SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Existens och Entydighet av Lösningar till Ordinära Differentialekvationer

av

Terése Johansson

2019 - No K29

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Existens och Entydighet av Lösningar till Ordinära Differentialekvationer

Teréce Johansson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Mitja Nedic

2019

Existens och Entydighet av Lösningar till Ordinära Differentialekvationer

Terèce Johansson

Augusti 2019

Sammanfattning

I denna rapport kommer vi att delge en inblick i historiken bakom området differentialekvationer. För att sedan presentera några matematiker som varit betydande för framfarten av området, och som har hjälpt till att forma det till det vi känner till idag. Vissa definitioner och satser som lärts ut under grundläggande universitetsundervisningen kommer att repeteras för att bättre förstå och hänga med i huvudpunkterna. Sedan kommer grunderna om ordinära differentialekvationer att presenteras, för att vidare gå igenom satserna om existensen och entydigheten av lösningar till ordinära differentialekvationer. Detta avrundas med att visa på exempel som uppfyller satserna samt inte gör det. Slutligen kommer en kort granskning av en gymnasiebok för kurs 5 för att jämföra kurslitteraturen till detta arbete och betona vad som lärs ut vid första mötet med området differentialekvationer.

Tack till

Först vill jag tacka Annemarie Luger för hjälpen med valet av detta ämne samt för att ha hänvisat mig till min handledare Mitja Nedić.

Tack till min granskare Jonathan Rohleder för din respons, det gav mig en möjlighet att finslipa texten ytterligare.

Stort tack till min handledare Mitja. Du har hjälpt mig i denna process genom att skapa en orosfri och prestationsfri miljö. Tack för allt du gjort, bl.a. för att ha rättat mina texter, påpekat min bristfälliga meningsuppbyggnad och mitt skriftliga språk samt letat upp litteratur på svenska. Tack för din hjälp och din förståelse och dina förklaringar av detaljer som för mig varit svåra att greppa.

Slutligen, tack till mina nära och kära för stöd hemifrån under denna process.

Innehåll

1 Inledning

Detta arbete kommer att handla om ordinära differentialekvationer, med andra ord ODE, och mera specifikt om satsen om existens och entydighet för lösningar till just ODE. Dock är denna sats uppdelad som två satser enligt *Ordinära Differentialekvationer* av Andersson och Böiers, dvs. [**2**, kap. 2], och denna rapport kommer att utgå ifrån deras presentationer av satserna samt bevisen vilket tas upp i Kapitel 5.

I början av denna rapport kommer vi att ge en historisk koppling till området differentialekvationer, för att ge en överblick och kort men koncis förståelse över frågorna vilka och när. Frågor såsom: *Vilka var de matematiker som förde området differentialekvationer framåt? När var det man började forma området?* kommer att försökas besvaras i Kapitel 2. Genom en presentation av framstående matematiker inom området från 1600-talet ytligt och två århundraden framåt.

För att kunna stegra till en slutsats om existens och entydighet för lösningar till ODE kräver detta arbete en introduktion och bakgrund till ordinära differentialekvationer. Det kommer att presenteras i Kapitel 4. Innan behöver vi repetera vissa begrepp, definitioner och satser som krävs för att kunna förstå och förklara beviset till satserna vilket vi har via Kapitel 3 i denna rapport.

I de två efterkommande kapitlen kommer vi att försöka förstärka denna rapport genom att i Kapitel 6 ge ett exempel på en ODE som inte uppfyller Lipschitzvillkoret (se Definition 5.1). Det finns ytterligare två exempel där ett uppfyller våra satser och har en entydig existerande lösning. Avslutningsvis kommer vi att granska en gymnasiebok för att ge ett perspektiv över skillnader mellan litteratur på universitetsnivå och gymnasienivå. Granskningen av en gymnasiebok beror även på författarens framtida yrkesval och för att då samtidigt sammankoppla denna rapport till dennes utbildning.

Som avslutning kommer denna rapport att avrundas med ett avslutande kapitel, Kapitel 8, där vi kommer att försöka knyta samman denna rapport och sammanställa vad vi kommit fram till.

2 Historik

Inom det ämnet som vi skall skriva om finns det flertalet framstående matematiker som har banat väg för det vi idag kallar differentialekvationer. Självfallet finns det flertalet vi skulle kunna nämna vid namn och ge en historisk koppling till, och vi har valt att sovra bland flertalet betydande matematiker och valt ut de som genom litteraturen har ansetts vara viktigast. Detta är inte en rapport som handlar om bakgrunden till differentialekvationer eller hur differentialekvationer har kommit till och är därav inte meningen med denna rapport utan det centrala skall hantera satsen och existens och entydighet för lösningar till förstagradens differentialekvationer. Dock är det värt att nämna några namn som hjälp till att skapa och forma detta område inom matematiken.

Först, under den senare delen av 1600-talet började framfarten med differentialkalkyler [**3**, s.392] där det området etablerades genom bland andra **Isaac Newton** runt 1680-talet. Med differentialkalkyl innefattas derivator och integraler, vilket för detta arbete är relevant. Grunden till framfarten med området låg delvis i arbeten inom geometri där matematiker såsom fransmannen **Pierre de Fermat** och brittiska **Isaac Barrow** på tidigare delen av 1600-talet var framstående matematiker. Dessa män sökte tangenten till en kurva samt försökte bestämma areor och maxima eller minima till olika kurvor. Det var just Fermat som främst arbetade med att beräkna arean under en specifik kurva och tangenten till en kurva vid en specifik punkt på kurvan.

Isaac Newton [**3**, s.397] som föddes år 1642 inledde sina universitetsår på Trinity College i Cambridge vid endast 19 års ålder. Newton var Barrows ersättare som professor och med hjälp av traditionell geometri arbetade sig Newton fram till de tre fysikaliska lagarna som än i dag är känd som Newtons tre lagar. Han formulerade kraftbegreppet, tröghetslagen och gravitationslagen som är grundläggande inom fysiken och likt många matematiker på 1600-talet arbetade han med det vi idag kallar fysik. Gränsen mellan matematiken och fysiken var inte denna gräns vi har idag. Under 1670-talet arbetade Newton med *optik* och det var i en bilaga till hans arbete inom optiken som han hade detaljerade beskrivningar av integraler och funktioners derivator, vilket det sägs att han arbetat med under en längre tid. I Newtons Andra bok, Sektion II, av *Pincipia* [**3**, s.400] beskriver han definitionen av en *funktion* enligt honom och just definierar begreppet *differential*, ändringar i en funktion, och vidare härleds beräkningen med differentialer.

Vidare, under 1700-talet [**3**, s.412-421] fortsatte utvecklingen av differentialkalkyler och integralkalkyler. **Leonard Euler** föddes i Basel, Schweiz, år 1707 och redan 17 år senare hade han sin magisterexamen i universitet i Basel. Euler började först år 1741 med matematisk analys och han verkade i 25 år framåt vid universitet i Berlin. Han skrev flera verk och likt Newton definierade funktioner och förklarade skillnaden mellan en konstant och en variabel. Han arbetade med binomialutvecklingar, rationella funktioner och partialbråkuppdelning. Euler förklarade det vi idag delvis går igenom på kursen om Matematik I, där man har serieutvecklingar av logaritmfunktioner och de trigonometriska funktionerna. Vidare är det värt att nämna att Eulers stegmetod för differentialekvationer [**1**, s.196-197] kan användas för att lösa differentialekvationer av första ordningen om det finns ett begynnelsevärde, och han var därav den första att använda sig av en stegvis metod för lösningar.

I slutet av 1700-talet, samma år som franska revolutionen startade, föddes en pojke vid namn **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) [**6**]. Cauchy föddes i en tuff period av Frankrikes historia, en tid fylld med oroligheter och för många familjer var det inte säkert att vistas i huvudstaden Paris. Trots den starten på livet visades det att en ung Cauchy visade framfötter tidigt inom matematiken. När familjen flyttade tillbaka till huvudstaden fick Cauchy besök av andra kända matematiker under denna tid såsom **Laplace** och **Lagrange**, båda högt uppsatta under denna tid. Av Lagrange fick Cauchy ett tips att han utöver matematik skulle studera språk, vilket han valde att följa. Vi kan spekulera här absolut om varför det var så viktigt att han skulle lära sig språk och specifikt de klassiska språken, men troligtvis hade det med att man i början av 1800-talet stötte på texter som inte endast var på franska. Först senare av sitt liv nämns differentialekvationer, och Cauchy har en sats delvis namngivet efter honom, Cauchy-Kovalevskaya satsen för existensen hos partiella differentialekvationer. Han var den första att definiera begynnelsevärdesproblemet, även kallat Cauchy-problemet, för ordinära differentialekvaitoner, dock utan att lösa ekvationerna.

