



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Sfärisk trigonometri och dess utveckling

av

Joar Ankarstrand

2019 - No K39

Sfärisk trigonometri och dess utveckling

Joar Ankarstrand

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Paul Vaderlind

2019

Abstrakt

I dagens matematik är det plantrigonometrin som står över sin sfäriska motsvarenhet. Men detta har inte alltid varit fallet, fram till mitten av 1900-talet var det istället den sfäriska trigonometrin som dominerade klassrummen. Den här uppsatsen kommer behandla den idag nästan bortglömda sfäriska trigonometrin. Vi ska gå igenom dess uppkomst och utveckling från antiken Grekland fram till nutid. Vi kommer dessutom diskutera några av dess tillämpningar inom astronomi och navigation.

Innehåll

Inledning.....	3
Nödvändiga definitioner.....	3
Sfären	3
Storcirkel.....	3
Trianglar på sfären.....	4
Avstånd på sfären	5
Kort om det geografiska koordinatsystemet.....	5
Antiken	6
Menelaos sats.....	6
Medeltiden	12
Satsen om de fyra kvantiteterna	12
Den sfäriska sinussatsen.....	13
Tillämpning av "Satsen om de fyra kvantiteterna"	15
Modern tid.....	17
Den rätvinkliga sfäriska triangelns identiteter	18
Navigeringsproblem	22
Napiers logaritmer	23
Trubbvinkliga och snedvinkliga trianglar.....	24
Den sfäriska cosinussatsen.....	25
Tillämpning av cosinussatsen	26
Delambres och Napiers analogier	30
Tillämpning av Napiers analogier	34
Slutsammanfattning	35
Referenslista.....	37

Inledning

Om man tittar i en av matematikböckerna som dagens elever studerar finner man inte ens en nämning av sfärisk trigonometri, detta har dock inte alltid varit fallet. Den sfäriska trigonometrin har genom tiden setts som storebror till plantrigonometrin som dagens elever får lära sig. Den kom fram som ett verktyg för att lokalisera stjärnor och himlakroppar på himmelen, och var levebrödet åt otaliga sjömän som navigerade på öppet vatten. Faktum är att så nära i tiden som 1950-talet var det en stor del av skolundervisningen. Men däromkring blev den gradvis allt mindre populär och var oftast bara med som den sista sektionen i textböcker som främst behandlade plantrigonometri. Varför detta skifte skedde skulle mycket väl kunna vara ett uppsatsämne i sig självt men vi ska inte intressera oss så mycket om varför. Det vi ska göra i denna uppsats är att undersöka och upptäcka den sfäriska trigonometrin igen, från dess födelse i antikens Grekland genom den islamiska guldåldern och slutligen dagens sfäriska trigonometri med uppkomst i Skottland. Vi ska också intressera oss en del av olika tillämpningar inom den sfäriska trigonometrin, med dess historia kommer dessa handla om astronomi och navigation.

Nödvändiga definitioner

Sfären

Innan vi börjar med själva trigonometrin måste vi dock göra en del definitioner och vi börjar som sig bör med sfären i sig. En sfär är ett perfekt runt geometriskt objekt i $\mathbb{R}^3$. Likt cirkeln i $\mathbb{R}^2$ är en sfär mängden av punkter i rummet $\mathbb{R}^3$ som alla har samma avstånd r från centrumet, detta r kallar vi för radien. För att underlätta räkningarna senare kommer vi också sätta vår sfärs radie till $r = 1$. Vår sfär definierar vi således som:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid d((x, y, z), 0) = 1\}$$

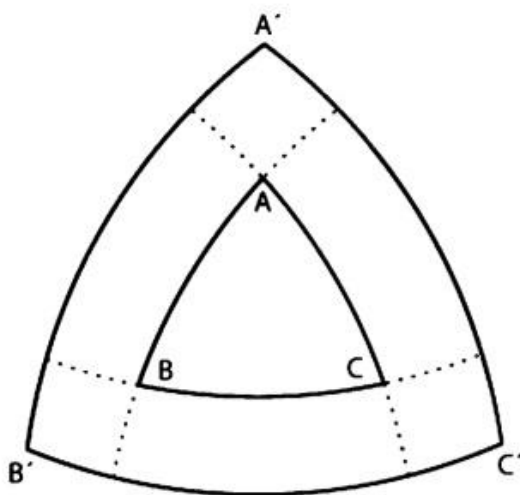
Storcirkel

På en sfär finns det uppenbarligen inga räta linjer i den mening som gäller för plangeometri, den sfäriska geometrin är nämligen ett exempel på en icke-euklidisk geometri. Men vi vill gärna ha ett substitut för räta linjer på sfären. Detta hittar vi i storcirkarna, dessa cirklar definieras som ett snitt mellan sfären och ett plan som går igenom sfärens centrum. Alla storcirklar har således samma centrum och omkrets. En viktig egenskap för storcirklar är att det är via dessa vi får den kortaste vägen mellan två punkter på ytan av sfären. När vi sammanbinder två punkter med en storcirkel får vi två olika långa cirkelbågar, en längre och en kortare, den kortare av dessa är då den kortaste vägen mellan våra två punkter på sfären.

Om vi istället skulle ha två antipodala punkter, med andra ord exakt motsatta varandra, får vi två cirkelbågar som är lika långa. Dessutom så finns det oändligt många storcirklar som sammanbinder punkterna. En annan egenskap vi ska nämna är att varje par av storcirklar skär varandra i exakt två punkter.

Trianglar på sfären

Det finns två olika sorters trianglar på sfären som vi kommer intressera oss av. Den första av dessa, den sfäriska triangeln, är en figur som formas på sfären av tre storcirkelbågar som korsar varandra i tre punkter. Den andra, den polära triangeln, är associerad med en sfärisk triangel på följande sätt: För den sfäriska triangeln ABC betrakta storcirkeln som innehåller sträckan BC . Denna storcirkel ligger i ett plan som går genom sfärens mittpunkt. Normalen till detta plan i mittpunkten kommer att skära ytan på sfären i två punkter, vi väljer den punkt på samma sida som punkten A . Denna punkt kallas för polen av A och noteras som A' . Punkterna B' och C' definieras på samma sätt. Hörnen i den polära triangeln $A'B'C'$ är alltså polerna till de motsatta sidorna i ABC .

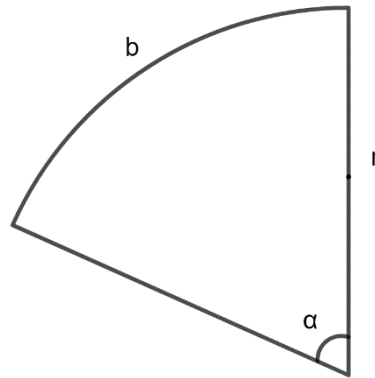


Figur 1

Om det skulle vara så att två av våra punkter är antipodala får vi direkt problem. Eftersom vår sfäriska triangelns sidor är storcirklar så spelar det ingen roll var vi sätter vår tredje punkt, de kommer nämligen alla tre hamna på samma storcirkel och vi får ingen triangel alls.

Avstånd på sfären

Om punkterna A och B är två icke-antipodala punkter på sfären är det kortaste avståndet mellan dessa längden på den kortare av storcirkelbågarna som sammanhänger dem. Eftersom storcirkeln ligger i ett plan kan vi använda figuren nedan som visar en cirkelsektor i planet. Längden av en cirkelbåge får vi från att dividera medelpunktsvinkeln med 2π och



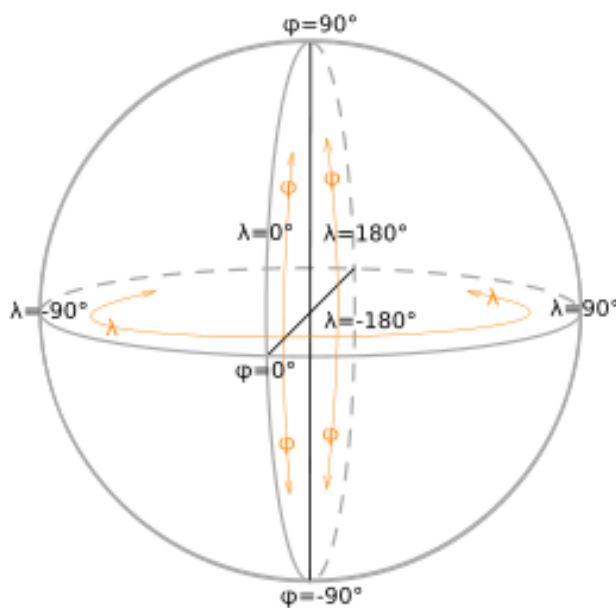
Figur 2

multipluera detta med cirkelns omkrets. Det vi gör då är att vi först räknar ut andelen av hela omkretsen för att sedan multiplicera detta med den faktiska omkretsen. Ur detta får vi $b = \frac{\alpha}{2\pi} 2\pi r = \alpha r$, och eftersom vår sfärs radie är 1 så är avståndet mellan två punkter på sfären lika med vinkeln mellan punkterna vid sfärens centrum.

Kort om det geografiska koordinatsystemet

Då våra tillämpningsexempel bygger på navigering måste vi kort gå igenom koordinatsystemet som används världen över. En position på jordytan beskrivs av två vinklar i mittenpunkten av jorden. För detta förutsätter vi att jorden är klotformad. Dessa vinklar mäts vanligtvis i grader, minuter och sekunder beroende på hur noggrann man vill vara, vi kommer dock använda oss av decimaler. Latituden är vinkeln som uppmäts mellan den befintliga positionen och ekvatorn. Latituden har värden från 0° vid ekvatorn till 90° vid polerna. För att beteckna vilket halvklot vi befinner oss på används N och S som norr respektive syd. Longituden är vinkeln som uppmäts mellan positionen och nollmeridianen som passerar genom Greenwich i sydöstra London. Dessa vinklar går från 0° till 180° åt både väst och öst

med beteckningarna W och E. I bilden nedan illustreras latituden med φ och longituden med λ .



