SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Riemanns zetafunktion

av

Michael Littunen

2019 - No K30

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Riemanns zetafunktion

Michael Littunen

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2019

Riemanns zetafunktion

En överblick över zetafunktionen och dess koppling till primtalen

Michael Littunen

Abstract

In the nineteenth century, Bernhard Riemann studied the distribution of primes. This was done by studying a specific function, which today is called the Riemann Zeta-function. By working with the normal prime-counting function, Riemann found a connection between the Zeta and the prime-counting function motivating a different prime-counting function. The accuracy of this new prime-counting function depends on the non-trivial zeroes of the Riemann Zeta-function leading to the famous unproven Riemann Hypothesis. The two main goals with this paper is to explain, and either prove or sketch the attributes of the Zeta-function, as well as sketching the connection between the zeta and the prime-counting function. By doing this we discover a useful functional equation which the Riemann Zeta-function satisfies and we also present a simple formula for positive even values of the Riemann Zeta-function.

Tack

Först och främst vill jag tacka min handledare Rikard Bögvad för hans hjälp, tålamod och inspiration genom detta arbete. Jag vill även tacka min granskare Pavel Kurasov för hans råd. Slutligen vill jag tacka mina vänner och familj som stöttat mig samt korrekturläst mitt arbete.

Innehåll

1 Riemanns zetafunktion

1.1 Introduktion

Primtal är något som man lär sig om i grundskolan, man pratar om att dessa tal är tal som bygger upp andra tal. En liknelse många gör är den mellan primtal och atomer, på grund av deras till synes odelbarhet. Primtalen har därmed en fundamental roll inom matematiken. En rimlig frågeställning kring primtalen kan vara: Hur många primtal det finns mindre än eller lika med ett tal x. Detta var något 1800-hundratalsmatematikern Bernhard Riemann frågade sig, och hans idéer kommer vi skissa i Kapitel 4.

Nedan kommer vi arbeta med Riemanns zetafunktion, $\zeta(s)$. Vi kommer visa specifika egenskaper hos $\zeta(s)$ som exempelvis hur Euler löste Baselproblemet och senare härleda zetafunktionens funktionalekvation. Riemanns zetafunktion kan initialt ses som en relativt enkelt funktion men dolda egenskaper låter oss använda $\zeta(s)$ i en funktion som räknar antalet primtal.

Målet med arbetet är att skissa Riemanns resonemang och argument och således visa sambandet mellan zetafunktionen och fördelningen av primtal. För att göra detta måste vi arbeta med zetafunktionen samt visa några av egenskaperna som zetafunktionen besitter.

1.2 Inledning

Tidigt i sin matematikstudier lär man sig att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerar och att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar, detta för att användas för olika konvergenstest. Vad man dock inte pratar om är att dessa båda är värden på Riemanns zetafunktion, $\zeta(2)$ och $\zeta(1)$. Vi kommer senare bevisa konvergensen för den första och divergensen för den andra. Problemet att hitta värdet för $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ kom att kallas Baselproblemet och visades av Euler att vara $\frac{\pi^2}{6}$.

Sats 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nedan skissar vi ett bevis av Sats 1. Metod vi använder liknar den som Euler använde.

Bevis. Beviset bygger på två olika utvecklingar av $\sin(x)$,

$$\sin(\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{n+1} = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!} - \cdots, \tag{1}$$

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \tag{2}$$

där den första är Maclaurinutvecklingen av $\sin(\pi x)$ och den andra är $\sin(\pi x)$ skrivet med hjälp av Weierstraß faktoriseringssats.[1, s.75] Vi beräknar nu koefficienten för x^3 genom att multiplicera ihop termer som ger oss x^3-koefficienter:

$$\boxed{\pi x}\left(1-\boxed{x^2}\right)\left(\boxed{1}-\frac{x^2}{4}\right)\left(\boxed{1}-\frac{x^2}{9}\right)\cdots \text{ och fortsätta med endast ettor,}$$

$$\boxed{\pi x}\left(\boxed{1}-x^2\right)\left(1\ \boxed{-\frac{x^2}{4}}\right)\left(\boxed{1}-\frac{x^2}{9}\right)\cdots \text{ och fortsätta med endast ettor,}$$

$$\boxed{\pi x}\left(\boxed{1}-x^2\right)\left(\boxed{1}-\frac{x^2}{4}\right)\left(1\ \boxed{-\frac{x^2}{9}}\right)\cdots \text{ och fortsätta med endast ettor.}$$

Vi finner att koefficienterna är $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}\cdots$, alltså våra termer i $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. För denna utveckling av $\sin(\pi x)$ kan vi alltså skriva x^3-koefficienten som

$$-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

och här finner vi Baselproblemet. Genom tidigare nämnd Maclaurinutveckling av $\sin(\pi x)$ vet vi att koefficienten för x^3 ska vara $-\frac{\pi^3}{3!}$, och vi får likheten

$$-\frac{\pi^3}{3!}=-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

och vi upptäcker att

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

□

1.3 $\zeta(s)$

Vi inleder med att definiera zetafunktionen,

Definition 1.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad s>1. \tag{3}$$

Riemann arbetade givetvis med $\zeta(s)$ där $s\in\mathbb{C}$, vilket vi kommer tillåta senare.

Sats 2.

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

konvergerar för $s>1$.

Bevis.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) + \cdots$$

$$\leq 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^1 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n.$$

Här har vi nu en geometrisk serie med kvoten $r = \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)$ mellan varje term. Då en geometrisk summa konvergerar för $|r| < 1$ så kommer vår summa konvergera för alla s där $\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right) < 1$. Enkelt ser man att för $s > 1$ så är $\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right) < 1$. □

1.4 Eulerprodukten

På 1700-talet upptäckte Leonhard Euler följande likhet.

Sats 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

där vi tar produkten över primtalen och där $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Detta förhållande mellan primtal och heltalen motiverar en fortsatt undersökning av zetafunktionens egenskaper vilket senare kommer leda till Riemannhypotesen som beskriver fördelningen av primtal. En skiss av beviset följer nedan.[2, s.7]

Bevis. Vi börjar med att skriva ut både summan och produkten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

$$\prod_{p}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \cdots.$$

Vi märker också att

$$\frac{1}{2^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}.$$

Om vi nu subtraherar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}$ får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Om vi nu multiplicerar till en $\frac{1}{3^s}$ till uttrycket ovan får vi

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\cdots$$

och om vi nu tar bort detta från $\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ får vi

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)-\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\text{ där } n \text{ är relativt prima med 2 och 3.}$$

Vi fortsätter och får

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}$$

där m är relativt prima med $2, 3$ och 5. Låter vi produkten $\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots$ växa urholkar vi $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}$ och slutligen kommer vi endast använda oss av $m=1$,

$$\sum_{m=1}^{1}\frac{1}{m^s}=1$$

och vi kan konstatera att

$$\left(\prod_{p}^{\infty}1-\frac{1}{p^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)=1$$

eller att

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

□

1.5 Teori om analytisk fotsättning

Som tidigare visat så konvergerar $\zeta(s)$ för $s>1$. Dock divergerar $\zeta(s)$ för $s\leq 1$. För exempelvis $s=\frac{1}{2}$ skulle vi få summan

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\cdots$$

där vi ser att vissa av termerna, nämligen $\{1,\frac{1}{\sqrt{4}},\frac{1}{\sqrt{9}},\cdots\}=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$ är termer som bildar serien $\zeta(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Denna kända serie, kallad den harmoniska serien är divergent vilket vi visar på följande sätt.[3, s.1] Vi jämför den harmoniska serien, H, med en noga vald serie, G

$$H = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} + \cdots \tag{4}$$

$$G = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{16} + \cdots \tag{5}$$

och man ser tydligt att $H_n \geq G_n$. Då delsummorna av G summeras till $\frac{1}{2}$ och vi kan få godtyckligt många $\frac{1}{2}$, divergerar alltså G och då $H \geq G$ divergerar därmed även H. Vi ser att $\zeta(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergerar. Zetafunktionen divergerar faktiskt för alla s där $\mathrm{Re}(s) \leq 1$.
För att fortsätta teorin om zetafunktionen använder man sig av analytisk fortsättning, en teknik för att utvidga definitionsmängden för en funktion.

Definition 2. *Vi säger att $g(z)$ är en analytisk fortsättning av $f(z)$ definierad i W, om $g(z)$ är definierad i en öppen delmängd $U \subset W$ så att $W \cap U \neq \emptyset$ och $g(z) = f(z)$ när $z \in U$.*

Med Definition 1 kan vi nu utvidga vår zetafunktion för $\mathrm{Re}(s) \leq 1$.