År 1815 föddes **Karl Weierstrass** (1815-1897) [**8**] till en fader som var sekreterare till en borgmästare i en tysk stad vid namn Ostenfelde. Weierstrass växte upp som äldst av fyra barn och till en far som själv var högt utbildad. När Weierstrass väl skulle börja studera på universitet var det hans fars önskan att han skulle studera ekonomi/finans, trots att han själv ville studera matematik. Det tog tid innan Weierstrass valde att gå emot hans faders önskan, dock hade han själv studerat flertalet matematikers texter och på egen hand utvecklat sin matematiska förmåga. Trots flera års studier gjorde Weierstrass inte klart sin utbildning inom finans utan han gick vidare till Münsters akademi för att just studera matematik. Trots hans tveksamma start blev han senare professor och arbetade med flertalet områden inom matematiken såsom funktionsserier och dess kontinuitet och analytiska funktioner. Året var 1870 när Weierstrass började lära ut en kvinna vid namn **Kovalevskaya** och tack vare hennes kön behövdes det göras privat då hon ej fick tillträde till universiteten. Det nämns i texten om Weierstrass att han ansåg att Kovalevskaya var exceptionell.

Sofia Kovalevskaya (1850-1891) [**9**] härrörde från Ryssland, och genom sin uppväxt och tidiga år fick hon kämpa för att kunna studera matematik. Hon fick motstånd från sin far och tvingades att gifta sig för att kunna lämna sitt hemland och för att ta sig till Tyskland, specifikt Heidelberg, och studera det hon älskade. Tyvärr fick hon inte tillträde officiellt till universitetet, utan fick inofficiellt studera till en början med goda resultat. När hon vidare runt år 1871 flyttade till Berlin för att studera under Weierstrass, och trots att han och hans kollegor försökte få in henne på universitet blev försöket misslyckad. Dock, likt nämns ovan, fick hon privatlektioner av Weierstrass i 4 års tid. Kovalevskaya hade fram till 1874 skrivit mer än 3 olika rapporter, alla vilka Weierstrass ansåg var värdiga doktorsavhandlingar, och en handlade om just partiella differentialekvationer. Hon fick sitt doktorsskap senare det året, men hade problem med att få arbete och det berodde delvis på hennes kön. Men började dock år 1884 med att lära ut matematik i Stockholm, och blev en av de första kvinnorna att tillträda på en professors plats vid ett universitet. Trots att hon dog i ung ålder blev hon ärad för sitt arbete under sin tid i Sverige med flertalet priser och utöver sina matematikstudier och forskning skrev hon skönlitterära böcker och dramer.

Året var 1832 nära staden Königsberg i Tyskland och det året föddes **Rudolf Lipschitz** (1832-1903) [**7**]. Lipschitz började studera på universitet redan i ung ålder och likt många andra studerade han på flera universitet och studerade under flera olika professorer. Lipschitz klarade doktorsavhandlingen och blev efter ett antal år professor på Breslaus universitet där han stannade i två år. Från år 1864 och till slutet av sin karriär var han aktiv på Bonns universitet. Lipschitz arbetade med flertalet områden inom matematiken, både ordinära och partiella differentialekvationer samt inom fysik då det på den tiden hängde ihop med matematiken. Lipschitz är känd för att ha definierat Lipschitzvillkoret, vilket är en olikhet, som gör att vi kan bestämma om en differentialekvation har en unik/entydig lösning. Det är just detta villkor vi kommer att använda oss av i detta arbete för att kunna bevisa satsen om existensen och entydigheten till lösningar för ordinära differentialekvationer. Villkoret nämns under Kapitel 5.1 och är en av grunderna till att satserna som presenteras i Kapitel 5.2 gäller.

I mitten av 1800-talet föddes i Paris, Frankrike, en pojke vid namn **Émile Picard** (1856-1941) [**5**] och han är ett namn vi kommer att nämna senare i denna text. Picard växte upp större delen av sin barndom med en ensamstående mamma som gjorde allt för att han skulle få en värdig utbildning. En utbildning som till en början innehöll geometri, något som Picard inte gillade, men som senare öppnade dörrarna för algebra vilket enligt källor var det som föll Picard mer i smaken. Han gjorde därav stora betydande intryck inom området om differentialekvationer och likt matematiker på 1800-talet och tidigare separerades inte matematiken och fysiken lika tydligt förr i tiden som nu. Picard studerade även andra områden såsom elektricitet, värme och elasticitet. Picards metod med successiva approximationer för lösningar till ordinära differentialekvationer beskrivs senare i Kapitel 5.2. Denna metod har satt honom på kartan för hans arbete inom området och han var den första att lösa Cauchy-problemet som nämndes tidigare i kapitlet.

Alla de ovan historiska personerna har på något sätt bidragit till utvecklingen av det valda området differentialekvationer. Men för att kunna förklara och beskriva differentialekvationer krävs det att vi kan några definitioner och satser från grundläggande matematikkurser i början av universitetsstudierna. Dessa definitioner och satser kommer att presenteras nedan.

3 Definitioner och Satser

Vi skall vidare, innan vi introducerar ordinära differentialekvationer, här skriva om just viktiga definitioner samt satser som inför fortsättningen är viktiga att både repetera och att nämna då dessa kommer att användas som grundläggande begrepp och satser.

Först behöver vi definiera en kontinuerlig funktion, då kontinuitet är direkt knutet till derivata och vidare integraler. En icke kontinuerlig funktion har ingen definierad derivata och dess definition är därav viktig att betona, och en grundläggande kunskap som krävs för förståelse av detta arbete.

Definition 3.1. [**11**, s.40] Om $\mathbf{f}$ är en funktion från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$ i en definitionsmängd C, då är $\mathbf{f}$ **kontinuerlig** i en punkt $\mathbf{a} \in C$ om gränsvärdet nedan existerar och

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Funktionen $\mathbf{f}$ är en **kontinuerlig funktion** om $\mathbf{f}$ är kontinuerlig i varje punkt i C. $\diamond$

Utifrån vår ovanstående definition kan vi därav även konstatera att enligt vår gränsvärdesdefinition är just funktionen $\mathbf{f}$ kontinuerlig i punkten $\mathbf{a}$ om

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ ;\ |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \text{ då } \mathbf{x} \in C \Rightarrow \big|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\big| < \epsilon.$$

Då vi har definierat kontinuitet för funktioner kommer vi vidare att definiera derivatan av en funktion. Vid fysikaliska problem eller praktiska problem kan det finnas frågeställningar om just hur *snabbt* ett specifikt förlopp förändras [**10**, s.177-179]. Exempelvis kan vi ha frågeställningar såsom: *Hur fort förändras lufttrycket vid en specifik plats?*, *Hur snabbt förs en viss medicin ut i blodet?* eller *Hur fort sönderfaller ett radioaktivt ämne?*. För att kunna svara på dessa frågor söker vi hur förändringen sker över vår kurva, eller vid en specifik punkt på vår funktionskurva. Denna förändring får vi från vår gränsfunktion nedan och det är specifikt att vårt gränsvärde nedan är en differenskvot likvärdigt med riktningskoefficienten för tangenten till en specifik funktionskurva $y = f(x)$ i den allmänna punkten $(x_0, f(x_0))$. För den allmänna punkten definierar vi derivatan och dess gränsvärde såsom nedan.

Definition 3.2. [**10**, s.179] Anta att funktionen f är definierad i ett område som omger punkten x_0. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existerar säger vi att funktionen f är **deriverbar** i punkten x_0. Gränsvärdet sägs vara **derivatan av** funktionen f **i** punkten x_0. $\diamond$

Värt att notera är just att derivatan kan betecknas olika, och kommer även att hanteras olika i denna rapport. Exempelvis kan första derivatan betecknas såsom

$$\frac{d}{dx}f(x_0)\ ,\ f'(x_0)\ ,\ f^{(1)}(x_0).$$

I denna rapport kommer alla de ovanstående alternativen att användas.

Efter derivatans definition är det vidare viktigt att se till nyttiga olikheter. Vi kan med hjälp av en sats säga just flera saker om olikheter och funktioner för att sedan kunna dra slutsatser och stänga inne problem. Triangelolikheten för reella tal är följande.

Sats 3.3. *Triangelolikheten.* [**10**, s.45]. För alla reella tal x, y har vi att olikheten $|x+y| \leq |x| + |y|$ gäller. ■

Vi kan formulera om ovanstående sats att handla om tal som är vektorer, vilka kommer att behandlas senare. Mer bestämt, vilken även kommer att användas i detta arbete, har vi triangelolikheten för integraler.

Sats 3.4. *Triangelolikheten för integraler.* [**10**, s.294]. Om en funktion f i intervallet $[a,b]$ är styckvist kontinuerlig gäller

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\ dx.$$

■

Vidare är det viktigt att vi skall nämna en sats som sammansätter integralkalkyler med differentialkalkyler och gör att vi med praktiska metoder kan beräkna integraler [**10**,s.296]. För att beräkna differentialekvationer krävs det kunskap om integraler, primitiva funktioner och därav är denna sats viktigt för beviset av satserna nedan. Det som är anmärkningsvärt med denna sats är att den säger att om vi har en kontinuerlig funktion inom det valda intervallet har den valda funktionen en primitiv funktion.