Figur 3

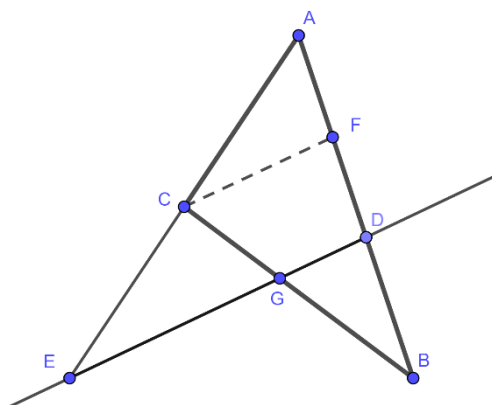
Antiken

Vi ska börja vår resa genom den sfäriska trigonometrin två århundraden efter trigonometrins födelse. Fadern till trigonometrin, Hipparchus av Rhodos, kommer vi inte prata mycket om av den enkla anledningen att vi inte vet mycket om honom. Vi vet att han föddes omkring 190 f.Kr i Nicea (idag, nordvästra Turkiet) och att han var en framstående matematiker och astronom. Om hans faktiska arbete vet vi dock väldigt lite, det vi vet kommer från referenser från andra verk. Ett av dessa var Klaudios Ptolemaios (2:a århundradet) som beskriver somliga av Hipparchus bedrifter i sitt storslagna verk *Almagest*.

Menelaos sats

Just *Almagest* kan vi tacka för det mesta av vår kunskap om den forntida grekiska astronomin. Något som vi kommer se igen nu när vi går vidare till Menelaos av Alexandria. Precis som med Hipparchus så vet vi väldigt lite om Menelaos, det vi vet är att han troligtvis levde i Rom sent under det första århundradet e.Kr. Än en gång så har vi Ptolemaios *Almagest* att tacka för detta då han skriver om några observationer som Menelaos gjorde där. Mycket av Menelaos skrifter har gått förlorade men som tur är inte den som berör oss. Menelaos *Sphaerica* ändrade helt synen på den matematiska sfären genom att faktiskt kunna beräkna längder. Menelaos var inte den första som skrev om sfärens geometri, flera böcker om ämnet fanns redan den mest

kända av Euklides själv (*Phaenomena*). Men ingen av de tidigare böckerna kunde beräkna längder på sfären av den enkla anledningen att trigonometrin inte var uppfunnen än, Menelaos ändrade på allt detta i *Sphaerica*. *Sphaerica* består av tre böcker men vi ska bara behandla den sista av dessa där han introducerar vad vi idag kallar för Menelaos sats. Vi ska börja med att titta på Menelaos sats i planet innan vi tillämpar den på sfären. Menelaos uttrycker satsen som följer: “If the three sides of a triangle are crossed by a straight line (one of the sides is extended beyond its vertices), then the product of three of the nonadjacent line segments thus formed is equal to the product of three other line segments.” (Encyclopædia Britannica).



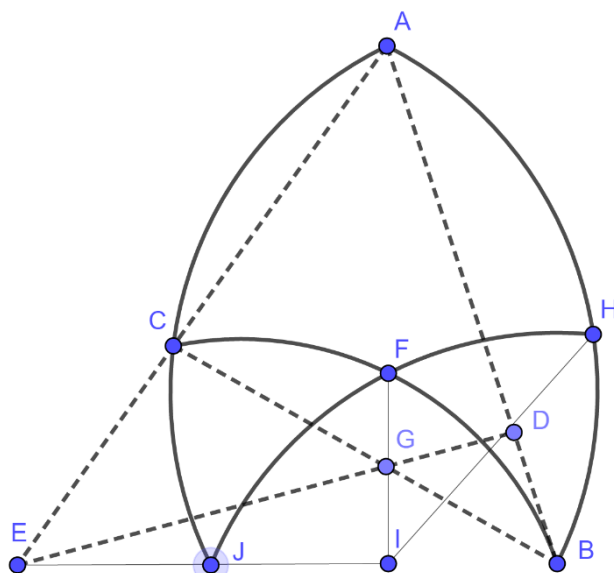
Figur 4

Med dagens algebra kan vi skriva detta som $CE \cdot AD \cdot BG = AE \cdot BD \cdot CG$. Vi kommer dock behandla satsen på formen $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CG}{GB}$. För att bevisa satsen har vi dragit en linje CF parallell med EGD, då är $\triangle FAC \sim \triangle DAE$ och $\triangle CBF \sim \triangle GBD$. Vilket ger oss att

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AD}{FD} \cdot \frac{FD}{DB} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CG}{GB}.$$

Vi ska nu använda Menelaos sats i planet för att bevisa satsen för sfären, detta kommer ske i flera steg så vi ska börja med figur 5. I figuren känner vi igen den tidigare konfigurationen i de streckade linjerna med triangeln ABC och den raka linjen ED som korsar triangeln. Denna ligger nu inuti en sfär med punkten I som sfärens centrum. De heldragna kurvorna är cirkelbågar på sfären, Vi ska också lägga märke till att punkten D ligger i sfären medans punkten E ligger utanför. En sista observation vi ska göra är att bågen $\widehat{AHB}$ är 90° , detta då Menelaos behövde två fixa punkter på den himmelska sfären. Som vi kommer se senare gör denna konfiguration många av räkningarna väsentligt enklare. Tillbaks till figuren nu så kan

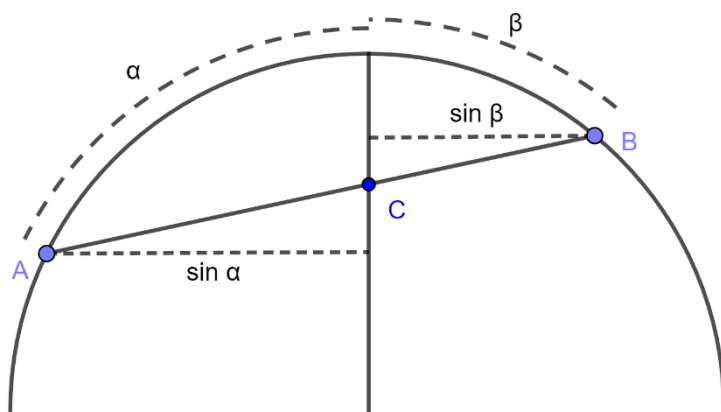
den uppmärksamme nu se att de streckade linjerna verkar motsvara cirkelbågarna, vilket är precis det vi vill åt. Alltså motsvarar linjen ADB bågen $\widehat{AHB}$, ACE motsvaras av $\widehat{ACJ}$ och CGB motsvaras av $\widehat{CFB}$.



Figur 5

Vi har nu tre cirkelbågar men dessa är inte alla lika. För både $\widehat{AHB}$ och $\widehat{CFB}$ är de motsvarande linjerna kordor i sfären medans för $\widehat{ACJ}$ så är kordan delvis inuti sfären och delvis utanför. Vi kommer lösa båda dessa problem på samma sätt, med ett tvärsnitt. Detta leder oss till vårt första lemma, för kordorna inuti sfären.

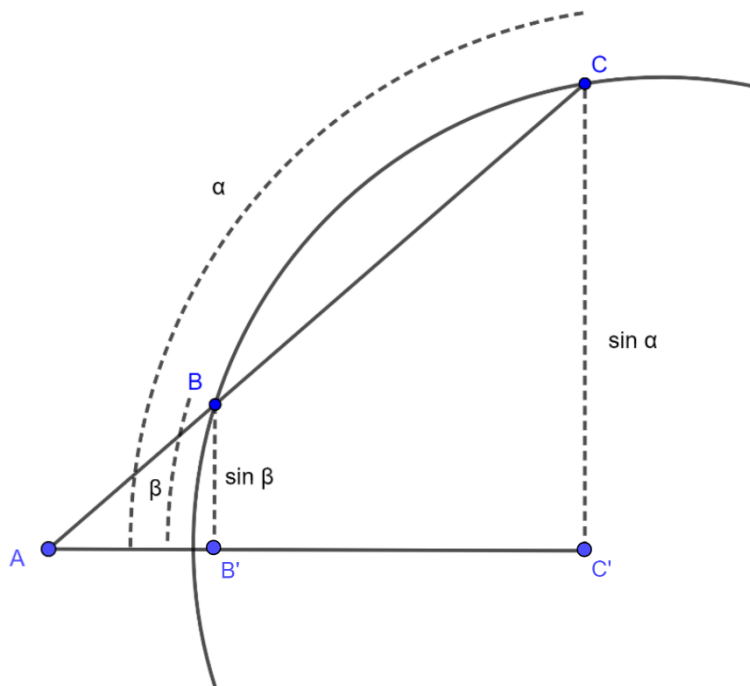
Lemma A: I figur 6 gäller: $\frac{AC}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$



Figur 6

Bevis: Projicera A och B vinkelrätt på den vertikala diametern. De två streckade linjerna har längderna $\sin \alpha$ respektive $\sin \beta$, eftersom cirkeln har radien 1. De två trianglarna är dessutom likformiga eftersom motsvarande vinklar är lika stora så förhållandet håller.

