SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Intuitionistisk analys

av

Jim Skog Pirinen

2019 - No K40

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Intuitionistisk analys

Jim Skog Pirinen

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Erik Palmgren

2019

Intuitionistisk analys

Jim Skog Pirinen

2019

Innehåll

1 Inledning **3**

1.1 Intuitionism 3

1.2 Filosofiska anmärkningar 4

1.3 BHK-tolkningen 6

2 Intuitionismens grundbegrepp **7**

2.1 Valföljder 7

2.1.1 Talföljder 7

2.1.2 Valföljder 8

2.2 Sorter 10

2.3 Spridningar 11

3 Intuitionistiska principer **13**

3.1 Urvalsprincipen 13

3.2 Kontinuitetsprinciper 14

3.2.1 Brouwers kontinuitetsprincip 14

3.2.2 Den starka kontinuitetsprincipen 15

4 Fansatsen **17**

4.1 Inledning 17

4.2 Spärrningsinduktion 17

4.3 Fansatsen 19

4.4 Den utökade fansatsen 20

5 Intuitionistisk analys **22**
5.1 De reella talen 22
5.2 Brouwers kontinuitetssats 25
6 Källor **32**

Kapitel 1

Inledning

I det här kapitlet ger vi en kort introduktion till intuitionismen, en historisk och filosofisk överblick, samt en kort redogörelse för BHK-tolkningen.

1.1 Intuitionism

För knappt hundra år sedan, under 1920-talet, härjade en polemisk debatt i den matematiska världen. Den sedermera kallade Grundlagenstreit lockade till sig många av Europas och världens skarpaste såväl matematiska som filosofiska hjärnor, däribland David Hilbert, Hermann Weyl och Ludwig Wittgenstein ([1] s. 2). Stridigheterna som då rådde har sedan länge svalnat, trots att någon självklar segrare aldrig utnämndes, och dess centrala fråga, hur vi bör förstå matematiken i sina grundvalar, anses idag vara av mindre brinnande intresse. Två av debattens sidor var dels det finitistiska lägret, representerat framförallt av Hilberts program som propagerade för en fullständig och konsistent axiomatisering av matematiken, och det logicistiska, inspirerat av Freges försök att härleda matematiken tillbaka på logiken. Båda dessa läger är idag underminerade. I och med Gödels publicering av sina ofullständighetssatser visade sig Hilberts mål vara ett luftslott, och Russels paradox åskådliggjorde ett blödande sår i själva hjärtat av logicismen. Dock fanns det ytterligare ett läger som deltog i Grundlagenstreiten, Brouwers intuitionism, och denna doktrin finns det än idag inga principiella hinder att sluta sig till ([1] s. 3).

År 1907 la den holländska matematikern L.E.J. Brouwer fram en avhandling om ämnet matematik och språk där han argumenterade för att matematiken inte består av annat än aktiviteten att utföra exakta, mentala konstruktioner; matematiken är ingenting annat än ett exakt slag av tänkande [2]. Denna idé stod i stark kontrast till den gängse, platonistiska synen att matematiken är någonting vi upptäcker, representerad av bland annat Frege, enligt vilken de matematiska resultaten på ett metafysiskt plan existerar långt innan någon mänsklig varelse blir medvetna om dem. Brouwers tankar stod även i polemik mot dem som Hilbert vid denna tid börjat utveckla, hans ovan nämnda program. Om matematiken är det exakta abstrakta tänkandets disciplin är det till sin renaste form en förlingvistisk aktivitet, vilket innebär att företeelser såsom notation och framförallt axiom inte är någonting annat än blotta hjälpmedel för tanken; detta medför givetvis att axiom som grundvalar för matematiken ter sig absurd. Givetvis fanns det föregångare till Brouwer, den namnkunnigaste måhända Poincaré ([3] s. 18), men Brouwer utvecklade denna doktrin av matematisk som konstruktioner längre än någon av föregångarna hade gjort. Brouwer var även sina filosofiska principer trogen, även när de visade sig leda till andra slutsatser än dem den klassiska matematiken producerade, den kanske mest omtalade hans tillbakavisande av lagen om den uteslutna tredje, men även när hans egna topologiska resultat visade sig strida mot de inom intuitionismen accepterade principerna tvekade han inte med att lägga de på sophögen [2].

I den här uppsatsen kommer vi att betrakta den intuitionistiska matematikens grunddrag. Vi kommer, i nästkommande kapitel, att undersöka de koncept som ligger till grund för fältet, däribland valföljder, sorter och spridningar. Därefter kommer vi att se ett par av intuitionismens principer, i synnerhet Brouwers kontinuitetsprincip, som i många avseenden kan anses vara startpunkten för intuitionismens divergens från den klassiska matematiken. Vi kommer sedan att sätta den funna teorin i arbete. Uppsatsen riktar in sig på den intuitionistiska analysen, studiet av de reella talens kontinuum. Detta tematiska val kan dels rättfärdigas med hänvisning till fältets historia; Brouwers egen intuitionistiska forskning bestod framförallt av ett studium av kontinuumet ([1] s.10-11). Den huvudsakliga anledningen till varför vi riktar vår uppmärksamhet åt detta håll är dock att det är inom just analysen som skillnaderna mellan intuitionismens resultat och den klassiska matematiken blir uppenbarast. Vår undersöknings direkta mål är således ett av dessa klassiskt icke-giltiga resultat, Brouwers kontinuitetssats, som säger att varje reellvärd funktion definierad på ett intervall är likformigt kontinuerlig på detta intervall; för detta samt att formulera det intuitionistiska kontinuumet vigs uppsatsens sista kapitel. Innan vi kan formulera kontinuitetssatsen behöver vi dock bevisa den så kallade fansatsen; detta gör vi i uppsatsens fjärde kapitel.

1.2 Filosofiska anmärkningar

Innan vi vänder oss till den intuitionistiska matematiken lägger vi i klartext de filosofiska överläggningar som motiverar denna, men då ämnet för den här uppsatsen är just intuitionismen som matematik räcker det för oss att i korthet sammanfatta dessa utan att förse utläggningen med filosofiska argument eller motiveringar. Följande sammanfattning är framför allt hämtad från van Dalen ([3], s. 4).

På det filosofiska planet kan tre övertygelser sägas ligga till grund för intuitionismen. Först och främst, som vi nämnde i föregående del, anser intuitionismen att vad en matematiker sysselsätter sig med är mentala konstruktioner, till skillnad från exempelvis en formell manipulering av symboler eller härledningar från logiska axiom. Det här medför att det matematiska språket egentligen är ett sekundärt fenomen som snarare bör behandlas som ett hjälpmedel för den matematiska aktiviteten än en essentiell del av aktiviteten själv.

Intuitionismen menar även att matematiska påståendens sanningsvärden inte är oberoende av vår kännedom om dem; ett visst matematiskt påstående besitter inte ett visst sanningsvärde innan det har påvisats av oss. Först när ett bevis föreligger kan vi tala om ett påstående som sant, och vi kan betrakta det som falskt först när vi kan bevisa att det leder till en motsägelse. Vi kan alltså inte anta att alla matematiska påståenden har ett av de två sanningsvärdena. Denna filosofiska övertygelse leder intuitionismen till att utesluta en generell formulering av lagen om det uteslutna tredje. Dock går det för vissa specifika sorter av matematiska påståenden att ge ett bevis för lagen om det uteslutna tredje ([3] s. 11).

Uteslutandet av en allmänt giltig version av lagen om det uteslutna tredje har en viktig konsekvens som vi i det följande kommer att behöva ta aktning på. För den intuitionistiska motsvarigheten till mängdbegreppet, vad vi kommer att lära känna som "sorter", kan vi inte anta, givet en sådan sort A och ett matematiskt objekt x, att x tillhör A eller inte. Förmågan hos en sort A att alla objekt kan delas in i tillhörande A eller inte tillhörande A kommer vi att prata om som avgörbarhet; att en sort A är avgörbar är en positiv förmåga i den bemärkelsen att vi måste ha ett bevis för att kunna bekräfta att A är det.