Sats 3.5. *Analysens huvudsats.* [**10**, s.296]. Börja med att anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[a,b]$. Sätt därefter $F(x)$ till

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Då är funktionen F deriverbar och har derivatan

$$F'(x) = f(x)$$

där F är den primitiva funktionen till f. ■

Vi fortsätter med att beskriva en funktion f såsom en funktionsföljd f_k, vilken kan skrivas som $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ [**13**, s.11]. Att tala om en talföljd är mer bekant och är något som uppkommer i början av universitetsstudierna, dock kan vi likväl tala om funktionsföljder och därefter summan av en funktionsföljd, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. Här kan även vår funktionsföljd vara av en reellvärd variabel och därav en reellvärd funktion, men även av en komplex variabel och därefter en analytisk funktion. Dock kommer vi inte i denna rapport att behandla analytiska funktioner. Vi börjar med att definiera punktvis- och likformig konvergens för vår funktionsföljd, för att vidare kunna bestämma konvergensen för vår funktionsserie.

Definition 3.6. [**13**, s.12] Om vi har en funktionsföljd $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$, där $x \in I$ om I är ett intervall, säger vi att:

1. Funktionsföljden konvergerar **punktvis** mot gränsfunktionen f i intervallet I om
$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$$
för alla $x \in I$.
2. Funktionsföljden konvergerar **likformigt** om för
$$M_k = \sup_{x \in I} \left| f_k(x) - f(x) \right|$$
gäller att $M_k \to 0$ då $k \to \infty$. $\diamond$

Vi har definierat konvergens ovan för funktionsföljder och vi skall vidare bestämma likformig konvergens genom att uppskatta vår funktionsserie med en konvergent talserie.

Sats 3.7. *Weierstrass majorantsats.* [**13**, s.15]. Låt $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ vara en funktionsföljd. Om det existerar en konvergent talserie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ där $\left|f_k(x)\right| \leq a_k$ för alla k och $x \in I$, så konvergerar funktionsserien, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ likformigt i intervallet I. $\blacksquare$

Vektorvärda funktioner [**11**, s.22] är ett begrepp som har en tydlig koppling till denna rapport och som därav är värd att förklara vidare för att förstå varför vi använder oss av variabler som är i fetstil i satserna om existensen och entydigheten i lösningar till ordinära differentialekvationer. Vidare behöver vi nu beskriva dessa funktioner som kallas vektorvärda, och i skillnad från det vi vanligvis kallar en funktion har vi detta fall en funktion från $\mathbf{R}^m$ till $\mathbf{R}^n$. Om vi låter P vara en mängd i $\mathbf{R}^m$, kan vi skriva vår funktion som

$$\mathbf{f} : P \to \mathbf{R}^n$$

där vi menar att varje punkt $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)$ i vår *definitionsmängd* P ordnar en specifik punkt $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ i $\mathbf{R}^n$. Den sistnämnda punkten kallas just funktion $\mathbf{f}$:s värde i vår punkt $\mathbf{x}$, vilket vi kan skriva som

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_n(\mathbf{x})).$$

Mer tydligt kan vi välja att gestalta det som:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1, ..., x_m)\\
y_2 &= f_2(x_1, ..., x_m)\\
y_3 &= f_3(x_1, ..., x_m)\\
&.\\
&.\\
&.\\
y_n &= f_n(x_1, ..., x_m).
\end{aligned}
$$

Här kan vi nu skilja på en funktion och en vektorvärd funktion, för om $n = 1$ säger vi att vi har en funktion medan om vi har att vårt $n > 1$ kallar vi det en **vektorvärd funktion**. Ytterligare kan vi beskriva att vår vektorvärda funktion $\mathbf{f}$ har i detta fall n-antalet komponenter $f_1, ..., f_n$ varav alla är definierade i vår definitionsmängd P. Vi kan försöka framställa oss fallen då vi har $\mathbf{R}^n$ men det är svårt geometriskt. Vi kan därför istället tänka oss fall där vi har $\mathbf{R}$ vilket kan framställas som en tallinje, och likväl $\mathbf{R}^3$ som vi kan föreställa oss som ett rum med tre dimensioner. Med fler dimensioner än 3 blir det komplicerat, där vektorvärda funktionerna där $n > 3$ går att beräkna matematiskt men svårt att föreställa sig geometriskt.

Vi har nu presenterat de satser och definitioner som krävs för vidare läsning. Därav fortsätter vi att gå igenom ordinära differentialekvationer och specifikt grunderna inom området.

4 Ordinära Differentialekvationer

Denna rapport skall vidare handla om just existensen och entydigheten av lösningar till ordinära differentialekvationer. Vi börjar därmed med att beskriva vad en differentialekvation är, och specifikt vad ordinära differentialekvationer är, även förkortat till ODE.

Andersson och Böiers [**2**, s.1] beskriver dessa differentialekvationer till att handla om just sambandet mellan en obekant funktion x och derivatorna (se Definition 3.2) till den obekanta funktionen x. Vi har olika sorters differentialekvationer och om vi har att vår obekanta funktion beror av flera variabler kallas denne en **partiell** differentialekvation medan en obekant funktion som beror av en variabel kallas en **ordinär** differentialekvation. I denna rapport är det just det andra fallet vi skall behandla.

Ytterligare säger Teschl [**14**, s.4] att en differentialekvation är en ekvation där vi har en relation med en ursprungsfunktion och dess derivator. Vilket endast är en annan formulering med andra ord dock med samma betydelse.

Exempel 4.1. Ett exempel på en differentialekvation av första ordningen kan se ut såsom

$$x'(t) = a - k \cdot x(t)$$

där a och k är reella konstanter. Vi kommer att hänvisa till detta exempel vidare i texten för att senare även ge en fysikalisk koppling.

När det kommer till en ODE säger vi att den har **ordning** n om det beskriver ett samband mellan x och dess första n derivator men inte fler. Detta kan åskådliggöras genom en ODE likt det Teschl [**14**, s.6] går då han nämner att en ODE allmänt kan beskrivas på formen

$$F(t, x, x^{(1)}, .., x^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Fortsättningsvis kan vi [**14**, s.6-7] beskriva t som att vara en självständig variabel medan vi kan säga att x är en beroende variabel. Vi konstaterar även att vårt F är en funktion av n+2 antal variabler som är definierad i något område Ω för $\mathbf{R}^{n+2}$. För något intervall I på $\mathbf{R}$ finner vi en lösning till vår differentialekvation (1) som är en n gånger deriverbar funktion *x(t)* där vi har att

$$(t, x(t), x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)) \in \Omega$$

och därav kan vi skriva

$$F(t, x(t), x^{(1)}(t), .., x^{(n)}(t)) = 0 \text{ där } t \in \Omega. \tag{2}$$

I ovanstående form är det svårt att säga allt för mycket om differentialekvationen, vilket gör att vi vill uttrycka vår ODE på ett annat sätt. Teschl nämner [**14**, s.6] att vi kan anta att vi kan lösa F för dess högsta derivata $x^{(n)}$ och att vi därefter kan skriva om ovanstående form (2) likt nedan. Andersson och Böiers emellanåt nämner [**2**, s.2] att vi med lämpliga förutsättningar, i ett specifikt område, kan lösa ut $x^{(n)}$ och därefter skriva det med hjälp av den implicita funktionssatsen

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, ..., x^{(n-1)}). \tag{3}$$

Vi kan även uttrycka derivatan likt x' istället för $x^{(1)}$. Formen som antyds i (3) sägs är på **normalform**, och vi har olika former vi kan uttrycka differentialekvationer på.

Om normalformen [**2**, s.2] kan skrivas om på en form likt

$$f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} + r(t) \tag{4}$$

kallas differentialekvationen för **linjär** eller **lineär**. Om även $r(t) \equiv 0$ används begreppet **homogen** för att beskriva differentialekvationen.

Efter att ha presenterat olika former av differentialekvationer kan vi konstatera att differentialekvationen från Exempel 4.1 står på normalform. Vi kan även konstatera att differentialekvationen är en linjär ekvation då $r(t) = a$ och $a_0(t) = -k$.

I denna rapport fokuserar vi på att ta upp första ordningen av differentialekvationer, och en av anledningarna till detta är just för att vi kan skriva om en högre ordnings differentialekvationer till ett system beroende av endast förstaderivator genom att ändra beroendevariabeln [**14**, s.7]. Alltså, vi ändrar vår variabel och sätter den till

$$\mathbf{y} = (x, x^{(1)}, ..., x^{(n-1)})$$

vilket gör att vi även kan från förra normalformeln (3) skriva ett första ordningssystem likt

$$\begin{aligned}
y_1 &= x \\
y_2 &= y_1' = (x)' = x^{(1)}, \\
y_3 &= y_2' = (x^{(1)})' = x^{(2)}, \\
&. \\
&. \\
&. \\
y_n &= y_{n-1}' = (x^{(n-2)})' = x^{(n-1)}, \\
y_n' &= (x^{(n-1)})' = x^{(n)} = f(t, \mathbf{y}) = \\
&= f(t, (x, x^{(1)}, ..., x^{(n-1)})) = f(t, (y_1, y_2, ..., y_n)).
\end{aligned} \tag{5}$$

Vidare visar vi ovanstående med ett exempel.