1.6 Analytisk fortsättning av $\zeta(s)$ för $s > 0$

Den analytiska fortsättningen, som definierades i föregående kapitel, kan nu användas för att definiera zetafunktionen för $s \in \mathbb{C}$ där $\mathrm{Re}(s) > 0$. Vi påminner oss om att $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$. Vi väljer att multiplicera funktionen med $-\frac{2}{2^s}$ och får

$$-\frac{2}{2^s}\zeta(s) = -\frac{2}{2^s} - \frac{2}{4^s} - \cdots .$$

Om vi nu subtraherar $-\frac{2}{2^s}\zeta(s)$ från $\zeta(s)$ får vi

$$\zeta(s)\left(1 - \frac{2}{2^s}\right) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

vilket är Dirichlets etafunktion, $\eta(s)$. Vi kommer alltså fram till sambandet

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1 - 2^{1-s})}\eta(s). \tag{6}$$

Vi vill nu undersöka för vilka s som vår analytiskt fortsatta funktion, $\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}}\eta(s)$ konvergerar för, vilket följande sats svarar på.

Sats 4. *Dirichlets etafunktion*

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \tag{7}$$

konvergerar för alla $s \in \mathbb{C}$ där $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Bevis. Vi har

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Vi skriver $s = \alpha + i\beta$ och får

$$n^s = n^{\alpha+i\beta} = n^\alpha n^{i\beta} = n^\alpha (e^{\ln n})^{i\beta} = n^\alpha e^{i\beta \ln n}$$

och nu med Eulers formel får vi att

$$n^s = n^\alpha[\cos(\ln(n)\beta) + i\sin(\ln(n)\beta)].$$

För ett komplext tal z, så gäller det att $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, så speciellt om $|z| = 1$, som till exempel för $z = \cos(\ln(n\beta)) + i\sin(\ln(n\beta))$ är $\frac{1}{z} = \bar{z}$. Alltså är summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha[\cos(\ln(n)\beta) + i\sin(\ln(n)\beta)]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}[\cos(\ln(n)\beta) - i\sin(\ln(n)\beta)]$$

som kan skrivas som två summor,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \cos(\ln(n)\beta) - i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \sin(\ln(n)\beta)$$

givet absolutkonvergensen, som vi snart ska visa. Vi benämner dessa två summor på följande sätt,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \cos(\ln(n)\beta) \text{ och } B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \sin(\ln(n)\beta) \tag{8}$$

där vi börjar med att undersöka summanden i A. Vi skriver om två konsekutiva summander i A som

$$\frac{\cos(\ln(2n-1)\beta)}{(2n-1)^\alpha} - \frac{\cos(\ln(2n)\beta)}{(2n)^\alpha} = \frac{(2n)^\alpha \cos(\ln(2n-1)\beta) - (2n-1)^\alpha \cos(\ln(2n)\beta)}{(2n)^\alpha(2n-1)^\alpha}.$$

Vi adderar $\frac{(2n)^\alpha \cos(\ln(2n)) - (2n)^\alpha \cos(\ln(2n))}{(2n)^\alpha(2n-1)^\alpha}$ och skriver om uttrycket till

$$\frac{(2n)^\alpha[\cos(\ln(2n-1)\beta) - \cos(\ln(2n)\beta)]}{(2n)^\alpha(2n-1)^\alpha} - \frac{\cos(\ln(2n)\beta)[(2n)^\alpha - (2n-1)^\alpha]}{(2n)^\alpha(2n-1)^\alpha}, \tag{9}$$

samt skriver

$$A_1^n = \frac{(2n)^\alpha[\cos(\ln(2n-1)\beta) - \cos(\ln(2n)\beta)]}{(2n)^\alpha(2n-1)^\alpha},$$

$$A_2^n = \frac{\cos(\ln(2n)\beta)[(2n)^\alpha - (2n-1)^\alpha]}{(2n)^\alpha(2n-1)^\alpha}$$

där n indikerar index för A_1^n och A_2^n. Med hjälp av medelvärdessatsen, som säger att för en kontinuerlig funktion $f(x)$, definierad på ett intervall $[a,b]$ och där f är deriverbar på (a,b) så finns det en punkt $c \in (a,b)$, så att

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a+\epsilon), \quad 0 < \epsilon < b-a,$$

kan vi nu skriva om täljaren i A_1^n, då $\cos(\ln(x))$ är kontinuerlig och deriverbar för alla positiva $x \in \mathbb{R}$. Med medelvärdessatsen får vi nu

$$\frac{\cos(\ln(2n-1)\beta) - \cos(\ln(2n)\beta)]}{2n-(2n-1)} = -\beta\frac{\sin(\ln(2n-1+\epsilon_1))}{2n-1+\epsilon_1}$$

och vi kan skriva

$$A_1^n = -\beta\frac{\sin(\ln(2n-1+\epsilon_1))}{(2n-1+\epsilon_1)(2n-1)^\alpha}.$$

Då $|\sin(\ln(2n-1+\epsilon_1))| \leq 1$ kan vi slutligen skriva

$$|A_1^n| = \left|\beta\frac{\sin(\ln(2n-1+\epsilon_1))}{(2n-1+\epsilon_1)(2n-1)^\alpha}\right| \leq \frac{\beta}{(2n-1+\epsilon_1)(2n-1)^\alpha} \leq \frac{\beta}{(2n-1)^{1+\alpha}}.$$

Vi kan lätt se att

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{1+\alpha}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

och från Sats 2 har vi sett att $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ konvergerar för $\alpha > 0$, och alltså konvergerar A_1 för $\alpha > 0$.
Vi fortsätter med A_2, även här använder vi medelvärdessatsen, dock med $f(x) = x^a$ och $f'(x) = ax^{a-1}$. Vi kan nu göra en omskrivning av täljaren i A_2^n,

$$\frac{(2n)^\alpha - (2n-1)^\alpha}{(2n)-(2n-1)} = -\alpha(2n-1+\epsilon_2)^{\alpha-1}.$$

Vi kan nu göra uppskattningen

$$|A_2^n| = \left|\frac{\cos(\ln(2n)\beta)[(2n)^\alpha - (2n-1)^\alpha]}{(2n)^\alpha(2n-1)^\alpha}\right| \leq \alpha\frac{(2n-1+\epsilon_2)^{\alpha-1}}{(2n)^\alpha(2n-1)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{(2n-1)^{\alpha+1}} \tag{10}$$

där sista olikheten i (10) följer från att $0 < \epsilon_2 < 1$ och

$$\alpha\frac{(2n-1+\epsilon_2)^{\alpha-1}}{(2n)^\alpha(2n-1)^\alpha} \leq \alpha\frac{(2n)^{\alpha-1}}{(2n)^\alpha(2n-1)^\alpha} = \frac{\alpha}{(2n)(2n-1)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{(2n-1)^{\alpha+1}}.$$

Med samma argument som för A_1 och med Bevis 2 så kan vi konstatera att

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_2|$$

konvergerar. Därmed konvergerar

$$A_1 + A_2 = A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \cos(\ln(n)\beta)$$

för $\alpha > 0$. Med en snarlik metod så kan vi visa att $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \sin(\ln(n)\beta)$ för $\alpha > 0$ och vi har därmed bevisat att

$$A - iB = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \cos(\ln(n)\beta) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \sin(\ln(n)\beta)$$

konvergerar för $a > 0$ och $\beta \in \mathbb{R}$.[4]

$\square$

Då vi nu vet, enligt sats 4, var $\eta(s)$ konvergerar kan vi lätt konstatera att

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \eta(s)$$

är väldefinierad för $s \in \mathbb{C}$ där $\mathrm{Re}(s) > 0$, förutom för $s = 1$. Vi kan nu göra följande definition.

Definition 3. *För alla* $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *där* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *definierar vi*

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Från och med nu kommer ovanstående definition användas när vi inte arbetar med s där $s > 1$, alltså om vi exempelvis arbetar med godtyckliga $s \in \mathbb{C}$ eller s där $0 < s < 1$.

1.7 Gammafunktionen och dess samband med zetafunktionen

I föregående kapitel kom vi fram till att det finns en analytisk fortsättning av $\zeta(s)$ som utvidgar definitionsmängden för $\zeta(s)$ från $s > 1$ till $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ där $\mathrm{Re}(s) > 0$. För att gå vidare med den analytiska fortsättningen så att $\alpha \leq 0$ behöver vi använda oss av gammafunktionen.

Definition 4.

