k)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} u_{is}\lambda_s^k u_{js}$$

där u_s är ortonormala egenvektorer med motsvarande egenvärden λ_s till matrisen A [3].

Bevis. Anta att G är en enkel graf med grannmatrisen A och $U = (u_{mn})$ är en ortonormal matris av egenvektorer till grannmatrisen A. Genom följande samband

$$A\vec{u}_n = \lambda_n \vec{u}_n$$

där

$$\vec{u}_n = \begin{bmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{bmatrix}$$

och

$$U = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}$$

så följer diagonaliseringen av matrisen A enligt

$$A = UDU^T$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{ml} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 u_{11} & \cdots & \lambda_1 u_{ml} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{mn} u_{1n} & \cdots & \lambda_{mn} u_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11}\lambda_1 u_{11} + ... + u_{1n}\lambda_{mn} u_{1n} & \cdots & u_{11}\lambda_1 u_{m1} + ... + u_{1n}\lambda_{mn} u_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1}\lambda_1 u_{11} + ... + u_{mn}\lambda_{mn} u_{1n} & \cdots & u_{m1}\lambda_1 u_{m1} + ... + u_{mn}\lambda_{mn} u_{mn} \end{bmatrix}.$$

Detta kan skrivas enligt

$$A_{ij} = \sum_{s=1}^{n} u_{is}\lambda_s u_{js}.$$

Tredje potensen av detta följer

$$\begin{aligned} A^3 &= (UDU^T)^3 \\ &= UDU^TUDU^TUDU^T \\ &= UDIDIDU^T \\ &= UD^3U^T \\ &= \sum_{s=1}^{n} u_{is}\lambda_s^3 u_{js}. \end{aligned}$$

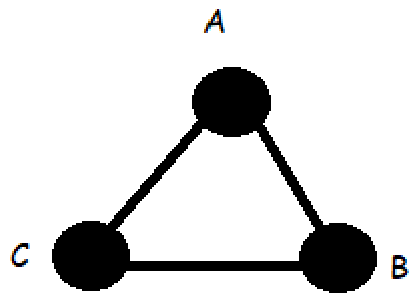
Alltså gäller det att

$$(A^k)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} u_{is}\lambda_s^k u_{js}$$

där värdet på elementet a_{ij}^k i matrisen A^k är lika med antalet vägar med längden k från noden i till noden j i den enkla grafen G, vilket skulle visas [3].

Exempel 18. Beräkna antalet vägar av längd 2 och 3 för en enkel cykliskgraf C_3.

Grafen C_3 ritas ut på följande vis



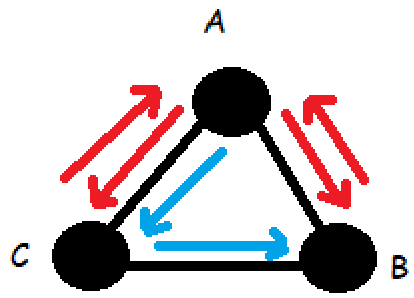
Grannmatrisen A för grafen C_3 blir följande

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Antalet vägar av längd 2 beräknas enligt följande

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

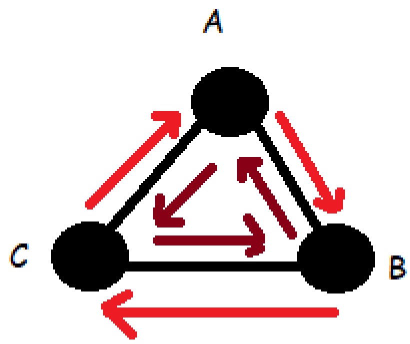
Exempelvis elementet $a_{11}^2 = 2$ talar om att det finns två vägar av längden 2 som går från noden A till noden A, och elementet $a_{12}^2 = 1$ talar om att det finns en väg av längden 2 som går från noden A till noden B. Detta visas i bilden nedan, där $a_{11}^2 = 2$ är markerad med rött och där $a_{12}^2 = 1$ är markerad med blått.

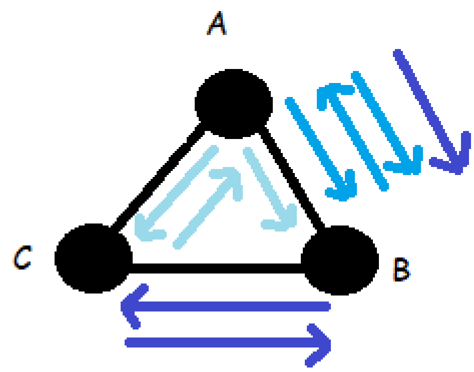


Antalet vägar av längd 3 beräknas enligt följande

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exempelvis elementet $a_{11}^3 = 2$ talar om att det finns två vägar av längden 3 som går från noden A till noden A, och elementet $a_{12}^3 = 3$ talar om att det finns tre vägar av längden 3 som går från noden A till noden B. Detta visas i bilden nedan, där $a_{11}^3 = 2$ är markerad med rött och där $a_{12}^3 = 3$ är markerad med blått.