Exempel 4.2. Skriv om ett andra-ordningssystem till ett första-ordningssystem där vår ODE är

$$x'' = 2x + 3x'$$

och vår funktion x beror av t, med andra ord $x'' = \frac{dx^2}{dt^2}$, $x' = \frac{dx}{dt}$ och $x = x(t)$. Vi sätter därför

$$\begin{aligned} y_1 &= x \\ y_2 &= x' \end{aligned}$$

med hänsyn till omskrivningsmetoden (5) vilket gör att vi får att

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 2x + 3x' = 2y_1 + 3y_2. \end{aligned}$$

Detta betyder att vi nu har skrivit om ett andra-ordningsproblem till ett första-ordningsproblem.

5 Existens och Entydighet

Vi har definierat och givit exempel på vad en differentialekvation är, specifikt ordinära differentialekvationer. Vidare skall vi nu ange och bevisa den satsen som kontrollerar både existensen och entydigheten av lösningar till ordinära differentialekvationer, och då vi konstaterade i tidigare kapitel att vi kan skriva om en ODE av ordning n till första ordningens ODE gäller även dessa satser analogt för ordinära differentialekvationer av ordning n. Därav bör det noteras att vi nedan kommer använda oss av vektorvärda funktioner (se avsnittet **vektorvärda funktioner** i slutet av Kapitel 3) i satserna och i bevisen.

5.1 Lipschitzvillkoret

Likt nämnt tidigare har en del differentialekvationer lösningar medan mera komplexa fall kan vara svåra att tolka och bevisa om det finns lösningar. I allmänna fall kan det finnas approximativa lösningar, vilka kan behövas sökas efter med diverse metoder. Vidare kommer ett villkor som gör att man kan försäkra sig om att en lösning existerar. Differentialekvationer kan anses tas från och antas handla om verkliga situationer, dock görs en hel del uppskattningar då dessa ekvationer ställs upp vilket pekar på att dessa inte alltid har en lösning. För system av ordinära differentialekvationer skall vi nu beskriva någon existenssats för att kunna approximera lösningar till dessa.

I Definition 3.1 har vi definierat kontinuerlighet hos funktioner, dock när det kommer till ordinära differentialekvationer är inte detta ett tillräckligt antagande för att säkerhetsställa entydighet hos lösningen. Därav måste vi presentera nedanstående definition, en definition som kommer att säkerställa att vi har en entydig lösning.

Definition 5.1.[**2**, s.33]. Funktionen $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ som är definierad i den öppna sammanhängande mängden $\Omega \subseteq \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ är **Lipschitzkontinuerlig** i $\mathbf{x}$-variablerna om det finns en konstant L sådan att

$$\big|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y})\big| \leq L|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \quad \text{där } (t,\mathbf{x}),(t,\mathbf{y}) \in \Omega.$$

◇

Utifrån ovanstående definition vill vi nu visa, via ett exempel, hur det kan tillämpas för funktioner.

Exempel 5.2. Andersson och Böiers nämner en funktion som läsaren själv skall kontrollera är Lipschitzkontinuerlig [**2**, s.33] och den funktionen är $f(t,x) = |x|$. Vår uppgift är därför att visa att funktionen är Lipschitzkontinuerlig.

Dvs, vi vill visa att denna funktion $f(t,x)$ uppfyller Lipschitzvillkoret. Vi vet att den inte är deriverbar överallt (vid punkten $x = 0$), dock kan vi ta två punkter x och y i vår definitionsmängd och beräkna vårt L. Om vi antar att vi har ett L kan vi välja att skriva om villkoret likt

$$\big|f(t,x) - f(t,y)\big| \leq L|x - y| \Rightarrow \frac{\big|f(t,x) - f(t,y)\big|}{|x - y|} \leq L.$$

Vidare skriver vi in våra funktioner

$$f(t,x) = |x|\,, f(t,y) = |y|$$

i vår olikhet och får

$$\frac{\big||x| - |y|\big|}{|x - y|} \leq \frac{|x - y|}{|x - y|} = 1.$$

Alltså har vi visat att vår funktion uppfyller Lipschitzvillkoret, då vårt L kan väljas till $L = 1$.

5.2 Satserna om Existens och Entydighet

Vi har nu definierat Lipschitzvillkoret som är en viktig del av de nedanstående satserna och fortsätter nu att introducera Sats 5.3 och Sats 5.4 tagna från Andersson och Böiers [**2**, kap. 1], som tillsammans garanterar existensen och entydigheten av lösningar till ODE.

Sats 5.3. [**2**, s.34]. Om vi antar att funktionen $\mathbf{f}$ är kontinuerlig i omgivningen av $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ samt uppfyller Lipschitzvillkoret i den omgivningen, då existerar det ett öppet intervall runt t_0 där begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

erhåller en entydig lösning. ■

Sats 5.4. [**2**, s.35]. Om vi antar att funktionen $\mathbf{f}$ är kontinuerlig samt uppfyller Lipschitzvillkoret i ett stråk, där $a > 0$, som definieras nedan såsom

$$\big\{(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \ ; \ \ |t - t_0| \leq a\big\}$$

då är begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \tag{6}$$

en entydig lösning om t tillhör ett intervall $I(a)$ som definieras likt

$$\big\{t \in \mathbf{R} \ ; \ \ |t - t_0| \leq a\big\}\,.$$

■

Vi börjar med att bevisa Sats 5.4 [**2**, s.35-38] för att sedan gå vidare med att bevisa Sats 5.3 [**2**, s.38].

Bevis av Sats 5.4.

I slutet av Sats 5.4 nämndes det att vi för denna sats har en lösning som är definierad inom ett intervall *I(a)* för vår variabel *t*. Vi delar upp detta bevis i två delar där vi börjar med att bevisa existensen av lösningen för att sedan bevisa att det finns en entydig lösning.

Om vi har att vår funktion $\mathbf{x}$ och dessa derivator kan beskrivas med funktionen $\mathbf{f}$ och att den är kontinuerlig från $\mathbf{R}^{n+1}$ till $\mathbf{R}$ kan vi beskriva integralekvationen likt nedan och anledningen varför kommer att förklaras vidare längre ned, och detta är en omskrivning av vårt begynnelsevärdesproblem från Sats 5.4 till integralekvationen [**2**, s.29]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\ ds.$$

Vi har att vårt högerled är beroende av variabel *t*, med vilken vi väljer att benämna den $\tau\mathbf{x}$. Denna funktion är därav definierad som

$$(\tau\mathbf{x})(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\ ds.$$

Vi låter E beteckna det vektorrummet som innefattar alla kontinuerliga funktioner från vårt intervall *I(a)* till $\mathbf{R}^n$. Vi har nu att τ är en avbildning från E till E.

Anledningen till varför vi kan säga att τ är en avbildning från E till E, alltså att även $\tau\mathbf{x}$ är en kontinuerlig funktion, är på grund av *Analysens huvudsats* (se Sats 3.5) [**4**, s.83]. Vi vet att funktionen $\mathbf{f}$ är kontinuerlig då det är ett av antagandena i satsen, och vi vet att den är kontinuerlig i vårt stråk som begränsas inom $[t-a, t+a]$ som begränsar vårt intervall $I(a)$. Här följer då att vi enligt *Analysens huvudsats* kan skriva (6) på formen

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\ ds, \quad t \in I(a).$$

Då vårt begynnelsevillkor gäller får vi att $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kan vi skriva om vår funktion som vi presenterade i början av beviset, alltså såsom

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\ ds.$$

Vi fortsätter med att betrakta ekvationen

$$\mathbf{x} = \tau\mathbf{x}.$$

Vi vill finna en funktion $\mathbf{x}$ som uppfyller ovanstående likhet och fortsätter med att bestämma en följd av funktioner rekursivt i vårt E, där dessa är $\mathbf{x}_0$,$\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$,... i E. Vi börjar med att sätta $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0$ i vårt intervall $t \in I(a)$. Rekursivt fortsätter vi och sätter $\mathbf{x}_1$=$\tau\mathbf{x}_0$, och vidare $\mathbf{x}_2$=$\tau\mathbf{x}_1$ osv. Allmänt kan vi skriva det som

$$\mathbf{x}_{N+1} = \tau\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_N(s)) \; ds. \tag{7}$$

Vi behöver nu visa att vår följd av funktioner $\{\mathbf{x}_N\}_{N=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt (se Definition 3.6) på intervallet mot en funktion $\mathbf{x}$ då N går mot oändligheten.