I vårt andra fall då kordan är delvis utanför sfären ser tvärsnittet ut som följande:



Figur 7

Lemma B: I figuren ovanför gäller: $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

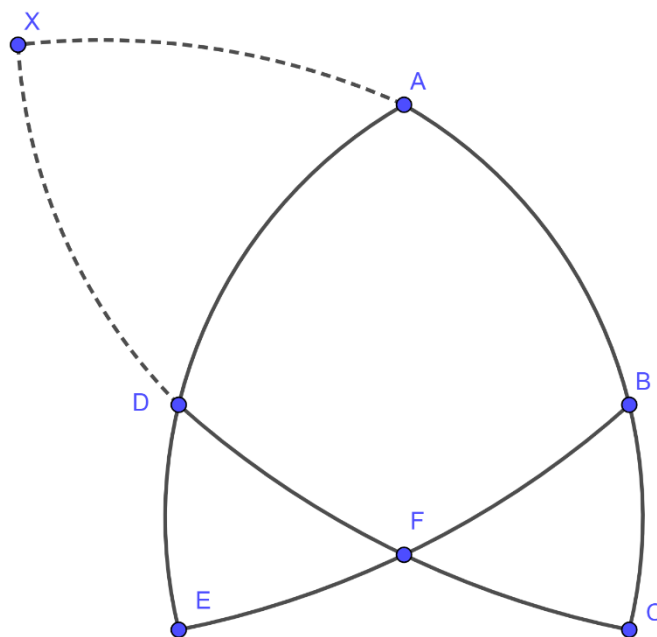
Bevis: Projicera B och C vinkelrätt mot den horisontella diametern. Lemmat följer direkt av att de två vinkelräta trianglarna ABB' och ACC' är likformiga, igen på grund av att motsvarande vinklar är lika stora.

Det är nu äntligen dags för Menelaos sats. Lemma A och B har visat att varje förhållande i Menelaos sats i planet kan ersättas med sinus av respektive båge, vi drar slutsatsen att:

Menelaos sats A: $\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{CB}} = \frac{\sin \widehat{AE}}{\sin \widehat{ED}} \cdot \frac{\sin \widehat{DF}}{\sin \widehat{FC}}.$

Då vi har kallat satsen för sats A är det logiskt att tänka att det borde finnas en sats B, vilket det också gör. Ptolemaios definierar och använder en andra sats i *Almagest*, han bevisar den

dock inte och det gör oss veterligen inte Menelaos heller. Vi ska däremot göra det, och vi ska använda oss av den första satsen. Just detta bevis kommer från Thābit ibn Qurra, en arabisk



Figur 8

matematiker och astronom som levde och arbetade under andra halvan har 800-talet.

Vi känner igen samma konfiguration som tidigare, men vi har förlängt $\widehat{CA}$ och $\widehat{CD}$ för att ge oss två halvcirklar. C och X är således rakt motsatta varandra på sfären. Detta ger oss två konfigurationer, EDABCF och XABFED. Om vi nu använder sats A på XABFED får vi

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{AX}} = \frac{\sin \widehat{EB}}{\sin \widehat{EF}} \cdot \frac{\sin \widehat{DF}}{\sin \widehat{DX}}.$$

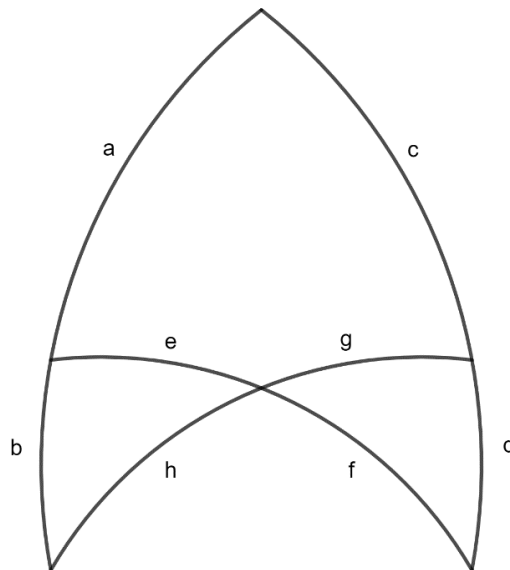
Men då $\widehat{CBAX}$ är en halvcirkel får vi, $\sin \widehat{AX} = \sin(180^\circ - \widehat{AC}) = \sin \widehat{AC}$. På samma sätt får vi att $\sin \widehat{CD} = \sin \widehat{DX}$. Med substitution och en del omflyttningar slutar vi i:

Menelaos sats B:
$$\frac{\sin \widehat{AC}}{\sin \widehat{AB}} = \frac{\sin \widehat{CD}}{\sin \widehat{DF}} \cdot \frac{\sin \widehat{EF}}{\sin \widehat{EB}}.$$

Dessa två satser har haft flera olika namn, ”*Regula sex quantitates*” eller ”*Satsen om de sex kvantiteterna*” är ett namn som förklarar sig själv, i den arabiska världen har den kallats för sektorfiguren eller transversalfiguren. De är också kända som ”*disjunction*” och ”*conjunction*”, för att illustrera varför ska vi simplificera formen de är angivna på (figur)

Disjunction: $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin(c+d)}{\sin d} \cdot \frac{\sin g}{\sin h}$

Conjunction: $\frac{\sin(a+b)}{\sin a} = \frac{\sin(g+h)}{\sin g} \cdot \frac{\sin f}{\sin(e+f)}$



Figur 9

Namnen kommer från vänsterleden i ekvationerna, i "disjunction" överlappar inte bågarne a och b varandra medans i "conjunction" gör de det.

Ett sista sätt att uttrycka satserna är att skriva dem på formerna:

$$\frac{\sin \widehat{AE}}{\sin \widehat{ED}} \cdot \frac{\sin \widehat{DF}}{\sin \widehat{FC}} \cdot \frac{\sin \widehat{CB}}{\sin \widehat{BA}} = 1 \text{ och } \frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{AB}} \cdot \frac{\sin \widehat{BE}}{\sin \widehat{EF}} \cdot \frac{\sin \widehat{FD}}{\sin \widehat{DC}} = 1.$$

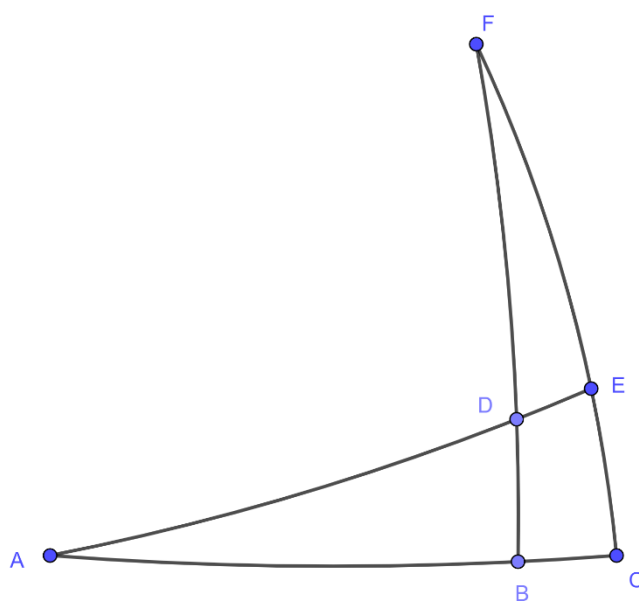
På båda dessa former kan man gå igenom konfigurationen utan att passera samma båge två gånger. (Utan att räkna med de gånger man passerar en hel cirkelbåge). I första fallet går man alltså genom punkterna i ordningen: AEDFCBA.

Medeltiden

Under de nästkommande 900 åren var Menelaos satser astronomers standardverktyg för att lösa problem. Men under den muslimska guldåldern, runt det första millennieskiftet, skede vad man nästan skulle kunna kalla för en revolution inom ämnet. Ironiskt nog var det faktiskt tack vare Menelaos själv som den uppkom. I bok tre i Menelaos *Sphaerica* använder han sin sats för att komma fram till ett antal av andra resultat som skulle leda fram till dessa nya tillvägagångssätt inom den sfäriska trigonometrin. Anledningen till att man kom fram med nya satser när man redan hade Menelaos två fullt användbara satser var på grund av deras komplexitet. Dessa nya satser hävdade att de både var lättare att komma ihåg och att använda.

Satsen om de fyra kvantiteterna

Detta leder oss då fram till den första av våra nya satser, *Satsen om de fyra kvantiteterna*. Då Menelaos sats även kallades *Satsen om de sex kvantiteterna*, kan man utan större problem tänka sig vad skillnaden kommer vara mellan dessa. Det fanns flera upphovsrätthavare till denna sats, en av dessa Abû Nasr Mansûr ibn Ali ibn Irâq (960 – 1036) föreslog satsen i sin bok ”*The Book of the Azimuth*”. Originaltexten finns inte kvar idag utan vi vet detta tack vare ett citat från en annan bok ”*Keys of astronomy*”, skriven av Abû Nasr Mansûrs elev, Al-birûni. Satsen baserar han på figur 10 som har samma förutsättningar som Menelaos konfiguration, nämligen att $\widehat{AC}$, $\widehat{FB}$ och $\widehat{FC}$ är 90° och ser ut som följande:



Figur 10

Satsen i sig uttrycker han som följande:

Satsen om de fyra kvantiteterna: $\frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{CE}} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{AE}}.$

Beviset följer av att tillämpa Menelaos sats B på figuren ovan som ger:

$$\frac{1}{\sin \widehat{CE}} = \frac{1}{\sin \widehat{BD}} \cdot \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{AE}}.$$

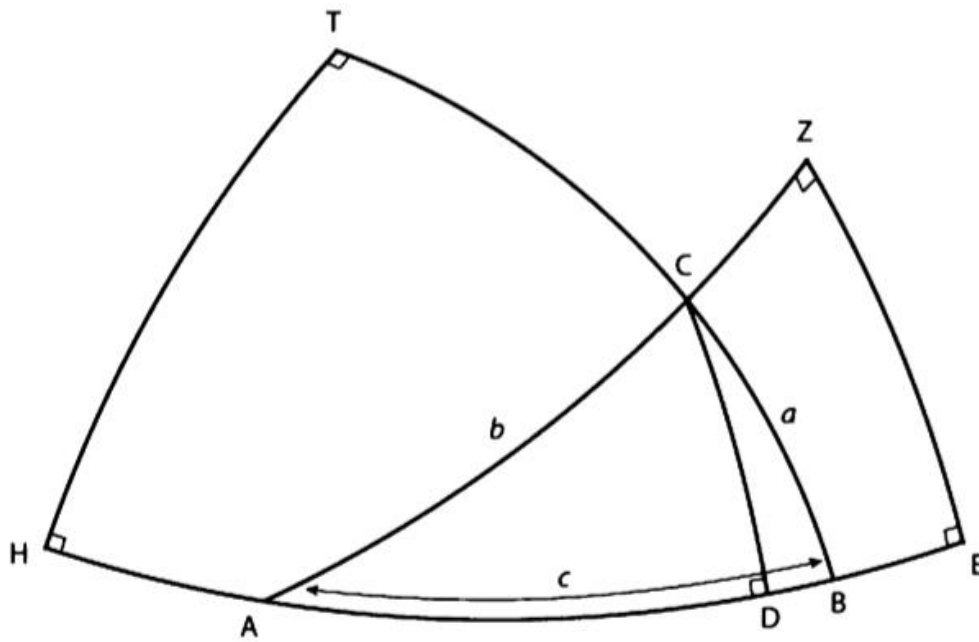
Vilket vi enkelt kan skriva om på formen som satsen är angiven på genom att dividera leden

med $\frac{1}{\sin \widehat{BD}}$ vilket ger oss: $\frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{CE}} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{AE}}.$ Genom att lyckas göra sig av med en av

kvoterna från Menelaos blev ”Satsen om de fyra kvantiteterna” mycket enklare att arbeta med, och astronomer runt om i världen var inte sena med att gå över till detta nya tillvägagångssätt.

