

SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Origami och matematik

av

Evelina Strigner

2019 - No K42

Origami och matematik

Evelina Strigner

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2019

Origami och matematik

Evelina Strigner
Handledare Torbjörn Tambour

Stockholms universitet
MM6005 HT 2019

Abstract

How can we use origami as a mathematical tool? In this paper we look at the history of origami and mathematics as a subject and four classical problems that has proven to be impossible to solve with compass and straight-edge and how we can solve them using origami. The first problem is doubling the cube. Given a cube, construct another cube whose volume is twice the size of the given cube. The second problem is trisecting an arbitrary angle and the third is constructing regular N -gons. It is possible to construct certain regular N -gons with compass and straight-edge but there are many more you can construct using origami. The fourth problem is to solve general cubic equations. We look at how to do these constructions and their proofs.

Innehållsförteckning

1	Inledning	2
2	Begrepp och beteckningar	3
3	Historia	4
4	Axiom och Teorem	5
4.1	Axiom	5
4.1.1	Axiom för singelvikningar i origami	5
4.2	Hagas Teorem	7
5	Klassiska geometriska konstruktionsproblem	9
5.1	Dubbla kuben	9
5.2	Dela en vinkel i tre	11
5.3	Regelbundna N-hörningar	15
5.4	Lösa andra- tredje- och fjärdegradsekvationer	17
6	Bildförteckning	22
7	Referenslista	23

1

Inledning

”Passaren och linjalen är de enklaste ritverktygen och det finns förstås en tjuusning i att lyckas lösa ett komplicerat problem med så enkla hjälpmedel som möjligt” (Tambour 2002). Papper är på ett sätt ett ännu enklare verktyg för konstruktion men trots det kan vi lösa problem som med passare och linjal är omöjliga.

Denna uppsats utgör ett självständigt arbete om 15 högskolepoäng (MM6005) och behandlar hur origami kan användas som ett matematiskt verktyg. Det finns mycket man kan göra och mycket att upptäcka men vad vi hinner ta upp i denna uppsats är begränsat så vi riktar in oss på konstruktioner som bygger på Huzitas och Hatoris/Justins axiom.

Jag vill tacka min handledare Torbjörn Tambour som alltid är positiv och engagerad, min pojkvän Erik för ditt kritiska och skarpa öga samt mina vänner och familj som stöttat mig.

2

Begrepp och beteckningar

Denna uppsats kommer rikta in sig på så kallad *planvikt* origami. Vi kommer alltså hålla oss i ett plan, så som xy -planet. Vi kan också beskriva *Planvikt* origami som en vikning som vi kan lägga i en bok utan att det bildas nya veck. När vi gör våra bevis antar vi att alla våra vikningar är perfekta, att vårt papper inte har en tjocklek och att våra veck saknar bredd (Hull & Damour 2002).

Vi låter ett papper representera en region i ett plan och kanterna på pappret är linjer vilka avgränsar vår region. Ett veck i pappret är också linjer och där två linjer möts skapas en punkt. Notera att i origamikonstruktioner är linjer fundamentala och linjer definierar punkter till skillnad mot Euklidisk geometri där punkter definierar linjer (Woodhouse & Salhi 2018).

När vi pratar om *passare* och *linjal* i denna uppsats menar vi de så kallade Platoniska hjälpmedlen. *Passaren* får inte användas för att mäta och flytta sträckor och den kollapsar när man lyfter den från pappret. Den brukar också kallas för Euklidisk passare. *Linjalen* är ograderad och har endast en rak kant (Tambour 2002). På engelska görs denna skillnad ibland genom att använda *straight-edge* eller *straight-rule* som översätts till *rak-kant* eller *rätsticka* istället för *ruler* som översätts till *linjal*.

Jag har använt många redan existerande illustrationer i stället för att skapa nya själv. Detta innebär att punkter, linjer och vinklar kommer markeras med olika beteckningar i olika bilder men jag ska försöka vara tydlig i mina beskrivningar till illustrationerna av vad som menas.

3

Historia

Richard Fitzpatrick (2007) har gjort en översättning av Euklides *Elementa* till modern engelska och skriver i inledningen om de tretton böcker som utgör *Elementa*. Där beskriver Fitzpatrick *Elementa* som den äldsta, kontinuerligt använda matematiska textbok och som det överlägset mest kända verket från den klassiska antiken. Euklides levde ca 300 f.kr och skrev *Elementa* som en sammanställning av tidigare matematikers teorem och bevis, så väl som sina egna, i en logisk ordning samt visade att de följer av fem enkla axiom, även om bevisen inte alltid var helt vattentäta med dagens kunskaper. Alla geometriska konstruktioner i *Elementa* utförs med endast passare och linjal utan att mäta. De enda tillåtna utfallen i jämförelse av två storheter är att de antingen är lika stora eller att den ena är större än den andra.

Under det första århundradet e.kr. utvecklades metoden för pappersframställning i Kina och omkring 600-talet kom tekniken till Japan. Det skedde en snabb utveckling av framställningsmetoder och material vilket ledde till ett unikt Japanskt papper som kallas Washi. Washi kännetecknas av att det är tunt, hållbart, mjukt, flexibelt och vackert och har många olika användningsområden. Någon gång under Edo-perioden, 1603-1867, blev pappersvikning en hobby i Japan och år 1797 kom världens äldsta kända handbok i pappersvikning (Ono 2008).

Tandalam Sundara Row publicerade sin bok *Geometric Exercises in Paper Folding* i Madras i Indien år 1893 och kom att influera många andra. Boken har blivit behandlad som ett arbete inom rekreativ matematik trots att Rows intention med boken var att omforma hur man lärde ut geometri i skolan (Friedman 2018). *Geometric Exercises in Paper Folding* förmodas vara den första boken på ämnet origami och matematik (Woodhouse & Salhi 2018). Det har varit känt sedan 1930 att origami utgör ett kraftfullare redskap för geometriska konstruktioner än den hederliga passaren och linjal men än finns mycket kvar att lära om origamins gränser som konstruktionsverktyg (Hull & Damour 2002).