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \,. \tag{11}$$

Denna definition[5, s.192], som nu är en generalisering av $(s-1)!$ där för alla positiva heltal s gäller att $(s-1)! = \Gamma(s)$, är den vi kommer använda. En viktig egenskap för $\Gamma(s)$, som senare kommer användas är

$$\Gamma(1) = 0! = 1.$$

Med hjälp av ovanstående definition kommer vi nu skissa beviset av följande sats.[6, s.18]

Sats 5. *För $s \in \mathbb{C}$ där $\mathrm{Re}(s) > 1$ gäller det att*

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\,\mathrm{d}u\,. \tag{12}$$

Bevis. Om vi från Definition 4 använder oss av variabelbytet $nu = t$, där $n \in \mathbb{Z}^+$ får vi följande

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty (nu)^{s-1} e^{-nu} n\,\mathrm{d}u = n^s \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu}\,\mathrm{d}u$$

och om vi nu dividerar med n^s får vi

$$\Gamma(s)\frac{1}{n^s} = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu}\,\mathrm{d}u\,.$$

Detta kan vi göra då vi vet att $n^s \neq 0$. Vi ser att $\frac{1}{n^s}$ liknar termer i vår zetafunktion. Vi väljer att summera över alla positiva heltal n och får

$$\sum_{n=1}^\infty \Gamma(s)\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu}\,\mathrm{d}u\,.$$

Vi vet att $\Gamma(s)$ är konvergent för $s \in (0, \infty)$.[5, s.192] Om vi nu antar att $s \in \mathbb{C}$, så kan vi skriva

$$|\Gamma(s)| = \left|\int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu}\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_0^\infty \left|u^{s-1} e^{-nu}\right|\mathrm{d}u = \int_0^\infty u^{\mathrm{Re}(s)-1} e^{-nu}\,\mathrm{d}u$$

och alltså är $\Gamma(s)$ absolutkonvergent om $s \in \mathbb{C}$ och $\mathrm{Re}(s) > 0$. Då $\Gamma(s)$ inte beror på n och att vår integral är absolutkonvergent för positiva n, s och u, så kan vi välja att summera först och sedan integrera. Vi skriver

$$\Gamma(s)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty u^{s-1}\left[\sum_{n=1}^\infty e^{-nu}\right]\mathrm{d}u\,.$$

Låt oss nu undersöka summan i integranden,

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nu}$$

som vi ser är en geometrisk serie med kvot $r = e^{-1}$, summan för en geometrisk serie är $\frac{a}{1-r}$ där a är första termen i serien. Vi ser nu att

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nu} = \frac{1}{e^u - 1}$$

och vi skriver

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}\,\mathrm{d}u\,.$$

□

Vi kommer alltså fram till ett enkelt samband mellan $\zeta(s)$ och $\Gamma(s)$.

1.8 Härledning av funktionalekvationen

Med hjälp av förhållandet mellan $\zeta(s)$ och $\Gamma(s)$, som vi fick via (12) kan vi hitta en analytisk fortsättning av $\zeta(s)$ för hela talplanet $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.[6, s.21]

Sats 6. *För alla $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ gäller det att*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s). \tag{13}$$

Funktionalekvationen i Sats 6 låter oss beräkna värden för $\zeta(s)$ för $s \in \mathbb{C}$ där $\mathrm{Re}(s) < 0$ genom att relatera dessa s till $1 - s$. Givetvis använder vi oss av Definition 3 för $\zeta(s)$.

Bevis. Vi börjar med att använda oss av en omskrivning av gammafunktionen

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

och skriver återigen om detta med $t = \pi n^2 u$, där $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty (\pi n^2)^{\frac{s}{2}-1} u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} \pi n^2 \, \mathrm{d}u = \int_0^\infty (\pi n^2)^{\frac{s}{2}} u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} \, \mathrm{d}u \, .$$

Ännu en omskrivning ger

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} \, \mathrm{d}u \, .$$

Vi summerar nu alla $n \in \mathbb{Z}^+$ och antar att vi kan byta ordning mellan summering och integrering,

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \, \mathrm{d}u \, .$$

Vi fokuserar nu på summan i integralen, som vi kallar $\psi(u)$

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}.$$

Vi vet[1] att följande viktiga förhållande gäller[2, s.15]

$$\psi(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \left(1 + 2\psi\left(\frac{1}{u}\right)\right) - \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Vi går tillbaka till vår integral som vi nu kan skriva om

$$\int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \, \mathrm{d}u = \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) \, \mathrm{d}u$$

[1] Beviset av formeln bygger på Fouriertransform, något som ej behandlas i detta arbete.

$$= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)\,\mathrm{d}u + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)\,\mathrm{d}u\,. \tag{15}$$

Låt oss nu arbeta med den vänstra integralen i (15). Med hjälp av förhållandet mellan $\psi(u)$ och $\psi(\frac{1}{u})$ kan vi nu skriva

$$\int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\left(1+2\psi\left(\frac{1}{u}\right)\right)-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{\frac{s}{2}-1}}{\sqrt{u}}\psi\left(\frac{1}{u}\right)+\frac{u^{\frac{s}{2}-1}}{2\sqrt{u}}-\frac{u^{\frac{s}{2}-1}}{2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^1\left(u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - u^{\frac{s}{2}-1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}}\right]_{u=0}^{1}$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{s(s-1)}\,\mathrm{d}u\,.$$

Använder vi oss av variabelbytet $u = \frac{1}{w}$ $\quad \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}w}{w^2}$ där gränserna nu blir $0 \to \infty$ och $1 \to 1$ får vi

$$\int_\infty^1 -w^{-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}}\psi(w)\frac{\mathrm{d}w}{w^2} + \frac{1}{s(s-1)} = \int_1^\infty w^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\psi(w)\,\mathrm{d}w + \frac{1}{s(s-1)}.$$

Vi kan nu ersätta w med u och får slutligen

$$\int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\psi(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{s(s-1)}$$

vilket är vår vänstra integral i (1). Vi kan nu skriva

$$\int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\psi(u)\,\mathrm{d}u + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\psi(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{s(s-1)}$$

$$= \int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u}\left(u^{\frac{1-s}{2}} + u^{\frac{s}{2}}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{s(s-1)}.$$

Vi vet nu att

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u}\left(u^{\frac{1-s}{2}} + u^{\frac{s}{2}}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{s(s-1)} \tag{16}$$

och byter vi ut s mot $1-s$ får vi

$$\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u}\left(u^{\frac{1-(1-s)}{2}} + u^{\frac{1-s}{2}}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{(1-s)(1-s-1)}$$

$$= \int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u}\left(u^{\frac{s}{2}} + u^{\frac{1-s}{2}}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{(s-1)s} \tag{17}$$

och vi ser att integralerna i (2) och (3) är lika, alltså gäller

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

för $s \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. $\square$

1.9 Andra funktionalekvationen

I detta delkapitel kommer vi omformulera (13) och bevisa följande sats, vilket kommer vara användbart inför kapitel om Riemanns ξ-funktion.

Sats 7. *För alla $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ gäller det att*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{18}$$

För att härleda denna funktionalekvation använder vi oss av samband mellan olika gammafunktioner samt vår tidigare härledda funktionalekvation. Gammafunktionen uppfyller följande samband[2, s.8]:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}}\Gamma(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right), \tag{19}$$

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{20}$$

(19) är Legendres dupliceringsformel. Vi bevisar (19) utgående från följande formel.[5, s.193]

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,\mathrm{d}x\,. \tag{21}$$

Med $s = t = u$ fås

$$\frac{\Gamma(u)\Gamma(u)}{\Gamma(2u)} = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{u-1}\,\mathrm{d}x$$

som tillsammans med variabelbytet $x = \frac{1+y}{2}$ ger

$$\frac{\Gamma^2(u)}{\Gamma(2u)} = \frac{1}{2^{2u-1}}\int_{-1}^1 (1-y^2)^{u-1}\,\mathrm{d}y\,. \tag{22}$$

Efter förenkling så kan vi se att (19) och (22) är ekvivalenta på följande sätt. Vi uppmärksammar att $(1-y^2)^{u-1}$ är en jämn funktion och vi kan därmed skriva

$$\frac{\Gamma^2(u)}{\Gamma(2u)} = \frac{2}{2^{2u-1}}\int_0^1 (1-y^2)^{u-1}\,\mathrm{d}y\,. \tag{23}$$

Vi ser att om vi använder oss av $s = \frac{1}{2}$ och $t = u$ i (21) erhåller vi

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(u)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+u\right)} = 2\int_0^1 (1-y^2)^{u-1}\,\mathrm{d}y\,. \tag{24}$$

Vi kan därmed skriva om (23) med hjälp av (24) och få

$$\frac{\Gamma^2(u)}{\Gamma(2u)} = \frac{1}{2^{2u-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(u)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+u\right)}. \tag{25}$$

Slutligen kan vi använda oss av (21) tillsammans med variabelbytet $x = \sin^2(\theta)$ där $\mathrm{d}x = 2\sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ samt de nya gränserna blir $0 \to 0$ och $1 \to \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2s-1}(\theta)\cos^{2t-1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Om vi nu använder $s = t = \frac{1}{2}$ får vi

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \pi$$

och givetvis följer det då att

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{26}$$

Med (25) samt (26) kan vi nu skriva

$$\frac{\Gamma^2(u)}{\Gamma(2u)} = \frac{1}{2^{2u-1}}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(u)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+u\right)}$$

vilket kan förenklas till

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2u-1}}\Gamma(2u) = \Gamma(u)\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right).$$

Med $u = \frac{s}{2}$ ser vi nu att

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}}\Gamma(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

och därmed gäller (19).
Vi skissar beviset av (20). Det bygger på att använda sig av[2, s.8]

$$s\Gamma(s) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{1+\frac{s}{n}}. \tag{27}$$

Om vi förutsätter (27) kan vi skriva

$$-s\Gamma(-s)s\Gamma(s) = -s^2\Gamma(-s)\Gamma(s) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{s^2}{n^2}}. \tag{28}$$

Vi ser att denna produkt är en snarlik produkt som den som användes i Bevis 1, nämligen

$$\sin(s) = s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Om vi nu använder oss av variabelbytet $s \to s\pi$ samt en enkel omskrivning får vi

$$\frac{s\pi}{\sin(s\pi)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{s^2}{n^2}}, \quad s \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Vi har alltså

$$-s^2\Gamma(-s)\Gamma(s) = \frac{s\pi}{\sin(s\pi)}, \quad s \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

och med egenskapen $-s\Gamma(-s) = \Gamma(1-s)$ så kan vi därmed skriva

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin(s\pi)}, \quad s \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Slutligen gör vi variablebytet $s = \frac{u+1}{2}$ i (30) och vi får

$$\Gamma\left(\frac{1-u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}\right)} = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi u}{2}\right)}, \quad s \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vi har nu bevisat (20) vilket låter oss bevisa sats 7.