Den sfäriska sinussatsen

Men vi är inte riktigt klara än, ännu en sats skulle komma fram från de arabisk talande forskarna. Satsen i fråga, som många säkert känner igen från dagens matematik, är sinussatsen, dock så ska vi i till skillnad mot dagens gymnasieelever självklart jobba med den sfäriska versionen av sinussatsen. Precis som med ”Satsen om de fyra kvantiteterna” så fanns det flera upphovsrättshavare, Abû Nasr Mansûrs var återigen en av dessa. Men vi ska studera en annan astronoms bevis av satsen. Abû al-Wafâ Bûzhjânî var en persisk matematiker och astronom som bland annat är känd för att ha introducerat tangens, sekant, cosekant och cotangens i astronomin. Men vi är som sagt intresserade av hans bevis för den sfäriska sinussatsen.



Figur 11

I figur 11 låt C projicera vinkelrätt på den motsatta sidan mellan A och B i D, vi drar alltså CD vinkelrätt mot storcirkelbågen AB . Låt $\widehat{EZ}$ vara ekvatorn till polen A, och låt $\widehat{HT}$ vara ekvatorn för pol B, samt förläng sidorna i originaltriangeln $\triangle ABC$ till de båda ekvatorerna som figuren visar. Vinkeln från polerna till ekvatorerna kommer alltid vara räta, detta eftersom en vinkel mellan två storcirklar fås av vinkeln mellan de två planen av cirklarna. I detta fallet har vi två plan där det ena planet går genom den andras pol, alltså är vinkeln mellan dessa plan 90° och vinklarna är räta. Också värt att nämna är att för sinus A, B och C i beräkningarna nedan menas då vinkeln mellan de relevanta storcirkelbågarna.

Vi kan nu applicera "Satsen om de fyra kvantiteterna" på de två konfigureringarna som båda innehåller $\widehat{CD}$, först för ACZED får vi:

$$\frac{\sin \widehat{CD}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{EZ}}{\sin \widehat{AZ}} \text{ eller } \sin \widehat{CD} = \sin A \cdot \sin b.$$

Och för BCTHD får vi:

$$\frac{\sin \widehat{CD}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{TH}}{\sin \widehat{TB}} \text{ eller } \sin \widehat{CD} = \sin B \cdot \sin a.$$

Då vänsterleden är lika måste även högerleden vara det och med lite omflyttande hamnar vi slutligen i:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Men vi skulle ha kunnat börja med A eller B också, inte bara C. Om vi till exempel hade applicerat detta tillvägagångssätt på A skulle vi sluta i $\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$. Kombinerar vi dessa resultat hamnar vi till slut med:

Den sfäriska sinussatsen: $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$

I till skillnad mot ”Satsen om de fyra kvantiteterna” så är den sfäriska sinussatsen generell, den går alltså att applicera på vilken sfärisk triangel som helst, utan någon komplicerad konfiguration. Trots detta blev satsen inte populär omgående, utan den användes bara i speciella omständigheter. Det var först senare under renässansen som den skulle bli populärare och användas mer.

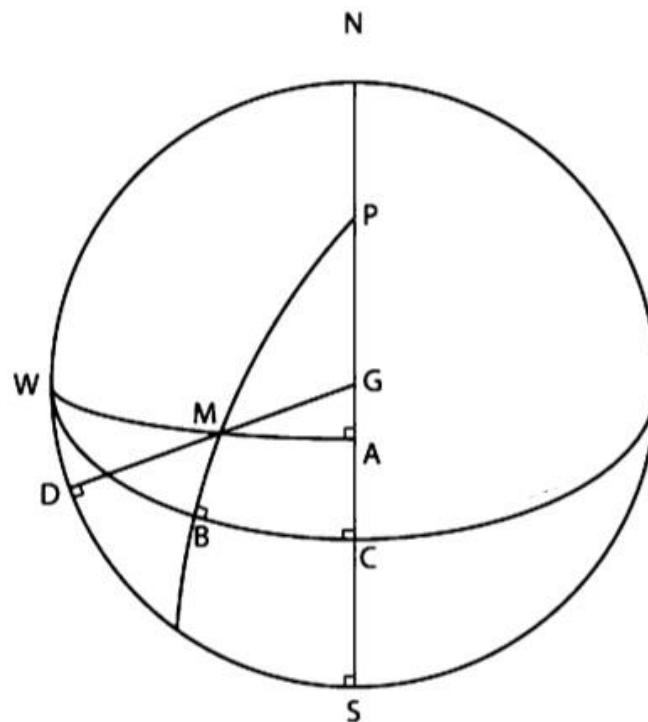
Tillämpning av ”Satsen om de fyra kvantiteterna”

För att illustrera ”Satsen om de fyra kvantiteterna” ska vi titta på ett problem från den arabiska matematiken. Närmare bestämt från *Salah*, den islamistiska bönen. Denna bön ska förrättas fem gånger om dagen och ska genomföras vänd mot Mekka, som reglerna föreskriver. Det är just riktningen vi kan hjälpa till med.

Vi känner till två positioner, vi kan vår lokala latitud φ_L samt latituden för Mekka $\varphi_M = 21.67^\circ$, vi har också skillnaden i longitud $\Delta\lambda$ mellan φ_M och φ_L . Vi väljer att sätta vår lokala position till staden Ghazna, idag Ghazni i östra Afghanistan. Ghazna var under det första millennieskiftet en av världens viktigaste städer, det var huvudstaden i det Ghaznavidiska imperiet som bestod av dagens Iran, Afghanistan, Pakistan och flera länder i omgivningen.

Figuren som vi använder ser direkt ner på Ghazna i G. Dessutom är alla linjer stora cirkelbågar, även den raka linjen mellan N och S som kallas för meridianen till Ghazna. En

meridian är en storcirkel som går igenom de båda polerna, i vår figur motsvaras nordpolen av P. Den yttre cirklen är Ghaznas horisont, storcirklar som binder samman Ghazna och dess horisont är alltså 90° . Man kan också se det som att horisonten är ekvatorn till polen Ghazna. N och S är de punkter där Ghaznas horisont och meridian skär varandra. M motsvaras av Mekka och $\widehat{WM}$ kopplar ihop Mekka med den västra punkten på horisonten samt med meridianen. Till sist så är $\widehat{PMB}$ meridianen till Mekka, och den horisontella linjen genom C är ekvatorn.



Figur 12

Latituden för Mekka känner vi till sen tidigare och för Ghazna var den $\varphi_L = 33.58^\circ$. Detta betyder alltså att $\widehat{GC} = \varphi_L = 33.58^\circ$ samt $\widehat{MB} = \varphi_M = 21.67^\circ$. Slutligen för skillnaden i longitud som var känd som $\Delta\lambda = 27.37^\circ$. Skillnaden i longitud är detsamma som vinkeln vid jordens mittpunkt mellan de två planen som vi får av meridianerna som går genom Mekka respektive Ghazna. Vi kan därför utnyttja att vår sfärs radie är 1 och få $\widehat{BC} = 27.37^\circ$.

Ekvatorn är ju nämligen en storcirkel med radien 1. En cirkelbåge, i vårt fall $\widehat{BC}$, har som vi nämnt tidigare längden αr där α är vinkeln vid cirkelns centrum. Nu kan vi starta med våra uträkningar som vi enbart ska utföra med hjälp av "Satsen om de fyra kvantiteterna". Vi börjar med konfigurationen CAPMB:

$$\frac{\sin \widehat{PM}}{\sin \widehat{MA}} = \frac{\sin \widehat{PB}}{\sin \widehat{BC}} \text{ eller } \frac{\sin(90^\circ - \varphi_M)}{\sin \widehat{MA}} = \frac{1}{\sin \Delta\lambda}.$$

Så $\sin \widehat{MA} = \cos \varphi_M \sin \Delta\lambda$, detta ger att $\widehat{MA} = 25.29^\circ$. Vår andra konfiguration är WMACB, från denna får vi:

$$\frac{\sin \widehat{WM}}{\sin \widehat{MB}} = \frac{\sin \widehat{WA}}{\sin \widehat{AC}} \text{ eller } \frac{\sin(90^\circ - \sin \widehat{MA})}{\sin \varphi_M} = \frac{1}{\sin \widehat{AC}}.$$

Vilket ger att $\sin \widehat{AC} = \frac{\sin \varphi_M}{\cos \widehat{MA}}$, och $\widehat{AC} = 24.11^\circ$. Detta ger dessutom att $\widehat{GA} = \widehat{GC} - \widehat{AC} = \varphi_L - 24.11^\circ = 9.47^\circ$. Vi går vidare med konfigurationen WMASD som ger:

$$\frac{\sin \widehat{WM}}{\sin \widehat{MD}} = \frac{\sin \widehat{WA}}{\sin \widehat{AS}} \text{ eller } \frac{\sin(90^\circ - \sin \widehat{MA})}{\sin \widehat{MD}} = \frac{1}{\sin(90^\circ - \sin \widehat{GA})}.$$

Så $\sin \widehat{MD} = \cos \widehat{MA} \cos \widehat{GA}$, och $\widehat{MD} = 63.10^\circ$. Den sista konfigurationen vi ska titta på är GMDSA:

$$\frac{\sin \widehat{GM}}{\sin \widehat{MA}} = \frac{\sin \widehat{GD}}{\sin \widehat{DS}} \text{ eller } \frac{\sin(90^\circ - \sin \widehat{MD})}{\sin \widehat{MA}} = \frac{1}{\sin \widehat{DS}}.$$

Alltså är $\sin \widehat{DS} = \sin \widehat{MA} / \cos \widehat{MD}$, och $\widehat{DS} = 70.79^\circ$. Detta ger oss svaret, 70.79° är de graderna väst om syd vi måste vända oss för att vetta mot Mekka. Detta tillvägagångssätt är inte exklusivt för Mekka, vi kan använda samma metod för att bestämma riktningen till vilken plats på jorden som helst så länge vi känner till platsens longitud och latitud.