Humiaki Huzita och Benedetto Scimemi identifierade tillsammans sex skilda sätt att skapa ett enda veck från olika kombinationer av linjer och punkter. De gav den första formella beskrivningen av vilka typer av geometriska konstruktioner som var möjliga med origami. Dessa presenterades på det första internationella mötet för origamivetenskap och teknologi år 1989 och kom att kallas Huzita-axiomen. Dessa sex axiom bildar en grund vilken studiet av origamiska konstruktioner, bland annat de fyra klassiska konstruktionsproblem vi kommer ta upp i detta arbete, har utgått ifrån och de antogs vara de enda som fanns. När Koshiro Hatori år 2002 presenterade att han funnit ett sjunde axiom blev många överraskade och det gjordes då ytterligare undersökningar om det kunde finnas fler men det konstaterades att det inte finns fler än sju. Det visade sig även att Jacques Justin hade hittat och publicerat det sjunde axiomat redan 1989 (Lang 2015).

4

Axiom och Teorem

4.1 Axiom

Vi ska titta närmare på axiomen och jämföra dem. Vi börjar med att titta på axiomen för geometriska konstruktioner hämtade från Elementa skriven av Euklides. Dessa utförs med passare och linjal.

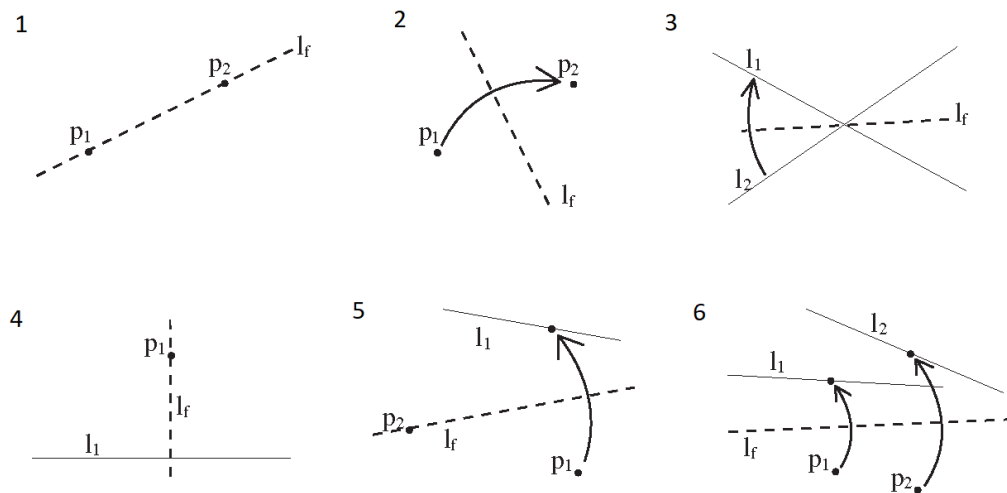
Euklides axiom

1. Genom två punkter går en och endast en (rät) linje.
2. En sträcka kan förlängas till en linje.
3. Givet en punkt och en sträcka med punkten som sin ena ändpunkt, så finns det en cirkel med punkten som medelpunkt och sträckan som radie.
4. Alla räta vinklar är kongruenta, det vill säga lika stora.
5. Om en linje som skär två andra linjer bildar inre vinklar på samma sida vilka tillsammans är mindre än två räta vinklar, så skär de två linjerna varandra på denna sida.

4.1.1 Axiom för singelvikningar i origami

Huzitas och Hatoris/Justins axiom är sju till antalet och kallas just för axiom i många källor men Jorge C. Lucero, ingenjör och professor i matematik med ett intresse för origami, skriver att benämna dessa elementära operationer som axiom är felaktigt eftersom vissa av operationerna kan härledas från andra samt att vissa av dem kanske inte är möjliga beroende på konfigurationen av givna punkter och linjer. Lucero påstår också att en ny operation måste läggas till för att uppsättningen av elementära operationer ska vara komplett. Det åttonde axiomet skulle då vara att vi kan vika längs en given linje. Många vill utelämna detta med argumentet att det inte skapas någon ny linje av denna operation och Lang presenterar ett bevis för att sättet av operationer är komplett, dvs att det inte finns något annat sätt att göra ett singelveck än de sju sätt som utgör axiomen, (Lang 1993-2003) men det är för långt för att inkluderas i denna uppsats. Lang (1996-2003) skriver att även om de kallas "axiom" är det bäst tänka på dem som grundläggande operationer som verkar på punkter och linjer för att producera en ny linje, vilket är den linje vi viker. Det finns således delade meningar om dessa ska benämnas som axiom men för enkelhetens skull väljer jag i detta arbete att kalla dem för axiom.

Huzita axiomen

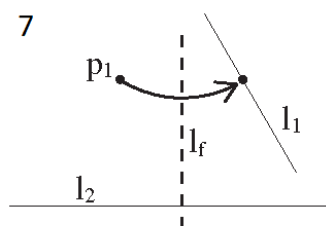


Figur 4.1: Axiom 1-6

1. Givet två punkter p_1 och p_2 kan vi vika en gång för att förbinda dem med en linje l_f .
2. Givet två punkter p_1 och p_2 kan vi vika så att p_1 placeras på p_2 .
3. Givet två linjer l_1 och l_2 kan vi vika så att l_1 placeras på l_2 .
4. Givet en punkt p_1 och en linje l_1 kan vi vika vinkelrätt mot l_1 så att vecket går genom punkten p_1 .
5. Givet två punkter p_1 och p_2 och en linje l_1 kan vi göra ett veck så att p_1 placeras på l_1 och vecket går genom punkten p_2 .
6. Givet två punkter p_1 och p_2 och två linjer l_1 och l_2 kan vi göra ett veck så att p_1 placeras på l_1 och p_2 placeras på l_2 .

Hatori's/Justin's sjunde axiom

7. Givet punkten p_1 och två linjer l_1 och l_2 , kan vi göra ett veck vinkelrätt mot l_2 sådant att p_1 placeras ovanpå l_1 .



Figur 4.2: Axiom 7

Varje axiom definieras av att skapa ett veck som sammanför olika kombinationer av linjer och punkter så att de sammanfaller. Antalet lösningar för varje operation måste enligt Lucero (2017) vara begränsat för att få kallar axiom men beroende på den relativa positionen för de givna punkterna och linjerna, har några av operationer flera, en eller ingen lösning. Axiom 7 har exempelvis inga lösningar om l_1 och l_2 är parallella. Ett annat exempel är en situation som vi stöter på i avsnitt 5.2 där vi använder axiom 6 och punkterna och linjerna är placerade på ett sådant sätt att det går att göra vikningen på precis tre sätt. Vi kan då säga att den har tre lösningar.