Bevis. Om vi använder oss av vår härledda funktionalekvation från Sats 6 och multiplicerar med $\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)$ på båda sidor får vi

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Om vi nu använder (19) och (20) får vi

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}}\Gamma(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)\frac{\pi}{\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right)}$$

som vi skriver om till

$$\frac{\pi^{-s}}{2^{s-1}}\zeta(s)\Gamma(s)\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right) = \zeta(1-s).$$

Byter vi nu ut s mot $1-s$ får vi

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(s\frac{\pi}{2}\right)\zeta(1-s)\Gamma(1-s)$$

vilket är hur vi vill skriva vår funktionalekvation och därmed är Sats 7 bevisad. □

1.10 Zetafunktionen för jämna heltal

I inledningen av detta arbete löstes Baselproblemet, man kan nu fråga sig om det finns någon generell formel för att uttrycka $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Vi visar här en formel för $\zeta(s)$ där $s = 2k$ för $k \in \mathbb{Z}^+$. Denna formel ges i följande sats.

Sats 8. *För alla positiva heltal n gäller*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{B_{2n}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}$$

där B_{2n} är de jämna Bernoullitalen.

Bevis. Beviset bygger på följande likheter

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad x \neq k\pi, \tag{31}$$

$$\pi x \cot(\pi x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n)x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ och } |x| < 1, \tag{32}$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \quad \text{för } |x| < 2\pi. \tag{33}$$

Vi bevisar (31) och (32) nedan, medan (33) använder vi som definition av Bernoullitalen vid utveckling av denna serie vid $x = 0$.[2, s.11]
Beviset av (31) bygger på den oändliga produkt (2) från Bevis 1,

$$\sin(x) = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Vi vet att för alla $x \in \mathbb{R}$ så gäller det att $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, och mer specifikt gäller $\sin(x) = 0$ för alla $x = k\pi$, där $k \in \mathbb{Z}$. Därmed vet vi att $\log\sin(x)$ är väldefinierad, upp till en konstant, för alla $x \neq k\pi$. Vi skriver

$$\log\sin(x) = \log\left(x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right) = \log x + \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad x \neq k\pi.$$

Om vi nu antar absolutkonvergensen hos $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ så kan vi derivera termerna parvis och slutligen få

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log\sin(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\log x + \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right), \quad x \neq k\pi,$$

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{2x}{n^2\pi^2}}{1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}} = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad x \neq k\pi.$$

Alltså gäller det att

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad x \neq k\pi$$

och (31) är bevisad. Med följande omskrivning

$$x\cot(x) = 1 - 2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2 - x^2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2\pi^2}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}}$$

ser vi att den högra kvoten i summan är en geometrisk summa med kvot $\frac{x^2}{n^2\pi^2}$, alltså kan vi skriva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2\pi^2} \frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^m = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^m, \quad 0 < |x| < \pi$$

och eftersom denna summa är absolutkonvergent kan vi ändra ordningen mellan summanderna

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^m = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)^m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}, \quad 0 < |x| < \pi$$

och vi kan slutligen skriva

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)^m \zeta(2m), \quad 0 < |x| < \pi,$$

och

$$x\cot(x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)^n \zeta(2n), \quad 0 < |x| < \pi.$$

Därmed har vi visat likheterna (31) och (32). Vi inleder beviset för satsen med att skriva

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}} = i\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}$$

och med detta

$$\pi x\cot(\pi x) = \pi i x \frac{e^{\pi i x}+e^{-\pi i x}}{e^{\pi i x}-e^{\pi i x}} = \pi i x \frac{e^{2\pi i x}+1}{e^{2\pi i x}-1}.$$

Vi skriver nu $\frac{e^{2\pi i x}+1}{e^{2\pi i x}-1}$ som $1 + \frac{2}{e^{2\pi i x}-1}$, vilket vi kan eftersom

$$\frac{e^{2\pi i x}+1}{e^{2\pi i x}-1} = \frac{e^{2\pi i x}+2-1}{e^{2\pi i x}-1} = \frac{e^{2\pi i x}-1}{e^{2\pi i x}-1} + \frac{2}{e^{2\pi i x}-1}$$

och vi får

$$\pi x\cot(\pi x) = \pi i x + \frac{2\pi i x}{e^{2\pi i x}-1}.$$

Med hjälp av (33) får vi nu

$$\pi i x + \frac{2\pi i x}{e^{2\pi i x}-1} = \pi i x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2\pi i x)^n}{n!}.$$

De första två Bernoullitalen är $B_0 = 1$ och $B_1 = -\frac{1}{2}$, och övriga Bernoullital med udda index är 0, så vi kan skriva ovanstående som[2, s.11]

$$\pi ix+1-\pi ix+\sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(2\pi ix)^n}{n!} = 1+\sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(2\pi ix)^n}{n!} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{(2\pi ix)^{2n}}{(2n)!} = \pi x \cot(\pi x).$$

Med (32) kan vi skriva

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{(2\pi ix)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^{2n}.$$

Alltså

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{(2\pi ix)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)\zeta(2n) x^{2n}$$

då vi summerar på samma sätt för både vänster- och högerled så måste $B_{2n} \frac{(2\pi ix)^{2n}}{(2n)!} = (-1)\zeta(2n)x^{2n}$. Vänsterledet skriver vi om som

$$B_{2n} \frac{(2\pi x)^{2n}(-1)^{n-1}}{(2n)!}$$

och vi kan skriva om detta till

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}(-1)^n B_n}{(2n)!}.$$

□

1.11 Några intressanta värden av zetafunktionen

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

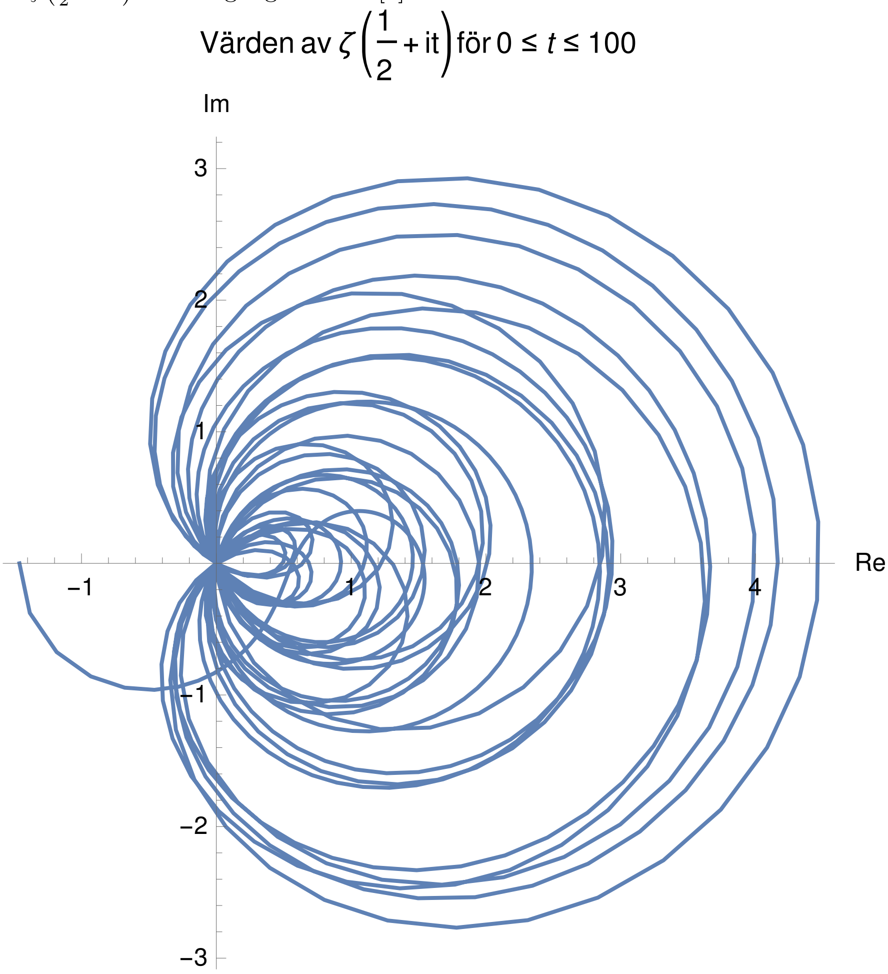
$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Gamma(2)\zeta(2) = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(-2n) = \frac{2^{2n}}{\pi^{2n+1}} \sin(-\pi n)\Gamma(1+2n)\zeta(1+2n) = 0$$