Modern tid

Idag så ser vi på trigonometri som läran om samband mellan vinklar och sidor i en triangel. Men fram tills nu har metoderna vi sett inte handlat om trianglar i sig, förutom den sfäriska sinussatsen har satserna vi gått igenom mest behandlat cirkelbågar och förhållanden mellan dessa. Och sinussatsen var som vi vet inte populär bland medeltidens astronomer. Men detta skulle nu ändras tack vare den moderna trigonometrin. Faktum är att vår syn på trigonometri är relativt ny, detta då potensen som vi ser i att jobba med trianglar i sig inte blev tydlig förrän matematiker hade i sin ägo alla sex trigonometriska funktioner så som vi känner dom idag.

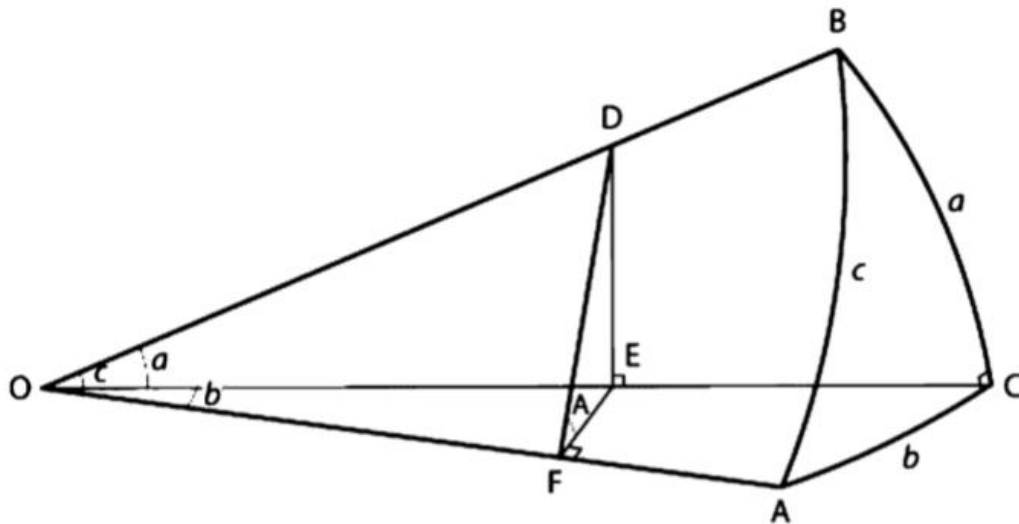
Första gången som ordet trigonometri ens nämns är år 1595 i Bartholomeo Pitiscus bok ”*Trigonometria*”. Vi ska nu alltså flytta oss från antikens Grekland och medeltidens islam till Europa och 1600-talet. Och på samma sätt som Islamistiska matematiker lyckades förenkla Menelaos sats ska vi nu få se en ytterligare förenkling. Detta nya tillvägagångssätt med trigonometri och trianglar är det sätt vi finner i nästan alla moderna textböcker om sfärisk trigonometri. Och det mesta blev systematiserat redan tidigt 1600-tal i Scotland av en man som hette John Napier. Att förklara vilken typ av man John Napier var är inte helt enkelt. Han såg sig inte själv som en matematiker, även fast han har flera matematiska upptäckter, mest känt av dessa var logaritmerna som vi ska ta upp senare. Man kan även se honom som en uppfinnare, han uppfann bland annat Napiers ben som var ett multiplikations verktyg. Han såg sig själv som en stor teolog och protestant och hans första stora publikation uppmanade den skotska kungen att stå emot påve Clement VIII som han ansåg vara antikrist. Napier var också väldigt intresserad av det ockulta och ansågs av många vara en magiker som sysselsatte sig med alkemi och svartkonster. Men vi är såklart intresserade av hans arbete inom den sfäriska trigonometrin. Hans intresse för sfären var väldigt vältajmat, detta då den sfäriska trigonometrin skulle bli väldigt viktig för att kunna navigera haven. Det mesta av hans arbete inom ämnet hänvisar till rätvinkliga sfäriska trianglar. Detta arbetssätt är inte ett så stor begränsning som man kan tro, vi kan ju göra om sneda trianglar till två rätvinkliga trianglar genom att dra en linje från ett lämpligt hörn vinkelrätt mot motsatta sidan. Vi ska dock börja med rätvinkliga trianglar.

Den rätvinkliga sfäriska triangeln identiteter

Vi ska följa de standarder som finns för rätvinkliga trianglar, nämligen att C är hörnet där den rätvinkliga triangeln finns samt att använda gemena tecken för de motstående sidorna. Så c kommer till exempel alltid vara vår hypotenus. Om vi nu tittar på figur 13 så kan vi omvandla våra sidor a , b , och c till vinklar genom att dra en linje från de tre hörnen till mittpunkten på sfären i O . Vinklarna vid O är då lika med triangelns sidlängder. För att få fram nya satser vill vi omvandla $\angle A$ och $\angle B$ från sfären till planet. För att göra detta väljer vi en punkt D på OB och drar DE vinkelrätt mot OC , efter det drar vi EF vinkelrätt mot OA . Av detta följer att DE är vinkelrät mot EF , eftersom planet BOC är vinkelrätt mot planet COA , och vi får en vinkelrät triangel $\triangle DEF$ inuti sfären. Dessutom får vi tack vare detta trianglarna $\triangle ODE$, $\triangle OEF$ och $\triangle ODF$, alla dessa också rätvinkliga. Den noggranne anser säkert nu att vi inte vet om vinkeln $\angle OFD$ faktiskt är rätvinklig, så vi ska ta och bevisa det. Detta gör vi med hjälp av Pythagoras, betrakta OD vår förhoppningsvis hypotenus.

$$OD^2 = OE^2 + ED^2 = (OF^2 + EF^2) + (DF^2 - EF^2) = OF^2 + DF^2.$$

Alltså är $\triangle ODF$ en rätvinklig triangel och DF är vinkelrät mot OA . Då FD och FE är vinkelräta mot OA så är $\angle DFE$ lika med vinkeln mellan planen OAC och OAB , som i sin tur är lika med $\angle A$.



Figur 13

Om vi nu applicerar lite trigonometri på figur 13 kan vi härleda hela sju olika formler som gäller för den rätvinkliga sfäriska triangeln. För att hitta dessa ska vi undersöka de fyra hörnen i tetraedern $ODEF$. Varje hörn sammanfogar tre linjesegment, vi ska välja ett av dessa hörn och hitta ett trigonometriskt förhållande mellan två av dess linjesegment, exempelvis vid O

$$\cos c = \frac{OF}{OD}.$$

Nu kan vi introducera det sista linjesegmentet på följande sätt och tolka dessa förhållanden som trigonometriska uttryck

$$\cos c = \frac{OF}{OE} \cdot \frac{OE}{OD} = \cos b \cdot \cos a.$$

Vi kan finna tre till formler vid de andra tre hörnen i $ODEF$:

$$\sin a = \sin A \cdot \sin c$$

$$\sin b = \tan a \cdot \cot A$$

$$\cos A = \tan b \cdot \cot c.$$

Eftersom A och B är två godtyckliga vinklar så finns det ingen egentlig matematisk skillnad mellan dem, samma argument gäller för a och b . Vi kan alltså ta en liten genväg och helt enkelt byta A mot B , och a med b för att få tre fler formler.

$$\sin b = \sin B \cdot \sin c$$

$$\sin a = \tan b \cdot \cot B$$

$$\cos B = \tan a \cdot \cot c.$$

Vi har nu fått fram de sju identiteter vi kan härleda från vår figur, men det finns tre till. På grund av hur vår figur är uppbyggd kan vi inte få fram de identiteter som innehåller både A och B . Vi skulle kunna arbeta algebraiskt med de sju formler vi redan fått fram men vi ska istället utvidga vår figur. Vi måste alltså addera $\angle B$ till vår figur, vilket vi kommer göra på samma sätt som med $\angle A$.