Det kan bli väldigt besvärligt att beräkna matriser med höga potenser, alltså då k är stort. Detta kan underlättas genom att tillämpa formeln

$$(A^k)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} u_{is} \lambda_s^k u_{js}.$$

Ytterligare exempel visas nedan med hjälp av formeln.

Först behöver ortonormerade egenvektorer bestämmas till matrisen, vilket görs enligt följande.

Egenvärdena λ ges utav

$$det(\lambda I - A) = 0.$$

Karaktäriska polynomet av C_3 följer

$$P_{C_3}(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= det\begin{bmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{bmatrix}.$$

Determinantens utveckling via första kolumnen följer

$$P_{C_3}(\lambda) = \lambda \cdot det\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{bmatrix} + det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & \lambda\end{bmatrix} - det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ \lambda & -1\end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 1) + (-\lambda - 1) - (1 + \lambda)$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

Den karaktäriska ekvationen är

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Egenvärdena är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Egenvektorerna bestäms utav följande matris ekvation, och med hjälp av Gausselimination

$$(\lambda_n I - A)\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix}\lambda_n & 0 & 0\\ 0 & \lambda_n & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\lambda_n & -1 & -1\\ -1 & \lambda_n & -1\\ -1 & -1 & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v}_1$ för egenvärdet $\lambda_1 = 2$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)^T$ för egenvärdet $\lambda_1 = 2$.

Egenvektorerna $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$ för egenvärdena $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ bestäms utav

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorerna $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$ för $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ kan väljas ortogonala enligt $\vec{v}_2 = (1, 0, -1)^T$ och $\vec{v}_3 = (1, -2, 1)^T$.

Egenvektorerna kan sedan normeras för att bli ortonormerade enligt följande

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}}(1, 1, 1)^T = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-1)^2}}(1, 0, -1)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2}}(1, -2, 1)^T = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)^T.$$

Nu tillämpas formeln

$$(A^k)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} u_{is} \lambda_s^k u_{js}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Då $k = 2$ ska ge likadan matris enligt tidigare ovan

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Detta gav likadan matris som tidigare ovan. Nu beräknar vi då $k = 4$

$$\begin{aligned} A^4 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^4 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{16}{\sqrt{3}} & \frac{16}{\sqrt{3}} & \frac{16}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Med hjälp av formeln så blir det enklare att beräkna matriser med höga potenser.

8 Från egenvektor till egenvärde

För stora matriser så kan det bli väldigt besvärligt att beräkna egenvärdena och de korresponderande egenvektorerna enligt det som visades tidigare ovan. Därför letar man efter enklare metoder, och ett av dem är bland annat Rayleigh kvot.

8.1 Rayleigh kvot

Definition 19. För en reell symetrisk $n \times n$ matris A och en vektor $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ så definieras Rayleigh quotient enligt följande

$$R(A, \vec{x}) = \frac{\vec{x}^T A \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}}$$

där $\vec{x}^T$ är transponatet till $\vec{x}$ [3][4][5].

Sats 20 (Courant-Fischer)**.** Anta att A är en reell symetrisk $n \times n$ matris och $\vec{x}$ är en vektor skild från noll. Då gäller det att $\lambda_{max} \geq R(A, \vec{x}) \geq \lambda_{min}$, men om $\vec{x}$ är en egenvektor så gäller $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ och då följer det att

$$R(A, \vec{x}) = \frac{\vec{x}^T A \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \lambda.$$

Därefter kan egenvärdena $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ karaktäriseras med hjälp av Rayleigh kvot enligt följande

$$\lambda_1 = \max_{\vec{x} \neq \vec{0}} R(A, \vec{x}),$$

$$\lambda_2 = \max_{\substack{\vec{x} \neq \vec{0} \\ \vec{x} \perp \vec{v}_1}} R(A, \vec{x}),$$

$$\lambda_n = \max_{\substack{\vec{x} \neq \vec{0} \\ \vec{x} \perp \vec{v}_1 \\ \vec{x} \perp \vec{v}_2}} R(A, \vec{x}),$$

där $\vec{v}_j$ är egenvektorerna som motsvarar egenvärderna λ_j [3][4][5].