2 Riemannhypotesen

År 2000 presenterade Clay Mathematics Institute millennieproblemen som är en samling av åtta matematiska problem, och en av dessa olösta påståenden är Riemannhypotesen. Riemannhypotsen säger att alla icke-triviala nollor till zetafunktionen har realdel $\frac{1}{2}$ och går alltså att skriva som $s = \frac{1}{2} + it$ med $t \in \mathbb{R}$ och där i är vår imaginära enhet. Riemann skrev denna hypotes under mitten av 1800-talet och det är fortfarande ovisst huruvida Riemannhypotesen är sann eller falsk.

Här ritar vi ut $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, där varje punkt är en punkt i det komplexa talplanet och där vi låter t gå från 0 till 100 med en ökning av $\frac{1}{10}$ varje steg. För $t \in [0, 100]$ så är $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = 0$ 29 gånger totalt.[7]



Figur 1

2.1 Konsekvenser av Riemannhypotesen

2.1.1 Vittnen

Att kunna avgöra om ett tal n är ett primtal eller ett sammansatt tal är ett intressant problem och är av stor vikt inom kryptografi. En av de mest kända och använda asymmetriska kryptosystemen är RSA, namngivet efter Rivest, Shamir och Adleman, som beskrev kryptosystemet året 1978.[8, s.136] RSAs säkerhet bygger på att man kan finna två (stora) primtal och att produkten av dessa är svår att faktorisera. Att nyttja en naiv metod för dessa flera hundra siffror stora tal är givetvis inte möjligt. För att undersöka om n är ett primtal skulle den mest naiva metoden, i värsta fall, behöva testa tal upp till $\sqrt{n}$. En av de idag främsta teknikerna för att undersöka om ett tal n är ett primtal eller sammansatt tal är Miller-Rabins probabilistiska primtalstest som bygger på liknande idéer som Fermats lilla teorem som säger att om n är ett primtal så gäller det för alla heltal a att

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Detta påstående är dock inte ett om och endast om påstående, utan det finns exempel på tal n som har denna egenskap, ett exempel är $n = 3 \cdot 11 \cdot 7 = 561$. Alltså det sammansatta tal 561 har egenskapen att

$$a^{561} \equiv a \mod 561$$

och därför är Fermats primtalstest inte ett perfekt test. Sammansatta tal n med egenskapen att $a^n \equiv a \pmod{n}$ kallas Carmichael-tal och Miller-Rabin undviker dessa och kan effektivt och med hög säkerhet säga om ett tal är ett sammansatt tal eller inte. Anledningen till effektiviteten hos Miller-Rabin är nedanstående sats.

Definition 5. *Ett udda tal n skriver vi som $n = 2^k q + 1$ där q är udda. Om det för ett heltal a gäller att*

$$GCD(a, n) = 1,$$
$$a^q \not\equiv 1 \pmod{n},$$
$$a^{2^i q} \not\equiv -1 \pmod{n},$$

så kallar vi a för ett Miller-Rabin-vittne för det sammansatta talet n.[8, s.136]

Utan bevis så ges följande sats.

Sats 9. *För varje udda sammansatta tal n så gäller det att åtminstone 75% av alla tal $1 < a < n - 1$ är Miller-Rabin-vittnen.* [8, s.131]

Genom test med många olika a kan man därmed med hög sannolikhet säga att ett tal n är ett primtal. Kopplingen till Riemannhypotesen får vi genom följande sats.

Sats 10. *Om vi förutsätter att den generaliserade Riemannhypotesen gäller, så har varje sammansatt tal n ett Miller-Rabin-vittne a, där $a \leq 2\ln^2 n$.*[8, s.136]

Den generaliserade Riemannhypotesen[2] handlar om en generalisering av Riemanns zetafunktion. Denna generaliserade zetafunktion definieras som

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

[2]Detta arbete vidrör inte den generaliserade Riemannhypotsen mer än i Sats 10. Vi beskriver endast kort och icke-rigoröst vad den generaliserade Riemannhypotesen handlar om här.

där χ är en funktion med specifika krav på sig. Ett av dessa krav är att $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$. Den generaliserade Riemannhypotesen handlar då om nollställen till $L(\chi, s)$, precis som vår vanliga Riemannhypotes handlar om nollställen till $\zeta(s)$. Alltså, om man förutsätter att den generaliserade Riemannhypotesen är sann, så har man en effektiv algoritm för primtalstest, även för mycket stora tal.

3 Riemanns ξ-funktion

3.1 Introduktion till $\xi(s)$

Om vi går tillbaka till integralrepresentationen av funktionalekvationen (16) ser vi att termen $\frac{1}{s(s-1)}$ har två poler av ordning 1 vid $s = 0$ och $s = 1$. Därmed är $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ inte en hel funktion. Vi vet att hela funktioner har användbara egenskaper så som att de går att skriva som en potensserie, vilket vi senare kommer göra med $\xi(s)$. Vi gör följande definition.

Definition 6.

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{34}$$

som visar sig vara en hel funktion.

3.2 Härledning av $\xi(s)$

Från (16) såg vi att

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u}\left(u^{\frac{1-s}{2}} + u^{\frac{s}{2}}\right) du + \frac{1}{s(s-1)}.$$

Om vi nu multiplicerar (16) med $\frac{1}{2}s(s-1)$ får vi

$$\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{s}{2}(s-1)\int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u}\left(u^{\frac{1-s}{2}} + u^{\frac{s}{2}}\right) du + \frac{1}{2} \tag{35}$$

vilket vi ser är (34). $\xi(s)$ har, precis som $\zeta(s)$, en intressant funktionalekvation.

Sats 11. *För alla $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ gäller det att*

$$\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{(1-s)}{2}(-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

alltså

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Bevis. Med (35) och $s \to (1-s)$ får vi

$$\frac{s}{2}(1-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \frac{s}{2}(1-s)\int_0^\infty \left(u^{\frac{s}{2}} + u^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\psi(u)}{u} du + \frac{1}{2}. \tag{36}$$

Då högerleden i (35) och (36) är lika konstaterar vi att

$$\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{(1-s)}{2}(-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

och

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

□

Vi kan se att $\xi(s)$ är en jämn funktion för $s = \frac{1}{2}$ och med hjälp av funktionalekvationen från Sats 11 ser vi att problempunkter som uppstår av faktorer så som $\Gamma(0)$ kan undvikas.

3.3 $\xi(s)$ som en oändlig produkt

I kapitel 1 behandlades $\sin(x)$ som ett polynom av oändlig grad genom formel (2). På samma sätt kan man arbeta med $\xi(s)$ vilket leder till följande sats.

Sats 12.

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right) \tag{37}$$

där ρ är rötterna till $\xi(s) = 0$.

I kvarvarande delen av kapitlet vill vi försöka skissa en motivering av denna produkt. Alla funktioner kan givetvis inte behandlas som ett polynom av en oändlig grad, utan vissa krav finns för att få göra det. För att $\xi(s)$ ska kunna skrivas på denna form behöver vi visa att $\xi(s)$ är en hel funktion, samt att ordningen av $\xi(s)$ är 1. Vi definierar ordningen av en funktion nedan.
[9, s.20 & s.328]

Definition 7. *Ordningen av en funktion $f(z)$ är det infimum av a, för $a \geq 0$, så att*

$$|f(z)| \ll e^{|z|^a}.$$

För att kunna bestämma ordningen av $\xi(s)$ behöver vi skriva $\xi(s)$ som en serieutveckling, vilket vi gör i följande delkapitel.