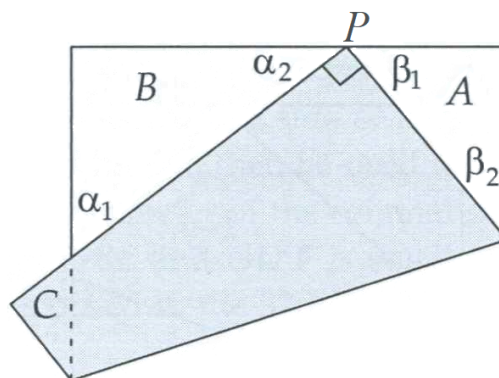
Axiom 1 är väldigt likt det första axiomet av Euklides. Axiom 2 är ekvivalent med att skapa en mittpunktsnormal vilket är en möjlig konstruktion med Passare och linjal. Med axiom 3 kan vi skapa en bisektris till vinkeln mellan linje l_1 och l_2 . Bisektriser är även genomförbara men passare och linjal. Axiom 4 talar för sig självt och detta går också göra i Euklidisk geometri. Med axiom 5 kan vi skapa ett veck som går genom punkten p_2 i viken vi speglar punkten p_1 så att den hamnar på linjen l_1 . Detta kan användas för att skapa tangenter till en parabel. Med det sjätte axiomet kan vi finna en linje som är tangent till två parabler vilket är det som gör origami till ett så starkt verktyg.

4.2 Hagas Teorem

Kazuo Haga är en pensionerad professor i biologi på University of Tsukuba i Japan. Följande teorem är upp kallat efter honom men i efterhand har man hittat ett exemplar av en japansk Sangaku¹ som antyder att detta redan var känt för japanska geometriker i Edo-eran (Hull 2013).

Givet ett kvadratisk pappersark och en slumpmässigt vald punkt P på en av sidorna kan vi vika ett av hörnen av den motstående sidan till denna punkt. Vi får då tre rätvinkliga trianglar $\triangle A$, $\triangle B$ och $\triangle C$. Hagas teorem säger då att trianglarna $\triangle A$, $\triangle B$ och $\triangle C$ är likformiga (Hull 2013).

Figur 4.3:



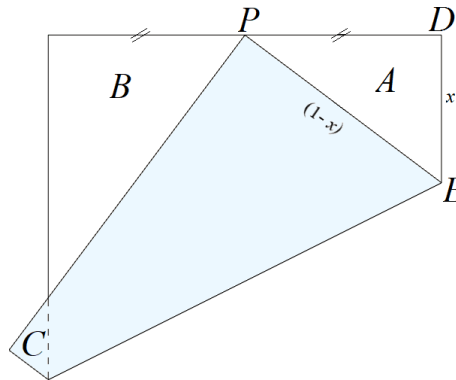
Beviset är följande. Från figur 4.3 har vi att $\alpha_2 + \beta_1 = 90^\circ$ och att $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$. Då måste $\alpha_2 = \beta_2$ och på samma sätt har vi att $\alpha_1 = \beta_1$ och då följer att $\triangle A \sim \triangle B$. Vi visar på liknande sätt att även $\triangle C \sim \triangle B$.

■

¹Geometriska problem skrivna på träskivor någon gång under 1600-1800talet i Japan och lämnade i religiösa tempel.

Ett intressant specialfall av Hagas teorem är då P ligger på mitten av sidan. Då blir de tre trianglarna $\triangle A$, $\triangle B$ och $\triangle C$ så kallade Egyptiska trianglar dvs triangelns sidor har förhållandet 3:4:5.

Figur 4.4:



Om kvadraten har sidan 1 så blir sträckan $PD = \frac{1}{2}$. Vi sätter sidan $DE = x$ och då får vi sidan $EP = 1 - x$. Enligt Pythagoras får vi

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 &= (1-x)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{4} + x^2 &= 1 - 2x + x^2 \\ \Rightarrow 2x &= \frac{3}{4} \\ \Rightarrow x &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Sidan DE är således $\frac{3}{8}$ och vi får att $EP = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Vi kan skriva om längden på sidan PC som $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ för att tydligt se förhållandet mellan sidorna. Eftersom vi tidigare visade att trianglarna $\triangle A$, $\triangle B$ och $\triangle C$ är likformiga så måste $\triangle B$ och $\triangle C$ ha samma förhållande som $\triangle A$ har mellan sina sidor.

■

5

Klassiska geometriska konstruktionsproblem

Redan 400 år f.Kr. fanns tre kända matematiska problem. Det första var att givet en cirkel, konstruera en kvadrat med exakt samma area. Det andra problemet var att givet en kub, skapa en kub med dubbelt så stor volym. Det tredje problemet var att dela en vinkel i tre lika delar. Många dåtida matematiker ägnade sig åt att lösa dessa tre problem men ca 2200 år senare bevisades dessa tre problem vara omöjliga att lösa med passare och linjal (Lang 1996-2003). Två av dessa problem, dubbling av en kub samt tredelning av en vinkel, har senare bevisats vara möjliga att lösa med origami utifrån de sex första axiomen. Det första problemet, att skapa en kvadrat med samma area som en given cirkel, är inte möjligt att göra med origami. Två andra klassiska problem som också är möjliga att lösa med origami utifrån de sex första axiomen är dels att konstruera en regelbunden N -hörning för alla N på formeln $2^i 3^j (2^k 3^l + 1)$ där termen inom parentes är ett primtal. Primtal på formen $(2^k 3^l + 1)$ kallas för Pierpontprimtal. Det andra problemet är att lösa andra- tredje och fjärdegradsekvationen med reella koefficienter (Lang 2015).

