SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Banachs fixpunktssats och dess tillämpningar

av

Abdelhamid Bouain

2019 - No K37

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Banachs fixpunktssats och dess tillämpningar

Abdelhamid Bouain

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jonathan Rohleder

2019

SJÄLVSTÄNDIGT ARBETE I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Banachs fixpunktssats och dess tillämpningar

av

Abdelhamid Bouain

2019- No K37

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Banachs fixpunktssats och dess tillämpningar

Abdelhamid Bouain

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jonathan Rohleder

2019

Tack

Jag vill tacka min handledare Jonathan Rohleder, för ett imponerande tålamod, värdefulla kommentarer och stort stöd under arbetets gång vilket har gett mig möjlighet att uttveckla mina kunskaper inom matematik.

Abstract

The aim of this report is to understand and extend the Banach fixed point theorem, usually known as the contraction mapping theorem. We introduce the theorem and prove it. The knowledge of the existence of fixed points has relevant applications in many branches of analysis. A standard application is in the proof of the Picard-Lindelöf theorem, which is about the existence and uniqueness of solutions to certain ordinary differential equations. This, which is explained in the first part of the report, together with some important concepts and results in Banach spaces will be used to prove both theorems.

Sammanfattning

Det här arbetet handlar om Banachs fixpunktssats och hur denna kan bevisas. Satsen kallas även för kontraktionsprincipen och kan tillämpas i många olika situationer, bland annat för att bevisa existens och entydighet av lösningar till vissa linjära differentialekvationer (Picard-Lindelöfs sats). I första delen av arbetet förklarar vi vissa viktiga begrepp och egenskaper för Banachrum. Egenskaperna kommer att visa sig vara användbara för att bevisa båda satserna.

Innehåll

Inledning

Syftet

Syftet med den här uppsatsen är att formulera Banachs fixpunktssats samt Picard-Lindelöfs sats och dessa beviser, så att dem blir lätta att förstå för någon som har läst matematik i ett år på högskolenivå.

Problem formulering

Om vi tar fram våra föreläsningsanteckningar av matematik för naturvetenskaper I, som är första kursen i matematik vid Stockholm Universitet, där hittar vi metoder för att lösa ett linjärt differentialekvation av ordning n på formen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x)$$

där $a_{n-1}, \ldots, a_0$ och f är givna kontinuerliga funktioner. Ville vi lösa följande differentialekvation: $y' = e^{-x^2}$, då kunde vi inte hitta lösningen åtminstone för oss som studenter. Då den formelsamlingen av primitiva funktioner skulle vara begränsad för att hitta en primitivfunktion till e^{-x^2}.

För att lösa sådana differentialekvationer behöver vi att fördjupa och utveckla mer våra kunskaper och letar efter en metod på ett annat matematiskt område, nämligen funktionalanalys, som uppkom under de första decennierna av 1900-talet. En av de viktiga satserna är Banachs fixpunktssats, som är huvudämnet i denna uppsats och som säger att en kontraktionsavbildning f alltid har enda fixpunkt, det vill säga att det finns bara en punkt x_0 som avbildas på sig själv så att $f(x_0) = x_0$.

Satsen leder direkt till existenssatser för lösningar till differentialekvationer, däribland Picard-Lindelöfs sats om existensen och entydighet av lösningar till differentialekvationer, vilket är andra del av denna uppsatsen. För att uppnå syftet vill jag svara på följande frågor:

Vad är sammabandet mellan entydigt av fixpunkten till kontraktionsavbildning och existens och entydligten av lösningar till linjära differentiallekvation? Vad är tekniker och metoder som tillämpa fixpunktssatsen på differentialekvationer? För att svara på frågorna kommer vi att anta att

Banachrum som vårt rum. Banachrum har vissa egenskaper och termologin som kommer vara introduceras med satser och definitioner samt illustreras med vissa exempel.
I den uppsaten kommer vi att använda notationen $\mathbb{K}$ som kan vara de reella talen $\mathbb{R}$ eller de komplexa tal $\mathbb{C}$ och betecknas såsom:

$$\mathbb{K} := \mathbb{R} \qquad eller \qquad \mathbb{K} := \mathbb{C}.$$

Uppsatsen är främst baserad på boken Applied Functional Analysis: applications to Mathematical Physics av Eberhard Zeilder. Övriga böcker som uppsatsen baseras på är listade i referenserna.

Nyckelord

Banachrum, Cauchy-följd, Fixpunkt, differential- och integraloperator, Banachs fixpunktssats, Picard-Lindlöfs sats, Picards- iterationsmetod, feluppskattning, konvergenshastighet, sambandet mellan differential-och integralekvationer.

Kapitel 1

Normerade rum: Några grundläggande begrepp

Syftet med detta inledande kapitel är att definera vissa begrepp såsom normerade rum och dess egenskaper och fördjupning av vissa definitionen och satser som i sin tur kommmer vara användbara i det kommande avsnitet. Därför behöver vi att introducera definitionen av ett merikist rum samt linjärt normerade rum och vad som krävs för att vara ett Banachrum.
I kapitlet skall vi formulera en definition av en operator i ett Banachrum. Detta behövs för att ha nytta av Cauchysföljd och konvergenstopologi. I slutet av kapitlet kommer integral och differentialoperatorer att definieras.Teorin i detta avsnitt kommer från referenserna [4] och [2].
Vi inleder med en genomgång av metriska rum.

1.1 Metriska rum

Definition 1.1. Låt X var en mängd. En metrik d på X är en funktion som defineras

$$d : X \times X \to \mathbb{R},$$

så att:

- $\forall u, v \in X$, $d(u, v) \geq 0$ (positivitet), med likhet om och endast om $u = v$ (definit).
- $\forall u, v \in X$, $d(u, v) = d(v, u)$ (symmetri),
- $\forall u, v$ och $w \in X$, $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (triangelolikheten).

En metrik mäter alltså avstånd mellan två punkter i mängden X som kan vara en mängd av reella tal, av vektorer, av funktioner, av stokastiska variabler... Olika metriker definierar olika metriska rum, som kan ha olika topologiska egenskaper.

Definition 1.2. En mängd X försedd med en metrik d, beteknas med paret (X, d), är ett metriskt rum.
Vi ska nu se ett exempel på kallad Euklidiska metriken.

Exempel 1.1. *Beträkta* $\mathbb{C}$, *och låt* $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *så att*

$$d(z, w) = |z - w|,$$

d *är den Euklidiska metriken på* $\mathbb{C}$.

BEVIS. För att bevisa d är en metrik måste detta verifieras alla punkter som kommer på defintion ovan, d.v.s att d måste vara positiv, definit, symetrisk och uppfyller triangelolikheten.
Alltså gäller den första punkten äråtminstone för detta fall eftersom $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$.
Antag att $d(z, w) = 0$ d.v.s att $|z - w| = 0$, det innebär, om $z = x_1 + iy_1$ och $w = x_2 + iy_2$, att

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0.$$

Men detta är samma sak som att $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0$. Men summan av två kvadrater är noll om och endast om båda termerna är noll, dvs att $x_1 = x_2$ och $y_1 = y_2$. Detta betyder att $z = w$, vilket visar ifall $z = w$ blir $d(z, w) = 0$.
Vidare så är

$$d(z, w) = |z - w| = |(-1) \cdot (w - z)| = |-1| \cdot |w - z| = |w - z| = d(w, z),$$

så d är symmetrisk. Den enda som är kvar är att kolla att d uppfyller triangelolikhet. För att se det så måste vi använda följande olikhet:

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Låt nu z, w och $v \in \mathbb{C}$, det ger att

$$\begin{aligned} d(z - v) = |z - v| = &|(z - w) + (w - v)| \\ &\leq |z - w| + |w - v| \\ &\leq d(z, w) + d(w, v). \end{aligned}$$

Och därmed d är en metrik. □

Anmärkning 1.1. Man kan även definiera fler metriker på $\mathbb{C}$ och $\mathbb{R}$ och exempel på detta, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, som är en metrik i $\mathbb{R}^2$, för x, $y \in \mathbb{R}$.

Exempel 1.2. *För* $X = \{$ *begränsade, kontinuerliga funktioner* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *är då* $d(u, v) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t) - v(t)|$ *en metrik.*

Vi ska nu formulera definitioner av vissa viktiga begrepp inom mängdlära som ligger till grund för förkommande avsnitt.