Tillsist betraktar intuitionismen matematiken som en fri skapelseprocess; den består inte av att mentalt återskapa eller förstå sanningen hos redan existerande matematiska objekt. Detta innebär att vi inte kan anta existensen av ett matematiskt objekt utan att först ha skapat eller har en process genom vilken vi kan skapa det.

Intuitionismen betraktar alltså matematiken som en aktivitet av exakta, mentala konstruktioner; vidare betraktade Brouwer alla andra aktiviteter som gör sig bruk av liknande mentala aktiviteter som en applicering av det matematiska tänkandet på andra ämnesområden [2]. Det här medförde att han ansåg logiken som avhängig matematiken, varför den intuitionistiska logiken bör betraktas som sekundär till matematiken. Detta till trots kan det i det följande vara av värde att ha en viss förståelse för intuitionismens tolkning av de logiska konnektiven. På grund av det betraktar vi, innan vi vänder oss till intuitionismens matematiska grundbegrepp, i korthet den så kallade BHK-tolkningen av de logiska konnektiven.

1.3 BHK-tolkningen

Det är som vi har sett inte nödvändigt för oss att inom intuitionistisk matematik bruka logiken. Dock finns det till följd av rent kommunikativa avväganden anledning för oss att använda oss av logisk symbolism. Brouwer-Heyting-Kolmogorov-(BHK)-tolkningen av de logiska konnektiven gör det explicit vad som krävs av oss för att bekräfta sanningsvärdet hos sammansatta matematiska påståenden. BHK-tolkningen ser ut på följande sätt ([3] s. 9):

1. Ett bevis för $A \wedge B$ är ett bevis för A och ett bevis för B.
2. Ett bevis för $A \vee B$ är ett bevis för A eller ett bevis för B samt ett antagande om att vi vill anse beviset som evidens för $A \vee B$.
3. Ett bevis för $A \rightarrow B$ är en konstruktion som omvandlar varje bevis för A till ett bevis för B.
4. Ett bevis för $\forall x A(x)$ är en konstruktion som omvandlar varje bevis för $d \in D$ till ett bevis för $A(d)$, där D är domänen för x.
5. Ett bevis för $\exists x A(x)$ ges av att konstruera $d \in D$ och ett bevis för $A(d)$.

Utläggningen är inte helt formell och vi kommer i det följande att återkomma till i synnerhet hur vi bör förstå tolkningen av existenskvantifikatorn.

Kapitel 2

Intuitionismens grundbegrepp

I det här avsnittet introducerar vi intuitionismens grundläggande begrepp valföljder, sorter, spridningar och fans.

2.1 Valföljder

2.1.1 Talföljder

Det centrala matematiska objektet för den intuitionistiska analysen är följden; man kan gå så långt som att hävda att fältet till sin kärna består av en analys av just dessa objekt ([5] s.282). Liksom inom den klassiska matematiken förstår vi en följd som en oändlig ordnad uppräkning, dvs. som en avbildning α från de naturliga talen till en klass matematiska objekt ([6] s.1). Till att börja med kommer vi här bara att betrakta följder av naturliga tal, men kommer i det följande stöta på följder av såväl rationella som reella tal.

Vi inleder det här avsnittet med att introducera notationen och definiera ett par operationer på talföljder. I enlighet med litteraturen ([3], [7], [8] etc.) reserveras grekiska gemener α, β, γ ... för *oändliga* talföljder medan $\bar{u}$,$\bar{v}$,$\bar{w}$ ... är variabler över *ändliga* talföljder.

Med $\alpha(n-1)$ avses den n:te termen i den oändliga talföljden α; med u_{n-1} avses den n:te termen av den ändliga talföljden $\bar{u}$. Alltså:

$$\alpha = \langle \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), ... \rangle,$$

$$\bar{u} = \langle u_0, u_1, ..., u_n \rangle.$$

Med $\bar{\alpha}(n)$ avses det n termer långa inledande segmentet av talföljden α, dvs.

$$\bar{\alpha}(n) = \langle \alpha(0), \alpha(1), ..., \alpha(n-1) \rangle.$$

Vi definierar även längdfunktionen ρ:

$$\rho(\bar{u}) = k := \bar{u} = \langle u_0, u_1, ..., u_{k-1} \rangle.$$

För de ändliga följderna $\bar{u}$ och $\bar{v}$, med $\rho(\bar{u}) = n$ och $\rho(\bar{v}) = m$, och det naturliga talet k definierar vi operationerna

$$\bar{u} \circ \bar{v} := \langle \bar{u}_0, \bar{u}_1, ..., \bar{u}_n, \bar{v}_0, \bar{v}_1, ..., \bar{v}_m \rangle,$$

$$\bar{u}^\frown k := \bar{u} \circ \langle k \rangle.$$

Därtill definierar vi även relationen

$$\bar{u} \preceq \bar{v} := \exists \bar{w}(\bar{v} = \bar{u} \circ \bar{w})$$

och säger att $\bar{u}$ är en föregångare till $\bar{v}$ samt att $\bar{v}$ är en efterföljare till $\bar{u}$.

För en talföljd α och en ändlig följd $\bar{u}$ definierar vi relationen

$$\alpha \in \bar{u} := \exists n(\bar{u} = \bar{\alpha}(n))$$

Vi säger att $\bar{u}$ är ett inledande segment av α samt att α går genom $\bar{u}$.

2.1.2 Valföljder

Hittills har inte talföljderna nämnvärt skilt sig från de som vi är bekanta med från den klassiska matematiken. Punkten för divergens för intuitionismen på det matematiska planet är introduktionen av så kallade valföljder (eng. (free-) choice sequences); talföljder vars termer genereras av den fria viljan, oberoende av regler eller föregående termer [9]. Innan vi introducerar dessa valföljder betraktar vi dock i korthet deras motsats, så kallade lagbundna följder.

En lagbunden talföljd är en oändlig ordnad följd vars termer genereras av en lag ([8] s. 327). Ett exempel på en lagbunden följd skulle vara α där $\alpha(n) = 2n$ för alla naturliga tal n. Vi kan förstå lagbundna talföljder som bestämda i sin helhet direkt genom den lag som genererar dem, dvs. vi behöver inte hänvisa till någonting annat än denna lag för att göra utsagor om följden.

Dessa ordinära, lagbundna talföljder kan nu kontrasteras mot de fria val-följderna, ibland kallade lagoberoende följder, men då vi mer eller mindre uteslutande kommer att sysselsätta oss med följder av detta slag reserverar vi begreppet valföljd för dessa. En valföljd är en oändlig ordnad följd vars termer genereras sekvensiellt, fritt och oberoende av de föregående termerna. För en valföljd α bestämmer vi $\alpha(n)$ successivt för varje naturligt tal n ([5] s. 285).

För att förstå hur detta matematiska objekt kan betraktas som välgrundat måste vi betrakta hur intuitionismen behandlar konceptet oändlighet. Inom intuitionismen anses alla oändligheter vara potentiella oändligheter; att tala om en matematisk struktur som oändlig innebär enligt intuitionismen att den genereras av en aldrig avslutad process ([10] s. 40-41). Oändliga strukturer är i ett fortlöpande tillstånd av att bli till. Då valföljder är just oändliga talföljder kan vi således aldrig säga oss ha kännedom om dem i sin helhet. Vid varje givet tillfälle kan vi bara säga oss känna till ett inledande, säg m termer långt, segment av valföljden α, men så till vida vi har fixerat värdena för $\bar{\alpha}(m)$ är valföljden hittills väldefinierad. Det är denna egenskap hos valföljden, som härrör ur ovanstående tolkning av oändlighetsbegreppet, som leder den intuitionistiska analysen till sina klassiskt säregna men likväl intressanta slutsatser [9].