3.4 En serieutveckling av $\xi(s)$

I detta delkapitel kommer vi att skissa en serieutveckling av $\xi(s)$, nämligen

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{2n} \tag{38}$$

med

$$a_{2n} = 4\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right\}u^{-\frac{1}{4}}\frac{(\frac{1}{2}\log u)^{2n}}{2n!}\,\mathrm{d}u\,. \tag{39}$$

Vi påminner oss om att

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u} \left(u^{\frac{1-s}{2}} + u^{\frac{s}{2}} \right) \mathrm{d}u\,.$$

Vi märker att man kan skriva integranden som

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \left\{ \psi(u) \left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} \right] \right\} - \psi'(u) \left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} \right]$$

eftersom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \left\{ \psi(u) \left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} \right] \right\} = \psi'(u) \left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} \right] + \frac{\psi(u)}{u} \left(u^{\frac{1-s}{2}} + u^{\frac{s}{2}} \right).$$

Vi skriver då

$$\int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u} \left(u^{\frac{s}{2}} + u^{\frac{1-s}{2}} \right) \mathrm{d}u$$

$$= \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \left\{ \psi(u) \left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} \right] \right\} \mathrm{d}u - \int_1^\infty \psi'(u) \left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} \right] \mathrm{d}u\,.$$

$$\lim_{u\to\infty} \left\{ \psi(u) \left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} \right] \right\} - \psi(1)\frac{2}{s(1-s)} - \int_1^\infty \psi'(u) \left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} \right] \mathrm{d}u\,. \tag{40}$$

Vi utreder gränsvärdet i uttrycket. Sedan tidigare vet vi att

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}.$$

Vi kan nu konstatera att

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0 \tag{41}$$

vilket ses från att

$$\psi(u) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n u}.$$

Detta då summa är en geometrisk summa med värdet

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi u} = \frac{1}{e^{\pi u} - 1}$$

och med gränsvärdet

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{e^{\pi u} - 1} = 0.$$

Med (41) kan vi se att gränsvärdet i (40) är 0 genom att absolutkonvergensen hos $\psi(u)$ låter oss byta ordning av gränsvärdet och summationen, vilket ger oss

$$\lim_{u\to\infty}\left\{e^{-\pi u}\left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}}+\frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}}\right]\right\}+\lim_{u\to\infty}\left\{e^{-4\pi u}\left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}}+\frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}}\right]\right\}+\cdots, \tag{42}$$

där det är enkelt att se att varje gränsvärde är 0. Därmed kan vi skriva

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \frac{1}{2}-\frac{s(1-s)}{2}\left(\psi(1)\frac{2}{s(1-s)}+\int_1^\infty \psi'(u)\left[\frac{u^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}}+\frac{u^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}}\right]\mathrm{d}u\right)\\
&= \frac{1}{2}+\psi(1)+\int_1^\infty \psi'(u)\left[(1-s)u^{\frac{s}{2}}+su^{\frac{1-s}{2}}\right]\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}+\psi(1)+\int_1^\infty \psi'(u)u^{\frac{3}{2}}\left[(1-s)u^{\frac{s-3}{2}}+su^{-\frac{s+2}{2}}\right]\mathrm{d}u\,.
\end{aligned} \tag{43}$$

Vi skriver nu

$$\int_1^\infty u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\left((1-s)u^{\frac{s-3}{2}}+su^{-\frac{s+2}{2}}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)(-2u^{\frac{s-1}{2}}-2u^{\frac{-s}{2}})\right]\mathrm{d}u-\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right]\left(-2u^{\frac{s-1}{2}}-2u^{-\frac{s}{2}}\right)\mathrm{d}u\,.$$

Detta då

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)(-2u^{\frac{s-1}{2}}-2u^{-\frac{s}{2}})\right]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right]\left(-2u^{\frac{s-1}{2}}-2u^{-\frac{s}{2}}\right)+\left(u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[-2u^{\frac{s-1}{2}}-2u^{-\frac{s}{2}}\right]$$

där

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[-2u^{\frac{s-1}{2}}-2u^{-\frac{s}{2}}\right]=(1-s)u^{\frac{s-3}{2}}+su^{-\frac{s+2}{2}}.$$

Vi har nu att (43) är

$$\frac{1}{2}+\psi(1)$$

$$+\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)(-2u^{\frac{s-1}{2}}-2u^{\frac{-s}{2}})\right]\mathrm{d}u-\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right]\left(-2u^{\frac{s-1}{2}}-2u^{-\frac{s}{2}}\right)\mathrm{d}u\,. \tag{44}$$

Vi skriver första integralen i (44) som

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)(-2u^{\frac{s-1}{2}}-2u^{\frac{-s}{2}})\right]\mathrm{d}u=\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)(-2u^{\frac{s-1}{2}}-2u^{\frac{-s}{2}})\right]\mathrm{d}u$$

$$=-2\lim_{N\to\infty}\left[\left(N^{\frac{s+2}{2}}+N^{\frac{3-s}{2}}\right)\sum_{n=1}^\infty(-N^2\pi)e^{-N^2\pi u}\right]+4\psi'(1)$$

$$= 2\pi \lim_{N\to\infty} \left[\left(N^{\frac{s+2}{2}} + N^{\frac{3-s}{2}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} N^2 e^{-n^2\pi N} \right] + 4\psi'(1). \tag{45}$$

Vi behöver nu undersöka absolutkonvergensen hos

$$\psi'(u) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi e^{-\pi n^2 u} = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n^2 u}$$

för att kunna bestämma gränsvärdet i (45). Vi jämför då $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n^2 u}$ med $G = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n u}$ för att visa att den geometriska serien G är större än $\psi'(u)$. Vi inleder med att definiera följande funktion

$$f(u) = e^{-\pi n u} - n^2 e^{-\pi n^2 u},$$

och vi vill visa att $f(u) \geq 0$ för alla $u > 1$ och givna $n > 1$. Vi börjar med att lösa ekvationen

$$e^{-\pi n u} - n^2 e^{-\pi n^2 u} = 0 \tag{46}$$

för u. Vi ser att (46) är ekvivalent med

$$e^{\pi n^2 u} = n^2 e^{\pi n u},$$

att logaritmera båda sidor samt lösa för u ger

$$u^* = \frac{2\ln(n)}{\pi n(n-1)} = \frac{\ln n^{\frac{2}{(n-1)}}}{\pi n}.$$

Om vi nu deriverar $f(u)$, får vi

$$f'(u) = \frac{\pi n^4}{e^{-\pi n^2 u}} - \frac{\pi n}{e^{-\pi n u}}.$$

Vi kan nu undersöka derivatan av f för $u = u^*$,

$$f'(u^*) = \frac{\pi n^4}{e^{\pi n^2 \frac{\ln n^{\frac{2}{(n-1)}}}{\pi n}}} - \frac{\pi n}{e^{\pi n \frac{\ln n^{\frac{2}{(n-1)}}}{\pi n}}} = \pi n \left(n^3 e^{\ln n^{\frac{-2n}{(n-1)}}} - e^{\ln n^{\frac{-2}{(n-1)}}} \right)$$

$$= \pi n (n^3 n^{\frac{-2n}{n-1}} - n^{\frac{-2}{n-1}}) = \pi n (n^{3-\frac{2n}{n-1}} - n^{\frac{-2}{n-1}}) = \pi n \left(n^{\frac{n-3}{n-1}} - \frac{1}{n^{\frac{2}{n-1}}} \right)$$

och här ser vi att för alla $n > 1$ så är $f'(u^*) > 0$. Då $f(u)$ dessutom är kontinuerlig för alla $u \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{R}$ så vet vi att satsen om mellanliggande värden gäller. Då $u_n^* = \frac{2\ln(n)}{\pi n(n-1)}$ ser vi att $u_{n+1}^* \leq u_n^*$ så kan vi konstatera att $f(u) \geq 0$. Alltså är

$$e^{-\pi n u} \geq n^2 e^{-\pi n^2 u}$$

och vidare

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n u} \geq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\pi n^2 u}$$

och därmed är även $\psi'(u)$ konvergent och även absolutkonvergent.
Vi återgår till gränsvärdet (45) och kan nu argumentera på samma sätt som i (42) och konstatera att gränsvärdet i (45) är 0. Vi ser då att (44) kan skrivas som

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1) - \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right]\left(-2u^{\frac{s-1}{2}} - 2u^{-\frac{s}{2}}\right)\mathrm{d}u\,. \tag{47}$$

Vi kan nu bestämma konstantermerna $\frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi'(1)$ med hjälp av (14), som säger att

$$2\psi(u) + 1 = u^{-\frac{1}{2}}\left[2\psi\left(\frac{1}{u}\right) + 1\right].$$

Deriverar vi båda sidor får vi

$$2\psi'(u) = -\frac{u^{-\frac{3}{2}}}{2}\left[2\psi\left(\frac{1}{u}\right) + 1\right] + u^{-\frac{1}{2}}\left[2\psi'\left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{-1}{u^2}\right)\right].$$

Med $u = 1$ får vi

$$2\psi'(1) = -\frac{1}{2}\left[2\psi\left(1\right) + 1\right] + \left[2\psi'\left(1\right)\left(-1\right)\right] = -\psi(1) - \frac{1}{2} - 2\psi'(u),$$

eller ekvivalent

$$\frac{1}{2} + \psi(1) + 4\psi(1) = 0. \tag{48}$$

Med (48) kan vi nu skriva (47) som

$$\xi(s) = 2\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right]u^{-\frac{1}{2}}\left(u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}} + u^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{4}}\right)\mathrm{d}u\,.$$