1.1.1 Öppen och Sluten mängden i metriska rum

En mängd definieras av de element som mängden innehåller. Det sätt på vilket vi anger mängdens element, eller om element upprepas spelar inte roll. Den tomma mängden som betecknad med $\varnothing$, är den mängd som inte innehåller några element. Nu kommer vi att definiera vissa begreppen inom mängdteori och vi börjar med Öppna klotet.

Definition 1.3. (Öppna klotet) Låt (X, d) var ett metriskt rum. Låt u vara en godtycklig punkt i X och $r > 0$. Då definierar vi det öppna klotet $B_r(u)$ kring u med radie r som

$$B_r(u) := \{v \in X : d(u, v) < r\}.$$

Exempel 1.3. *För* $\mathbb{R}$ *försett med metriken* $d(x, y) = |x - y|$ *ges det öppna klotet kring* x *med radie* r *av intervallet*

$$B_r(x) = (x - r, x + r).$$

Definition 1.4. (Omgivning) Låt X vara ett metriskt rum, och M en delmängd av X. M sägs vara en omgivning till punkten $u \in M$, om det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att varje punkt $v \in X$ med avstånd $< \varepsilon$ till u ligger i M, och betecknas med följande notation:

$$U_\varepsilon(u) := \{v \in X : d(v, u) < \varepsilon\} \subset M.$$

Definition 1.5. (Inre punkten) Låt M vara delmängd av ett metriskt rum (X, d). En punkt $u \in M$ sägs vara en innre punkt om det existerar ett reellt positivt tal r sadant att

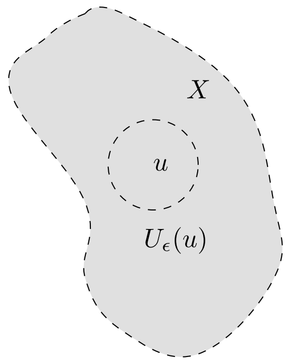
$$B(u, r) \subset M.$$

Definition 1.6. (Öppna mängden) En mängd är öppen om den är en omgivning till alla sina punkter.

Definition 1.7. (Sluten mängden) En delmängd S av X sägs vara sluten om dess komplement S^c är öppen.

Anmärkning 1.2. Några viktiga satser om öppna och sluten mängder:

- Varje öppen mängd kan skrivas som en union av öppna klot.
- Unionen av öppna mängder är öppen.
- Snitet av andligt många öppna mängder är öppet.
- Ett godtyckligt snitt av slutna mängder är sluten.



Figur 1.1: Öppen mängden

1.1.2 Konvergens i metriska rum

Med hjälp av ovanstående begrepp skall vi nu fortsätta studiet av metriska rum viktiga egenskaper såsom konvergens, Cauchyföljd och fullständighet som är nyckelord till de kommande moment. Vi inleder med en genomgång av konvergens.

Definition 1.8. Låt (X, d) var ett metriskt rum och $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, vara en följd i X. Vi säger att följden konvergerar mot $u \in X$ om till varje $\epsilon > 0$ finns ett n_0 så att om $n \geq n_0$ är $d(u_n, u) < \varepsilon$. Det skrivs då $u_n \to u$ när $n \to \infty$, som är ekivalent beteckning till

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

1.1.3 Cauchyföljd och fullständighet

Definition 1.9. En följd $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i ett metriskt rum (X, d) som uppfyller att för varje $\varepsilon > 0$ finns n_0 och m_0 så att om $m \geq m_0$, $n \geq n_0$ är

$$d(u_n, u_m) \leq \varepsilon,$$

kallas en Cauchy-följd.

Med andra ord är Cauchyföljd en följd $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ där skillnaden mellan två tal i sekvensen är godtyckligt liten så längre talen dycker upp sent i $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, det vill säga när talet n tillräckligt stor.

Notera att begreppet Cauchyföljd är uppkallat efter Augustin Louis Cauchy $(1789 - 1857)$, som var en fransk matematikern.

Sats 1.1. *Varje konvergent följd i ett metriskt rum är en Cauchyföljd*

BEVIS. Låt en följd $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ av element i ett metriskt rum (X, d) som konvergerar mot ett element $u \in X$. Enligt definitionen ovan går avståndet mellan u och u_n mot noll då indexet n går mot oändligheten:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \geq 1, \forall n > n_0(\varepsilon), d(u, u_n) < \varepsilon.$$

Om vi väljer två index n och $m > n_0(\frac{\varepsilon}{2})$ oberoende av varandra, så ger triangelolikheten att avståndet mellan elementen u_n och u_m kan begränsas uppåt, u är en gränspunkt av $\{u_n\}$ och $\{u_m\}$ när resp $n \to \infty$ och $m \to \infty$. Då för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $n_0(\varepsilon)$ så att

$$d(u_n - u) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall n > n_0(\varepsilon),$$

vilket leder att

$$\begin{aligned} d(u_n - u_m) &= d(u_n - u + u - u_m), \\ &\leq d(u_n - u) + d(u - u_m), \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Vilket visar att följden $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ är en Cauchyföljd och bevist är klart. □

Då behöver vi introducera en nytt begrepp som är fullständighet.

Definition 1.10. Ett metriskt rum (X, d) där varje Cauchyföljd konvergerar kallas ett fullständigt metriskt rum.

1.2 Kontinuitet

Ett viktigt begrepp i topologi är kontinuitet av funktioner. Låt (X_1, d_1) och (X_2, d_2) vara två metriska rum och $T : X_1 \to X_2$ vara en funktion.
Till en godtycklig delmängd $M_1 \subset X_1$ kan vi då definiera bildmängden:

$$T(M_1) = \{T(u) : u \in X_1\} \subset X_2.$$

Till en godtycklig delmängd $M_2 \subset X_2$, kan vi definiera inversa dem bilden:

$$T^{-1}(M_2) = \{T^{-1}(v) : v \in M_2\} \subset X_1.$$

Definition 1.11. Låt $u \in X$ vara en godtycklig punkt. Då sägs T vara kontinuerlig i u om till varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att

$$d_1(u, v) < \delta \Rightarrow d_2(T(u), T(v)) < \varepsilon.$$

Eller ekvivalent, för varje följd $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ som konvergerar mot u gäller att $T(\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ konvergerar mot $T(u)$.

Anmärkning 1.3. Vi kan skriva en ekivalent definition av kontinuitet ovan, som knyter samman begreppen kontinuerliga funktioner och öppna mängder. En funktion T sägs vara kontinuerlig om $T^{-1}(M_1)$ är öppen i X_1 för varje öppen mängd M_1 i X_2. Kontinuerliga funktioner är alltså de funktioner som drar tillbaka öppna mängder på öppna mängder.

1.3 Rum av funktioner

Vi kommer här att titta på rum av funktioner, på vilka vi kommer att definiera addition och multiplikation med skalärer så att rummen av funktioner blir linjära.

1.3.1 Linjärt Rum och dimension

Låt X vara en icketom mängd över kroppen $\mathbb{K}$. Låt u och v vara två element av X. En addition på X är en avbildning $X \times X \to X$ som ordnar till varje två element ett nytt u, $v \in X$ element $u+v \in X$. På samma sätt ordnas det nytt element $\alpha \cdot u \in X$ genom en multiplikation med skalär $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definition 1.12. Ett linjärt rum är en icketom mängd X med en addition och en multiplikation med skalärer, för $u, v, w \in X$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ som måste uppfylla följande egenskaper:

$$
\begin{aligned}
u+v &= v+u \qquad (kommutativitet) & \alpha\cdot(u+v) &= \alpha\cdot u+\alpha\cdot v \qquad (distributivitet)\\
(u+v)+w &= u+(v+w) \qquad (associativitet) & \alpha(\beta\cdot u) &= (\alpha\beta)\cdot u \qquad (associativitet)\\
1\cdot u &= u \qquad (multiplikativtenhetselement) & (\alpha+\beta)\cdot u &= \alpha\cdot u+\beta\cdot u \qquad (distributivitet)\\
u+0 &= u
\end{aligned}
$$

där 0 är nollelement. Så finns det exakt ett element $v \in X$ som uppfyller additiv invers axiomet $u+v=0$ då $v=-u$.