I det följande kommer talföljderna α, β, γ ... antas vara valföljder. Det är dock viktigt att påpeka att vi kan inskärpa kraven på våra val av termer, men alltjämt hålla följden principiellt fri. Ett exempel är en valföljd α som är strängt stigande, dvs. att vi kräver att $\alpha(n+1) > \alpha(n)$; i det här fallet har vi skärpt kravet på valföljden utan att göra den till en lagbunden talföljd. Hos Rasmusson ([8] s. 327) kallas dessa valföljder lagberoende. Vi kommer dock inte att använda oss av den distinktionen; om inte ett visst lagberoende påpekas antas valföljden vara fullständigt fri.

Om två valföljder α och β ges till oss på samma sätt säger vi att de är intensionellt ekvivalenta ([10] s. 45). För denna ekvivalensrelation reserverar vi uttrycket $\alpha \equiv \beta$.

Extensionell ekvivalens definierar vi på följande sätt:

$$\alpha = \beta := \forall n(\alpha(n) = \beta(n)), \tag{2.1}$$

men då vi bara kan känna till ett inledande segment av en valföljd vid varje givet tillfälle kan det vara fallet att vi för de två valföljderna vet att $\alpha(i) = \beta(i)$ för alla naturliga tal $i \leq m$, men kan likväl inte försäkra oss om att $\alpha(i) = \beta(i)$ för $i > m$. På grund av det här kan vi endast försäkra oss om (2.1) givet att dess sanningsvärde är beroende endast av en begränsad mängd information, ett inledande segment av, α och β ([4], s.646), varför vi i det följande måste ha i åtanke att varje gång vi vill uttala oss om två valföljder som extensionellt ekvivalenta måste vi även ha ett kriterium för hur många termer av de båda följderna som måste vara ekvivalenta.

Det här påpekandet gör sig även gällande när vi talar om generella egenskaper beroende av valföljders extension. Vi säger att en egenskap A hos valföljder är extensionell om

$$\forall \alpha, \beta((\alpha = \beta \wedge A(\alpha)) \rightarrow A(\beta)).$$

För sådana egenskaper kräver vi att sanningsvärdet hos $A(\alpha)$ är beroende endast av ett inledande segment av α ([10] s.46).

Dock följder det direkt ur vår förståelse av intensionell och extensionell ekvivalens att

$$\alpha \equiv \beta \rightarrow \alpha = \beta,$$

även om det omvända inte nödvändigtvis är sant. Därtill vidhåller vi att intensionell ekvivalens är avgörbar ([4] s. 646):

$$\alpha \equiv \beta \vee \alpha \not\equiv \beta.$$

Vi godtar även det som hos van Dalen benämns som täthetsaxiomet; alla kombinatoriskt möjliga, ändliga följder kan förekomma som inledande segment av valföljder:

$$\forall \bar{u} \exists \alpha (\alpha \in \bar{u}).$$

2.2 Sorter

Vi har redan i föregående del talat om matematiska egenskaper som matematiska objekt, exempelvis valföljder, kan sägas ha. Det av intuitionismens grundläggande begrepp som försöker fånga denna tanke är sorter (eng. species).

Om A är en matematisk egenskap kan vi konstruera en sort, låt oss kalla den S, vars medlemmar är de objekt som innehar egenskapen A. Om vi låter x vara en variabel över den typen av objekt det rör sig om kan vi uttrycka sorten enligt:

$$S = \{x \mid A(x)\}.$$

Analogin till den klassiska matematikens mängdbegrepp är lätt att se. Dock följer det, då en sort principiellt kan ha oändligt många medlemmar, att vi, per samma argument som för valföljderna, måste förstå sorter som intensionellt givna, alltså som identifierade med den egenskap som avgör vilka objekt som tillhör sorten.

2.3 Spridningar

Det sista för intuitionismen grundläggande konceptet som ska introduceras här är det matematiska objektet spridning (eng. spread).

En spridning kan vi förstå som ett träd där varje väg identifierats med en valföljd, varför varje väg genom trädet är oändligt. En klyka, eller en nod, identifieras som den ändliga följd som motsvarar vägen från den tomma följden, som inleder varje spridning, fram till noden. Då det rör sig om en oändlig struktur gör vi rätt i att identifiera den med den process som genererar den, och vad som genererar en spridning är en så kallad spridningslag. Givet en spridning M har vi en spridningslag Γ_M som givet en ändlig följd $\bar{u}$ avgör om $\bar{u}$ är tillåten eller inte, dvs. huruvida $\bar{u}$ tillhör M eller inte, enligt:

$$\Gamma_M(\bar{u}) = \begin{cases} 0 & \textit{om } \bar{u} \textit{ är tillåten,} \\ 1 & \textit{annars} \end{cases}$$

Definitionen av en spridning ser alltså ut på följande sätt:

Definition 1. En spridningslag Γ_M är en regel som delar upp ändliga följder $\bar{u}$ i tillåtna och inte tillåtna som uppfyller följande kriterier:

$$\begin{gathered} \Gamma_M(\langle\ \rangle) = 0; \\ \forall \bar{u}\ \ (\ \Gamma_M(\bar{u}) = 0 \rightarrow \exists k\ (\ \Gamma_M(\bar{u}^\frown k) = 0))\ ; \\ \forall \bar{u}, \bar{v}\ (\ \bar{v} \preceq \bar{u} \wedge \Gamma_M(\bar{u}) = 0 \rightarrow \Gamma_M(\bar{v}) = 0); \\ \forall \bar{u}\ \ (\ \Gamma_M(\bar{u}) = 0 \vee \Gamma_M(\bar{u}) = 1)\ . \end{gathered}$$

Vi säger att om två spridningslagar tillåter precis samma följder genererar de samma spridning, varför spridningar i det här avseendet kan anses vara extensionellt givna.

En spridning genererad av en spridninglag består alltså av valföljder av naturliga tal. I likhet med Dummett ([10] s. 48) kallar vi dessa nakna spridningar. För att skapa spridningar bestående av andra matematiska objekt, så kallade påklädda spridningar, använder vi oss av en komplementeringslag.

Definition 2. En komplementeringslag Λ_M är en lag som givet en naken spridning M tillskriver till varje tillåten ändlig följd ett matematiskt objekt tillhörande en viss sort S. Alltså:

$$\begin{gathered} \Gamma_M(\bar{u}) = 0 \rightarrow \Lambda_M(\bar{u}) \in S; \\ \alpha \in M \rightarrow \Lambda_M(\alpha) = \langle \Lambda_M(\bar{\alpha}(0), \Lambda_M(\bar{\alpha}(1), \Lambda_M(\bar{\alpha}(2), ...\rangle. \end{gathered}$$

Vad vi i det följande i synnerhet kommer att intressera oss för är dock en speciell typ av spridning, kallad fan (från eng. finitary spread). En fan är en spridning där varje nod endast har ett ändligt antal noder direkt under sig.

Definition 3. En spridning M är en fan om spridningslagen Γ_M dessutom uppfyller villkoret:

$$\forall \bar{u}(\Gamma_M(\bar{u}) = 0 \to \exists k \forall m > k(\Gamma_M(\bar{u}^\frown m) = 1))$$

Kapitel 3

Intuitionistiska principer

I det här kapitlet kommer vi att introducera ett par intuitionistiska principer samt se hur de på ett naturligt sätt uppstår ur intuitionismens tolkningar av existenskvantifikatorn och oändlighetsbegreppet. Det vore inte fullständigt orimligt att kalla nedanstående principer för axiom, dock medför detta begrepp en hel del formaliteter som i den föreliggande kontexten är otillbörliga; därtill finns det rent historiskt-filosofiska anledningar att rygga tillbaka inför detta begrepp. För att undvika sådana komplikationer väljer vi istället att använda oss av begreppet princip.