5.1 Dubbla kuben

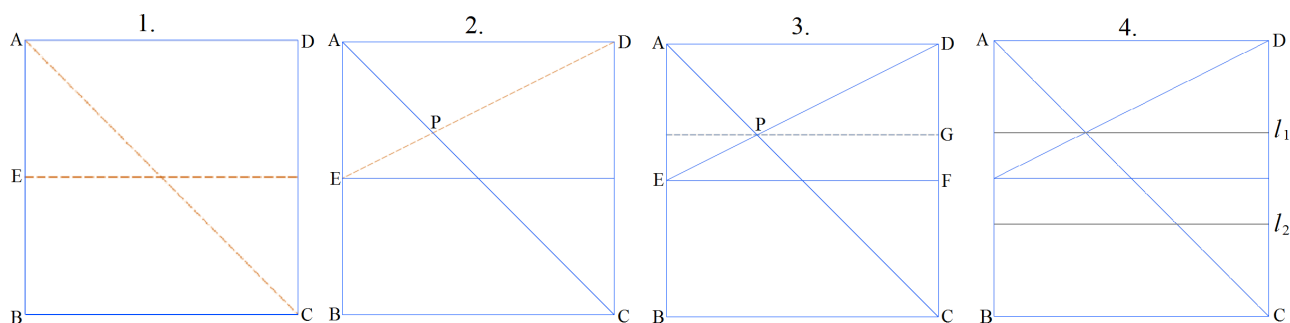
Om vi har en kub med sidan 1 och volymen 1 v.e (volymenhet) och vi vill konstruera en kub med volymen 2 v.e. så måste denna kub ha sidan $\sqrt[3]{2}$. Ty $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$. På så vis är problemet att givet en kub skapa en kub med dubbla volymen ekvivalent med problemet att givet en sträcka med längd 1, konstruera en sträcka med längden $\sqrt[3]{2}$. År 1837 bevisade Pierre Wantzel att problemet är omöjligt att lösa med passare och linjal. Den italienska matematikern Margherita Piazzolla Beloch bevisade år 1934, med Sundara Rows bok *Geometric Exercises in Paper Folding* från 1893 i åtanke, att man genom att vika papper kan konstruera längden $\sqrt[3]{2}$ men av flera anledningar fick inte Belochs arbete någon större spridning och föll i glömska fram till 1980 då Humiaki Huzita återupptäckte hennes resultat (Friedman 2018).

Vi börjar med att dela pappret horisontellt i tredjedelar. Konstruktionen och beviset är hämtade från Hull (2013 s.35-38). Denna konstruktion illustreras i Figur 5.1.

1. Först gör vi ett horisontellt veck i mitten av pappret genom att vika sidan BC till sidan AD . Vi döper punkten mitt på sidan AB till E och punkten mitt på sidan DC till F . Vi gör också ett diagonalt veck som går genom punkterna A och C .
2. Vi skapar ett diagonalt veck som går genom punkterna E och D . Punkten där linjerna ED och AC korsar varandra kallar vi för P .

3. Härnäst viker vi vinkelrätt mot sidan AB så att vecket går genom punkten P . Vi döper denna linje till l_1 . Punkten där l_1 korsar sidan DC ger vi namnet G .
4. Vi viker sidan BC till linjen l_1 och skapar på så sätt linjen l_2 . l_1 och l_2 delar pappret horisontellt i tre lika delar.

Figur 5.1:



Ett bevis för att denna konstruktion fungerar kan se ut så här.

Vi antar att vårt kvadratiske pappersark har sidan 1 och att sträckorna PG och CG har längden x . Sträckan DG har då längden $(1 - x)$. Vi noterar att $\triangle DEF$ och $\triangle DPG$ är likformiga enligt topptriangelnsatsen. Då följer att

$$\frac{|EF|}{|PG|} = \frac{|DF|}{|DG|}$$

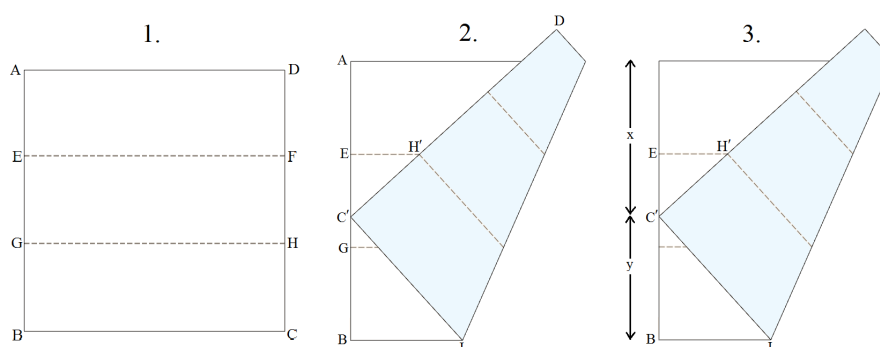
som vi kan skriva som

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - x} \Rightarrow 2 - 2x = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

■

Nu kan vi fortsätta konstruktionen av $\sqrt[3]{2}$. Följande metod är utvecklad av Peter Masser (Hull 2013 s.67-68).

Figur 5.2:



1. Vi börjar med att endast markera de linjer vi behöver och ändra några beteckningar.
2. Vik så att punkten C hamnar på linjen AB samtidigt som punkten H hamnar på linjen EF . Vi betecknar dessa två punkter med C' respektive H' .
3. Vi betecknar sträckan AC' med x och sträckan $C'B$ med y . Vidare har vi en ny punkt J . Vi betecknar sträckan BJ med z .

Förhållandet mellan x och y blir då $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$. För beviset av att denna konstruktion är korrekt antar vi att $y = 1$ vi ska då visa att $x = \sqrt[3]{2}$.

Då $y = 1$ är sidan på vårt kvadratiske papper $(x + 1)$. Sträckorna $BJ + JC'$ är tillsammans en sida på vårt kvadratiske papper och är således $(x + 1)$. Sträckan $C'J$ får vi då genom att subtrahera $|BJ|$ från $(x + 1)$. Detta ger oss $|C'J| = (x + 1) - z$. Vi applicerar Pythagoras sats på $\triangle C'BJ$.

$$|BC'|^2 + |BJ|^2 = |C'J|^2 \Leftrightarrow 1^2 + z^2 = (x + 1 - z)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + z^2 = x^2 + 2x - 2xz - 2z + z^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2xz + 2z = x^2 + 2x \Leftrightarrow z(2x + 2) = x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{x^2 + 2x}{2x + 2}$$

Ty $x > 0$. Vi har att sträckan $C'H'$ är lika med $\frac{x+1}{3}$ och sträckan

$$|C'E| = x - \frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{3}.$$

Enligt Hagas teorem (se avsnitt 4.2.1) och topptriangelsatsen så är trianglarna $\triangle C'BJ$ och $\triangle C'EH'$ är likformiga. Då följer att

$$\frac{|BJ|}{|C'J|} = \frac{|C'E|}{|C'H'|}.$$

Vänsterledet kan vi skriva om på följande vis

$$\frac{|BJ|}{|C'J|} = \frac{z}{x+1-z} = \frac{\frac{x^2+2x}{2x+2}}{x+1-\frac{x^2+2x}{2x+2}} = \frac{\frac{x^2+2x}{2x+2}}{\frac{2x^2+4x+2-(x^2+2x)}{2x+2}} = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+2}.$$

Högerledet kan vi skriva som

$$\frac{|C'E|}{|C'H'|} = \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}} = \frac{2x-1}{x+1}.$$