Sats 1.2. *Låt X vara ett linjärt rum över kroppen $\mathbb{K}$ och $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ och $u \in X$. Då uppfylls följande egenskaper:*

$$\alpha \cdot 0 = 0, \tag{1.1}$$

$$0.u = 0, \tag{1.2}$$

$$(-\beta)\cdot u = -(\beta \cdot u) \qquad (associativitet). \tag{1.3}$$

BEVIS. Låt $\alpha \in \mathbb{K}$ och u ett element av X och vill bevisa (1.1) på följande sätt

$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0)$$
$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$$

Nästa steg att addera $(-\alpha \cdot 0)$ till både leden så blir

$$\alpha \cdot 0 + (-\alpha \cdot 0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + (-\alpha \cdot 0)$$
$$\alpha \cdot 0 - \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 - \alpha \cdot 0$$
$$0 = \alpha \cdot 0$$

Därmed (1.1) är alltså bevisat, nästa steg att bevisa (2.2) d.v.s att $\alpha \cdot u = 0$. Då blir

$$\alpha \cdot u + \alpha(-u) = \alpha \cdot u - \alpha \cdot u = 0.$$

Eftersom (1.1) är sanna, så blir :

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (u + 0) = \alpha \cdot u + 0 \cdot u = \alpha \cdot u + 0$$

och därmed $0 \cdot u = 0$.
Med den sista ekvationen kan man applicera direkt distributivitet axiomet genom

$$0 = 0 \cdot u = (\beta + (-\beta)) \cdot u = \beta \cdot u + (-\beta) \cdot u, \text{ då såldes } -(\beta \cdot u) = (-\beta) \cdot u.$$

Beviset är klart. □

Linjärt oberoende och Dimension

Definition 1.13. Låt X vara ett linjärt rum över $\mathbb{K}$. Elementen $\{u_1, u_2 \ldots, u_N\} \in X$ sägs vara linjärt oberoende om: $\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_N u_N = 0$, medför att $u_1 = u_2 = \ldots = u_N = 0$. med $\alpha_1 \ldots \alpha_N \in \mathbb{K}$.

Att elementen $u_1, u_2 \ldots, u_N$ är linjärt oberoende innebär alltså att nollelement kan skrivas på ett enda sätt som en linjärkombination av dem, nämligen $0 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \ldots + 0 \cdot u_N$.

Definition 1.14. Låt $\{N \in \mathbb{N}\}$ maximalt ändligt antalet oberoende elementen i linjät rum X kallas för dimension och skrivs dim $X = N$.

Sålunda gäller följande:

- Om $N = \infty$ då sägs X vara ett oändligt dimensionellt rum och antalet obereonde element i X är oändligt.

- Om det finns ändligt många oberoende element $\{u_1, \dots, u_N\}$ i ett lnjärt rum X, då sägs rummet vara ändligt dimensionellt och kan skrivas $0 <$dim $X < \infty$.
  Låt oss se på följande vanliga exempel.

Exempel 1.4. *Låt $X := \mathbb{K}$ vara ett linjärt rum då är dim$X = 1$.*

BEVIS. Antag att det existerar två icke-nollelement u och $v \in X$ som är linjärt oberoende. Då existerar, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ så att:

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \tag{1.4}$$

Men ekvationen ovanför gäller inte om vi antar att $\alpha := \frac{u}{v}$ och $\beta = -1$ och därmed är beviset klart och $\alpha \cdot u = 0$ då dim$X = 1$.
Det vill säga att dim $\mathbb{R}$ =dim $\mathbb{C} = 1$, där $\mathbb{R}$ är reella talet och $\mathbb{C}$ är komplexa talet. □

Exempel 1.5. *Låt $X := \mathbb{K}^N$, med $N \in \mathbb{N}$ (d.v.s $N < \infty$) Då är X ett linärt rum och dim$X = N$.*

1.3.2 Linjärt normerade rum

Det finns två goda skäl att studera allmännt linjärt normerade rum, det finns viktiga konkreta exempel och de har många intressanta egenskaper. Vi börjar att definiera linjärt normerade rum.

Definition 1.15. Ett normerat linjärt rum X är ett linjärt rum försett med en norm, dvs en funktion

$$||.|| : X \to \mathbb{R},$$

sådana att:

- $\|u\| \geq 0$, för alla $u \in X$. Med likhet om och endast om $u = 0$,
- $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$, för alla $\alpha \in \mathbb{K}$,
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, för alla $u, v \in X$,

Sats 1.3. *Låt $u_1, u_2, \dots u_N \in X$ och $j = 1, 2, \dots, N$, för något naturligt tal N, då gäller:*

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} u_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{N} \|u_j\| .$$

BEVIS. Vi kan använda induktionsmetoden för att bevisa detta genom
För $N = 1$, enligt triangelolikhet får vi $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$ och därmed är påståndet sant för bassteget.
Nästa steg är att anta att påståndet gäller för naturligt tal $N \geq 2$ det vill säga att

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} u_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{N} \|u_j\| ,$$

och vi vill visa att påstandet gäller även $N+1$ och kan vi använda triangelolikhet.
Sätt

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{N+1} u_j\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{N} u_j + u_{N+1}\right\|, \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \|u_j\| + \|u_{N+1}\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N+1} \|u_j\|.\end{aligned}$$

Beviset är därmed klart. □

Exempel 1.6. *Låt $u = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, där u_i tillhör X, så att u tillhör X^n.*

- Den euklidiska normen
$$\|u\| = \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2}.$$

- Vi kan också definiera maximumnormen i de
$$\|u\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |u_i|.$$

Definition 1.16. Ett linjärt rum X försett med en norm $||\cdot||$ kallas för ett normerat linjärt rum.

1.4 Banachrum

I detta avsnitt ska vi fokusera på ett konkret rum, kallas Banachrum, som har viktiga egenskaper som kan sammfattas på följande definition.

Definition 1.17. Ett normerat linjärt rum X som är fullständigt, betraktat som ett metriskt rum, kallas ett Banachrum.

Anmärkning 1.4. Om ett rum X uppfyller följande krav

1. Att rummet är försett med norm $||\cdot||$.

2. Att varje Cauchysföljd i X konvergerar.

Då X är ett Banachsrum.

Vi illustrear dock sådan egenskaper med ett par exempel.

Exempel 1.7. *Betrakta* $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ *en följd i* $X := \mathbb{K}^N$*, då* X *är ett Banachrum över* $\mathbb{K}$ *och utrustad med maximumnormen som defineras på följande sätt*

$$||x|| := |x|_\infty = \max_{1 \le j \le N} |\xi_j|.$$

Låt $x_n = \{\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{Nn}\}$, då gäller:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_{\kappa n} = \xi_\kappa, \forall \kappa = 1, \dots, N. \tag{1.5}$$

Det vill säga att $x_n \to x$ när $n \to \infty$ i X är ekivalent to konvergens av motsvarande komponenter.

Anmärkning 1.5. Den sista ekvationen (1.5) är motsvarande till

$$|\xi_{\kappa n} - \xi_\kappa| \le |x_n - x|_\infty = \max_{1 \le j \le N} |\xi_{jn} - \xi_j|,$$

På andra ord, om

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x|_\infty = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_{\kappa n} = \xi_\kappa,$$

och andra riktningen är också sant.

BEVIS. Nu vill vi bevisa exempel ovan, d.v.s att X är ett Banachrum över $\mathbb{K}$.
Vi inleder med att bevisa $|\cdot|_\infty$ är en norm och detta kan göras genom att verefiera:

1. $|\cdot|_\infty = 0$ det vill säga att $|\xi_j| = 0$ och detta är ju bara om $x = \xi_j = 0$ för alla j.