3.1 Urvalsprincipen

Den första principen vi här ska betrakta skulle kunna sägas vara den intuitionistiska motsvarigheten till vad som i klassisk matematik brukar kallas urvalsaxiomet. Allmänt anses detta axiom som ett av de svårare att rättfärdiga ([10] s. 37). För intuitionismen faller det sig dock naturligt med tanke på hur existenskvanitifikatorn tolkas.

Urvalsprincipen ser ut på följande sätt:

Urvalsprincipen.

$$\forall n \exists m A(n, m) \rightarrow \exists \varphi \forall n A(n, \varphi(n))$$

där $n, m \in \mathbb{N}$ och $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Betraktar vi försatsen

$$\forall n \exists m A(n, m)$$

ser vi att den under den intuitionistiska tolkningen av kvantifikatorerna påstår att vi för varje naturligt tal n har en effektiv och konstruerbar metod att hitta ett naturligt tal m så att $A(n,m)$. Den här effektiva och konstruerbara metoden kommer rimligtvis att bestå av en funktion φ mellan naturliga tal sådan att $\varphi(n) = m$, alltså att

$$\exists\varphi\forall n A(n, \varphi(n)),$$

vilket är precis vad urvalsprincipens följdsats säger ([10] s. 38).

Urvalsprincipen sålunda formulerad är alltså en direkt följd av intuitionismens tolkning av existenskvantifikatorn, närmare bestämt att den förutsätter att det föreligger en metod för att konstruera det matematiska objekt vars existens ska påvisas.

3.2 Kontinuitetsprinciper

3.2.1 Brouwers kontinuitetsprincip

I avsnittet om valföljder påpekade vi att vi vid varje givet tillfälle bara kan säga oss ha kännedom om ett ändligt inledande segment av en viss valföljd. Ett par konsekvenser av detta har vi redan sett, framförallt att alla extensionella egenskaper måste vara beroende av endast ett sådant inledande segment. Vi ska nu betrakta ytterligare en sådan konsekvens, nämligen Brouwers kontinuitetsprincip. I och med denna princip börjar den intuitionistiska matematiken verkligen divergera från sin klassiska motsvarighet [9]; som vi kommer att se är det tack vare denna princip som vi kan bevisa Brouwers kontinuitetssats.

På liknande sätt som i resonemanget kring urvalsprinsipen betraktar vi påståenden på formen

$$\forall\alpha\exists n(A(\alpha, n))$$

där n fortfarande är ett naturligt tal men där α är en valföljd och A en extensionell egenskap.

Som vi påpekade i avsnittet om valföljder måste sanningsvärdet hos $(A(\alpha, n))$ vara beroende av endast ett inledande segment av α. Vi kan alltså hitta ett naturligt tal r sådant att $(A(\bar{\alpha}(r), n))$. Vidare måste, så till vida $\bar{\alpha}(r)$ är tillräckligt långt för att hitta n, sanningsvärdet av påståendet vara oberoende av resten av α, dvs. av $\alpha(k)$ där $k \geq r$.

Vidare innebär det här då att alla valföljder β som delar detta inledande segment också kommer att stå i relationen A till något tal $m \leq n$. Detta ger upphov till följande princip ([6] s. 3):

Brouwers kontinuitetsprincip.

$$\forall \alpha \exists n A(\alpha, n) \to \forall \alpha \exists n \exists m \forall \beta \in \bar{\alpha}(n)(A(\beta, m)).$$

3.2.2 Den starka kontinuitetsprincipen

Brouwers kontinuitetsprincip är däremot inte helt uttömmande. För att se vilka vidare konsekvenser vi kan dra utifrån den vänder vi oss till funktionaler från valföljder till naturliga tal. Låt oss säga att vi för en given sådan funktional Φ, en viss valföljd α och ett visst naturligt tal k har

$$\Phi(\alpha) = k.$$

Liksom för extensionella egenskaper måste värdet k vara beroende av endast ett ändligt inledande segment av α. Med andra ord finns det återigen ett naturligt tal r sådant att

$$\Phi(\alpha) = \Phi(\bar{\alpha}(r)) = k.$$

Enligt samma argumentativa linje som för extensionella egenskaper innebär detta att alla valföljder som delar detta inledande segment $\bar{\alpha}(r)$ kommer att tilldelas samma värde av Φ. Vad vi alltså har visat är ett kontinuitetsvillkor för funktionaler ([3] s.208-209):

$$\forall \alpha \exists r \forall \beta \in \bar{\alpha}(r)(\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)).$$

Resonemanget behöver däremot inte ta slut här. Om vi kräver att funktionalen är överallt definierad, dvs. definierad för alla valföljder, finns det för varje valföljd ett inledande segment långt nog för att beräkna värdet på Φ. Vidare måste det vara fallet att det finns ett kortaste sådant inledande segment.

Givet en överallt definierad funktional Φ och en valföljd α bör det alltså finnas en metod för oss att för alla naturliga tal n avgöra huruvida $\bar{\alpha}(n)$ är tillräckligt långt för att beräkna $\Phi(\alpha)$ eller inte. Till varje sådan metod kan vi nu definiera en så kallad grannskapsfunktion från ändliga talföljder till naturliga tal som talar om för oss huruvida ett inledande segment är tillräckligt långt eller inte. Definitionen för en sådan grannskapsfunktion ser ut på följande sätt ([3] s. 211):

Definition 4. Givet en överallt definierad funktional $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ och en ändlig följd $\bar{\alpha}(n)$ definierar vi grannskapsfunktionen e enligt:

$$e(\bar{\alpha}(n)) = \begin{cases} 0 & \textit{om } \bar{\alpha}(n) \textit{ inte är tillräckligt långt för att beräkna } \Phi(\alpha); \\ \Phi(\alpha) + 1 & \textit{annars.} \end{cases}$$

För en sådan funktion definierar vi även

$$e(\alpha) = n := \exists m(e(\bar{\alpha}(m)) = n + 1).$$

Vi låter sorten K_0 utgöras av alla sådana grannskapsfunktioner.

Om vi nu återigen betraktar påståendet

$$\forall\alpha\exists n(A(\alpha, n))$$

kan vi göra anmärkningen, analogt med vårt resonemang om urvalsprincipen, att den intuitionistiska tolkningen av existenskvantifikatorn kräver att det finns en effektiv och konstruerbar metod för att givet α hitta n så att $A(\alpha, n)$. Med andra ord ska det finnas en funktional från valföljder till naturliga tal. Denna ska vidare vara definierad för alla valföljder α. Som vi såg är det precis funktionaler av detta slag som vi kan konstruera grannskapsfunktioner till. Vad vi nu har resonerat oss fram till är följande kontinuitetsprincip ([3] s. 212):

Stark kontinuitetsprincip.

$$\forall\alpha\exists n A(\alpha, n) \rightarrow \exists e \in K_0 \forall\alpha(A(\alpha, e(\alpha))).$$

Vi har nu resonerat oss fram till tre intuitioniskt giltiga principer, urvalsprincipen, Brouwers kontinuitetsprinsip och den starka konstinuitetsprincipen, samtliga naturliga konsekvenser av den intuitionistiska tolkningen av existenskvantifikatorn samt det faktum att vi endast kan säga oss känna till ett ändligt inledande segment av en valföljd vid varje givet tillfälle. Det här avslutar vår redogörelse för intuitionismens grunder. Nu ska vi vända oss till vad för matematiska konsekvenser dessa principer har, och vi börjar med den så kallade fansatsen.

Kapitel 4

Fansatsen

4.1 Inledning

Fansatsen är en av de viktigaste och mest kraftfulla satserna för den intuitionistiska analysen. Trots det figurerade den när den först bevisades av Brouwer endast som ett korrelat till den mer omfattande spärrningssatsen (eng. the Bar Theorem) ([10] s. 68). Dock har det sedemera visat sig att alla viktiga konsekvenser av denna större sats härrör just av den del som vi idag kallar fansatsen ([3] s. 217).