Välj en punkt G på OA och dra GE vinkelrätt mot OC , dra sedan EH vinkelrätt mot OB och sammanfoga triangeln $\triangle OHG$. På samma sätt som tidigare får vi att $\angle B = \angle EHG$. Våra tre olika plan innehåller nu flera olika likformiga trianglar som vi ritat upp separat i figur 15. Dessa trianglar är vår nyckel till att hitta de tre återstående identiteterna. Vi ska börja med att göra precis som förra gången och hitta ett trigonometriskt förhållande mellan två linjesegment och introducera det tredje. Vi använder sen de likformiga trianglarna för att skriva om dessa förhållanden med andra kända vinklar. Vi börjar med punkten O igen och får:

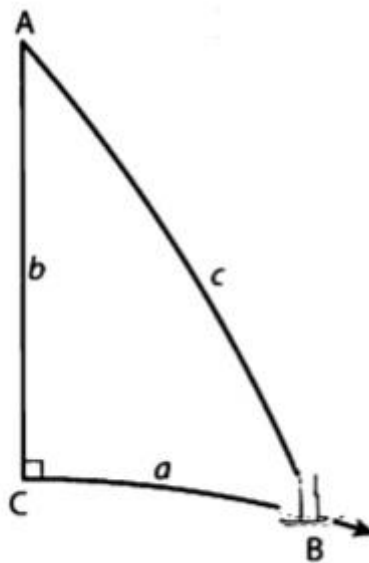
$$\sin a = \tan b \cot B \quad \cos B = \cos b \sin A$$

$$\cos A = \tan b \cot c \quad \sin b = \sin B \sin c$$

$$\cos B = \tan a \cot c \quad \cos c = \cos b \cos a$$

Navigeringsproblem

Vi ska nu lösa ett navigeringsproblem med hjälp av dessa tio identiteter, frågan är följande: Ett skepp lämnar New York (position, 40.73° N, 73.93° W) i C, och startar seglandes rakt österut och fortsätter längs storcirkeln. Finn skeppets position och riktning efter det har seglat 1000 sjömil.



Figur 16

Vårt skepp startar med att segla rakt österut men dess riktning kommer gradvis ändras åt det sydliga hållet längs storcirkeln. Den enda storcirkeln som man kan börja att segla rakt österut längs och fortsätta att hålla samma riktning är såklart ekvatorn. Vi skapar vår triangel genom att sätta ihop skeppets punkt vid avresan med dess nuvarande position och Nordpolen, N (figur). Då är $b = AC = 90^\circ - 40.73^\circ = 49.27^\circ$. Vi kan också enkelt få fram a eller CB då en sjömil (1.852 km) motsvarar $\frac{1}{60}^\circ$ på en storcirkel, alltså är $a = CB = 16.67^\circ$. Detta är allt vi behöver för att få fram skeppets latitud, komplementet till AB . Då vi har två av triangelns sidor kan vi använda oss av identiteten $\cos c = \cos b \cos a$. Ur detta får vi:

$$c = \cos^{-1}(\cos 49.27^\circ \cdot \cos 16.67^\circ) = 51.31^\circ.$$

Så skeppets latitud är $90^\circ - 51.31^\circ = 39.69^\circ$. Om vi nu koncentrerar oss på skeppets longitud så kan vi i figur 16 se att vinkeln $\angle A$ vid nordpolen motsvarar skillnaden i latitud mellan New York och skeppets position. Vi kan hitta A med identiteten $\cos A = \tan b \cot c$ vilket ger oss:

$$A = \cos^{-1}(\tan 49.27^\circ \cdot \cot 51.31^\circ) = 21.55^\circ$$

Så skeppets longitud är $73.93^\circ \text{ W} - 21.55^\circ \text{ W} = 52.38^\circ \text{ W}$, vilket placerar oss i en bra bit ut i atlanten. För att ta reda på riktningen vi seglar igenom att lösa ut vinkeln $\angle B$, till detta tar vi identiteten $\cos B = \cos b \sin A$ och får $B = 76.13^\circ$. Eftersom vi vet att skeppet färdas norr-syd betyder detta att vi seglar 76.13° öst om syd.

Napiers logaritmer

Dessa uträkningar som vi nu gjort är inte svåra med dagens hjälpmedel, vi kommer fram till svaret med några enkla knapptryckningar på miniräknaren. Men under John Napiers tid var det lite svårare, det är visserligen möjligt att räkna ut de trigonometriska förhållanden vi gjort för hand men det är både tidskrävande och lätt att göra misstag. Napier var dock den som skulle ändra på detta, Napiers ben som vi nämnde tidigare var ett försök till att lösa problemet med krångliga multiplikationer men de blev snabbt svåra att använda när decimalerna blev för många. Napiers stora genombrott i ändamålet att förenkla multiplikationerna var den enkla observationen att produkten av tiopotenser kan hittas genom att addera exponenterna, det som vi idag känner till som en av potenslagarna $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Napier kunde därför spara tid genom att skriva om faktorerna till tiopotenser, addera exponenterna, och räkna ut tio upphöjt till summan. Napier använde dessutom detta för att konstruera de första logaritmtabellerna så att man slapp räkna om talen till tiopotenser manuellt. Detta kan låta besvärligt med dagens metoder. Men under tidigt 1600-tal sparade detta väldigt mycket tid, helt enkelt på grund av att det är mycket lättare att addera långa tal än att multiplicera dem. Således kom logaritmen till, som för ett tal a är den exponent x till ett givet tal med basen b måste upphöjas till för att anta värdet a . Napier slapp nu att jobba med multiplikationer vid beräkning med de tio identiteterna, dessa blev istället additioner så som: $\log \cos c = \log \cos b + \log \cos a$. Många

av de logaritmtabeller som gjordes använde sig just av logaritmer av trigonometriska funktioner istället för logaritmerna själva på grund av den sfäriska trigonometrin. För att lösa problem som det vi gick igenom tidigare behövde man alltså bara leta upp och addera logaritmerna av de trigonometriska funktionerna och hitta deras summa i tabellen och arbeta sig bakåt. Idag har vi inte någon större användning av logaritmerna för detta ändamål utan vi använder dessa för helt andra saker, men historiskt sett har de haft en väldigt stor roll inom den sfäriska trigonometrin.

Trubbvinkliga och snedvinkliga trianglar

Parallellerna mellan den sfäriska trigonometrin och dess motsvarighet i planet finns oftast precis under ytan, även fast den inte alltid är helt uppenbar. Vi har tidigare sett den sfäriska versionen av sinussatsen som ändå såg relativt lik ut den plana versionen, men faktum är att vi också har redan fått fram den sfäriska ekvivalenta framställningen av Pythagoras sats. Vi finner den i en av de tio identiteterna, nämligen $\cos c = \cos a \cos b$, denna är dock inte lika uppenbar som sinussatsen. Likheter mellan den sfäriska trigonometrin och trigonometrin i planet sträcker sig också över dess utveckling. I planet börjar vi undersöka den rätvinkliga triangeln innan vi går över till andra trianglar med kunskapen vi fått från den rätvinkliga för att få fram nya satser, oftast genom att dela dessa nya trianglar i två rätvinkliga. Vi ska nu göra samma sak fast på sfären.

Den som känner till den trigonometrin i planet vet att det finns två fundamentala satser för att kunna lösa trianglar, det vill säga givet att vi känner till vissa sidor och vinklar kan beräkna resterande okända. Den ena är såklart sinussatsen men den har vi som sagt redan behandlat, och den andra är cosinussatsen $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Cosinussatsen på den här formen är en förlängning av Pythagoras sats applicerad på sned och trubbvinkliga trianglar, och faktum är att Euklides redan i Elementa hade tillgång till cosinussatsen. I bok II av elementa i proposition 12 och 13 beskriver Euklides cosinussatsen för trubb- respektive snedvinkliga trianglar, vi utelämnar den ena av dessa och tar proposition 13:

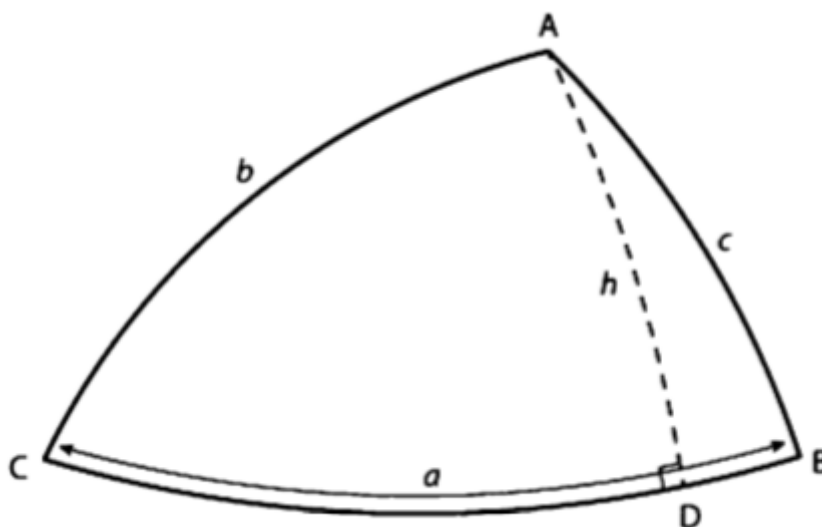
”I spetsvinkliga trianglar är kvadraten på sidan som spänner upp den spetsiga vinkeln mindre än kvadraterna på sidorna som omger den spetsiga vinkeln med två gånger rektangeln omsluten av en av dem vid den spetsiga vinkeln, mot vilken en vinkelrät linje faller och det som huggs av innanför av den vinkelräta vid den spetsiga vinkeln.” (Canities 2017-11-29)

Vilket “översatt” till ett modernt matematiskt språk blir just $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Euklides använde visserligen inte denna sats på det sättet som vi gör idag men vi kan gå

samma väg som han gjorde för att komma fram till den, nämligen att ta hjälp av Pythagoras sats.