Vi konstaterar att vi, om ovan gäller, har att $\mathbf{x}$ blir vår gränsfunktion som löser vår integralekvation som presenterades i början av beviset, och därav även vårt begynnelsevärdesproblem från satsen. Detta gäller på grund av följande, där Lipschitzvillkoret på $\mathbf{f}$ gör att vi kan skriva

$$\left|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_N(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\right| \;\leq\; L \left|\mathbf{x}_N(s) - \mathbf{x}(s)\right|, \quad s \in I(a),$$

då $\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_N(s))$ skall gå mot $\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))$ likformigt på vårt intervall när N går mot oändligheten. Vidare kan vi skriva

$$\sup_{s\in I(a)} \left|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_N(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\right| \;\leq\; L \sup_{s\in I(a)} \left|\mathbf{x}_N(s) - \mathbf{x}(s)\right|.$$

Här kan vi då även göra en gränsövergång under vårt integraltecken i formeln (7), och vi får nu att $\mathbf{x} = \tau\mathbf{x}$ vilket löser integralekvationen. Likväl tillhör $\mathbf{x}$ rummet E, detta eftersom $\mathbf{x}_N$ tillhör rummet E samt då vi antagit att konvergensen är likformig.

Vidare behöver vi nu bevisa att vår funktionsföljd $\{\mathbf{x}_N\}_{N=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt för att ovanstående slutsats skall gälla. Då vi kan skriva

$$\mathbf{x}_{N+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N} (\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t))$$

vet vi att detta är ekvivalent med att funktionsserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t))$$

konvergerar likformigt. Vi väljer nu att definiera K som nedan då vårt intervall $I(a)$ är kompakt, vi skriver

$$K = \sup_{t\in I(a)} \left|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)\right|$$

vilket ger om både $t > t_0$ och $t \in I(a)$ att vi kan skriva

$$\left|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)\right| \;=\; \left|\int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_0(s)) ds\right| \;\leq\; K(t - t_0). \tag{8}$$

På grund av vårt Lipschitzvillkor och med hjälp av *triangelolikheten för integraler* (se Sats 3.4) kan vi välja att skriva

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)\right| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} \Big(\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_0(s))\Big)\, ds\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \left|\Big(\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_0(s))\Big)\right|\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\left|\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_0(s)\right|\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} KL\left|s - t_0\right|\, ds \\
&= LK\,\frac{\left|t - t_0\right|^2}{2},
\end{aligned} \tag{9}$$

där den sista olikheten följer direkt av ekvation (8). Ekvivalent resultat fås om vi sätter $t < t_0$. Genom induktion fortsätter vi, och får därav att

$$\left|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)\right| \;\leq\; KL^k\,\frac{\left|t - t_0\right|^{k+1}}{(k+1)!} \tag{10}$$

vilket gör att vi kan skriva såsom

$$\sup_{t \in I(a)} \left|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}(t)\right| \;\leq\; KL^k\,\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Antag nu att $n = 1$. Vi har tidigare beskrivit *Weierstrass majorantsats* (se Sats 3.7) och för att kunna använda satsen behöver vi visa att vår funktionsserie konvergerar genom att använda oss av ovanstående talserie och visa att den konvergerar. Vi kan se att ovanstående HL konvergerar genom att skriva om vår talserie i vårt HL till en modifiering av *standardutvecklingen* av e^x [**10**, s.413]. Vilken ser ut såsom

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Vidare ser vi nu till vår talserie och hur vi kan skriva om denna till att passa ovanstående, vi utvecklar

$$KL^k\,\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} = K \cdot \frac{L^{k+1}}{L} \cdot \frac{a^{k+1}}{k+1!} = \frac{K}{L} \cdot \frac{(La)^{k+1}}{k+1!}.$$

Här ser vi nu att vi kan göra denna omskrivning om $L \neq 0$, och inser att om $L = 0$ har vi redan en talserie som konvergerar mot 0 och därav skulle inte en omskrivning behövas. Om vi nu använder vår *standardutveckling* av e^x, inser vi att vi inte kan skriva av den direkt då vi har en exponent som är $k + 1$ istället för j. Detta innebär att den första termen i vår *standardutveckling* inte finns för vår talserie och därav får vi att vår talserie konvergerar mot

$$\frac{K}{L} \cdot (e^{La} - 1).$$

Vilket medför att vi kan applicera *Weierstrass majorantsats* och vår funktionsserie konvergerar likformigt på $I(a)$, där vår funktionsserie är likt nämnt tidigare

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)).$$

Här har vi nu bevisat att existensen gäller och att vår funktionsserie konvergerar likformigt, och därav är första delen av beviset av Sats 5.4 färdigt. Viktigt är att notera och återigen förklara att detta bevis även gäller då vi har ett $n > 1$. Även värt att notera är att det n vi avser här antyder *Weierstrass majorantsats* och att den fungerar för vektorvärda funktioner.

Nu går vi vidare till att bevisa för satsen att det finns en entydighet av lösningen. Vi börjar då med att se till vår integralekvation, dock skall vi nu anta att vi har två lösningar $\mathbf{x}(t)$ och $\mathbf{y}(t)$. Då $t > t_0$ får vi

$$\left|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\right| = \left| \int_{t_0}^{t} \Big(\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) \Big) ds \right| \leq L \int_{t_0}^{t} \left|\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}(s)\right| \, ds.$$

Vi väljer nu att benämna vårt högerled för $u(\mathrm{t})$. Därefter får vi att

$$u'(t) = L \left|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\right|$$

eftersom att $t > t_0$. Anledningen till varför vi får detta är just *Analysens huvudsats.*

Likväl kan vi använda att olikheten

$$u(t) \geq \left|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\right|$$

ger oss att

$$u'(t) \leq Lu(t).$$

Om vi nu väljer att multiplicera vår sista olikhet med e^{-Lt} får vi en olikhet med derivatan såsom

$$\frac{d}{dt}(e^{-Lt} u(t)) \leq 0.$$

Här tolkar vi det som att $e^{-Lt} u(t)$ är en avtagande funktion, vilket i sin tur gör att vi kan skriva olikheten, då $t > t_0$

$$0 \leq e^{-Lt} \, u(t) \leq e^{-Lt_0} \, u(t_0) = 0 \Rightarrow u(t) = 0.$$

Vi kan dra denna slutsats eftersom vi vet att $e^{-Lt_0} \neq 0$, och kan nu skriva att

$$0 \leq \left|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\right| \leq u(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t).$$

Detta betydera att vi för $t > t_0$ har en entydig lösning då våra två lösningar är ekvivalenta. Alltså har vi bevisat att det existerar en entydig lösning. Om vi vidare har fallet $t < t_0$, kan det beviset göras analogt. $\square$

Anmärkning: Ovanstående metod som används i beviset kallas även ibland för Picards metod efter matematikern Émile Picard, en av matematikerna som presenterades i tidigare kapitel (se Kapitel 2).

Vidare skall vi nu bevisa Sats 5.3 där vi använder oss av beviset av Sats 5.4.

Bevis av Sats 5.3.

Vi börjar med att förutsätta utifrån vår Sats 5.3 att det existerar positiva tal α_0 samt β i vårt område som gör att vi för vår funktion $\mathbf{f}$ uppfyller ett Lipschitzvillkor enligt ett område Q_0. Vi har

$$Q_0 = \left\{(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \ ; \ |t - t_0| \leq \alpha_0 \ , \ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq \beta\right\}.$$

Vi fortsätter och för ett nytt område Q där vi har att α_0 nu är ett positivt men mycket mindre tal α. Här utnyttjar det vi gjort i Sats 5.4 och likvärdiga antaganden gäller. Det vi behöver visa för att utnyttja beviset från Sats 5.4 är om för våra kurvor $(t, \mathbf{x}_N(t))$ ligger i området Q då har vi att $|t - t_0| < \alpha$ för något α. Vi sätter

$$B = \sup_{(t,\mathbf{x}) \in Q_0} \left| \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \right|$$

samt väljer vårt α till $\alpha = \min(\alpha_0, \beta/B)$.

Nu behöver vi visa, genom induktion, att $(t, \mathbf{x}_N(t)) \in Q$ för $|t - t_0| \leq \alpha$. Vi kan säga att då $N = 0$ är påståendet sant, detta eftersom vi skulle ha vårt begynnelsevärdesproblem vilket vi vet innefattas i vårt Q. Med andra ord, vi vet att $(t, \mathbf{x}_0(t)) \in Q$. Vi vill nu visa med våra induktionssteg att påståendet gäller för alla $\mathbf{x}_N(t)$, och vi får

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{x}_{N+1}(t) - \mathbf{x}_0\right| &= \left|\int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_N(s)) ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} B ds\right| \\
&= B|t - t_0| \\
&\leq B\alpha \\
&\leq \beta.
\end{aligned}$$

Alltså, vi har nu tillräckligt för att analogt göra likt bevis för Sats 5.4. Analogt visas även entydighet likt för Sats 5.4. Därav, beviset för Sats 5.3 är klart. $\square$

6 Exempel av ODE

Vi skall nu vidare ge exempel på ordinära differentialekvationer som alla antingen uppfyller satserna som vi presenterat ovan eller som inte uppfyller varje del av satserna och därav inte har antingen en existerande lösning eller en entydig lösning. I första exemplet skall vi visa en ODE med ett begynnelsevärdesproblem som inte uppfyller Lipschitzvillkoret. Vi skall förklara varför detta inte gäller och visa det i vår lösning. Vidare i andra exemplet har vi en ODE som har en annan problematik, det är ett begynnelsevärdesproblem som möjligtvis inte har en entydig lösning, vilket gör att vi måste beräkna och förklara varför den inte har en entydig lösning samt ge ett annat lösningsalternativ. I vårt tredje exempel skall vi ha ett exempel som uppfyller Lipschitzvillkoret och som har en existerande och entydig lösning. Allt detta för att åskådliggöra våra satser och visa på svårigheter som kan uppkomma och ordinära differentialekvationers komplexitet när det kommer till lösningar. Av det vi lärt oss i denna rapport är det inte tydligt om en differentialekvation ens har en existerande lösning eller om den har en entydig eller flera lösningar, och därav måste man undersöka dessa likt nedan.