Vi sätter vänsterled=högerled, vilket ger

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} &= \frac{2x-1}{x+1} \Leftrightarrow (x^2+2x)(x+1) = (2x-1)(x^2+2x+2) \\ &\Leftrightarrow x^3+3x^2+2x = 2x^3+3x^2+2x-2 \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

■

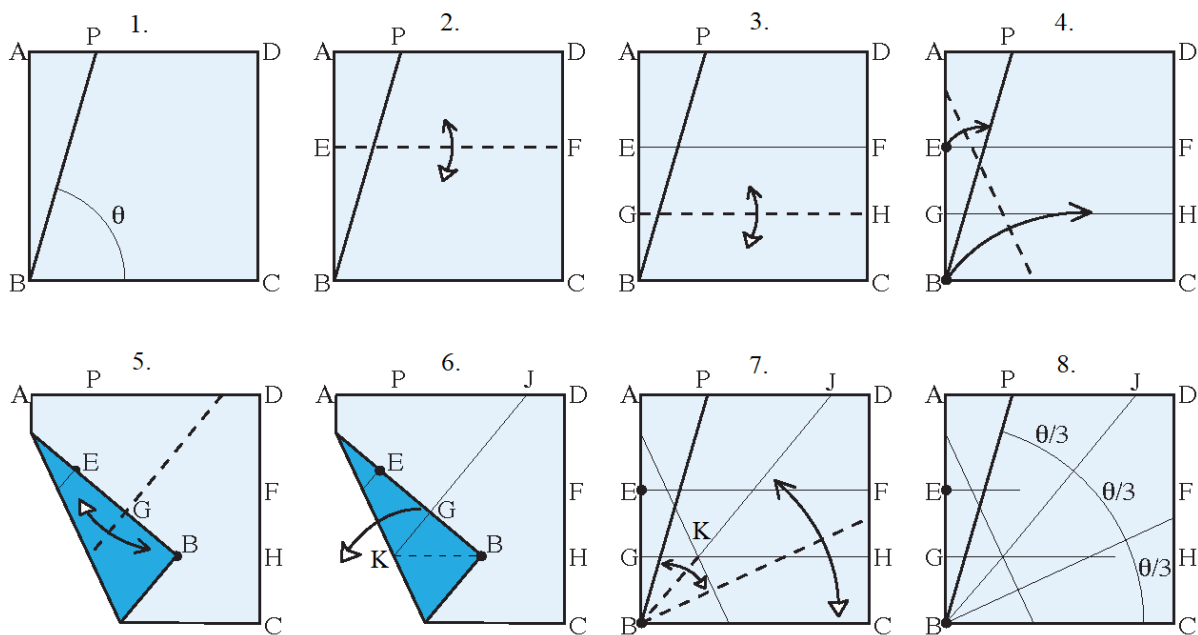
5.2 Dela en vinkel i tre

Vi kommer titta på två olika konstruktioner för att dela en vinkel i tre lika delar. Den första konstruktionen är för spetsiga vinklar men fungerar även då man vill dela 90° i tre. Man kan även dela trubbiga vinklar med denna metod genom att dela komplementet. Den andra metoden är mer riktad mot att dela trubbiga vinklar men tekniken kan användas för valfri vinkel (Lang 1996-2003).

Den japanske matematikern och origamisten Tsune Abe har gjort en lösning till problemet att dela en vinkel i tre, då vinkeln är i hörnet av ett kvadratisk pappersark (Lang 1996-2003) vilket vi nu kommer gå igenom steg för steg som illustreras i Figur 5.3.

1. Vi börjar med att markera ut vinkeln $\angle\theta$ som utgår från hörnet B vilken vi vill tredela. Vinkeln $\angle\theta$ är således vinkeln $\angle PBC$.
2. Vik en linje EF parallell med sidan BC .
3. Härnäst viker vi kanten BC till linjen EF så att GH skapas.
4. Vik upp hörnet B så att punkten B placeras ovanpå linjen GH samtidigt som punkten E placeras ovanpå linjen BP .
5. Vik så att det veck som går genom punkten G förlängs.
6. Veckla ut.
7. Vik så att det veck som går genom punkten J förlängs till punkten B . Vidare viker vi kanten BC till linjen BJ för att skapa den sista linjen.
8. Vi har nu delat vinkeln θ i tre lika delar.

Figur 5.3:



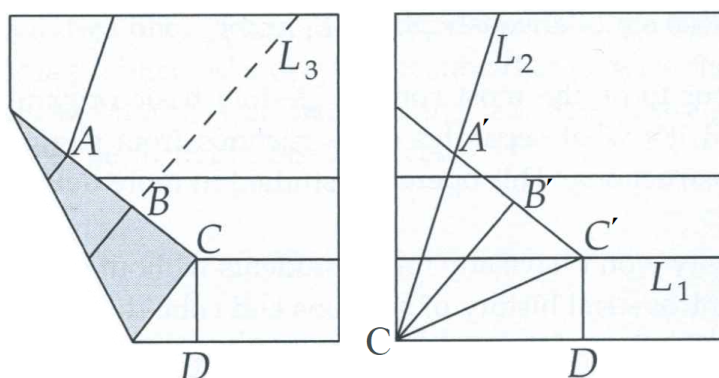
Vi ska nu titta på ett bevis för att denna konstruktion stämmer. Vi börjar med att visa att punkten B ligger på linjen som går genom punkterna K och J .

Vi observerar att sträckan BK i steg 6 i figur 5.3 är samma sträcka BK i steg 7. Vi ser i steg 6 att $\angle JKH = \angle GKB$. När vi i steg 7 vecklar ut så vet vi att vinklarna $\angle JKH$ och $\angle GKB$ är lika stora och således att de är vertikalkvinklar. Då måste linjen som går genom punkterna J och K även gå genom punkten B .

För beviset av att vinkeln är korrekt delad i tre lika stora vinklar använder vi bilderna i figur 5.4 där punkterna A' , B' och C' är punkterna där A , B och C placeras då vi viker A till L_2 samtidigt som C placeras ovan på linjen L_1 . Vi gör ett veck vinkelrätt mot nederkanten av pappret som går genom punkten C' och kallar punkten där den nya linjen och nederkanten skär varandra för D . Vi vet att sträckorna $A'B'$, $B'C'$ och $C'D$ är lika långa. Linjen L_3 är vinkelrät mot linjen som går genom punkterna A' och C' eftersom L_3 skapas genom att vi viker A' till C' . Då kan vi konstatera att triangeln $\triangle A'CB'$ är kongruent med triangeln $\triangle C'CB'$ eftersom vi vet att två av sidorna är lika långa och den mellanliggande vinkeln är 90° . Slutligen är $\triangle C'CB'$ kongruent med $\triangle C'CB$ eftersom vi vet att $B'C' \cong C'D$ och sidan CC' är gemensam och vi kan med hjälp av Pythagoras sats räkna ut att $CD \cong CB$.