2. För $\alpha \in \mathbb{R}$ har vi

$$|\alpha x|_\infty = \max_{1 \le j \le N} |\alpha \cdot \xi_j| = |\alpha| \cdot \max_{1 \le j \le N} |\xi_j| = |\alpha| \cdot |x|_\infty.$$

3. Låt $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ och $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$ vara två element av $\mathbb{K}^N$ då gäller :

$$|x + y|_\infty = \max_{1 \le j \le N} |\xi_j + \eta_j|.$$

   Med hjälp av triangelolikhet få vi $|\xi_j + \eta_j| \le |\xi_j| + |\eta_j|$, för η_j och $\xi_j \in \mathbb{K}$.
   Det framgår direkt

$$\max_{1 \le j \le N} |\xi_j + \eta_j| \le \max_{1 \le j \le N} |\xi_j| + \max_{1 \le j \le N} |\eta_j|.$$

   Det gäller alltså att

$$|x + y|_\infty \le |x|_\infty + |y|_\infty.$$

Alltså är $|\cdot|_\infty$ en norm. Det enda kravet för X, som utrstat med normen $|\cdot|_\infty$, vara ett Banachrum är fullstandihet. Låt $x_n \in \mathbb{K}^N$ en Cauchyföljd och för alla $n, m \ge n_0(\varepsilon)$ gäller

$$|\xi_{\kappa n} - \xi_{\kappa m}| \le |x_n - x_m|_\infty < \varepsilon,$$

vilket leder att $\xi_{\kappa n}$ är en Cauchyföljd. Enligt definitionen av Banachrum är varje Cauchyföljd konvergent. Tillsammans med ekvation (1.5) kan detta skrivas :

$$\lim_{n\to\infty} \xi_{\kappa n} = \xi_\kappa.$$

Vilket ger $x_n \to x$ när $n \to \infty$.
För $n \in \mathbb{N}$ är $X := \mathbb{K}^N$ alltså ett Banachrum, där X försedd med normen $\|x\| := |x|_\infty$. $\square$

Exempel 1.8. *Låt $X := \mathbb{R}^N$ är också ett Banachrum som utrustad med den Euklidska normen $\|x\| := |x|$, för varje elment av X är $x = \xi_1, \ldots, \xi_N$:*

$$|x| := \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \xi_j^2}.$$

Dessutom gäller, för $k = 1, 2 \ldots,$ att

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_{kn} = \xi_k. \tag{1.6}$$

BEVIS. Först börjar vi med att verfiera att Euklidska normen $\|x\| := |x|$ uppfyller vilkorna av normen genom $|x| = 0$ om och endast om $\xi_j = x = 0$ för alla j. Med samma sättet som före exempel kan verifieras, för alla $x \in \mathbb{R}^N$ och $\alpha \in \mathbb{R}$, att $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$. Nu vill vi bevisa triangelolikhet för två element x och $y \in \mathbb{R}^N$,så att

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$ och $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N\}$, med $N = 1, 2 \ldots$. Då behövs detta följande lemma
Lemma 1.1. Schwarz olikhet

$$\Big(\sum_{j=1}^{N} \xi_j \eta_j\Big)^2 \leq \sum_{j=1}^{N} \xi_j^2 \sum_{j=1}^{N} \eta_j^2.$$

För alla reella tal ξ_j, η_j och $j = 1, 2, \ldots, N$ har vi

$$\begin{aligned}
|x + y|^2 &= \sum_{j=1}^{N} (\xi_j + \eta_j)^2 = \sum_{j=1}^{N} [(\xi_j)^2 + (\eta_j)^2 + 2\eta_j \xi_j], \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} \xi_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \eta_j^2 + 2\Big(\sum_{j=1}^{N} \xi_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=1}^{N} \eta_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \\
&= |x|^2 + |y|^2 + 2|y||x| = (|x| + |y|)^2.
\end{aligned}$$

Därmed är $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Vidare vill vi bevisa att följd (x_n) är en Cauchyföljd med avseende av normen $|\cdot|$. Det är uppenbart att ekvation (1.6) följs från (1.5) genom att använda följande olikhet

$$|x_n - x|_\infty \le |x_n - x| \le N|x_n - x|_\infty.$$

Enligt förra exempel får vi

$$|x_n - x|_\infty \le |x_n - x| < \varepsilon.$$

För varje $\varepsilon > 0$ och $n, m \le \eta_{(0)}(\varepsilon)$ gäller det att

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

, Alltså är (x_n) Cauchyföljd med avseende av normen $|\cdot|$. Från exempel 1.7 har vi redan för alla κ gäller att $\xi_{n\kappa} \to \xi_\kappa$, när $n \to \infty$ och vi får alltså

$$|x_n - x| \to 0 \text{ när } n \to \infty.$$

Slutresulat är alltså att $X \in \mathbb{R}^N$ är en Banachrum och beviset är klart. □

Nästa avsnitet kommer vi att introducera den som kallades Funktionsrummet.

1.5 Funktionsrummet C[a,b]

På ett generallt sätt kan man definiera en funktion från mängd M till en mängd N är en regel som till varje objekt i M på ett entydligt sätt ordnar ett objekt i N. I denna avsnitt ska i huvudsakligen studera funktionsrummet $C[a,b]$ eftersom sådana funktion är kontinuerliga funktioner på ett kompakt intervall $[a,b]$, dessutom antar sitt största värde resp minsta värde. Inledning att introducera funktionsrummet $C[a,b]$ är att mängden av kontinuerliga funktioner på $[a,b]$ som även har kontinuerlig derivata. Det är därför meningsfullt att formulera följande definition.

Definition 1.18. Det linjära funktionsrummet beteknas $C[a,b]$ är mängden av alla kontinuerliga funktioner $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ och $\infty < a < b < \infty$. Dessutom normen $||\cdot||$ defineras på följande sätt:

$$||u|| := \max_{a \le x \le b} |u(x)|. \tag{1.7}$$

På andra ord när $n \to \infty$ kommer följden $u_n \to u$, d.v.s att

$||u_n - u|| = \max_{a \le x \le b} |u_n(x) - u| \to o$ när $n \to \infty$ eller ekivalent, följden av kontinuerliga funktioner $u_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergerar punktvis mot den kontinuerligt funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Sats 1.4. *Funktionsrummet $C[a,b]$ med normen (1.7) är Banachrum.*

BEVIS. I första steget är det att visa $||\cdot||$ är en norm genom att verifiera normen egenskaper och börja med

1. Om $||u|| = 0$ då
$$\max_{a\leq x\leq b}|u(x)| = 0,$$
$$\Rightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow u = 0, \qquad \forall u \in [a,b].$$

2. Enligt funktionsrummets definition ovan, har vi för varje element $u \in X$ multiplikation med reel skalär α så att
$$||\alpha u|| = \max_{a\leq x\leq b}|\alpha||u(x)| = |\alpha| \max_{a\leq x\leq b}|u(x)|.$$

3. På samma sätt kan man verifiera att för varje element$u$ och $v \in X$ så att
$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Vilket leder att funktionsrummet $C[a,b]$ som utrustad med normen $||\cdot||$.

Följ vi samma annalogi på förgående exempel kan vi visa att varje Cauchyföljd u_n konvergeras i $X = C[a,b]$ mot ett element $u \in X$. Låt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vara Cauchyföljd i X. För ett givet positiv tal ε finns det alltså ett tal $n_0(\epsilon)$ sådana att för alla n och m så att
$$||u_n - u_m|| = \max_{a\leq x\leq b}|u_n(x) - u_m(x)| < \epsilon. \tag{1.8}$$

Då kan vi konstatera att funkionsföljd $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ som är
$$u_n : [a,b] \to \mathbb{R},$$
är kontinuerliga och punktvis konvergent mot den funktion u,
$$u : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Då kan vi skiva alltså för alla $x \in [a,b]$ så att
$$u_n(x) \to u(x), \quad n \to \infty. \tag{1.9}$$

Låt $m \to \infty$ i (1.8), vi får $u_m \to u$, d.v.s att
$$\lim_{m\to\infty}||u_n - u_m|| = ||u_n - u|| = \max_{a\leq x\leq b}|u_n(x) - u(x)| \to 0.$$

Vidare $m \to \infty$ kan vi får
$$\max_{a\leq x\leq b}|u_n(x) - u(x)| \leq \epsilon.$$

Alltså får vi konvergens i (1.9) är likformig konvergen på intervallet $[a,b]$. Då kan vi dra att funktionsgränsen u är kontinuerlig. Med andra ord få vi varje Cauchyföljd i $C[a,b]$ är konvergent.