Trots dess vikt för den intuitionistiska analysen råder det en viss ambivalens kring hur fansatsen bör behandlas. Dummett väljer att bevisa ett flertal versioner av den ([10] s.47-63); Heyting bevisar en form som skiljer sig från den gängse ([7] s. 42-44); medan van Dalen accepterar fansatsen som axiom ([3] s. 218). Vi kommer här att framförallt använda oss av Dummett.

Enkelt uttryckt kan fansatsen sägas vara en intuitionistisk motsvarighet till satsen att varje ändligt träd har en längsta väg, vad vi i klassisk matematik känner som (kontrapositionen till) Königs lemma ([1] s. 17). Trädet kommer givetvis att bestå av en spridning, närmare bestämt av en fan, men då vi förstått vägarna genom en sådan som valföljder, oändliga matematiska strukturer, har vi för tillfället inget sätt att representera ett ändligt träd. Innan vi kan formulera själva fansatsen måste vi först hitta ett sådant sätt.

4.2 Spärrningsinduktion

För att representera att en nod i en spridning är spärrad (eng. barred) använder vi oss av följande definition:

Definition 5. En sort R vars medlemmar är ändliga följder sägs spärra en nod

$\bar{u}$ i en spridning M om

$$\forall \alpha \in M(\alpha \in \bar{u} \to \exists n(\bar{\alpha}(n) \in R)).$$

Hur själva sorten R ska konstrueras behöver vi för tillfället inte precisera. Poängen med R är att vi betraktar alla noder $\bar{\alpha}(n)$ i R som avslutande. Dock är det viktigt att göra följande påpekande: då vi vill använda oss av R för att representera avslutade vägar genom fanen är ett rimligt önskemål att vi givet ett inledande segment av en valföljd vet om den är spärrad eller inte. Vi begär alltså att sorten R är avgörbar ([10] s. 52), dvs. att sorten uppfyller villkoret:

$$\forall \bar{u}(\bar{u} \in R \vee \bar{u} \notin R)$$

För att i nästkommande avsnitt bevisa fansatsen kommer vi att använda oss av det som inom litteraturen kallas spärrningsinduktion (eng. bar induction). Spärrningsinduktion är en princip som, förutsatt att alla valföljder genom en fan vid något tillfälle är spärrad, låter oss sluta oss till att hela fanen är spärrad. För att konkretisera detta definierar vi, givet spärrningssorten R, först relationen Q mellan en ändlig följd i fanen M och ett naturligt tal p enligt:

$$Q(\bar{u}, p) := \forall \alpha \in \bar{u} \exists n \leq p(\bar{\alpha}(n) \in R)$$

Därtill bestämmer vi även sorten A:

$$A := \{\bar{u} | \exists p(Q(\bar{u}, p))\}.$$

Givetvis tillhör de ändliga följderna i R även A, varför R är en delsort av A. Då vi inskärper att R ska vara avgörbar, gäller detta även A.

Med A sålunda konstruerad gäller även följande resultat, som vi kommer att använda som induktionssteg:

$$\forall k(\Gamma_M(\bar{u}^\frown k) = 0 \to \bar{u}^\frown k \in A) \to \bar{u} \in A) \tag{4.1}$$

För att inse detta, noterar vi att då M är en fan gäller för varje $\bar{u}$ i M att det endast finns ändligt många k_i så att

$$\Gamma_M(\bar{u}^\frown k_i) = 0. \tag{4.2}$$

Alltså kan vi hitta ett tal q så att

$$\forall k > q(\Gamma_M(\bar{u}^\frown k) = 1).$$

Vi kan låta k_0,k_1, ..., k_r vara en indexerad uppräkning av alla k_i så att (4.2) är uppfyllt. Då vi enligt antagandet vet att alla $\bar{u}^\frown k_i$ är i A för alla sådana k_i finns det enligt definitionen av A en uppräkning p_0,p_1, ..., p_r så att

$$Q(\bar{u}^\frown k_i, p_i).$$

Vi tar nu

$$p = \max_{i \leq r}(p_i),$$

för vilken det är fallet att

$$Q(\bar{u}, p).$$

vilket per definitionen av A innebär att $\bar{u}$ är i A.

Att nu visa att hela fanen M är i A om varje valföljd har ett inledande segment i R är lätt. Om en nod $\bar{u}$ är i A är även alla efterföljare till $\bar{u}$ i A. Det räcker således för oss att visa att den tomma valföljden $\langle\rangle$ är i A, då alla valföljder har denna som inledande segment.

Givet R och A konstruerade på ovanstående sätt är detta lätt att resonera sig fram till. Förutsatt att alla valföljder α i M har ett inledande segment $\bar{\alpha}(n)$ i R, ligger även alla dessa $\bar{\alpha}(n)$ i A. Med detta som induktionsbas följer det direkt ur induktionssteget (4.1) att även den tomma mängden $\langle\rangle$ är i A. Vad vi med detta resonemang har bevisat är följande formulering av spärrningsinduktion:

Spärrningsinduktion.

$$\begin{gathered}\forall\alpha \in M\exists n(\bar{\alpha}(n) \in R)\wedge\\ \forall\bar{u}(\bar{u} \in R \vee \bar{u} \notin R)\wedge\\ \forall\bar{u} \in M(\bar{u} \in R \to \bar{u} \in A) \to\\ \to \langle\rangle \in A.\end{gathered}$$

4.3 Fansatsen

Med hjälp av spärrningsinduktionen är det nu lätt för oss att bevisa följande formulering av fansatsen:

Fansatsen. För en fan M och en sort R av ändliga följder gäller

$$\begin{gathered}\forall\alpha \in M\exists n(\bar{\alpha}(n) \in R) \wedge \forall\bar{u}(\bar{u} \in R \vee \bar{u} \notin R) \to\\ \to \exists p\forall\alpha \in M\exists n \leq p(\bar{\alpha}(n) \in R).\end{gathered}$$

Bevis. Vi noterar att de två första konjunkterna av föregående avsnitts formulering av spärrningsinduktion uppfylls av satsens antaganden; att även

$$\forall \bar{u} \in M(\bar{u} \in R \rightarrow \bar{u} \in A)$$

gäller följer ur vår konstruktion av sorten A.

Vi kan alltså använda oss av spärrningsinduktion och sluter oss således till att $\langle\rangle$ är i A. Betraktar vi definitionen av A ser vi att detta är ekvivalent med

$$\exists p Q(\langle\rangle, p) \Leftrightarrow \exists p \forall \alpha \in \langle\rangle \exists n \leq p(\bar{\alpha}(n) \in R)$$

Men alla valföljder α går genom den tomma valföljden, och då i synnerhet alla α i M, varför detta i sin tur är ekvivalent med

$$\exists p \forall \alpha \in M \exists n \leq p(\bar{\alpha}(n) \in R)$$

vilket är vad fansatsen säger. Därmed är satsen bevisad.