Exempel 6.1. Detta exempel är inspirerat från [**12**] och vi har vårt begynnelsevärdesproblem såsom:

$$\begin{aligned} x' &= 10t + 2 \cdot \sqrt{x} \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

Uppfyller funktionen f som beskriver ovanstående begynnelsevärdesproblem Lipschitzvillkoret?

Om vi börjar med att skriva Lipschitzvillkoret som i Exempel 5.2, och antar att vi har ett L får vi

$$\frac{\left|f(t,x) - f(t,y)\right|}{|x-y|} \le L$$

där $f(t,x) = 10t + 2 \cdot \sqrt{x}$. Enligt vårt begynnelsevärdesproblem kan vi sätta $y = 0$ och beräkna för alla t:

$$\begin{aligned} \frac{\left|f(t,x) - f(t,y)\right|}{|x-y|} &= \frac{\left|10t + 2 \cdot \sqrt{x} - (10t + 2 \cdot \sqrt{0})\right|}{|x-0|} \\ &= \frac{\left|2\sqrt{x}\right|}{x} \to +\infty. \end{aligned}$$

När $x \to 0^+$ får vi en kvot $\to +\infty$. Detta medför att vi inte har ett Lipschitzvillkor L. Det går att beräkna ovanstående mera utförligt, men kommer dock inte att göras här. Det viktigaste från detta exempel är att vi tydligt kan se att funktionen f från vår ODE inte är Lipschitzkontinuerlig, och visar därav inte på entydighet enligt Lipschitzvillkoret. Dock kan det existera en entydig lösning eller lösningar som kan beräknas med andra metoder eller med hjälp av andra satser såsom *Peanos existenssats* [**2**,s.68], men vi kommer ej att försöka beräkna det här. Avslutningsvis kan vi konstatera att vi inte kan använda Sats 5.3 och Sats 5.4 som kräver att Lipschitzvillkoret uppfylls.

Exempel 6.2. Detta exempel är inspirerat från [**15**]. Vi har vårt begynnelsevärdesproblem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{t} \\ x(9) &= 2. \end{aligned}$$

Har detta problem en entydig lösning?

Först skall vi försöka beräkna vårt Lipschitzvillkor, och likt Exempel 5.2 antar vi att vi har ett L för att kunna skriva såsom

$$\frac{\big|f(t,x) - f(t,y)\big|}{|x-y|} \leq L.$$

Här har vi nu vår funktion $f(t,x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{t}$. Enligt vårt begynnelsevärdesproblem sätter vi $y = 2$, vilket gör att vi kan skriva

$$\begin{aligned} \frac{\Big|\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{t} - \sqrt{2-2} \cdot \sqrt{t}\Big|}{|x-2|} &= \frac{\Big|\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{t}\Big|}{|x-2|} = \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{t}}{(\sqrt{x-2})^2} \\ &= \sqrt{\frac{t}{x-2}} \to \quad +\infty. \end{aligned}$$

Då vårt $x \to 2^+$ får vi att vår kvot $\to +\infty$, detta medför att det inte existerar något L och vi har inget Lipschitzvillkor. Dock likt Exempel 6.1 kan det, trots att vi inte uppfyller Lipschitzvillkoret, finnas lösningar till ovanstående ODE. Till skillnad från Exempel 6.1 har vi en frågeställning om det existerar en entydig lösning och därav fortsätter vi med att försöka beräkna ut en eller flera lösningar till vår ODE. Dock kan vi konstatera att vi ej har en existerande entydig lösning där vi kan använda oss av Sats 5.3 eller Sats 5.4.

Vi fortsätter med att kontrollera om vår funktion är kontinuerlig runt vår punkt $(t_0, x_0) = (9, 2)$, vi sätter in våra gränser i vår funktion $f(t,x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{t}$ vilket blir $f(9,2) = 0 \cdot \sqrt{9} = 0$ vilket går och vi kan anta att vår funktion är kontinuerlig då den är sammansatt av kontinuerliga funktioner och då den ligger i definitionsmängden. Vi kollar även vår första derivata och börjar med att derivera med avseende på vår variabel x. Vi får $\frac{d(f(t,x))}{dx} = \frac{\sqrt{t}}{2 \cdot \sqrt{x-2}}$ och vid vår punkt $(9, 2)$ är funktionen odefinierad. Dock talar inte detta för att vi inte har en entydig lösning, så vi fortsätter att beräkna och försöka lösa ut vår funktion $x(t)$. Alltså, vi har

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{t}.$$

Fortsättningsvis dividera vi båda sidorna med $\sqrt{x-2}$ och får

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{t}.$$

Sedan integrerar vi med avseende på t och får

$$\int \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x-2}}\ dt = \int \sqrt{t}\ dt \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \frac{2t^{3/2}}{3} + c,$$

där c är vår okända konstant. Vi fortsätter med vårt VL, vilket blir med variabelsubstitution $u = x - 2$ och en integration med du att vi får

$$2 \cdot \sqrt{x-2} = \frac{2t^{3/2}}{3} + c.$$

Vi vill nu lösa ut c och sätter in vårt villkor $(9, 2)$, vilket gör att vi har

$$2 \cdot \sqrt{2-2} = \frac{2 \cdot 9^{3/2}}{3} + c \Rightarrow 0 = \frac{2 \cdot 27}{3} + c \Leftrightarrow c = -18.$$

Vidare sätter vi in vårt c i vår ekvation och löser ut vår funktion $x(t)$, enligt

$$2 \cdot \sqrt{x-2} = \frac{2t^{3/2}}{3} - 18.$$

Sedan dividerar vi med 2 för att sedan höja upp med 2. Alltså, vi har

$$x - 2 = \left(\frac{t^{3/2}}{3} - 9\right)^2$$

där vi löser ut vår funktion enligt

$$x(t) = \left(\frac{t^{3/2}}{3} - 9\right)^2 + 2.$$

Detta är vår lösning för vårt begynnelseproblem. Dock, då vi har en ensam konstant adderat efter vårt polynom skall vi kontrollera om vi har en extra lösning. Alltså,

$$x(t) = 2 \text{ för } \forall\ t.$$

Vi börjar med att anta att detta stämmer och deriverar vår funktion $x(t)$ med avseende på t. Vi får $\frac{d(2)}{dx} = 0$, och vi sätter då in vår derivata i vårt begynnelsevärdesproblem, för att kontrollera om det fungerar och får:

$$0 = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{t}.$$

Vi sätter in vårt villkor $(9, 2)$ vilket gör att vi har

$$0 = \sqrt{2-2} \cdot \sqrt{9} = 0 \cdot 3 = 0$$

och detta är okej. Alltså har vi visat att vi har två lösningar till detta ODE-problem och därav uppfylls inte entydigheten.

Exempel 6.3. I vårt sista exempel skall vi utgå från Exempel 4.1 med ett adderat villkor, dvs. vi har ett begynnelsevärdesproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= a - k \cdot x(t) \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

och till skillnad från vårt Exempel 4.1 begränsar vi oss till fallet då $k \neq 0$ och $a > 0$. Existerar det en entydig lösning och i sådana fall vad är den?