Slutligen ger $C[a, b]$ ett Banachrum och beviset är klart. $\square$

Sats 1.5. *Om en Cauchyföljd har en konvergent delföljd, så är den själv konvergent.*

BEVIS. Låt $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vara en Cauchyföljd på ett normerade rum X över $\mathbb{K}$, låt också $\{u_{n'}\}_{n'\in\mathbb{N}} \in X$ vara delföljd av $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ som konvergeras mot $u \in X$, så att $u_{n'} \to u$, när $n' \to \infty$. Eftersom $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ är en Cauchyföljd så har vi att för varje $\varepsilon > 0$ så finns det ett $n_0(\varepsilon)$ sådant att

$$||u_n - u_m|| < \varepsilon \text{ för alla} \qquad n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Nu tittar vi på delföljden $\{u_{n'}\}_{n'\in\mathbb{N}}$, som konvergeras mot u och vi har vilket innebär att det existerar ett fixe index m sådana att

$$||u_m - u|| < \varepsilon \text{ med} \qquad m \geq n_0(\varepsilon).$$

Med hjälp av triangelolikhet kan skriva vi

$$\begin{aligned}
||u_n - u|| &= ||u_n + u_m - u_m - u|| \qquad n \geq n_0(\varepsilon), \\
&\leq ||u_n - u_m|| + ||u_m - u||, \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Viket leder till $u_n \to u$, när $n \to \infty$ och beviset är klart. $\square$

Följdsats 1.1. *Låt X är linjärt normerade rum över $\mathbb{K}$ och $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ och u är följd av X så att*

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||u_{j+1} - u|| < \infty.$$

Då är $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Cauchyföljd.

BEVIS. Antag för alla $\kappa = 1, 2 \ldots$ så att

$$||u_n - u_{n+\kappa}|| = ||\sum_{j=1}^{\infty}(u_{j+1} - u_j)||.$$

Med hjäp av triangelolikhet, kan det skrivs

$$||u_n - u_{n+\kappa}|| \leq \sum_{j=1}^{\infty} ||u_{j+1} - u_j||,$$

vi ser att

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ||u_{j+1} - u_j|| = 0.$$

Och beviset är klart. $\square$

1.6 Operatorer

Definition 1.19. Låt operator T defineras mellan två normerade rum M och S:

$$T : M \to S,$$

så att för varje punkt $u \in M$ bildar T en annat punkt $v \in S$ som uppfyller $T(u) = v$; och bildmängden kan skrivs

$$T(M) := \{v \in S : T(u) = v, \text{ för något } u \in M\}.$$

M och $T(M)$ kallas respktive för definitionsmängd och bildrum (eller bildmängd).

Definition 1.20. Låt M och S vara två linjära normerade rum och T är en operator så att

$$T : \qquad M \to S.$$

Då kallas opertor T för

- Surjektiv om dess bildmängd är hela S.
- Injektiv om olika punkter i definitionsmängd M har olika bilder ($T(u) = T(v) \Rightarrow u = v \in M$).
- Bijektiv om och endast om den är både surjektiv och injektiv.

Anmärkning 1.6. Om operatorn $T : M \to S$ är bijektiv, då existera en invers operator, beteckenas T^{-1}:

$$T^{-1} : S \to M,$$

så att för varje element $u \in M$, och $v \in S$ har vi

$$T^{-1}(v) = u \Longleftrightarrow T(u) = v.$$

En funktion vars definitionsmängd och värdemängd är funktionsrum kallas ofta för en operator (eller funktion). I nästa avsnitt kommer vi att introducera en av de vanligaste typerna av operatorer (funktioner mellan funktionsrum) som är integraloperator.

1.6.1 Integraloperator

Låt F vara en kontinuerlig funktion

$$F : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad med - \infty < a < b < \infty.$$

Låt T vara operator

$$(T(u))(x) := \int_0^x F(x, y, u(y))dy \qquad \forall x \in [a, b].$$

Då kan få

$$T : C[a, b] \to C[a, b],$$

Om

$$u : [a, b] \to \mathbb{R},$$

är en kontinuelig funktion då vi kan konstatera att $T(u) : [a, b] \to \mathbb{R}$ är också kontinuerlig, på andra ord om $u \in C[a, b]$ alltså följer att $T(u) \in C[a, b]$.
Operator T kallas för integraloperator.

1.6.2 Operator-fixpunkt

Definition 1.21. Låt $T : M \to Y$ vara en operator, om finns lösning(ar) $u \in M$ till ekvationen.

$$T(u) = u. \tag{1.10}$$

Då u kallas för fixpunkt(er) till T.

Kapitel 2

Banachs fixpunktssats

I detta kapitel presenterar vi den viktigaste delen: Banachs fixpunktssats. Satsen är uppkallad efter den polske matematikern Stefan Banach (1892 – 1945) som var en av skaparna av funktionalanalysen. Satsen publicerades och bevisades 1922.

2.1 Banachs fixpunktssats

Syftet med detta avsnitt är att undersöka lösningar $u_0 \in M$ till fixpunktsekvationen:

$$T(u) = u, \qquad u \in M. \tag{2.1}$$

För att lösa denna typ av ekvationer kommer vi att använda oss av en iterativ metod.

Något om iterativa metoder

Den typ av metod som oftast används för att lösa en ekvation av typen (2.1) är någon iterativ metod, vars princip är att utgå från en startgissning u_0 som genom ett rekursivt samband ger bättre och bättre approximationer till lösningen [5].
För $n = 0, 1, \ldots$ definieras den iterativa metoden genom sambandet:

$$u_{n+1} = T(u_n). \tag{2.2}$$

Vi är nu tillräckligt väl preparerade för att utvidga Banach fixpunktssats. Satsen samt bevis hänvisas till referens [1].

Banachs fixpunktssats

Låt M vara en icke-tom sluten mängd i ett Banachrum över $\mathbb{K}$
Låt $T : M \to M$ vara en operator och anta att det finns en kontraktionskonstant $0 \leq k < 1$ så

att:

$$||T(u) - T(v)|| \leq k||u - v||, \qquad \forall u, v \in M, \tag{2.3}$$

då gäller följande:

(i) Det finns en unik lösning till ekvationen(2.1)

(ii) För varje givet $u_0 \in M$ konvergerar u_n i ekvation (2.2) mot den unika lösningen u till ekvation (2.1).

(iii)
- Feluppskattning a priori

$$\|u_n - u\| \leq \frac{k^n}{(1-k)}\|u_1 - u\|, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{2.4}$$

- Feluppskattning a posteriori

$$\|u_{n+1} - u\| \leq \frac{k}{(1-k)}\|u_{n+1} - u_n\| \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{2.5}$$

(iv) Konvergenshastighet hos Fixpunktsiteration (FPI): För alla $n = 0, 1, \ldots$ gäller :

$$\|u_{n+1} - u\| \leq k\|u_n - u\| \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

Satsen ovan kallas också Kontraktionsprincipen.

Anmärkning 2.1.

- För feluppskattning a posteriori, används ekvation (2.5) med den beräknade värden av u_n och u_{n+1} för att bestämma noggrannheten av u_{n+1}
- För feluppskattning a priori (2.4) med känt ursprungligt värde u_0 så att $u_1 = T(u_0)$, och därefter med ett antal successiva iterationerför att få bättre approximationer.

2.2 Fullständigt bevis

Vi börjar med att bevisa (i) och (ii) i satsen som baseras på Egenskaperna hos Banachrum

. Beviset är uppdelat i följande steg

Steg 1: Bevisa att u_n är en Cauchy följd

Låt $n = 1, 2 \ldots$. Med hjälp av (2.2) får vi att

$$\begin{aligned}
||u_{n+1} - u_n|| &= ||Tu_n - Tu_{n-1}|| \leq k||u_n - u_{n-1}|| \\
&= k||Tu_{n-1} - Tu_{n-2}|| \leq k^2||u_{n-1} - u_{n-2}|| \\
&\leq \ldots \leq k^{n-1}||u_2 - u_1|| \leq k^n||u_0 - u_1||
\end{aligned}$$

och alltså att

$$||u_n - u_{n+1}|| \leq k^n ||u_1 - u_0||$$

med någon kontraktionskonstant k sådan att k,så att $0 \leq k < 1$.
Låt nu $n = 0, 1, 2 \ldots$ och $m = 1, 2 \ldots$ så att följden $u_n - u_{n+m}$ blir

$$u_n - u_{n+m} = u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+2} + \ldots - u_{n+m-1} + u_{n+m-1} + u_{n+m}$$

Då beräknar vi $\|u_n - u_{n+m}\|$ genom att utnyttja triangelolikheten så att

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_{n+m}\| &= \|(u_n - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_{n+2}) + \ldots (u_{n+m-1} - u_{n+m})\| \\
&\leq \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u_{n+2}\| + \ldots \|u_{n+m-1} - u_{n+m})\| \\
&\leq (k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \ldots + k^{n+m-1})\|u_1 - u_0\| \\
&\leq k^n(1 + k^1 + k^2 + \ldots + k^{m-1})\|u_1 - u_0\|
\end{aligned}$$

Vi har $0 \leq k < 1$, och för den geometriska summan ovan gäller olikheten

$$k^n(1 + k^1 + k^2 + \ldots + k^{m-1}) \leq \frac{k^n}{1-k}$$

Alltså får vi att

$$\|u_n - u_{n+m}\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\| \tag{2.7}$$

Då $\|u_n - u_{n+m}\| \to 0$ när $n \to \infty$ eftersom $k^n \to 0$ när $n \to \infty$, förklaring till detta att $0 \leq k < 1$. Vilket leder till att följden u_n är en Cauchyföljd. Eftersom X dessutom är ett Banachrum vet vi sedan tidigare att varje Cauchyföljd i X konvergerar mot ett element $u \in X$ och därmed $u_n \to u$ när $n \to \infty$. Därmed är första steget bevisat.