4.4 Den utökade fansatsen

I ovanstående bevis har vi inte tagit till vara på våra kontinuitetsprinciper. Som vi snart ska se tillåter den starkare av dessa oss att utöka fansatsen till att uttala sig om egenskaper hos valföljder. Därtill kan vi tack vare denna princip, genom att fixera definitionen av spärrningssorten R, göra oss av med det explicita kravet av att R ska vara avgörbar. Den utökade fansatsen, Heytings version ([7]s. 42), har följande utseende ([10] s. 62-63):

Utökade fansatsen. För en fan M och en extensionell egenskap A gäller

$$\begin{gathered}\forall \alpha \in M \exists q A(\alpha, q) \rightarrow \\ \rightarrow \exists m \forall \alpha \in M \exists q \forall \beta \in \bar{\alpha}(m)(A(\beta, q)).\end{gathered}$$

Bevis. Vår starka kontinuitetsprincip applicerad på försatsen ger oss att det finns en grannskapsfunktion e så att

$$\forall \alpha \in M \exists m \exists n(e(\bar{\alpha}(m)) = n + 1 \wedge \forall r < m(e(\bar{\alpha}(r)) = 0) \wedge A(\alpha, n)).$$

Vi kan nu definiera spärrningssorten R som de kortaste ändliga följder som är långa nog för att e ska vara nollskild, dvs.

$$R := \{\bar{u} | e(\bar{u}) > 0 \wedge \forall \bar{v} \prec \bar{u}(e(\bar{v}) = 0)\}.$$

Sorten R är nu avgörbar och för alla valföljder i M finns det ett n så att $\bar{\alpha}(n)$ är i R. Vi kan alltså applicera fansatsen och sluta oss till

$$\forall\alpha \in M \exists n \leq m(\bar{\alpha}(n) \in R).$$

Genom vår definition av R betyder det här att vi för alla α i M kan hitta ett tal $n \leq m$ och ett tal q så att

$$e(\bar{\alpha}(n)) = q + 1 \wedge \forall r < n(e(\bar{\alpha}(r) = 0) \wedge A(\alpha, q).$$

Om vi nu väljer en valföljd β som går genom $\bar{\alpha}(m)$ går β givetvis även genom $\bar{\alpha}(n)$. Därmed är det fallet att

$$e(\beta) = q$$

och

$$A(\beta, q).$$

Vi har därmed visat att

$$\exists m \forall\alpha \in M \exists q \forall\beta \in \bar{\alpha}(m)(A(\beta, q)).$$

Satsen är därmed bevisad.

Vi har nu formulerat och bevisat den klassiska formuleringen av fansatsen. Tack vare vår utökade kontinuitetsprincip kunde vi även bevisa en utökad version som tillåter oss att dra slutsatser om generella extensionella egenskaper hos valföljder tillhörande en fan.

Det är nu dags för oss att använda oss av den hittills vunna teorin och utveckla grunderna för den intuitionistiska analysen.

Kapitel 5

Intuitionistisk analys

5.1 De reella talen

Vi börjar med att definiera det intuitionistiska kontinuumet. Detta kommer att ske genom Cauchyföljder konkretiserade genom så kallade reella talgeneratorer. Liksom i det klassiska fallet har vi som utgångspunkt de rationella talen, och då konstruktionen av $\mathbb{Q}$ inte nämnvärt skiljer sig från den klassiska ([3] s. 251) kommer vi i det följande att ta dem för givna.

Vi definierar reella talgeneratorer på följande sätt ([3] s. 253-254):

Definition 6. En valföljd av rationella tal $\langle a_n \rangle$ kallas en reell talgenerator om

$$\forall k \exists n \forall m > n(|a_m - a_n| < 2^{-k})$$

för $k, n \in \mathbb{N}$.

För reella talgeneratorer definierar vi två ekvivalensrelationer ([3] s. 253).

Definition 7. Två reella talgeneratorer $\langle a_n \rangle$ och $\langle b_n \rangle$ är identiska om $a_k = b_k$ för alla naturliga tal k. Vi skriver $\langle a_n \rangle \equiv \langle b_n \rangle$.

Definition 8. Två reella talgeneratorer $\langle a_n \rangle$ och $\langle b_n \rangle$ sammanfaller om

$$\forall k \exists n \forall m > n(|a_m - b_m| < 2^{-k})$$

för alla naturliga tal p, och där $k, n \in \mathbb{N}$. Vi skriver $\langle a_n \rangle = \langle b_n \rangle$.

Därtill definierar vi följande två relationer (van Dalen s. 255):

Definition 9. För två reella talgeneratorer $\langle a_n \rangle$ och $\langle b_n \rangle$ säger vi att $\langle b_n \rangle$ är större än $\langle a_n \rangle$ om

$$\exists k, n \forall m (b_{n+m} - a_{n+m} > 2^{-k})$$

där $k, n, m \in \mathbb{N}$. Vi skriver $\langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle$.

Definition 10. För två reella talgeneratorer $\langle a_n \rangle$ och $\langle b_n \rangle$ säger vi att $\langle a_n \rangle$ och $\langle b_n \rangle$ är åtskilda om

$$(\langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle) \vee (\langle b_n \rangle < \langle a_n \rangle).$$

Vi skriver $\langle a_n \rangle \# \langle b_n \rangle$.

I det följande kommer vi även att använda oss av notationen

$$\langle a_n \rangle \not> \langle b_n \rangle := \neg(\langle a_n \rangle > \langle b_n \rangle).$$

De reella talen definieras nu som en sort av reella talgeneratorer som sammanfaller med en viss talgenerator ([10] s. 27).

Definition 11. Ett reellt tal är en sort x på formen

$$x := \{\langle a_n \rangle | \langle b_n \rangle = \langle a_n \rangle\}$$

för någon reell talgenerator $\langle b_n \rangle$, vilken vi kallar kanonisk talgenerator.

Det föreligger inga hinder med att låta den kommande teorin helt utvecklas i termer av kanoniska talgeneratorer ([10] s. 27). För att förenkla notationen kommer vi dock att använda oss av de reella talen x, y, z ... som då förstås som sorter definierade på ovanstående sätt.

För reella tal definierade på det här sättet introducerar vi följande operationer ([3] s. 258):

Definition 12. För två reella tal x och y, där

$$x = \{\langle a_n \rangle | \langle b_n \rangle = \langle a_n \rangle\}$$
$$y = \{\langle a_n \rangle | \langle c_n \rangle = \langle a_n \rangle\}$$

definierar vi operationerna:

$$x + y := \{\langle a_n \rangle | \langle b_n + c_n \rangle = \langle a_n \rangle\}$$
$$x - y := \{\langle a_n \rangle | \langle b_n - c_n \rangle = \langle a_n \rangle\}$$
$$|x| := \{\langle a_n \rangle | \langle |b_n| \rangle = \langle a_n \rangle\}$$

Vi kan nu ge en definition för den intuitionistiska kontinuumet ([7] s. 37).

Definition 13. Låt R vara egenskapen att vara ett reellt tal. De reella talen $\mathbb{R}$ definieras som sorten

$$\mathbb{R} := \{x|R(x)\},$$

där x är ett reellt tal.

Vi har nu gett en intuitionistisk formulering av kontinuumet i termer av reella talgeneratorer. Innan vi går vidare till att formulera och bevisa Brouwers kontinuitetssats kan det dock vara nyttigt att försäkra oss om att $\mathbb{R}$ sålunda definierad är komplett. Detta ändamål tjänar följande två definitioner ([10] s. 38-39):

Definition 14. En följd av reella tal $\langle x_n \rangle$ är en Cauchyföljd om

$$\forall k \exists n \forall m > n(|x_m - x_n| < 2^{-k})$$

där $k, n, m \in \mathbb{N}$.

Definition 15. En följd av reella tal $\langle x_n \rangle$ konvergerar mot det reella talet y om

$$\forall k \exists n \forall m > n(|y - x_m| < 2^{-k})$$

där $k, n, m \in \mathbb{N}$. Vi skriver

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_n \rangle = y.$$

Vi visar nu att $\mathbb{R}$ är fullständig ([10] s. 39).

Sats 1. Varje Cauchyföljd av reella tal konvergerar.