Till en början vill vi kontrollera om funktionen är Lipschitzkontinuerlig. Vi sätter upp vårt Lipschitzvillkor enligt Exempel 5.2 och om vi antar att vi har ett L gör det att vi kan skriva

$$\frac{\left|f(t,x) - f(t,y)\right|}{|x-y|} \leq L.$$

Vi vill nu kontrollera om det existerar ett L, väljer våra två punkter till (t, x) och $(0, 0)$ och får att

$$\frac{\left|a - k \cdot x - (a - k \cdot 0)\right|}{|x - 0|} = \frac{|kx|}{x} = k \cdot \frac{|x|}{|x|} = k.$$

Då k är en konstant kan vi sätta $L = k$ och Lipschitzvillkoret uppfylls. Vi fortsätter med att försöka lösa vårt begynnelsevärdesproblem och börjar med att dividera båda sidorna med $a - k \cdot x$. Samt väljer vi härifrån och framåt att benämna derivatan som $\frac{dx}{dt}$ och får

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{a - k \cdot x} = 1.$$

Vidare integrerar vi båda sidor med avseende på t och får

$$\int \frac{\frac{dx}{dt}}{a - k \cdot x}\ dt = \int 1\ dt \ \Leftrightarrow \int \frac{dx}{a - k \cdot x} = t + c$$

där c är vår okända konstant. Vi antar att $k \neq 0$ och för att beräkna VL gör vi variabelsubstitutionen $u = a - k \cdot x$ där $\frac{du}{dx} = -k \Leftrightarrow dx = \frac{du}{-k}$. Detta medför att vårt VL blir

$$-\frac{1}{k} \int \frac{1}{u}\ du = -\frac{\ln(u)}{k} \Rightarrow = -\frac{\ln(a - k \cdot x)}{k}.$$

Vi har då

$$-\frac{\ln(a - k \cdot x)}{k} = t + c.$$

Vidare sätter vi in vårt villkor $(0, 0)$ för att få ut vår konstant c, här antar vi att $a > 0$ och får att

$$c = -\frac{\ln(a)}{k}.$$

Vår lösning blir då vi inkluderar c

$$-\frac{\ln(a-k\cdot x)}{k}=t-\frac{\ln(a)}{k}.$$

Fortsättningsvis multiplicerar vi båda sidorna med $-k$ vilket ger

$$\ln(a-k\cdot x)=\ln(a)-k\cdot t.$$

För att eliminerar vår naturliga logaritm tar vi exponenten till e på båda sidorna och får att vår ekvation blir

$$e^{\ln(a-kx)}=e^{\ln(a)-kt}\Rightarrow a-k\cdot x=\frac{e^{\ln(a)}}{e^{kt}}\Rightarrow a-k\cdot x=\frac{a}{e^{kt}}.$$

Vi subtraherar a samt dividerar med $-k$ från båda sidorna och får vår funktion $x(t)$ till

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{\frac{a}{e^{kt}}-a}{-k}=\frac{a}{-k\cdot e^{kt}}-\frac{a}{-k}=\\&=\frac{a}{k}-\frac{a}{k}\cdot e^{-kt}\end{aligned}$$

och vi har nu löst vårt ODE och visat att det existerar en entydig lösning.

7 Granskning av en Gymnasiebok

Till sist skall vi utifrån det vi har lärt oss tidigare om ordinära differentialekvationer samt om existensten och entydighet av lösningar granska vad som lärs ut i början av introduktionen till differentialekvationer. Vad är det vi får veta och vad är det som utesluts i jämförelse med annan litteratur om differentialekvationer?

Den största skillnaden när det kommer till litteratur om differentialekvationer på högre nivå och denna kurslitteratur för gymnasiekurs 5 är att det inte beskrivs om en differentialekvation är lösbar eller inte. Det förklaras inte på ett tydligt sätt att det existerar icke lösbara differentialekvationer, eller att man kan skriva om differentialekvationer av högre ordning till ett system av första ordningens ODE. Målet med differentialekvationer i gymnasiekurser är att kunna lösa ut dem, och att förstå standardlösningar. Kursboken ger en viss historisk koppling samt kopplingar till fysiken och verklighetsproblem som differentialekvationer kan anpassas till. Det framstår även att ett av målen är att kunna tolka en verklighetstrogen text för att själv kunna skriva ned en differentialekvation som passar till det inträffade. Denna rapport hanterar ej differentialekvationers lösningar eller tar upp problem som har standardlösningar enligt vissa modeller som kommer att beskriver mera tydligt här nedan.

Om vi börjar med att se till hur gymnasieboken förklarar vad en differentialekvation är beskrivs det som en ekvation som har en obekant som även denne är en funktion och att det även innehåller den funktionens derivator [**1**, s.176]. Om vi jämför med vår valda definition i början av denna rapport har den samma innebörd, dock en aningen förenklad och vi bör påpeka att många i gymnasieåldern ännu inte helt förstår hur ett samband och funktioner hör ihop. Boken säger därav till viss del exakt det som kurslitteraturen på högre nivå säger. Vad en differentialekvation är förklaras väldigt kort och koncist utan vidare definitioner eller förklarande exempel där läsaren själv kan utforska och komma fram till hur en differentialekvation fungerar.

Gymnasieboken förklarar vidare att när en differentialekvation endast innehåller första derivator, och ingen högre derivata, kallas det en differentialekvation av första ordningen. Av [**1**, s.176] benämnt *exempel 1* nämns delvis exemplen:

$$y' = x^2,$$
$$3y' - 2y = 0.$$

Likt det vi tar upp i denna rapport nämns det i gymnasieboken [**1**, s.176] att differentialekvationer kan ha olika ordningar. Exempelvis beskriver texten att differentialekvationer av andra ordningen kan se ut som nedan från *exempel 3* på s.176

$$y'' + 6y' - 3y = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6xy.$$

Värt att notera är att det finns två skillnader i hur variablerna gestaltas i gymnasieboken jämfört med i både denna rapport och viss kurslitteratur som använts. I gymnasieboken används y som den obekanta funktionen och x som den självständiga variabeln, i jämförelse med denna rapport som istället använder $\mathbf{x}$ och t. Denna skillnad har ingen stor betydelse då båda kan användas och är rätt. Även, beskriver inte gymnasieboken något om vektorvärda funktioner eller att en obekant funktion kan ha flera variabler och att det existerar partiella differentialekvationer och ordinära differentialekvationer.

Vidare läsning gör att vi kan få en jämförelse mellan hur man skall lösa en differentialekvation och hur man tänker med en vanligare andragradsekvation [**1**, s.177], vilket är i stora drag det som elever på den nivån tidigare varit bekant med och är därav en viktig jämförelse för att skapa förståelse. Vidare får vi även reda på att en differentialekvation har en partikulärlösning och en allmänlösning, medan i denna rapport letar vi efter en entydig lösning och det är med hjälp av att vi har ett begynnelsevillkor vi har en entydig lösning. Därav har vi i detta arbete, utan att nämna vid namn syftat på en partikulärlösning till våra ODE. Att differentialekvationer har begynnelsevillkor nämns, och specifikt av andra ordningen då dessa kan ha två olika variabler som behöver lösas. Vidare beskrivs inte ytterligare om begynnelsevillkor och att inte alla differentialekvationer kan lösas.

Fortsättningsvis får vi läsa om hur man kan ställa upp och koppla differentialekvationer till verkliga situationer, eller med andra ord hur differentialekvationer kan användas i modeller av verkliga situationer [**1**, s.178]. I denna rapport ovan beskrivs det inte hur ODE eller endast allmänt om differentialekvationer hur dessa används i verkligheten. Denna rapport som skrivits hanterar inte dess användningsområde eller förklarar inte genom verkliga situationer differentialekvationer, utan det är matematiska och teorin bakom ODE som har fokuserats på. Exemplet som gestaltas handlar om ett fysikaliskt fall, där frågeställningen handlar om hur en differentialekvation skall ställas upp och tolkas. Exemplet och uppgiften ser ut som följande:

- Vi har en patient som skall få medicin intravenöst, där dosen är konstant och definieras av den valda substansen på a mg/h.
- Vår uppgift är att ställa upp en matematisk modell för en halt $y(t)$ av den valda substansen i blodet som beror av tiden t timmar.
- Vi känner till att vår valda substansen avtar med en hastighet proportionell mot vår halt i patientens blod.

Utifrån ovanstående tre punkter får vi en differentialekvation som vi känner igen och den skrivs i gymnasiebokens fall såsom

$$y'(t) = a - k \cdot y(t).$$

Vidare förklaras det i gymnasieboken hur denna differentialekvation skall tolkas, vilket är att förändringen i halten $y(t)$, vid en specifik tidpunkt t är ekvivalent med skillnaden mellan den hastighet som vår substans bryts ned och den hastighet som vår substans tillförs i patienten.

Vi får även ett begynnelsevillkor eftersom vi kan tolka från ovanstående tre punkter att vid tidpunkten $t = 0$ är halten $y(0) = 0$. Lösningen till ekvationen nämns tidigare i denna rapport och visas i Exempel 6.3, men i själva gymnasieboken beskrivs den bara och läsare uppmanas att beräkna det själva. Lösningen är:

$$y(t) = \frac{a}{k} - \frac{a}{k}e^{-kt}.$$

Att Newton [**1**, s.179] hade en stor betydelse för det matematiska området differentialekvationer nämns kortfattat, då en koncis biografi om att Newtons bidrag för fysiken och just hans arbete mellan sambandet av funktioners förändringar och andra storheter, med vilket förklaras handla om differentialekvationer. Vidare beskrivs även Newtons första, andra och tredje lag.

Att vi för att kunna lösa en differentialekvation kan behöva ha kunskap om vad en *primitiv funktion* är går inte läsaren förbi [**1**, s.180], då det beskrivs genom exempel hur primitiva funktioner kan användas för att få fram en speciell lösning och en allmän lösning.