Steg 2: Bevisa att gränsvärdet u till följden u_n är en lösning till ekvation (2.1)

Vi vet redan att för alla element i den slutna mängden M tillsammans med en kontraktiv operator T gäller att

$$T(M) \subseteq M.$$

Nu vill vi bevisa att gränsvärdet $u \in M$ är lösning till ekvation $T(u) = u$ med hjälp av induktion:
Basfall: Från $u_0 \in M$ och $T(u_0) = u_1$, tillsammans med $T(M) \subseteq M$ får vi $u_1 \in M$.
Induktionssteg: Antag att påståendet gäller för $u_n \in M$ det vill säga att $u_n \to u$ när $n \to \infty$ och vidare vill vi visa att påståendet är sant för u_{n+1}. Eftersom tydligen

$$u_{n+1} = T(u_n),$$

$u_n \to u$ när $n \to \infty$ tillsammans med att följd $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ är kontinuerlig i den sluten mängden M. Följaktligen konvergerar u_{n+1} mot $T(u)$. Alltså får vi

$$T(u) = u$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \to u \text{ när } n \to \infty$$

I själva verket har vi alltså Cauchyföljd $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ som konvergerar mot gränsföljd $u \in M$, då kan vi skriva

$$\begin{aligned} \|T(u) - u\| &= \|T(u) - u_{n+1} + u_{n+1} - u\| \\ &\leq \|T(u) - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u\| \\ &\leq k\|u - u_n\| + \|u_{n+1} - u\| \end{aligned}$$

Eftersom $\|u - u_n\| \to 0$ när $n \to \infty$ och av samma skäll gäller även $u_{n+1} \to u$ när $n \to \infty$, vilket leder till $\|T(u) - u\| = 0$ och därmed $T(u) = u$, alltså är existensen av en fixpunkt verifierad.

Steg 3: Entydighet av fixpunkt u till ekvation (2.1)

Antag att det finns två olika u och $v \in M$, lösningarna till ekvation (2.1) så att $T(u) = v$ då gäller

$$\|u - v\| = \|T(u) - T(v)\| \leq k|u - v|$$

vilket leder till

$$\|u - v\| \leq k\|u - v\|.$$

Den sista olikhet har två möjligheter, den första att

$$\|u - v\| \neq 0$$

då kontraktionskonstant $k \leq 1$, vilket stämmer inte eftersom $k < 1$ och det leder att andra mölighet gäller, $\|u - v\| = 0$, det vill säga att $u = v$, och därmed unicetet och existens av fixpunkten är bevisat. Och både (i) och (ii) är alltså bevisat.

För del (iii) kan vi börja med att bevisa ekvation (2.4) Låt $n = 0, 1, 2 \ldots$, $m = 1, 2 \ldots$, då har vi $u_{n+m} \to u$ när $m \to \infty$, enligt ekvation (2.7) kan vi skriva

$$\begin{aligned} ||u_n - u_{n+m}|| &\leq \frac{k^n}{1-k}||u_1 - u_0|| \\ ||u_n - u|| &\leq \frac{k^n}{1-k}||u_1 - u_0|| \end{aligned}$$

Ekvation ovan är i sin tur ekvationen (2.4), eller som kallas i satsen Feluppskattning a priori.

För att beviset ekvationen (2.6), låt $n = 0, 1, 2 \ldots$, $m = 1, 2 \ldots$, och med hjälp av triangelolikhet då gäller

$$\begin{aligned} ||u_{n+1} - u_{n+m+1}|| &= ||(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) + \ldots + (u_{n+m} - u_{n+m+1})||, \\ &\leq ||u_{n+1} - u_{n+2}|| + ||u_{n+2} - u_{n+3}|| + \ldots + ||u_{n+m} - u_{n+m+1}||. \end{aligned}$$

Men varje termen förgående ekvationen kan skrivs

$$\begin{aligned}
||u_{n+1} - u_{n+2}|| &\leq k||u_n - u_{n+1}||, \\
||u_{n+1} - u_{n+2}|| &\leq k^2||u_n - u_{n+1}||, \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
||u_{n+m} - u_{n+m+1}|| &\leq k^m||u_{n+1} - u_n||.
\end{aligned}$$

Då blir

$$||u_{n+1} - u_{n+m+1}|| \leq (k + k^2 + \ldots + k^m)||u_{n+1} - u_n||$$

Låt nu $m \to \infty$ då $(k + k^2 + \ldots + k^m) \to \frac{k}{1-k}$, och vi får också att $u_{n+m+1} \to u$, då blir

$$||u_{n+1} - u|| \leq \frac{k}{1-k}||u_n - u_{n+1}||.$$

Och därmed feluppskattningar a postoersi är alltså bevisat. Den som är kvar att bevisa konvergenshastighet, det vill säga delen (vi) i satsen.
Låt den kontraktiv operator T med kontraktioskonstant $0 \leq k < 1$, T har en fixpunkt $u \in M$ så att för $n = 0, 1, \ldots$ gäller att

$$\begin{cases} T(u) = u \\ u_{n+1} = Tu_n \end{cases} \Rightarrow \|u_{n+1} - u\| = \|Tu_n - Tu\| \leq k\|u_n - u\|$$

Då sista ekvation ovan är i sin tur konvergenshastighet (2.6) i satsen. Och därmed bevisat är klart. □

Anmärkning 2.2. Feluppskattning a priori är en feluppskattning på förhand, d.v.s. uppskattning som endast utnyttjar informationer som finns tillgånglig innan iterationsprocessen påbörjas. Feluppskattning a posteriori är en feluppskattning i efterhand, d.v.s. uppskattning som utnyttjar information om resultat av iterationsprocessen. Det visar ofta att feluppskattning a posteriori har bättre resultat än feluppskattning a priori.

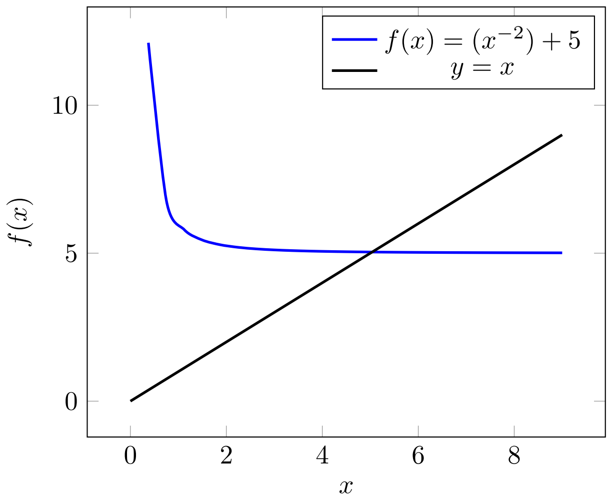
Anmärkning 2.3. Med hjälp av kontraktionsprincipen kan vi konstatera att ekvation (2.7) har en unik lösning som skärning mellan T-grafen och $y = x$, som figuren (2.1) visas.