■

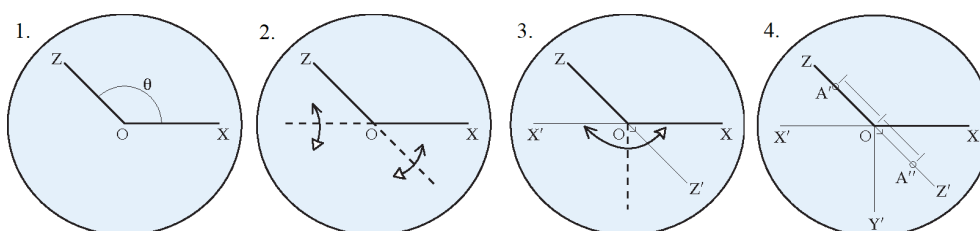
Figur 5.4:



Den franske origamisten och matematikern Jacques Justin utvecklade följande teknik för att dela trubbiga vinklar i tre lika delar. Tekniken är inte beroende av hörn eller kanter på ett papper och kan utföras i mitten av ett oändligt stort papper (Lang 1996-2003) vilket illustreras i Figur 5.5 samt Figur 5.6 där varje steg ramas in av en cirkel.

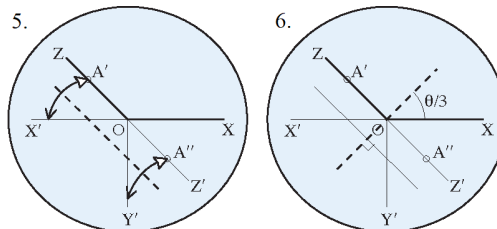
1. Vi ska dela vinkeln θ det vill säga $\angle ZOX$ i tre lika delar.
2. Vi börjar med att förlänga linjerna ZO och XO .
3. Vi skapar en linje vinkelrät mot $X'X$ som går genom punkten O genom att vika X' till X .
4. Markera punkter A' och A'' på linjerna ZO respektive $Z'O$ på samma avstånd från punkten O .

Figur 5.5:



5. Vik så att punkten A' placeras ovanpå linjen $X'O$ samtidigt som punkten A'' placeras ovanpå linjen $Y'O$.
6. Vi skapar en linje som vinkelrät mot den linje vi precis skapat och som går genom punkten O . Vinkeln mellan denna linje och linjen XO kommer utgöra en tredjedel av vinkeln θ .

Figur 5.6:



Vi ska nu titta på ett bevis av Kenji Hiraoka¹ and Laura Kokot² (2016) som använder figur 5.7. Punkten O' ligger på linjen som skapas av det sista vecket, här markerat som OH . EG och OO' är båda vinkelräta mot linjen l_1 . Vi vet att GO' och EO är lika långa. Då är $EGO'O$ en likbent parallelltrampets. Detta ger att $\angle GO'O \cong \angle O'OE$. Vi sätter $\angle XOH = \alpha$ och konstaterar att även $\angle GOO' = \alpha$ eftersom de är vertikalkvinklar.

$$\angle GO'O = 180^\circ - \angle YOH = 180^\circ - (\theta - \alpha) = 180^\circ - \theta + \alpha$$

Vidare vet vi att följande fyra sträckor är lika långa och vi betecknar längden med a .

$$GO' \cong G'O' \cong EO \cong E'O = a$$

Vidare vet vi att $\triangle GG'O$ är rätvinklig och triangelns omskrivna cirkel kommer därför ha sin medelpunkt mitt på hypotenusan dvs punkten O' . Detta medför att $OO' \cong G'O' \cong GO' = a$ vilket i sin tur ger att $\triangle GO'O$ är likbent. Det betyder att $\angle O'OG \cong \angle OGO' = \alpha$. Vi får då

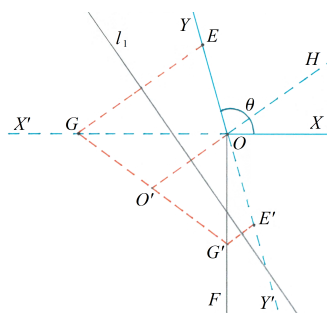
$$180^\circ = \angle GO'O + \angle O'OG + \angle OGO' \Leftrightarrow 180^\circ = \angle GO'O + \alpha + \alpha.$$

Tidigare konstaterade vi att $\angle GO'O = 180^\circ - \theta + \alpha$. Vi sätter in det i uttrycket ovan och får

$$180^\circ = 180^\circ - \theta + \alpha + \alpha + \alpha \Rightarrow \theta = 3\alpha.$$

■

Figur 5.7:



¹Professor, Hiroshima University of Economics, Hiroshima, Japan

²Mathematics and Computer Science Teacher, High School of Mate Blažine Labin, Croatia

5.3 Regelbundna N-hörningar

En regelbunden polygon är en månghörning där alla sidor är lika långa och de inre vinklarna är lika stora. Den kan alltid skrivas in i en cirkel (Mathleaks u.å.). Vi ska titta närmare på de polygoner med 100 sidor eller färre som kan konstrueras med passare och linjal respektive med origami baserat på respektive axiom. Grekerna kände till hur man med passare och linjal delar en cirkel i 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, 80 och 96 jämna bitar. Gauss kompletterade denna lista med 17, 34, 51, 68 och 85 (Pierpont 1895).

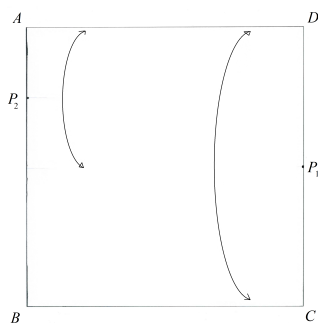
I origami kan vi dela en vinkel i två (axiom 3) eller i tre med hjälp av metoderna i 5.2. Att dela en vinkel i tre eller två kan i sin tur användas för att dela in ett helt varv i N jämna delar, där N är på formeln $2^j 3^k$ där j och k är godtyckliga heltal. Vi kan på så sätt skapa regelbundna polygoner med N antal sidor det vill säga en regelbunden N -hörning. Alla vinklar inklusive hela varv kan alltså, genom att vika, delas i N lika delar till exempel 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 (Lang 1996-2003).