Vi kan vidare skriva om $\xi(s)$ med hjälp av definitionen av $\cosh(u)$ samt Taylorutvecklingen av $\cosh(u)$ [1, s.83][1, s.85]

$$2\cosh(u) = e^y + e^{-y}, \tag{49}$$

$$\cosh(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n}}{(2n)!}, \tag{50}$$

$$u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}} + u^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} = e^{\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{4}\right)\ln(u)} + e^{-\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{4}\right)\ln(u)}. \tag{51}$$

Vi kommer fram till att

$$\xi(s) = 4\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right\}u^{-\frac{1}{4}}\cosh\left[\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\ln u\right]\mathrm{d}u\,. \tag{52}$$

Om vi nu använder (50) får vi

$$\cosh\left[\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\ln u\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\ln u\right)^{2n}}{(2n)!}$$

och antar vi absolutkonvergensen hos ovanstående Taylorutveckling kan vi skriva

$$\begin{aligned}\xi(s) &= 4\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right\}u^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln u\right)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}u\\ &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)^{2n}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right\}u^{-\frac{1}{4}}\frac{\left(\frac{1}{2}\ln u\right)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}u\right\}.\end{aligned}$$

Vi skriver

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{2n} \tag{53}$$

med

$$a_{2n} = 4\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right\}u^{-\frac{1}{4}}\frac{(\frac{1}{2}\log u)^{2n}}{2n!}\,\mathrm{d}u\,. \tag{54}$$

3.5 Ordning av $\xi(s)$

Sats 13. *För tillräckligt stora R så gäller $|\xi(s)| \le R^R$ för disken $|s-\frac{1}{2}| \le R$.*

Ovanstående sats implicerar att $|\xi(s)| \ll e^{|R|\ln|R|}$ och då $|R|\ln|R| \le |R|^{(1+\epsilon)}$, för varje $\epsilon > 0$ så kan vi konstatera att ordningen för $\xi(s)$ är 1.

Bevis. Från (53) vet vi att vi kan skriva

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Dessutom vet vi att $\xi(s)$ är en jämn funktion och vi behöver därmed bara arbeta med värden där $\mathrm{Re}(s) \ge \frac{1}{2}$. Vi vill nu undersöka koefficienterna a_{2n}, som visar sig vara större än 0. Vi vet att

$$a_{2n} = 4\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right\}u^{-\frac{1}{4}}\frac{(\frac{1}{2}\log u)^{2n}}{2n!}\,\mathrm{d}u\,,$$

och vi ser att

$$u^{-\frac{1}{4}}\frac{(\frac{1}{2}\log u)^{2n}}{2n!} > 0$$

för åtminstone alla $u \ge 1$ och $n \ge 0$, vi undersöker nu vår kvarvarande del av integranden. Sen tidigare har vi konstaterat att $\psi(u)$ och $\psi'(u)$ är absolutkonvergenat, och vi kan därmed derivera dessa termvis.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\{\psi(u)\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi u}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2\pi)e^{-n^2\pi u}.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{u^{\frac{3}{2}}\psi'(u)\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{u^{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2u)e^{-n^2\pi u}\right\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u^{\frac{3}{2}}n^2\pi e^{-n^2\pi u}\right\}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\sqrt{u}n^2\pi e^{-n^2\pi u} + u^{\frac{3}{2}} n^2\pi(-n^2\pi)e^{-n^2\pi u} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi u} n^2\pi\sqrt{u}\left(n^2\pi u - \frac{3}{2}\right)$$

och vi ser att

$$e^{-n^2\pi u} n^2\pi\sqrt{u}\left(n^2\pi u - \frac{3}{2}\right) > 0 \text{ för } 1 \leq u, n.$$

Vi kan fastställa att integranden till alla koefficienter a_{2n} är större än 0. Därmed är även integralen och alla a_{2n} större än 0 för alla heltal $n \geq 0$. Med detta kan vi konstatera att det maximala värdet för $\xi(s)$ på disken $|s - \frac{1}{2}| \leq R$ finner vi vid $s = \frac{1}{2} + R$. Vi visar nu att $\xi(\frac{1}{2} + R) \leq R^R$ när R är tillräckligt stort.
För varje valt R så kan vi välja N så att

$$\frac{1}{2} + R \leq 2N < \frac{1}{2} + R + 2,$$

vilket låter oss skriva

$$\xi\left(\frac{1}{2} + R\right) \leq \xi(2N).$$

Med

$$\xi(s) = (s-1)\frac{s}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

kan vi alltså skriva

$$\xi(2N) = (2N-1)\pi^{-N}\zeta(2N)(N)!. \tag{55}$$

För tillräckligt stora N kan vi då skriva (55) som

$$\xi(2N) \leq \frac{N!}{\pi^N}(2N-1)\zeta(2) \leq N^N.$$

En motivering för denna olikhet är att $\zeta(2N)$ är monotont avtagande för heltal $N > 1$, så för stora N kan vi sätta en övre gräns med $\zeta(2N) \leq \frac{\pi^2}{6}$. Dessutom så gäller $\frac{N!}{\pi^N} \leq N^N$ och då även $\frac{N!}{\pi^N}N \leq N^{N+1}$ för tillräckligt stora N. Vi kan då göra uppskattningen $N^{N+1} \leq (\frac{1}{2}R + 2 + \frac{1}{2})^{(\frac{1}{2}R+3+\frac{1}{2})} \leq R^R$. Slutligen kan vi skriva $\xi(\frac{1}{2} + R) \leq R^R$ och därmed är ordningen av $\xi(s)$ 1. □

I och med detta vet vi att $\xi(s)$ har ordning 1 och är en hel funktion, och alltså är det möjligt att skriva $\xi(s)$ som en oändlig produkt, som i Sats 12. Hur man kommer fram till exempelvis konstanten $\xi(0) = \frac{1}{2}$ eller att det är just denna form som produkten tar är något som ej tas upp i detta arbete.

4 Diskussion kring förhållandet mellan zetafunktionen och primtalen

I detta kapitel ämnar vi att djupare beskriva kopplingen mellan $\zeta(s)$ och primtalen. Detta genom att skissa en idégång med mindre fokus på detaljer.[2, s.22-36] En fråga man kan ställa sig, som till en början verkar vara väldigt avlägsen till övriga delar av detta arbete är: Hur många primtal finns det som är mindre eller lika med x? Vi gör följande definition för att kunna arbeta med denna fråga.

Definition 8. *Vi kallar*

$$\pi(x) \tag{56}$$

för vår primtalsfunktion, en funktion som räknar antalet primtal mindre än eller lika med x.

Exempelvis ser vi att $\pi(10) = 4$ då det finns fyra olika primtal som är mindre än eller lika med 10, nämligen $2, 3, 5$ och 7. Det som motiverade Riemann till att göra en djupdykning i $\zeta(s)$ var att få skriva $\pi(x)$ med en exakt formel. Vad Riemann kom fram till var dock en formel för $J(x)$, som definieras senare. En relation mellan $J(x)$ och $\pi(x)$, vilken även den visas senare låter oss använda $J(x)$ för att beräkna $\pi(x)$. Vi vill här visa kopplingen mellan $\zeta(s)$ och $J(x)$, och även visa kopplingen mellan $J(x)$ och $\pi(x)$, och därmed visat den intressanta kopplingen mellan $\zeta(s)$ och $\pi(x)$.

4.1 Kopplingen mellan $\pi(x)$ och $J(x)$

Från (56) vet vi att $\pi(x)$ är vår funktion som räknar antalet primtal mindre än eller lika med x. Detta kan vi skriva som

$$\pi(x) = \sum_{p}^{x} 1.$$

Vi gör nu följande definition.[2, s.33]

Definition 9. *Vi kallar $J(x)$ för Riemanns primtalsfunktion, med definitionen*

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{n}}).$$

Vi kan även se att

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} \tag{57}$$

gäller. Vi kan se att summan av $\pi(x^{\frac{1}{n}})$ är ändlig eftersom $x^{\frac{1}{n}} < 2$ för tillräckligt stora n och $\pi(a) = 0$ för $a < 2$. Relationen mellan $J(x)$ och $\pi(x)$ är nu tydlig.

Formeln i definition 2 går att skriva om med hjälp av Möbiusinversion[3], detta ger [2, s.34]

$$\pi(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{\frac{1}{n}}) \tag{58}$$

där

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ om } n \text{ har ett jämnt antal olika primtalsfaktorer,} \\ 0 \text{ om } n \text{ har en primtalsfaktor som förekommer två gånger,} \\ -1 \text{ om } n \text{ har ett udda antal olika primtalsfaktorer.} \end{cases}$$

4.2 Kopplingen mellan $\zeta(s)$ och $J(x)$

Från Sats 3 vet vi att

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}, \quad s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Utan vidare analys ser vi redan här att primtalen är tätt sammankopplade med $\zeta(s)$. Denna produkt konvergerar till ett väldefinierat tal och därmed kan vi logaritmera båda sidor och skriva

$$\log\zeta(s) = \log\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_p \log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right), \quad s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1,$$

alltså

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right), \quad s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Vi kan nu använda oss av Taylorutvecklingen för $\log(1-x)$,

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1,$$

då $\left|\frac{1}{p^s}\right| < 1$ för alla primtal p och alla $s > 1$. Vi skriver

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = -\log\left(1-\frac{1}{2^s}\right) - \log\left(1-\frac{1}{3^s}\right) - \log\left(1-\frac{1}{5^s}\right) - \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-sn}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-sn}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{-sn}}{n} \cdots + = \sum_p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{-ns}}{n}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

[3]Möbiusinversion är inget som avhandlas i detta arbete.