Bevis. Varje term x_n i en Cauchyföljd $\langle x_n \rangle$ ges genom en reell talgenerator $\langle r_i^{(n)} \rangle$. Med andra ord

$$\forall n \forall k \exists q \forall m > q(|r_m^{(n)} - r_q^{(n)}| < 2^{-k}).$$

Med hjälp av urvalsprincipen kan vi skriva om det här i termer av en funktion φ:

$$\forall n \forall k \forall m > \varphi(n,k)(|r_m^{(n)} - r_{\varphi(n,k)}^{(n)}| < 2^{-k}). \tag{5.1}$$

Vi definierar nu en ny följd rationella tal $\langle s_n \rangle$ genom

$$s_n = r^{(n)}_{\varphi(n,n)}$$

och vill nu visa att $\langle s_n \rangle$ är en reell talgenerator. Ekvation (5.1) och definitionen av $\langle s_n \rangle$ ger oss

$$\forall n \forall m > \varphi(n,n)(|r^{(n)}_m - s_n| < 2^{-n}),$$

vilket innebär att

$$\forall n(|x_n - s_n| \ngtr 2^{-n}).$$

Vi kan nu göra följande jämförelse:

$$\begin{gathered}\forall m > n(|s_m - s_n| \ngtr \\ \ngtr |s_m - x_m| + |x_m - x_n| + |s_n - x_n| < \\ < 2^{-m} + 2^{-k-1} + 2^{-n} < 2^{-k}).\end{gathered}$$

Alltså är $\langle s_n \rangle$ en reell talgenerator. Vi kaller det reella tal den bestämmer för y. Givet k kan vi nu hitta ett $n \geq k+1$ så att

$$\forall m > n|y - s_m| < 2^{-k-1}$$

vilket innebär att

$$\begin{gathered}\forall m > n(|y - x_m| \ngtr \\ \ngtr |y - s_m| + |s_m| < \\ < 2^{-k-1} + 2^{-m} < 2^{-k}).\end{gathered}$$

Alltså konvergerar $\langle x_n \rangle$ mot y. Satsen är därmed bevisad.

5.2 Brouwers kontinuitetssats

Vi kommer nu till den punkt där konsekvenserna av den intuitionistiska matematikens grundprinciper hamnar i klartext. Hittills har vi betraktat en rad koncept som är unika för den intuitionistiska matematiken, däribland valföljder och spridningar, samt principer såsom Brouwers kontinuitetsprincip. Än så länge har dock den framlagda teorin varit mer eller mindre, om inte nödvändigtvis kompatibel, i alla fall inte motsägande det vi känner som klassisk analys. I det här avsnittet kommer vi att betrakta Brouwers kontinuitetssats, vilken säger att alla överallt definierade, reellvärda funktioner är likformigt kontinuerliga. Det här resultatet är uppenbarligen inte sant i den klassiska analysen.

Innan vi kan vända oss till själva satsen kommer vi dock att behöva ytterligare ett par begreppsbestämningar; framförallt måste vi definiera vad vi menar med att en reellvärd funktion är likformigt kontinuerlig. Eftersom vi har definierat de reella talen med hjälp av valföljder förstår vi reellvärda funktioner f som avbildningar där, så till vida x är ett reellt tal, är även $f(x)$ det (Dummett s. 81). För dessa kräver vi dessutom att det för två reella tal x och y, att funktionen uppfyller villkoret

$$x = y \to f(x) = f(y).$$

För sådana funktioner definierar vi likformig kontinuitet på följande sätt ([10] s. 81):

Definition 16. En reellvärd funktion f är likformigt kontinuerlig på ett intervall $[u, v]$ om

$$\forall k \exists m \forall x, y \in [u, v](|x - y| < 2^{-m} \to |f(x) - f(y)| < 2^{-k}),$$

där $k, m \in \mathbb{N}$ och $x, y \in \mathbb{R}$.

Vi kan nu börja röra oss mot en formulering av och ett bevis för Brouwers kontinuitetssats. Vi kommer endast att bevisa den för fallet $[0, 1]$, men resonemanget kan generaliseras till vilket intervall $[u, v]$ som helst och även till hela $\mathbb{R}$ ([10] s. 87).

Vi börjar med att skapa en spridningsrepresentation av intervallet $[0, 1]$. Vi låter M vara den nakna ternära spridningen, dvs. spridningen med spridningslagen

$$\Gamma_M(\bar{u}) = 0 \leftrightarrow \forall i \leq \rho(\bar{u})(0 \leq u_i \leq 2).$$

Komplementeringslagen Λ_M definierar vi

$$\Lambda_M(\bar{u}) = p \cdot 2^{-k-1}$$

där $k = \rho(\bar{u})$ och

$$p = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} (u_i \cdot 2^{k-i-1}). \tag{5.2}$$

För $\bar{u}_{min} = \langle 0, 0, ...0 \rangle$ har vi uppenbarligen

$$\Lambda_M(\bar{u}_{min}) = 2^{-k-1}$$

som går mot 0 när $\rho(\bar{u})$ går mot ∞, medan för $\bar{u}_{max} = \langle 2, 2, ...2 \rangle$ har vi

$$\Lambda_M(\bar{u}_{max}) = 2^{-k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{-i-1} = \sum_{i=0}^{k} 2^{-i-1}$$

som går mot 1 när $\rho(\bar{u})$ går mot ∞. För alla $\bar{u}$ i M har vi alltså

$$0 \leq \Lambda_M(\bar{u}) \leq 1.$$

För att visa att M är en spridningsrepresentation av $[0, 1]$ måste vi däremot även visa att

$$\forall x \in [0, 1] \exists \alpha \in M(\Lambda_M(\alpha) = x).$$

För detta ändamål skapar vi för varje följd $\bar{u}$ i M en ny spridning M' bestående av den gren av spridningen på vilken $\bar{u}$ ligger (föregångarna och efterföljarna till $\bar{u}$). Spridningslagen får följande utseende:

$$\Gamma_{M'}(\bar{v}) = 0 \leftrightarrow \Gamma_M(\bar{v}) = 0 \wedge (\bar{u} \preceq \bar{v} \vee \bar{v} \preceq \bar{u}).$$

Som komplementeringslag återanvänder vi Λ_M. Att alla reella tal mellan 0 och 1 representeras av en följd i M följer nu av följande, starkare sats [10]:

Sats 2. Givet $\bar{u} \in M$ och spridningen M' gäller för alla

$$x \in [(p-1) \cdot 2^{-\gamma-1}, (p+1) \cdot 2^{-\gamma-1}],$$

där $\gamma = \rho(\bar{u})$ och p definierad som (5.2), att

$$\exists \alpha \in M'(\Lambda_M(\alpha) = x).$$

Bevis. Vi vill alltså visa att alla reella tal x i

$$I_p = [(p-1) \cdot 2^{-\gamma-1}, (p+1) \cdot 2^{-\gamma-1}]$$

är representerade av en följd i M'.

Då x är ett reellt tal bestäms den av en reell talgenerator β. Vårt mål är nu att konstruera en valföljd α i M' sådan att $\Lambda_M(\alpha)$ sammanfaller med β. För att α överhuvudtaget ska vara i M' måste vi för $m < \gamma$ välja

$$\alpha(m) = u_m$$

För $m \geq \gamma$ definierar vi $\alpha(n)$ rekursivt. Anta således att vi har bestämt $\bar{\alpha}(m)$ på ett sådant sätt att

$$\Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) = q_1 \cdot 2^{-m-1}$$

och

$$x \in [(q_1 - 1) \cdot 2^{-m-1}, (q_1 + 1) \cdot 2^{-m-1}] = I_{q_1},$$

dvs. så att

$$|\Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) - x| < 2^{-m-1}.$$

Låt nu $\delta = \Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) - x$, och bestäm $\alpha(m)$ enligt:

$$\alpha(m) = \begin{cases} 0 & om\ \delta > 0\ och\ |\delta| > 2^{-m-2} \\ \\ 1 & om\ |\delta| < 2^{-m-2} \\ \\ 2 & om\ \delta < 0\ och\ |\delta| > 2^{-m-2} \end{cases}$$

Vi vill nu visa att detta medför att

$$|\Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) - x| < 2^{-m-2},$$

med andra ord att

$$x \in [(q_2 - 1) \cdot 2^{-m-1}, (q_2 + 1) \cdot 2^{-m-2}] = I_{q_2}.$$

Först noterar vi följande tre faktum

$$\alpha(m) = 0 \Rightarrow \Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) = \Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) - 2^{-m-2}$$

$$\alpha(m) = 2 \Rightarrow \Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) = \Lambda_M(\bar{\alpha}(m))$$

$$\alpha(m) = 0 \Rightarrow \Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) = \Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) + 2^{-m-2}.$$

Vi visar med hjälp av detta att de olika fallen alla medför att x är i I_{q_2}.