Bevis. Egenvektorerna till varje symmetrisk matris bildar en bas i $\mathbb{R}^n$. Därför kan varje vektor $\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ uttryckas genom en linjärkombination

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + ... + c_j\vec{v}_j$$

där $c_1^2 + c_2^2 + ... + c_j^2 = 1$.

Vi antar att en bas $\{v_j\}$ är ortonormerad, då kan vi beräkna $R(A, \vec{x})$ enligt följande

$$R(A, \vec{x}) = \frac{\vec{x}^T A \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}}$$

$$= \frac{(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + ... + c_n\vec{v}_n)^T A(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + ... + c_n\vec{v}_n)}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2}$$

$$= \frac{(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + ... + c_n\vec{v}_n)^T (c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2 + ... + c_n\lambda_n\vec{v}_n)}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2}$$

$$= \frac{\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + ... + \lambda_n c_n^2}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2}. \tag{1}$$

Uttryck 1 kan uppskattas på följande vis

$$\frac{\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + ... + \lambda_n c_n^2}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2} \leq \frac{\lambda_1(c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2)}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2} = \lambda_1.$$

Alltså följer det att

$$R(A, \vec{x}) \leq \lambda_1$$

och om $\vec{x} = \vec{v}_1$ så gäller det att

$$R(A, \vec{v}_1) = \frac{\lambda_1 \cdot 1^2 + 0 + ... + 0}{1^2 + 0 + ... + 0} = \lambda_1.$$

Nu låt oss studera formeln för λ_2. Varje vektor $\vec{x}$ som är ortogonal med $\vec{v}_1$ kan skrivas som

$$\vec{x} = 0 \cdot \vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + ... + c_n\vec{v}_n.$$

Insättning i uttryck 1 blir

$$\frac{0 + \lambda_2 c_2^2 + ... + \lambda_n c_n^2}{0 + c_2^2 + ... + c_n^2} = \frac{\lambda_2 c_2^2 + ... + \lambda_n c_n^2}{c_2^2 + ... + c_n^2}. \tag{2}$$

Uttryck 2 kan uppskattas på följande vis

$$\frac{\lambda_2 c_2^2 + ... + \lambda_n c_n^2}{c_2^2 + ... + c_n^2} \leq \frac{\lambda_2(c_2^2 + ... + c_n^2)}{c_2^2 + ... + c_n^2} = \lambda_2.$$

Alltså följer det att

$$R(A, \vec{x}) \leq \lambda_2$$

och om $\vec{x} = \vec{v}_2$ så gäller det att

$$R(A, \vec{v}_2) = \frac{\lambda_2 \cdot 1^2 + ... + 0}{1^2 + ... + 0} = \lambda_2.$$

På så vis bestäms $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ och de korresponderade egenvektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, vilket skulle visas [3][4][5].

Ett beräknings exempel med Rayleigh kvot visas nedan.

Exempel 21. Betrakta den cykliska grafen C_4 i kapitel 4.1 och låt oss studera den med Rayleigh kvot för att nå samma ändamål.

Grannmatrisen A för den cykliska grafen C_4 är

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rayleigh kvot för en godtycklig vektor $\vec{x} = (a, b, c, d)^T$ följer

$$R(A, \vec{x}) = \frac{\vec{x}^T A \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b+d \\ a+c \\ b+d \\ a+c \end{bmatrix}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$= \frac{2ab + 2ad + 2bc + 2cd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Anta att uttrycket kan uppskattas som

$$\frac{2ab + 2ad + 2bc + 2cd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \leq r. \tag{3}$$

Vi är intresserade att välja den minsta r. Vi försöker med $r = 2$, vilket ger

$$\frac{2ab + 2ad + 2bc + 2cd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 2ab + 2ad + 2bc + 2cd \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ad + d^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2. \tag{4}$$

Olikheten gäller för alla a, b, c och d, då $a = b = c = d$.

Då $r < 2$ får vi istället

$$\frac{2ab + 2ad + 2bc + 2cd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \leq r$$

$$\Leftrightarrow 2ab + 2ad + 2bc + 2cd \leq r(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\frac{r}{2}a^2 - 2ab + \frac{r}{2}b^2) + (\frac{r}{2}a^2 - 2ad + \frac{r}{2}d^2) + (\frac{r}{2}b^2 - 2bc + \frac{r}{2}c^2) + (\frac{r}{2}c^2 - 2cd + \frac{r}{2}d^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{r}{2}(a-b)^2 + abr - 2ab + \frac{r}{2}(a-d)^2 adr - 2ad + \frac{r}{2}(b-c)^2 + bcr - 2bc + \frac{r}{2}(c-d)^2 + cdr - 2cd$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{r}{2}(a-b)^2 + \frac{r}{2}(a-d)^2 + \frac{r}{2}(b-c)^2 + \frac{r}{2}(c-d)^2 + ab(r-2) + ad(r-2) + bc(r-2) + cd(r-2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{r}{2}((a-b)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2) - (2-r)(ab + ad + bc + cd). \tag{5}$$

Olikheten gäller inte för alla a, b, c och d, eftersom om $a = b = c = d$ så följer det att

$$0 \leq -(2-r) \cdot 4a^2$$

vilket inte stämmer då $r < 2$.