Om vi här antar absolutkonvergens kan vi skriva

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p} \frac{p^{-ns}}{n}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{59}$$

Om vi nu jämför (57) med (59) ser vi att de liknar varandra. De enda skillnaderna är intervallet för andra summan, som är över alla primtal för (57) medan intervallet är $p^n \leq x$ för (59) och faktorn p^{-ns}. Vi kan enkelt se att för $s > 1$ så gäller det att

$$s \int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x^s} \bigg|_{p^n}^{\infty} = p^{-ns}.$$

Nu kan vi skriva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p} \frac{1}{n} s \int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1} \, \mathrm{d}x \, .$$

Om vi igen antar absolutkonvergens så kan vi ändra ordning hos summorna och integralen och skriva

$$s \int_{0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} x^{-s-1} \, \mathrm{d}x \, . \tag{60}$$

Innan vi bytte ordning mellan summation och integration så integrerade vi över alla x där $p^n \leq x$. Då vi nu har integralen först behöver vi ändra dess gränser till att integrera över alla $x \geq 0$, samt summera över alla $p^n \leq x$. Med (57) kan vi skriva om (60) till

$$\log \zeta(s) = s \int_{0}^{\infty} J(x) x^{-s-1} \, \mathrm{d}x \, , \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

I detta fall kan $\log \zeta(s)$ ses som en sorts transform[4] av $J(x)$, och i många fall finns det inverstransform, den är

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s \, \mathrm{d}s \, , \quad a > 1. \tag{61}$$

Det sista steget i vårt arbete med omskrivningen av $J(x)$ är att partialintegerara (61) för att få

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i \log x} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s \bigg|_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \frac{1}{2\pi i \log x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left\{ \frac{\log \zeta(s)}{s} \right\} x^s \, \mathrm{d}s \, .$$

Vi behöver nu undersöka

$$L = \lim_{N \to \infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s \bigg|_{s=a-iN}^{a+iN} .$$

[4] Fouriertransform är inget som avhandlas i detta arbete.

Med (59) och att $a > 1$ så kan vi skriva

$$|\log\zeta(a+iN)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{p^{-n(a+iN)}}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}\left|\frac{p^{-n(a+iN)}}{n}\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{p^{-na}}{n} = \log\zeta(a).$$

Vi ser att detta gäller då $N \to \pm\infty$ och alltså är $\log\zeta(a+iN)$ i L bunden. Vidare vet vi att $x^s = x^{a+iN} = x^a\left[\cos(N) + i\sin(N)\right]$ enligt Eulers formel och därmed är även x^{a+iN} bunden när $N \to \infty$. Slutligen ser vi att nämnaren $a + iN$ går att skriva som $\sqrt{a^2+N^2}(\cos\theta + i\sin\theta)$ för något $\theta \in \mathbb{R}$. Då $\sqrt{a^2+N^2}$ växer obegränsat kan vi därmed dra slutsatsen att $\lim_{N\to\infty} L = 0$, samma argument fast för $N \to -\infty$ håller för L. Vi kan nu skriva (61) som

$$J(x) = -\frac{1}{2\pi i\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\frac{\log\zeta(s)}{s}\right\}x^s\,\mathrm{d}s \quad a > 1. \tag{62}$$

4.3 Den avslutande kopplingen

Vi såg tidigare att

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$$

där ρ är rötterna till $\xi(s)$, alltså $\xi(\rho) = 0$. Vi vet även från Definition 6 att

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Skriver vi ihop dessa två formuleringar av $\xi(s)$ får vi

$$\zeta(s) = \frac{\xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)}{\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Använder vi $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ från diskussionen kring Definition 4 om $\Gamma(s)$ så kan vi även skriva

$$\zeta(s) = \frac{\xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)}{(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}.$$

Logaritmerar vi ovanstående uttryck får vi

$$\log\zeta(s) = \log\xi(0) + \sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right) - \log(s-1) - \frac{s}{2}\log\pi - \log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right). \tag{63}$$

Detta uttryck kan vi nu sätta in i (62), vilket ger ett långt komplicerat uttryck. Vi vet att vi kan derivera termvis, och vi kan se att $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\frac{s\log\pi}{2s}\right\} = 0$. Beräknas (62) med (63) visas värdet vara[2, s.26]

$$J(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho}\left[\mathrm{Li}(x^{\rho}) + \mathrm{Li}(x^{1-\rho})\right] - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2-1)\log t} \quad x > 1 \quad (64)$$

där[2, s.26]

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Vi kan se att $\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2-1)\log t}$ bidrag till $J(x)$ inte är märkbart, vidare ser vi att $\log 2$ endast är en konstant och därmed inte påverkar $J(x)$ asymptotiskt. Därmed har vi två intressanta termer kvar i $J(x)$, nämligen

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t$$

och

$$\sum_{\mathrm{Im}(\rho)\geq 0}\left[\mathrm{Li}(x^{\rho}) + \mathrm{Li}(x^{1-\rho})\right], \quad (65)$$

vilka är de två betydande termerna i $J(x)$. Det visar sig att $\mathrm{Li}(x)$, ensam, är en god uppskattning av $\pi(x)$. En förbättrad uppskattning till $\pi(x)$ visar sig vara [2, s.35, tabel III]

$$\mathrm{Li}(x) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}}). \quad (66)$$

Om man jämför primtalsfunktionen $\pi(x)$ med (66) för exempelvis $x = 10.000.000$ upptäcker man att skillnaden endast är 88 primtal.

Kvar för oss att utvärdera är (65), vilken är termen där icke-triviala nollställen till $\zeta(s)$ används. De övriga termerna i $J(x)$ är relativt enkla att hantera. Problemet med (65) är att det finns många frågetecken kring de icke-triviala nollställena till $\zeta(s)$. Den största frågan är om alla nollställen har realdel $\frac{1}{2}$, vilket är det Riemannhypotesen påstår. Ordningen över hur man summerar termerna i (65) är avgörande för summan, vilket är varför man summerar genom att börja med det tal ρ med minst positiv imaginärdel i (65). Givetvis gäller det att användandet av fler rötter av $\zeta(s)$ i (65) ökar precisionen hos $J(x)$ och därmed även uppskattningen av $\pi(x)$ via (58). Alltså skulle en förbättrad förståelse av $\zeta(s)$, så som att veta om alla $\rho = \frac{1}{2} + it$, där $t \in \mathbb{R}$, öka förståelse av hur primtalen är fördelade.

5 Slutord

Kopplingen mellan $\zeta(s)$ gjorde sig tydlig genom (64). Genom kunskap om icke-triviala nollställen till $\zeta(s)$ ökar vår kunskap om fördelningen av primtal. Riemann uttalande sig, via den obevisade Riemannhypotesen, om var man kan hitta dessa icke-triviala nollställen. Ett svar på denna hypotes, som om sann, skulle ge en bra uppskattning av primtalen, vore en otrolig upptäckt.

> It remains unresolved but, if true, the Riemann Hypothesis will go to the heart of what makes so much of mathematics tick: the prime numbers. These indivisible numbers are the atoms of arithmetic.
>
> Marcus du Sautoy

Referenser

[1] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables.* National Bureau of Standards, tionde tryckningen, 1972.

[2] Harold M. Edwards. *Riemann's Zeta Function.* Dover Publications, New York, 2001.

[3] Martin Tamm. *Serier och Generaliserade Integraler.* Stockholms Universitet, Stockholm, 2017.

[4] Stack Exchange, Yiorgos S. Smyrlis. `https://math.stackexchange.com/questions/937627/does-the-series-sum-n-1-infty-1n-frac-cos-lnnn-epsilon-e?rq=1` Hämtad 28/6 2019.

[5] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Education, tredje utgåvan 1976.

[6] E. C. Titchmarsh. *The Theory of The Riemann Zeta-Function.* Oxford University Press, andra utgåvan 1986.

[7] `http://www.lmfdb.org/zeros/zeta/` Hämtad 2/3 2019.

[8] Jeffrey Hoffstein, Jill Pipher Joseph H. Silverman *An Introduction to Mathematical Cryptography.* Springer Publishing Company, andra utgåvan, 2008.

[9] Anatoly A. Karatsuba och Andriy Voronin. *The Riemann's Zeta-Function.* Walter de Gruyter, översatt av Neal Koblitz, 1992.