Exempel 2.1. *Låt $\infty \leq a \leq b \leq \infty$, antag att F vara en givna deriverbar funktion i den sluten intervallet $[a, b]$*

$$F : [a, b] \to [a, b],$$

så att för givna k och för alla $u \in [a, b]$ gäller

$$|T'(u)| \leq k < 1$$



Figur 2.1: Skärning mellan $y = x$ och grafen $f(x) = x^{-2} + 5$

Enligt Banachs fixpunktsatsen ovan, följande fixpunktekvation $u = F(u)$ *har en unik lösning* $u \in [a, b]$

BEVIS. Vi ser att mängden M som är intervallet $[a, b]$ är sluten mängd i det Banachrum $\mathbb{R}$. Med hjälp av medelvärdessatsen kan vi konstatera att för $u, v \in [a, b]$ det finns ett $w \in [a, b]$ så att

$$|T(u) - T(v)| = |T'(w)(u - v)| \leq |T'(w)| \cdot |u - v|$$

Vidare är funktionen $T : [a, b] \to [a, b]$ kontraktiv med en kontraktionskonstant $k \geq |T'(w)|$ sådant att $0 \leq k < 1$, vilket leder att ekvation (2.7) har en unik lösning som är skärning mellan T-grafen och $y = x$ och beviset är klart. $\square$

Kapitel 3

Kontraktionsprincipen: Tillämpningar på differentialekvationer

I detta kapitel börjar vi med sambandet mellan den linjära integralsekvationen och differentialekvationen och syftet är att undersöka antalet lösningar till differential-ekvationen. Vidare kommer vi att introducera existens och entydighet till linjära ODE-lösningen med ett begynnelsevärdesproblem (IVP) genom generalisering av Picard-Lindelöf sats, som egentligen är en utvecling av Banachs fixpunktssats. Resultat och beviset av existens och entydighet bygger på Picarads metod. Metoden vi skall använda baseras på en successiv iteration. (för detta avsnitt hänvisas till [2]).

3.1 Sambandet mellan differential-integralekvation

Dynamiska system är matematiska modeller som beskriver förändring. Förändringen som sker kontinuerligt leder ofta till differentialekvationer. Differentialekvationerna beskrivs ofta med begynnelsvärdesproblem, som alltså är att hitta en lösning till en ordinär differentialekvation som har ett givet värde och som kallas begynnelsevärde, för en given punkt i systemets definitionsmängd. Integralekvationer är ekvationer som innehåller integraler med någon variabel gräns. Sådana är ekvivalenta med en differentialekvation och ett startvillkor det vill säga ett begynnelsevärde. Det leder ofta att i de flesta fall kan man även skriva om differentialekvationer som integralekvationer och vice versa. Idén bakom denna typ av transformation är att integralekvationer är lättare att hantera.

Exempel 3.1. *Låt följande integralekvation*

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{y(t)}{1+t} dt \tag{3.1}$$

vara given.

Både högerled och vänsterled i ekvationen ovan är lika eftersom deras derivator är lika och båda har lika värde i punkten $(0, 1)$, vi ser att båda kontinuerliga och partiellt deriverbara i intervallet $[0, +\infty[$. Nu kan vi derivera både högerled och vänsterled och få en differentialekvation som skrivs på följande sätt:

$$y'(x) = \frac{y(x)}{1+x}; \qquad y(0) = 1. \tag{3.2}$$

Ekvationen ovan är en exempel av en differentialekvation med begynnelsevärdesproblem (IVP).

Mer generell form kan ställa krav på functionen $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ i ett allmänt IVP på formen

$$\begin{aligned} u' &= F(x, u), \qquad x_0 - h \leq x \leq x_0 + h \\ u_0 &= u(x_0), \end{aligned}$$

så att vi kan garantera entydighet av lösningen till problemet.

3.1.1 Differentialekvationen som integralekvation

I många komplicerade och besvärliga situationer, såväl teoretiska som praktiska, är det enklare att arbeta med integraler än med derivator. I detta avsnitt vill vi lösa följande differentialekvationer med begynnelsvärdesproblem (IVP):

$$\tfrac{\partial u}{\partial x} = F(x, u),$$

$$u(x_0) = u_0, \text{ så att } (x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ är given.}$$

Vi börjar med integrera från x_0 till x i höger- och vänsterled och då får vi:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x F(y, u(y)) dy$$

Till slut får vi följande integralekvation

$$\begin{cases} u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x F(y, u(y)) dy, \\ \\ u_0(x) \equiv u_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

För att lösa denna ekvation behöver vi ytteligare Picard-iterationen som kommer att introduceras i nästa avsnitt (som hänvisa till ref.[5]).

3.1.2 Picard-Iteration på integralekevationen

Algoritm av Picard-iteration baseras på den successiva approximationen av $u(x)$ så att

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + \int_{x_0}^{x} f(y, u(y))dy \\ u_n(x) &= u_0 + \int_{x_0}^{x} f(y, u_{n-1}(y))dy \\ u_{n+1}(x) &= u_0 + \int_{x_0}^{x} f(y, u_n(y))dy, \end{aligned}$$

Upprepas detta blir resultatet en funktionsföljd $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ som approximerar en lösning. Denna erhålles i så fall som gränsvärdet

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

vilket leder till $u_n(x) \approx u(x)$.

Exempel 3.2.

Betrakta följande differentialekvation med begynnelsevärdesproblem:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = u'(x) = u, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Med hjälp av Picards iterationsmetod blir

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx &= \int_0^x u(x)dx, \\ u(x) - u(0) &= \int_0^x u(x)dx. \end{aligned}$$

Låt $u_0 = 1$, vi kan då beräkna $u_1(x), u_2(x)$ och $u_3(x)$ som

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= 1 + \int_0^x u_0 dx = 1 + \int_0^x 1.dx = 1 + x \\
u_2(x) &= 1 + \int_0^x u_1(x)dx = 1 + \int_0^x (1+x)dx = 1 + x + (x^2/2) \\
u_3(x) &= 1 + \int_0^x u_2(x)dx = 1 + x + \frac{1}{2}.x^2 + \frac{1}{6}.x^3 \\
\vdots \quad & \vdots
\end{aligned}$$

Vidare är

$$u_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}.x^2 + \frac{1}{3!}.x^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}.x^{n-1} + \frac{1}{n!}.x^n.$$

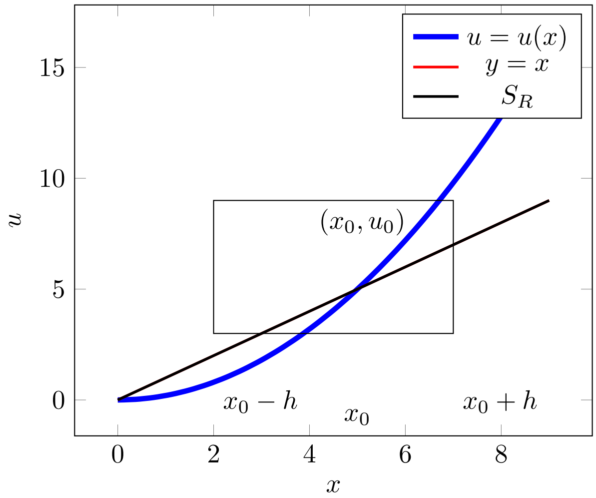
Därmed visar att följd u_u konvergera mot

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

när $n \to \infty$ och således

$$u_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}.x^2 + \frac{1}{3!}.x^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}.x^{n-1} + \frac{1}{n!}.x^n = e^x.$$

Och därmed $u(x) = e^x$ är lösning till differentialekvation med IVP ovan. Men det kan vara mer en lösning. Då behöver vi introducera nästa existens- och entydighetssats, även kallad Picard-Lindelöfs sats. Satsen och beviset kommer från referens [1].



Figur 3.1: skärning mellan $y = x$ och $u(x)$

3.2 Tillämpningar av Banachs fixpunktssats: Picard-Lindelöfs sats

I detta avsnitt ska vi introducera en av de viktigaste tillämpningarna av Banachs fixpunktssats på differentialekvationer genom den välkända sats vid namn Picard-Lindelöfs sats. Satsen har uppkallats efter den franske matematikern Emile Picard $(1856 - 1941)$ och den finländske matematikern Ernst Lindelöf $(1870 - 1946)$. Nu vill vi lösa följande differentialekvationer med begynnelsvärdesproblem:

$$\begin{cases} u'(x) = F(x, u) & x \in [x_0 - h, x_0 + h], h \in \mathbb{R} \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

där $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ är en given punkt. Det vill säga att vi vill hitta en lösning till $u = u(x)$ till ekvation (3.3) ovan, med att funktionen u är kontinuerlig och deriverbar, sådan att

$$u : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

$(x, u(x)) \in S$, för alla $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.
Enligt figuren 2.1 är arean:

$$S := \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq r, \}, \text{ för givet reellt tal } r > 0.$$

Vidare sätter vi $X := C[x_0 - h, x_0 + h]$, och $\quad M := \{u \in X : |u - u_0| \leq r\}$.
Eftersom X är en funktionsrum då kan vi skriva

$$||u|| := \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|.$$

På samma sätt som i förra avsnittet, iterationmetod tillämpad på integralekvation, får vi följande integralekvationer:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F(y, u(y))dy, \quad x_0 - h \leq x \leq x_0 + h, \quad och \quad u \in M, \tag{3.6}$$

$$u_{n+1}(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F(y, u_n(y))dy \quad x_0 - h \leq x \leq x_0 + h, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.7}$$

med $u_0(x) = u_0$.