Vi visade att $r = 2$ är en optimal övre gräns och om olikheterna 4 och 5 ska gälla så väljs $a = b = c = d$. Detta ger egenvärdet $\lambda_1 = 2$ och den korresponderande egenvektorn $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$.

För att bestämma λ_2 låt oss titta på vektorerna $\vec{x} = (a, b, c, d)$ som är vinkelräta mot $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$. Ortogonalitet ger sambandet

$$a + b + c + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -a - b - c. \tag{6}$$

Insättning i ekvation 3 blir enligt

$$\frac{2ab + 2ad + 2bc + 2cd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \leq r$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ab + 2a(-a-b-c) + 2bc + 2c(-a-b-c)}{a^2 + b^2 + c^2 + (-a-b-c)^2} \leq r$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(a^2 + 2ac + c^2)}{(a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 + 2ac + c^2) + (b^2 + 2bc + c^2)} \leq r$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(a+c)^2}{(a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2} \leq r.$$

r kan väljas lika med 0

$$\frac{-2(a+c)^2}{(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2} \leq 0. \tag{7}$$

För att likheten ska gälla i ekvation 7 så väljs $c = -a$, vilket ger i ekvation 6 $b = -d$, här kan a eller b väljas godtyckligt. Detta ger egenvärdet $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ och de korresponderande egenvektorerna $\vec{v}_2 = (1, 1, -1, -1)^T$ och $\vec{v}_3 = (-1, 1, 1, -1)^T$.

Egenvärdet λ_4 bestäms av en vektor $\vec{x} \perp (1, 1, 1, 1) \perp (1, 1, -1, -1) \perp (-1, 1, 1, -1)$. Ortogonalitet ger sambanden

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a+b-c-d=0 \\ a-b-c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2b=0 \\ 2a+2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ d=-a \\ c=a \end{cases}.$$

Insättningen i ekvation 3 blir enligt

$$\begin{aligned} \frac{2ab+2ad+2bc+2cd}{a^2+b^2+c^2+d^2} &\leq r \\ \Leftrightarrow \frac{-2a^2-2a^2-2a^2-2a^2}{4a^2} &\leq r \\ \Leftrightarrow \frac{-8a^2}{4a^2} &\leq r \\ \Leftrightarrow -2 &\leq r. \end{aligned}$$

Detta ger egenvärdet $\lambda_4 = -2$ och den korresponderande egenvektorn $\vec{v}_4 = (1, -1, 1, -1)^T$.

Alltså blir egenvärdena $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -2$ och de korresponderande egenvektorerna $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \vec{v}_2 = (1, 1, -1, -1)^T, \vec{v}_3 = (-1, 1, 1, -1)^T, \vec{v}_4 = (1, -1, 1, -1)^T$, vilket är samma som beräknades för den cykliska grafen C_4 i kapitel 4.1.

9 Avslutning

I det här arbetet så har vi bekantat oss med hur man kan matematiskt beskriva objekt som är relaterade till varandra genom att modellera en graf. Därefter har vi bekantat oss med hur man kan studera den modellerade grafen för att ta reda på information.

Det har visat sig att olika varianter av grafer som skiljer sig åt visuellt kan ha likadana spektrum, det vill säga vara isospektrala. Detta gör det väldigt besvärligt, därför att, för varje graf går det att bestämma ett spektrum, men för ett spektrum går det inte att bestämma grafen.

Även om vi idag tycker att vi har goda kunskaper inom matematiken så fortsätter utvecklingen och därmed utvecklingen inom grafteorin.

10 Källor

[1] https://sv.wikipedia.org/wiki/K%C3%B6nigsbergs_sju_broar
hämtat $2019-02-20$.

[2] https://sv.wikipedia.org/wiki/Grafteori
hämtat $2019-02-20$.

[3] Dragos Cvetkovic', Peter Rowlinson och Slobodan Simic'. *ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS: Eigenspaces of graphs.*

[4] Chris Godsil och Gordon Royle. *Algebraic Graph Theory.*

[5] https://www.math.uh.edu/~bgb/Courses/Math6304/MatrixTheory-20121011.pdf
hämtat $2019-02-20$.