Den australiensiske matematikern Robert Geretschläger upptäckte en annan familj av konstruktioner i origami som han baserade på konstruktioner från 1890, dessa fungerar för det specifika fallet då vi vill dela ett helt varv i lika stora delar. Han utvecklade en generell metod att konstruera en regelbunden N -hörning där N är ett primtal på formen $2^n 3^m + 1$. De första 5 primtal på denna form är 3, 5, 7, 13 och 17. Om vi kombinerar denna metod med bisektrering och trisektrering av en vinkel så får vi formeln $2^j 3^k (2^n 3^m + 1)$ (Lang 1996-2003). Med hjälp denna kombinerade formel kan vi göra följande regelbundna N -hörningar då $N < 100$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 45, 48, 51, 52, 54, 56, 57, 60, 63, 64, 68, 72, 73, 74, 76, 78, 80, 81, 84, 96 och 97. Vi kan se att listan blir mycket längre det är särskilt anmärkningsvärt att alla $N < 20$ förutom 11 kan konstrueras. Det är även anmärkningsvärt att man med passare och linjal kan konstruera en regelbunden 85-hörning, denna kan inte konstrueras med origami.

Vi ska nu titta på hur man viker en regelbunden 7-hörning, en så kallad heptagon, den N -hörning av lägst grad som är omöjlig att konstruera med passare och linjal. Denna metod för att vika en regelbunden sjuhörning är hämtad från Juslenius (2015) men skriven med egna ord. Tyvärr vet jag inte var hon i sin tur hämtat denna konstruktion.

1. För sidan BC till sidan AD och gör en markering på bägge sidor genom att nypa till. Punkten på sidan DC döper vi till P_1 . Skapa sedan punkten P_2 , $1/4$ ner på sidan AB genom att vika ner punkten A till hälften av sida AB där vi tidigare gjorde en markering och nyp till i kanten.

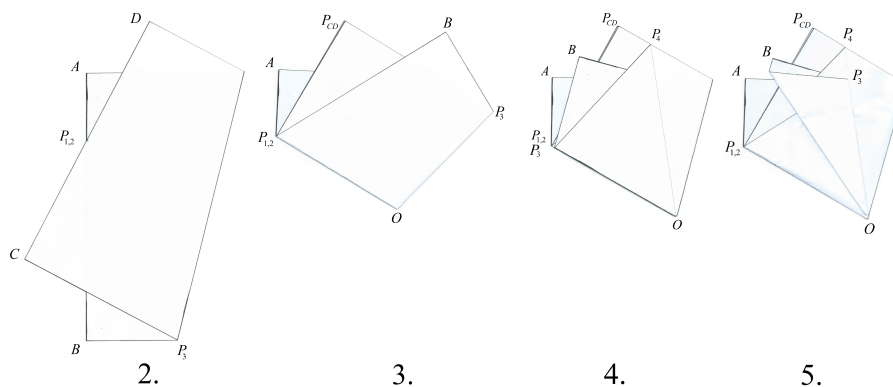
Figur 5.8:



1.

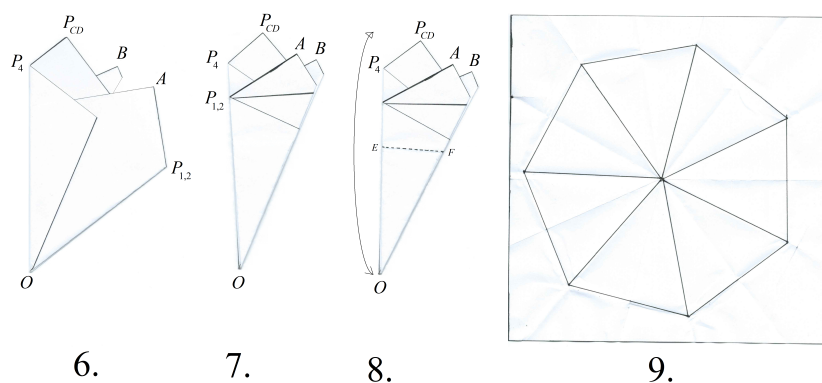
2. Placera punkten P_1 ovanpå punkten P_2 . Vi kalla denna gemensamma punkt för $P_{1,2}$. Där detta veck skär sidan BC markerar vi punkten som P_3 .
3. Placera nu punkten C ovanpå punkten D . Vi döper denna gemensamma punkt till P_{CD} . Vi har även fått en punkt O som kommer bli origo i sjuhörningens omskrivna cirkel.
4. Nu placerar vi punkten P_3 ovanpå punkten $P_{1,2}$. Vi har även fått en ny punkt P_4 .
5. Vi för sidan OP_3 till sidan OP_4 .

Figur 5.9:



6. Vi vänder arbetet så att vi får baksidan upp. Sedan viker vi in vänsterkanten så att det nya vecket går genom punkterna O och P_4 .
7. Vik sidan $OP_{1,2}$ till sidan OP_4
8. Gör nu ett veck vinkelrätt mot $OP_{1,2}$
9. Veckla ut allt.

Figur 5.10:



Om vi tittar lite närmre på figur 5.10 i steg 8 har vi en rätvinklig triangel $\triangle OEF$. Vi döper vinkeln $\angle OFE$ till $\angle \alpha$. I en regelbunden sjuhörning ska alla de inre vinklarna vara lika stora och de 7 sidorna ska vara lika långa. Alla sidor i vår sjuhörning har längden $2EF$ och de inre vinklarna är 2α .

5.4 Lösa andra- tredje- och fjärdegradsekvationer

År 1867 publicerade en australiensk ingenjör Eduard Lill en geometrisk metod för att hitta reella rötter till ett givet polynom med reella koefficienter. Margharita Piazzolla Beloch upptäckte år 1936 att man kan göra Lills metod med origami (Hull 2011).