Fall 1. Om alltså $2^{-m-2} < |\Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) - x| < 2^{-m-1}$ och $x < \Lambda_M(\bar{\alpha}(m))$ sätter vi $\alpha(m) = 0$. Vi får då att:

$$\Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) = q_2 \cdot 2^{-m-2} = \Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) - 2^{-m-2}.$$

Intervallet I_{q_2} är då:

$$[(q_2 - 1) \cdot 2^{-m-2}, (q_2 + 1) \cdot 2^{-m-2}] = [q_2 \cdot 2^{-m-2} - 2^{-m-2}, q_2 \cdot 2^{-m-2} + 2^{-m-2}] =$$

$$= [\Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) - 2^{-m-1}, \Lambda_M(\bar{\alpha}(m))].$$

Från $x < \Lambda_M(\bar{\alpha}(m))$ och att x är i I_{q_1} följer att x är i I_{q_2}.

Fall 2. Är istället $|\Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) - x| < 2^{-m-2}$ sätter vi $\alpha(m) = 1$. Vi får då att:

$$\Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) = q_2 \cdot 2^{-m-2} = \Lambda_M(\bar{\alpha}(m)).$$

Intervallet I_{q_2} är då:

$$[(q_2-1)\cdot 2^{-m-2}, (q_2+1)\cdot 2^{-m-2}] = [\Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) - 2^{-m-2}, \Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) + 2^{-m-2}]$$

Då $|\Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) - x| < 2^{-m-2} \Leftrightarrow |\Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) - x| < 2^{-m-2}$ är x i I_{q_2}.

Fall 3. Om $2^{-m-2} < |\Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) - x| < 2^{-m-1}$ och $x > \Lambda_M(\bar{\alpha}(m))$ sätter vi $\alpha(m) = 2$. Vi får då att:

$$\Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) = q_2 \cdot 2^{-m-2} = \Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) + 2^{-m-2}.$$

Intervallet I_{q_2} är då:

$$[(q_2 - 1) \cdot 2^{-m-2}, (q_2 + 1) \cdot 2^{-m-2}] = [\Lambda_M(\bar{\alpha}(m)), \Lambda_M(\bar{\alpha}(m)) + 2^{-m-1}].$$

Från $x > \Lambda_M(\bar{\alpha}(m))$ och att x är i I_{q_1} följer att x är i I_{q_2}.

Vi ser alltså att x är i intervallet I_{q_2}. Den här processen kan upprepas för samtliga $m > \gamma$, varför vi kan dra slutsatsen att det för alla sådana m gäller att

$$|\Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) - x| < 2^{-m-2}.$$

Då β är en reell talgenerator gäller

$$\forall s > r(|\beta(r) - \beta(s)| < 2^{-m-4} \tag{5.3}$$

för något tal r, dvs.

$$\forall s > r(|\beta(r) - x| < 2^{-m-2}$$

vilket ger oss

$$\forall s > r(|\Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) - \beta(r)| < 2^{-m-2} + 2^{-m-3} \tag{5.4}$$

Vi har även att

$$\forall s > r(|\Lambda_M(\bar{\alpha}(m+1)) - \Lambda_M(\bar{\alpha}(s))| < 2^{-m-2}. \tag{5.5}$$

Av ekvationerna (5.3), (5.4) och (5.5) kan vi alltså sluta oss till att

$$\forall s > \max(r, m)(|\beta(s) - \Lambda_M(\bar{\alpha}(s))| < 2^{-m}).$$

Vi har därmed konstruerat α så att

$$\Lambda_M(\alpha) = \beta$$

Därmed är satsen bevisad.

Vi kan nu med hjälp av denna spridningsrepresentation bevisa Brouwers kontinuitetssats, som lyder [10]:

Brouwers kontinuitetssats. Om f är en reellvärd funktion definierad överallt på $[0, 1]$, så är f likformigt kontinuerlig på $[0, 1]$.

Bevis. Eftersom f är definierad på hela intervallet kan vi betrakta den som en funktional från M till de reella talen och skriva

$$f(\Lambda_M(\alpha)) = f(x)$$

för α i M och $\Lambda_M(\alpha)$ går genom x.

För varje naturligt tal n och x i $[0, 1]$ har vi

$$\forall \alpha \in M \exists m(|f(\Lambda_M(\alpha)) - m \cdot 2^{-n-1}| < 2^{-n-1}.$$

Relationen mellan α och m är enbart beroende av extensionen av α, varför vi kan applicera den utökade fansatsen och sluta oss till att för alla n

$$\exists r \forall \alpha \in M \exists m \forall \beta \in \bar{\alpha}(r)(|f(\Lambda_M(\beta)) - m \cdot 2^{-n-1}| < 2^{-n-1}).$$

Vi kan nu ta två reella tal x och y i intervallet så att

$$|x - y| < 2^{-r-1}.$$

Vad vi nu vill visa är att

$$|f(x) - f(y)| < 2^{-n-1}.$$

Av föregående sats vet vi att vi kan konstruera ett α_1 i M sådant att

$$\Lambda_M(\alpha_1) \in x.$$

Vi kan även hitta ett α_2 så att $\bar{\alpha_1}(r) = \bar{\alpha_2}(r)$ och

$$\Lambda_M(\alpha_2) \in y.$$

För något m har vi alltså att

$$\forall \beta \in \bar{\alpha_1}(r)(|f(\Lambda_M(\beta) - m \cdot 2^{-n-1}| < 2^{-n-1}),$$

men α_2 är precis en sådan valföljd, varför vi har

$$|f(\Lambda_M(\alpha_2) - m \cdot 2^{-n-1}| < 2^{-n-1}.$$

Det här innebär att

$$|f(x) - f(y)| = |f(\Lambda_M(\alpha_1)) - f(\Lambda_M(\alpha_2))| \ngtr$$
$$\ngtr |f(\Lambda_M(\alpha_1)) - m \cdot 2^{-n-1}| + |f(\Lambda_M(\alpha_2)) - m \cdot 2^{-n-1}| < 2^{-n}.$$

För varje n har vi en metod att hitta ett sådant r. Med andra ord:

$$\forall n \exists r (|x - y| < 2^{-r-1} \rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-n-1}),$$

vilket innebär att f är likformigt kontinuerlig på $[0, 1]$.

Därmed är satsen bevisad.

Kapitel 6

Källor

[1] Petrakis, Iosif. *Brouwer's Fan Theorem.* Aristotle University of Thessaloniki, 2010.

[2] van Atten, Mark, *The Development of Intuitionistic Logic"*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/intuitionistic-logic-development/. Hämtad: 5/5-2019.

[3] Troelstra, A.S., van Dalen, D. *Constructivism in Mathematics, vol. 1*, Elsevier Science, 1988.

[4] Troelstra, A.S., van Dalen, D. *Constructivism in Mathematics, vol. 2*, Elsevier Science, 1988.

[5] Myhill, John. *Notes Towards an Axiomatization of Intuitionistic Analysis*, Logique et Analyse, NOUVELLE SÉRIE, 9, nr. 35/36 (1966): s. 280-297.

[6] Veldman, Wim. *Understanding And Using Brouwer's Continuity Principle*, University of Nijmegen, 2000.

[7] Heyting, Arend. *Intuitionism: an Introduction.* North-Holland Pub. Co., 1956.

[8] Rasmusson, Petter. *Strömningar i matematikens filosofi.* Bokförlaget Daidalos, 2014.

[9] Bell, John L., *"Continuity and Infinitesimals"*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/continuity/. Hämtad: 5/5-2019.

[10] Dummett, Michael. *Elements of Intuitionism.* Oxford University Press, 1977.