Differentialekvationer av första ordningen kan bland annat skrivas på formen $y' + ay = 0$ [**1**, s.184-188], vilket vi tidigare i Kapitel 4 benämner som en linjär homogen differentialekvation. Gymnasieboken nämner att en ekvation kan lösas exakt och att numeriska metoder används. Det beskrivs även att vid vissa differentialekvationer finns det en antydan om att vi inte alltid med säkerhet kan säga att samtliga lösningar har funnits. Vidare beskrivs det då med hjälp av exempel att det kan finnas obegränsat med lösningar och att det finns tillfällen då samtliga lösningar innefattas. I gymnasieboken beskrivs det som att om det existerar en fullständig lösning till en differentialekvation benämns den som *den allmänna lösningen*, och där den speciella lösningen benämns *partikulärlösning*. En inhomogen ekvation är istället en ekvation som kan skrivas på formen $y' + ay = f(x)$, och denna form har inte explicit nämnts tidigare i rapporten. Formen vi valde att förklara den homogena ekvationen var ekvation (4) där $r(t) \equiv 0$. Denna formen är mer allmängiltig och gäller för differentialekvationer av ordning n, istället för första ordningens ekvationer såsom gymnasiebokens förklaring och notation.

Längre fram i boken kommer ett avsnitt om just riktingsfält [**1**, s.191] där det beskrivs att för simpla differentialekvationer kan det sättet användas som numerisk metod för att lösa ekvationen. Detta för att gradvis ta sig till *Eulers stegmetod* [**1**, s.196-197] som ej används i denna rapport. Dock går det att konstatera att Eulers stegmetod är den simplaste metoden av Picards metod som används i beviset till våra Satser 5.3 och 5.4. Eulers stegmetod gäller för första ordningen, eller i vår rapports fall vid $n = 1$, och kräver att vi har ett begynnelsevärdesproblem. Tangenten används och lutningen k beräknas mellan två punkter. Det nämns i gymnasieboken att **Leonard Eulers** stegmetod krävde väldigt små intervall av lutningen för att ge en bra approximation, men att under 1800-talet började det krävas bättre och mer specifika approximationer vilket det går att anta Picard hjälpte till med.

Slutligen har gymnasieboken ett avsnitt om differentialekvationer och matematiska modeller [**1**, s.198]. Att verkliga situationer kan tillämpas och använda sig av differentialekvationer som modell för att förklara och beskriva främst någon förändring över tid, dock poängteras det att en matematisk modell såsom bland annat differentialekvationer är en förenkling av verkligenheten och kan därav inte riktigt gestalta den fulla sanningen.

8 Avslutning

I vårt avslutande kapitel skall vi kortfattat sammanfatta vad denna rapport har kommit fram till och nämna de viktigaste bitarna.

Vi kan börja med att konstatera att vi i Kapitel 1 gav en kortfattad koppling till tre olika århundraden av framstående matematiker och deras karriärer utöver deras arbeten med differentialekvationer. Isaac Newton nämns som en av föregångarna inom området, dock är det först i början av 1800-talet som begreppet differentialekvationer uppkommer och som koppling till denna rapport var det Augustin-Louis Cauchy som beskrev begynnelsevärdesproblemet som sedan Émile Picard löste. Samt var det Rudolf Lipschitz som definierade Lipschitzkontinuitet som är en av villkoren för våra två satser, specifikt Sats 5.3 och Sats 5.4, och därav ofantligt viktig för denna rapport.

I Kapitel 3 definierade vi de begrepp och satser som betonas och återges i både Kapitel 4, 5 och 7. Allt för att skapa en tydligare och förståelig rapport.

Kapitel 4 gav en sammanfattning inom området ordinära differentialekvationer med både viktiga begrepp och visar på olika former av ODE. Här visar vi även med Exempel 4.1 hur en ODE kan se ut och förklarar vilken form den gestaltar. Det viktigaste vi tog med oss är omskrivningsmetoden (5) samt Exempel 4.2 som visar på varför vi kan använda våra Satser 5.3 och 5.4 för vektorvärda funktioner, ett begrepp som beskrivs i Kapitel 2 men först i inledningen till Kapitel 5 visas dess betydelse för rapporten.

Denna rapports viktigaste kapitel, som namngav denna rapport, är Kapitel 5 och här introducerade vi Sats 5.3 och Sats 5.4 samt bevisade dessa. I inledningen till kapitlet nämns det varför dessa satser är viktiga, vilket även antyds i Kapitel 7, och det är just för att differentialekvationer, som kan användas som modeller för verkliga situationer, ofta vill eftersträva en lösning. Vi vill ha en ODE som har en existerande och entydig lösning för att dessa skall kunna användas i verkliga situationer där vi endast vill ha ett svar eller en möjlighet. En ekvation såsom i Exempel 6.2 kan göra att det finns flera rätta svar och om det är en situation som exemplet från Kapitel 7 [**1**, s.178] vill man inte ha mer än ett rätt svar eller ekvation. Här definierades även Lipschitzvillkoret och vi visade genom Exempel 5.2 hur det kan tillämpas på funktioner.

För att knyta ihop våra Kapitel 4 och 5 har vi för Kapitel 6 givit tre olika exempel på ODE:s. Här visade vi, tvärtemot Exempel 5.2, ett Exempel 6.1 som inte uppfyller Lipschitzvillkoret och vi kan då inte avgöra om Exempel 6.1 har en entydig lösning. Med Exempel 6.2 visade vi istället att vissa ODE kan ha mer än en lösning, vilket medföljer att vårt krav på entydighet inte uppfylls. Kapitlet avslutas med Exempel 6.3 som är ett begynnelsevärdesproblem som både uppfyller Lipschitzvillkoret och har en existerande entydig lösning. En lösning på det problem som först nämns som Exempel 4.1 och som i Kapitel

7 beskrivs i detalj från gymnasieboken *Matematik 5000 Kurs 5 Blå lärobok* [**1**, s.178].

I avslutande Kapitel 7 granskades en gymnasiebok och ett återkommande exempel, vilket nämndes i ovanstående stycke, fick en avslutning och en anknytning till en verklig situation tagen från gymnasieboken gjordes. Tydligt framkom ifrån granskningen att gymnasieboken hela tiden återkom och försökte anpassa alla differentialekvationer till verkliga situationer, vilket tydligt märks i alla uppgifter som presenteras i boken. Dock nämns inte ODE och tydligheten kring existens och entydighet är inte framstående, dock är litteraturen gjord för en gymnasieelev.

Referenser

[1] Alfredsson, Lena, Bråting, Kajsa, Erixon, Patrik och Heikne, Hans. 2013. *Matematik 5000 Kurs 5 Blå lärobok*. Stockholm: Natur & Kultur.

[2] Andersson, Karl Gustav och Böiers, Lars-Christer. 1992. *Ordinära Differentialekvationer*. Andra upplagan. Lund: Studentlitteratur.

[3] Johansson, Bo Göran. 2004. *Matematikens historia*. Lund: Studentlitteratur.

[4] Neymark, Mats. 1970. *Analysens grunder del 2*. Lund: Studentlitteratur.

[5] O'Connor, J. J. och Robertson, E.F.. 2001. *Charles Émile Picard*.
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Picard\_Emile.html`
(Hämtades 2019-07-14).

[6] O'Connor, J.J. och Robertson, E.F.. 1997. *Augustin Louis Cauchy*.
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cauchy.html`
(Hämtades 2019-07-14).

[7] O'Connor, J.J. och Robertson, E.F.. 2000. *Rudolf Otto Sigismund Lipschitz*.
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lipschitz.html`
(Hämtades 2019-07-14).

[8] O'Connor, J.J. och Robertson, E.F.. 1998. *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass*.
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Weierstrass.html`
(Hämtades 2019-07-14).

[9] O'Connor, J.J. och Robertson, E.F.. 1996. *Sofia Vasilyevna Kovalevskaya*.
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kovalevskaya.html`
(Hämtades 2019-07-14).

[10] Persson, Arne och Böiers, Lars-Christer. 2001. *Analys i en variabel*. Upplaga 2:8. Lund: Studentlitteratur.

[11] Persson, Arne och Böiers, Lars-Christer. 2005. *Analys i flera variabler*. Upplaga 3:9. Lund: Studentlitteratur AB.

[12] StackExchange av användare Sankha. 2014. [Online].
`https://math.stackexchange.com/questions/1073455/example-which-does-not-satify-lipschitz-condition-but-has-a-unique-solution`
(Hämtades 2019-08-06).

[13] Szulkin, Andrzej och Tamm, Martin. 2019. *Analytiska funktioner, likformig konvergens och potensserier.*
https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/32277/mod_resource/content/6/AnLikf.pdf
(Hämtades 2019-06-05).

[14] Teschl, Gerald. 2012. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.*
https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/ode.pdf
(Hämtas 2019-01-28).

[15] Youtube av användare blackpenredpen. 2017. [Online].
https://www.youtube.com/watch?v=SYM6vQnAwrY&list=LLo347T-NBA6XFQgiQumuI4g&index=2&t=0s
(Hämtades 2019-07-15).