Den sfäriska cosinussatsen

Om vi nu vänder oss till sfären och använder oss av ett diagram liknande det Euklides använde och tillämpar $\cos c = \cos a \cos b$ på de två rätvinkliga trianglarna får vi:



Figur 17

$$\cos b = \cos h \cos x \text{ och } \cos c = \cos h \cos(a - x).$$

Vi löser ut $\cos h$ ur båda uttrycken och sätter dem lika med varandra, detta gör vi på grund av att vi vill eliminera $\cos h$ från uttrycket. Vi har nu alltså:

$$\frac{\cos b}{\cos x} = \frac{\cos c}{\cos(a - x)}.$$

Från det här löser vi ut $\cos c$ och applicerar en av additionsformlerna för cosinus:

$$\cos c \cos x = \cos b(\cos a \cos x + \sin a \sin x)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \cos b \tan x.$$

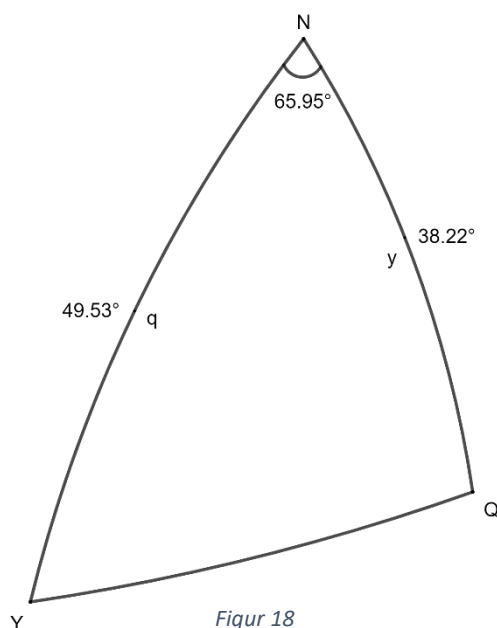
För att bli av med $\tan x$ termen applicerar vi identiteten $\cos A = \tan b \cot c$. För att förtydliga lite skriver vi upp identiteten med rätt namn på vinkeln och sidorna $\cos C = \tan x \cot b$. Med lite algebra tar detta oss hela vägen fram till den sfäriska cosinussatsen

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Vi har tidigare alltid gått igenom vem som har kommit fram till satserna vi har studerat, även fast ägarskapet har varit kontroversiellt och vi inte kan vara helt säkra på vem som faktiskt var först. Denna gång är det dock svårare än tidigare då flera astronomer redan under medeltiden använde metoder som ser ut som cosinussatsen om den astronomiska kontexten bara togs bort. Vi avstår därför att ge en upphovsrätthavare till den sfäriska cosinussatsen.

Tillämpning av cosinussatsen

Precis som cosinussatsen i planet refererar satsen till tre sidor och en vinkel. Detta gör den väldigt användbar för att lösa astronomiska och geografiska problem, som tenderar att koncentrera sig på avstånd framför vinklar. Än en gång så ska vi vända oss till sjöfartnavigering för att hitta en problem som vi kan lösa. Problemet i fråga denna gång är att beräkna avståndet mellan Queenstown, Irland (idag Cobh) och Sandy Hook, New York, med positionerna $51.78^\circ N, 8.18^\circ W$ respektive $40.47^\circ N, 74.13^\circ W$. Vissa känner säkert igen detta som rutten tagen av skeppet RMS Titanic år 1912. Detta specifika exempel kommer från



en skolbok från 1895 (Wheeler 1895, s. 38). Precis som tidigare är nyckeln till att lösa detta att skapa en triangel mellan New York Y , Queenstown Q , och Nordpolen N .

Vi får därför längderna $q = 90^\circ - 40.47^\circ = 49.53^\circ$ och $y = 90^\circ - 51.78^\circ = 38.22^\circ$.

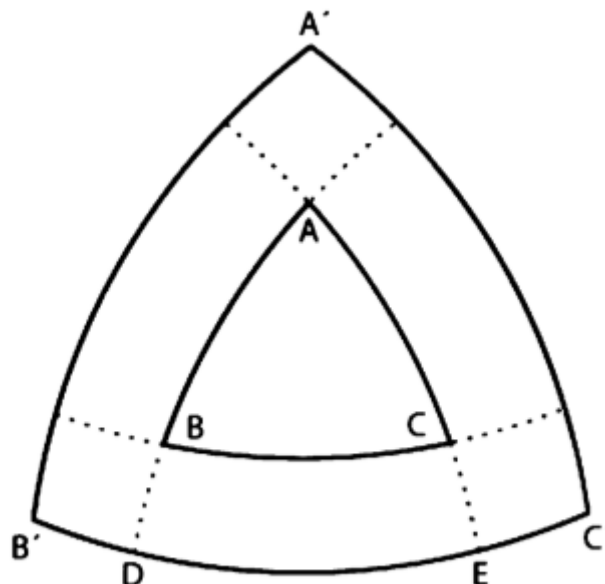
Vinkeln vid N är såklart skillnaden emellan de två longituderna, 65.95° . Vi kan nu applicera den sfäriska cosinussatsen där vi låter C i formeln vara vinkeln N vid nordpolen. Detta ger:

$$n = \cos^{-1}(\cos 38.22^\circ \cos 49.53^\circ + \sin 38.22^\circ \sin 49.53^\circ \cos 65.95^\circ) = 45.43^\circ.$$

Om vi multiplicerar detta med 60 får vi att avståndet mellan Queenstown och New York vilket är 2726 sjömil eller 5048.55 km.

I det övre exemplet hade vi situationen sida, vinkel, sida, en annan vanlig situation inom trigonometrin är när två vinklar och sidan mellan dessa är kända. Men till detta är inte cosinussatsen nämnvärt användbar, den hänvisar ju till enbart en vinkel. Inom plantrigonometrin är det lätt att lösa ett sådant exempel, det ända vi behöver göra är att med vetenskapen om att vinkelsumman är 180° i en triangel ta reda på den tredje vinkeln och tillämpa sinussatsen. Dessvärre fungerar denna metod inte inom den sfäriska trigonometrin då vi inte på ett lätt sätt kan få fram den tredje vinkeln. Så för att lösa situationen med vinkel, sida, vinkel, måste vi alltså hitta ett nytt tillvägagångssätt. Vi finner lösningen i den polära triangeln och den polära dualitetssatsen.

Polära dualitetssatsen: Sidorna i den polära triangeln är supplementen till vinklarna i originaltriangeln, och vinklarna i den polära triangeln är supplementen till sidorna i originaltriangeln.



Figur 19

Bevis: I figuren ovan är punkterna D och E 90° ifrån punkten A , och därför är $\angle A = DE$. Vidare är C' polen till ABD samt B' polen till ACE , Således är $C'D$ och $B'E$ 90° . Detta ger oss att:

$$B'C' = C'D + B'E - DE = 180^\circ - DE = 180^\circ - \angle A.$$

Samma sak gäller för de andra sidorna i den polära triangeln. Den andra delen av satsen följer direkt av att applicera resultatet ovan på den polära triangeln till den polära triangeln, alltså originaltriangeln.

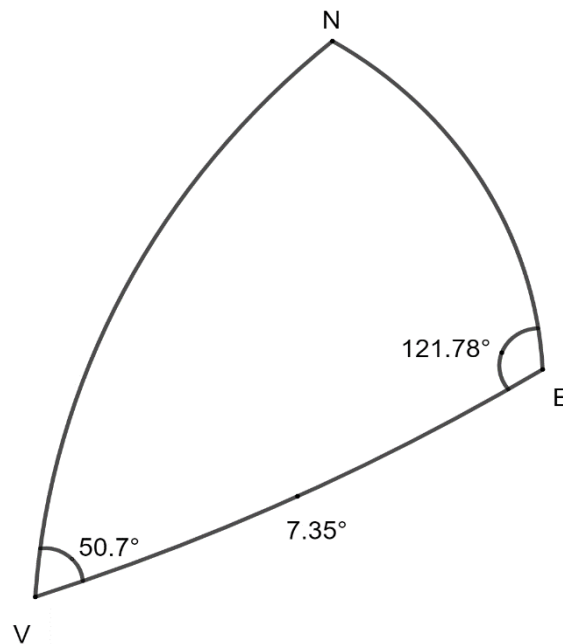
Styrkan i denna sats är att den ger information om en triangelns vinklar om vi känner till sidorna och vise versa. Vi ska därför använda den sfäriska cosinussatsen på den polära triangeln och skriva om sidorna och vinkeln med hjälp av satsen vilket ger:

$$\begin{aligned}
& \cos(180^\circ - C) \\
&= \cos(180^\circ - A) \cos(180^\circ - B) \\
&+ \sin(180^\circ - C) \sin(180^\circ - B) \cos(180^\circ - c).
\end{aligned}$$

Med lite förenkling ger detta oss cosinussatsen för vinklar:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

Nu har vi alltså en sats för att lösa situationer där vi har två vinklar och sidan mellan dessa kända. För att illustrera detta betraktar vi följande; Vi flyger från Vancouver till Edmonton längs en storcirkel och mäter sträckan vi färdas samt riktningarna vid avgång och ankomst. Avståndet mäter vi till 816.55 km eller 440.9 sjömil vilket motsvarar 7.35° , riktningen vid avgången i Vancouver är 50.7° öst om norr och vid Edmonton 58.22° öst om norr. Frågan vi vill undersöka är vilken position dessa städer har. Vi gör precis som tidigare en triangel med våra punkter tillsammans med nordpolen. För vinkeln $\angle E$ gäller såklart $\angle E = 180^\circ - 58.22^\circ = 121.78^\circ$.