Sats 3.1. ***(Picard-Lindelöfs sats)*** *Om följande gäller:*

1. *$F(x, u)$ är en kontinuerlig funktion med*

$$F : \quad S \to \mathbb{R}$$

$$och \quad S := \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq r\},$$

samt vars partialderivata$F_u$också är kontinuerlig. F_u är också är kontinuerlig :

$$F_u : \quad S \to \mathbb{R}.$$

2. *Dessutom F och F_u är begänsad på strimlan S, Då kan vi definiera*

$$\begin{cases} \mathscr{M} := max_{(x,u) \in S} |F(x, u)|, \\ \mathscr{L} := max_{(x,u) \in S} |F_u(x, u)|. \end{cases}$$

Sätt talet $h \in \mathbb{R}$ så att $0 \leq h \leq r$ och $h\mathscr{M} \leq r$ samt $h\mathscr{L} < 1$

Då gäller följande påståenden:

(i) Ekvation (3.4) har en enda lösning u på formen (3.5).

(ii) u är också en enda lösning till integralekvation (3.6).

(iii) Följden u_n som defineras i (3.7) konvergerar mot u i ett Banachrum X.

(iv) För $k := h\mathscr{L}$ och $n = 0, 1 \ldots$ gäller följande feluppskattning:

- *Feluppskattning a priori*

$$\|u_n - u\| \leq \frac{k^n}{(1-k)}\|u_1 - u\|, \quad k = h \cdot \mathscr{L} \tag{3.8}$$

- *Feluppskattning a posteriori*

$$\|u_{n+1} - u\| \leq \frac{k}{(1-k)}\|u_{n+1} - u_n\|, \quad k = h \cdot \mathscr{L} \tag{3.9}$$

BEVIS. För alla $x \in S = [x_0 - h, x_0 + h]$, definierar vi integraloperatorn

$$T : M \to X$$
$$(Tu)(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(y, u(y))dy.$$

Då integralsekvationen (3.6) är lösning till opertorns fixpunkt, d.v.s att

$$Tu = u, \text{ med } u \in M.$$

Om u är ett element av M då det är lämpligt att sätta den kontinuerliga funktionen

$$u : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}$$

dessutom $(x, u(x)) \in S$, för alla $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, motsvarigheten till funktionen

$$x \mapsto F(x, u(x)),$$

som i sin tur är kontinuerlig och i intervallet $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, som tydligen betyder att funktionen

$$Tu : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}$$

också är kontinuerlig. På det sätt kan vi få integraloperatorn med ett bildrum med det linjärt normerade rummet X och definitionsmängden M och skrivs:

$$T : M \to X.$$

För att applicera Banachs fixpunktssats behöver vi verifiera följande egenskaper hos integraloperatorn T:

1. $T(M) \subseteq M$.
2. För alla $u, v \in M$gäller att $||T(u) - T(v)|| \leq k|u - v|$.

Låt $u \in M$ och då blir

$$||T(u) - u_0|| = \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0 + h} \Big| \int_{x_0}^{x} F(y, u(y))dy \Big| \leq r.$$

Alltså gäller för alla $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$:

$$\begin{aligned} \Big| \int_{x_0}^{x} F(y, u(y))dy \Big| &\leq |x - x_0| \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0 + h} |F(y, u)| \\ &\leq h\mathscr{M} \leq r. \end{aligned}$$

Då blir slutresultatet att $T(u) \in M$ och därmed är $T(M) \subseteq M$ verifierad.
Vi har både att F och dess partiella derivata F_u är kontinuerliga. F_u är också deriverbar på intervallet, alltså kan vi skriva

$$|F_u(x, u)| \leq \max_{(x,u) \in S} |F_u(x, u)| = \mathscr{L},$$

dessutom är F kontinuerlig och dess partiellderivatF_u är också deriverbar på intervallet, då gäller medelvärdessatsen och det leder till

$$||T(u) - T(v)|| = \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0 + h} \Big| \int_{x_0}^{x} F(y, u(y))dy - F(y, v(y))dy \Big|,$$

för alla $(x, u), (x, v) \in S$, när $(x, w) \in S$

$$|F(x, u) - F(x, v)| = |F_u(x, w)||u - v| \leq \mathscr{L},$$

och för alla $u, v \in M$ gäller alltså

$$\begin{aligned} ||T(u) - T(v)|| &= \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0 + h} \Big| \int_{x_0}^{x} F(y, u(y))dy - F(y, v(y))dy \Big|, \\ &\leq h\mathscr{L} \max_{x_0 - h \leq x \leq x_0 + h} \big| u(y) - v(y) \big| = k \cdot ||u - v||, \end{aligned}$$

med $k = h\mathscr{L}$.
Nu ser vi att T är en kontraktionsavbildning med konstanten $0 \leq k < 1$ och det innebär att vi kan nyttja Banachs fixpunktssats och då har integralekvationen (3.6) en unik lösning u. Med hjälp av sambandet mellan integral och differentialekvationer blir också funktionen u en lösning till både begynnelsevärdesproblemet (3.6) och (3.7), som egentligen är ekvivalenta och har samma lösning enligt satsen. För feluppskattning följer beviset samma analogi som i kontraktionsprincipen. Därmed är beviset av Picard-Lindelöfs sats klart. □

Följande exempel som hänvisas till ref.[3], är i detta avseende en typisk användning av Picards-Lindelöfs satsen.

Exempel 3.3. *Betrakta*

$$\begin{cases} y'(x) = F(x,y) = x - y \\ \\ y(0) = u_0 = 1 \end{cases}$$

Då kan vi skriva differentialekavtion som integralekvation:

$$u_1(x) - u_0(x) = \int_0^x (t-1)dt \Rightarrow u_1(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

Vidare vill vi applicera Picard-iteration så att

$$u_{n+1} = 1 + \int_0^x f(t, u_n(t))dt.$$

På att sätt att $u_n(x) \to y(x)$ *när* $n \to \infty$
Då kan vi beräkna de första fyra iterationerna:

$$\begin{aligned} u_2(x) &= 1 + \int_0^x (t - u_1(t))dt = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} \\ u_3(x) &= 1 + \int_0^x (t - u_2(t))dt = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} \\ u_4(x) &= 1 + \int_0^x (t - u_3(t))dt = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Med hjälp av Taylorutveckling kan vi konstatera att $u_n(x) \to 1 - x + 2e^{-x}$ *när* $n \to \infty$.
och alltså $y(x) = 1 - x + 2e^{-x}$ *är kontinuerlig funktion överallt och även* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -1 - 2e^{-x}$ *är kontinuerlig i hela* $\mathbb{R}$ *och därmed blir* $y(x) = 1 - x + 2e^{-x}$ *är den enda lösning till vårt IVP ovan.*

Exempel 3.4. *Betrakta*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}} \\ \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Vi ser att funktionen

$$f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}}$$

är kontinuerlig i hela definitionsmängden, d.v.s. för alla $y \geq 1$. *Men vars partiallla derivata*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y^{\frac{-1}{3}},$$

är diskontinuerlig i $y = 0$. *I detta fall kan vi inte applicera Picard-Lindelöf sats och antalet lösningar är ej bestämda med hjälp av Picard-Lindelöfs sats.*

Referenser

[1] Edberhard Zeider. *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics.* Springer Publication Inc 2009.

[2] Stefan Banach. *Theory of linear operation.* Dover Publication Inc 2009.

[3] Endre Süli och David Mayers. *An introduction to Numerical Analysis.* London Publication Inc 2006.

[4] E.A.Coddington/R.Carlson. *Linear Ordinary Differential Equations.* Siwal Publication Inc 1951.

[5] Persson/Böiers *Analys i en variabel* Studentlitteratur AB Lund, Publication Inc 2010.