Figur 20

Vi kan nu applicera cosinussatsen för vinklar för att lösa ut $\angle N$ vilket ger:

$$N = \cos^{-1}(-\cos 50.7^\circ \cos 121.78^\circ + \sin 50.7^\circ \sin 121.78^\circ \cos 7.35^\circ) = 9.6^\circ.$$

Detta är således skillnaden i longitud mellan städerna. För att få latituderna applicerar vi istället sinussatsen, vi skulle visserligen kunna göra detsamma med cosinussatsen men vägen blir då mycket längre. Sinussatsen ger:

$$v = 90^\circ - \sin^{-1}\left(\sin 50.7^\circ \cdot \frac{\sin 7.35^\circ}{\sin 9.6^\circ}\right) = 53.6^\circ$$

$$e = 90^\circ - \sin^{-1}\left(\sin 121.78^\circ \cdot \frac{\sin 7.35^\circ}{\sin 9.6^\circ}\right) = 49.3^\circ.$$

Delambres och Napiers analogier

Det ser nu ut som om vi kan lösa alla trianglar med hjälp av sinus- och cosinussatserna, men det finns en sorts situation där dessa inte visar hela bilden. Denna situation som är sida, sida, vinkel, kan ha mer än en triangel som uppfyller både sinus- och cosinussatsen. Både cosinus- och sinusfunktionen är ju periodiska så det kommer troligtvis finnas två vinklar som uppfyller problemet. Lyckligtvis finns det andra metoder som kommer ta oss runt detta problem. Vi ska börja med den franske matematikern och astronomen Jean-Baptiste Joseph Delambre, som 1807 publicerade sina analogier i den franska tidningen *Connaissance des Temps*. Ordet ”analogi” var ett matematiskt uttryck som går tillbaka till antikens Grekland där det mer eller mindre betyder förhållande, vi skulle kunna använda ett mer modernt matematiskt språk men vi väljer att använda samma begrepp som Delambre gjorde för detta. Vi väljer också att till skillnad mot tidigare göra ett algebraiskt bevis istället för ett geometriskt. Vi börjar med cosinussatsen:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Då är

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos b \cos c + \sin b \sin c - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(b - c + a) \sin \frac{1}{2}(b - c - a)}{\sin b \sin c},$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c} = \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(a - b - c)}{\sin b \sin c}.$$

Samt

$$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(b - c + a) \sin \frac{1}{2}(b - c - a)}{\sin b \sin c} \cdot \frac{\sin b \sin c}{-2 \sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(a - b - c)}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(c + a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a)}$$

Detta följer eftersom

$$\sin \frac{1}{2}(b - c - a) = -\sin \frac{1}{2}(c + a - b) \text{ och } \sin \frac{1}{2}(a - b - c) = -\sin \frac{1}{2}(b + c - a).$$

Vi låter nu $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, vilket ger

$$s - c = \frac{1}{2}(a + b - c), s - b = \frac{1}{2}(c + a - b), s - a = \frac{1}{2}(b + c - a).$$

Halva vinkeln ger nu

$$\sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos A)}$$

$$= \sqrt{\frac{-\sin \frac{1}{2}(b - c + a) \sin \frac{1}{2}(b - c - a)}{\sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin(s - c) \sin(s - b)}{\sin b \sin c}}.$$

Och

$$\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos A)} = \sqrt{\frac{-\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}.$$

På samma sätt är

$$\sin \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin a \sin c}}, \quad \cos \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}$$

Detta ger oss

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-b)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}} \\ &= \frac{\sin(s-b)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin(s-b)}{\sin c} \cos \frac{1}{2}C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin a \sin c}} \\ &= \frac{\sin(s-a)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin(s-a)}{\sin c} \cos \frac{1}{2}C. \end{aligned}$$

Vidare har vi att

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(A-B) &= \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B - \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B = \frac{\sin(s-b) - \sin(s-a)}{\sin c} \cos \frac{1}{2}C \\ &= \frac{2 \cos \frac{1}{2}((s-b) + (s-a)) \sin \frac{1}{2}((s-b) - (s-a))}{2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c} \cos \frac{1}{2}C \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c} \cos \frac{1}{2}C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}c} \cos \frac{1}{2}C. \end{aligned}$$

Således

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}c}.$$

På samma sätt får vi fram analogierna för $\sin \frac{1}{2}(A+B)$, $\cos \frac{1}{2}(A-B)$, $\cos \frac{1}{2}(A+B)$.

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c}.$$

Problemet med Delambres analogier är att de innehåller alla sex element i en triangel, så de är endast användbara när fem av elementen är kända. Faktum är att Delambres analogier oftast bara används till att kontrollera lösningar och inte för att lösa problemen själva. Som tur är kommer Napier än en gång till undsättning. Han la märke till, precis som vi ska göra nu, att vissa termer uppkommer flera gånger i Delambres analogier. Detta ger oss möjligheten att eliminera den gemensamma termen om vi kombinerar analogierna med varandra. Den andra och fjärde analogin innehåller till exempel termen $\cos \frac{1}{2}c$, så om vi dividerar den första med den andra får vi:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}C} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \\ \Leftrightarrow \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\cot \frac{1}{2}C} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}. \end{aligned}$$

Tre ytterligare analogier kan vi härleda på liknande sätt vilket ger oss tillsammans med den första Napiers fyra analogier:

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A - B)}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)},$$

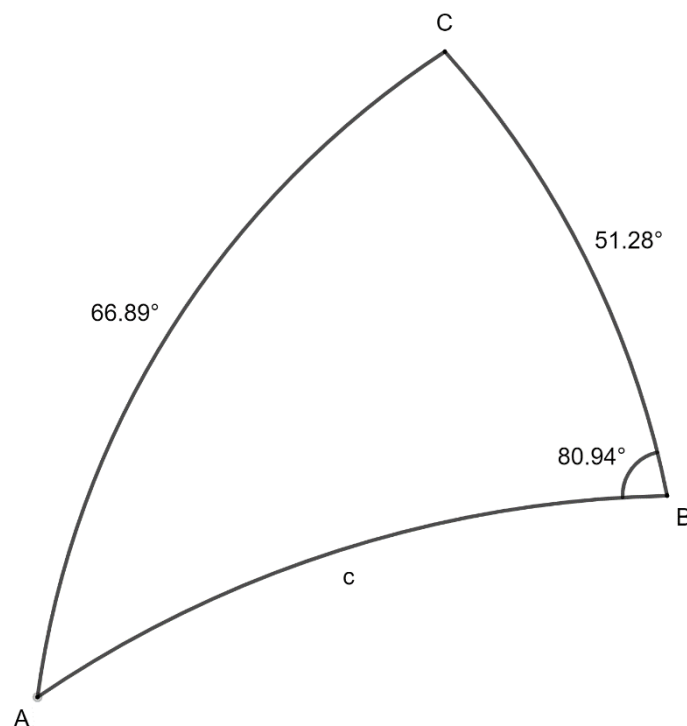
$$\frac{\tan \frac{1}{2}(a - b)}{\tan \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)},$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(a + b)}{\tan \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)}.$$

Tillämpning av Napiers analogier

Napiers analogier innehåller som synes bara fem av triangelns element vilket gör dem mycket användbara i de fall då sinus- och cosinussatsen inte räcker till. Ett sådant fall var som vi sagt tidigare är sida, sida, vinkel. Vi ska nu undersöka ett sådant problem.

Ett skepp avgår från Lissabon, Portugal (latitud $38.72^\circ N$) och färdas mot Havanna, Cuba (latitud $23.11^\circ N$) via en storcirkel rutt med riktning 80.94° väst om nord. Vi vill ta reda på hur lång resan kommer bli.



Figur 21

Från figuren ovan ser vi att vi har en sida, sida, vinkel situation. För att kunna använda Napiers analogier måste vi ha fem kända element så vi börjar med att applicera sinussatsen för vinkeln vid A,

$$A = \sin^{-1} \left(51.28^\circ \cdot \frac{\sin 80.94^\circ}{\sin 66.89^\circ} \right) = 56.90^\circ.$$

En sak som vi måste notera nu är att det faktiskt finns två sinusvärden som uppfyller detta då $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$. Tidigare har det inte varit ett problem då vi haft tillräckligt med information för att enkelt kunna säga vilken av vinklarna vi är intresserade av, dock så är det i detta fall inte direkt svårt heller. Vi skulle omgående märka att vi får negativa vinklar och skulle alltså placera Havanna öster om Lissabon vilket låter helt fel. Om vinkeln vid A hade varit närmare 90° skulle vi dock få mycket större problem då vi inte direkt kan säga vilken av vinklarna är den riktiga. Vi kan dock gå vidare direkt tämligen säkra på att vinkeln vi är ute efter är just 56.90° . Men när vi vill hitta c och C får vi som sagt problem med cosinus- och sinussatsen, Napiers analogier ser dock ut att fungera alldeles utmärkt. Från den sista av analogier får vi:

$$\frac{\tan \frac{1}{2} (51.28^\circ + 66.89^\circ)}{\tan \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2} (56.90^\circ - 80.94^\circ)}{\cos \frac{1}{2} (56.90^\circ + 80.94^\circ)}.$$

Vilket ger $c = 63.10^\circ$ eller 3786 sjömil.

Slutsammanfattning

I och med detta har vår resa genom den sfäriska trigonometrin kommit till sitt slut. Dessa satser som vi gått igenom, Menelaos sats, Satsen om de fyra kvantiteterna, sinus och cosinussatsen, den rätvinkliga sfäriska triangeln identiteter och Delambres och Napiers analogier, är såklart inte allt som den sfäriska trigonometrin har att erbjuda. Det finns mycket mer inom den sfäriska trigonometrin än det vi har gått igenom här, men detta innefattar den grundläggande teorin som krävs för att kunna lösa sfäriska trianglar. Tillämpningarna vi har

visat har först och främst behandlat navigation. Och det är i detta som vi finner den stora fördelen med den sfäriska trigonometrin över plantrigonometri, åtminstone med vår grundläggande kunskap om ämnet. Att kunna navigera på öppet hav, beräkna avstånd på jorden eller att kunna utföra sina religiösa förpliktelser hade alla varit närmast omöjliga att genomföra utan den sfäriska trigonometrin.

Referenslista

Ayres, Frank (1954). *Schaum's outline of theory and problems of plane and spherical trigonometry*. New York: Schaum

Canities (2017-11-29). *Elementas Bok II*.

<http://canities.se/elementa2.html#mcosine2> [2019-01-22]

Brummelen, Glen Van. (2013). *Heavenly mathematics: the forgotten art of spherical trigonometry*. Princeton: Princeton University Press

Encyclopædia Britannica. Menelaos of Alexandria.

<https://www.britannica.com/biography/Menelaos-of-Alexandria> [2018-12-03]

Todhunter, Isaac. (1863). *Spherical trigonometry for the use of colleges and schools, with numerous examples* 3 ed. London: Macmillan

Wheeler, Henry. (1895). *Plane and Spherical Trigonometry*. Boston: Ginn.