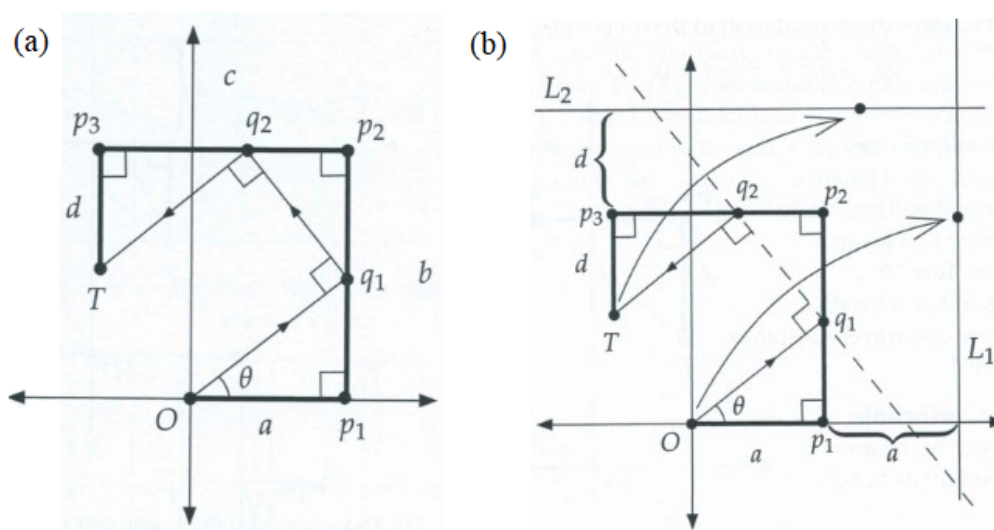
Lills metod för att lösa ekvationer på formen

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

går till på följande vis (Hull 2013). Starta i punkten $O = (0,0)$ och rita en sträcka utmed x -axeln med längden a . Roterar nu 90° motsols och rita en sträcka med längden b . Vi roterar ytterligare 90° motsols och ritar en sträcka med längden c . Slutligen roterar vi 90° motsols en sista gång och ritar en sträcka med längden d som avslutas i punkten T (se figur 5.11 (a)).

Om koefficienten är negativ ritar vi istället sträckan i motsatt riktning och om koefficienten är 0 sker endast rotationen men ingen sträcka ritas ut. Denna väg $a + b + c + d$ kallar vi för koefficientvägen. Vi tänker oss ett universum där laserstrålar alltid ”studsa” eller att ljusstrålen ”bryts” i 90° graders vinklar. Om vi med en laserpekare står i punkten O och kan studsas ljusstrålen i 90° -vinklar i koefficientvägen så att den träffar punkten T så kommer ekvationen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha reella lösningar där $x = -\tan \theta$ är en lösning. Denna kallar vi för laservägen.³

Figur 5.11:



För att hitta denna ”Laserväg” med hjälp av origami så skapar vi två linjer L_1 och L_2 . L_1 ska vara vinkelrät mot x -axeln och på avståndet a från p_1 på motsatt sida från O . Vidare viker vi L_2 så att linjen blir vinkelrät mot y -axeln på avståndet d från p_3 på motsatt sida från T . Nu kan vi vika så att punkten O placeras på linjen L_1 samtidigt som punkten T placeras på linjen L_2 . Vecket som bildas markeras med en streckad linje i figur 5.11 (b), den blir delen i mitten i vår laserväg. Vi kan därefter vika två linjer vinkelrätt mot denna linje. En som går genom punkten O och en som går genom punkten T och vi är då klara med vår laserväg. Lills metod fungerar på polynom med godtycklig grad (Hull 2013). För ett polynom av graden n får vi

³I Hull (2013) och (2011) används ”bulletpath” men jag tyckte inte att kulväg fungerade så bra på svenska så jag valde att kalla det för laserväg istället.

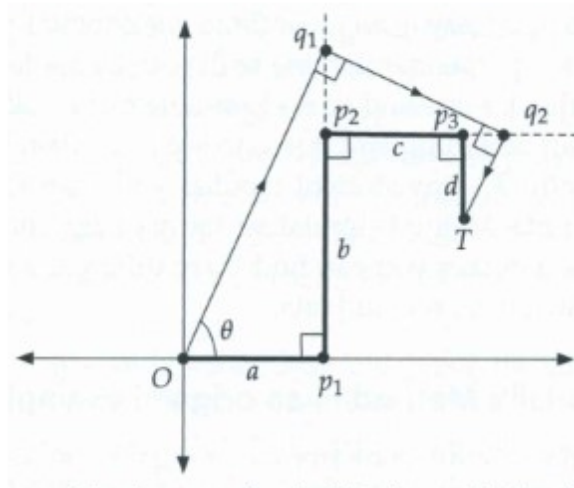
en koefficientväg med $n + 1$ sidor och laservägen blir n sidor (Hull 2011). De tre rätvinkliga triangelarna som bildas mellan koefficient- och laservägen är likformiga (Hull 2013). Eftersom vinkelsumman i en triangel är 180 grader, måste $\angle\theta + \angle Oq_1p_1 = 90^\circ$ vi vet också utifrån figuren 5.11 att $\angle q_2q_1p_2 + \angle Oq_1p_1 = 90^\circ$ vilket betyder att $\angle\theta$ är lika stor som $\angle q_2q_1p_2$. Då måste även $\angle Oq_1p_1$ vara lika stor som $\angle p_2q_2q_1$ vilket innebär att alla motsvarande vinklar i de båda triangelarna $\triangle Oq_1p_1$ och $\triangle q_1q_2p_2$ är lika stora och detta betyder att de är likformiga. Vi kan på samma sätt visa att $\triangle q_2Tp_3$ också är likformig med de andra två.

Detta medför att

$$\theta = \angle p_1Oq_1 = \angle p_2q_1q_2 = \angle p_3q_2T$$

Beviset för att detta fungerar måste visas från fall till fall eftersom koefficient- och laservägen kommer se olika ut beroende på om koefficienterna är positiva, negativa eller noll vilket påverkar algebran i beviset. Om vi har fallet då konstanten framför x -termen är negativ kommer vår koefficientväg och laserväg se annorlunda ut som vi kan se i figur 5.12. I det här fallet får vi använda förlängningen av sträckan b och sträckan c för att kunna bryta vår laserstråle så att den träffar punkten T . Vi kommer nu visa detta algebraiskt. Andra fall visas på liknande sätt.

Figur 5.12:



$$\begin{aligned} \text{I } \triangle Op_1q_1 \text{ får vi } -x &= \tan \theta = \frac{p_1q_1}{a} = \frac{b + q_1p_2}{a} \\ \Rightarrow q_1p_2 &= -ax - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I } \triangle q_1p_2q_2 \text{ får vi } -x &= \tan \theta = \frac{p_2q_2}{q_1p_2} = \frac{c + p_3q_2}{-ax - b} \\ \Rightarrow p_3q_2 &= -x(-ax - b) - c \end{aligned}$$

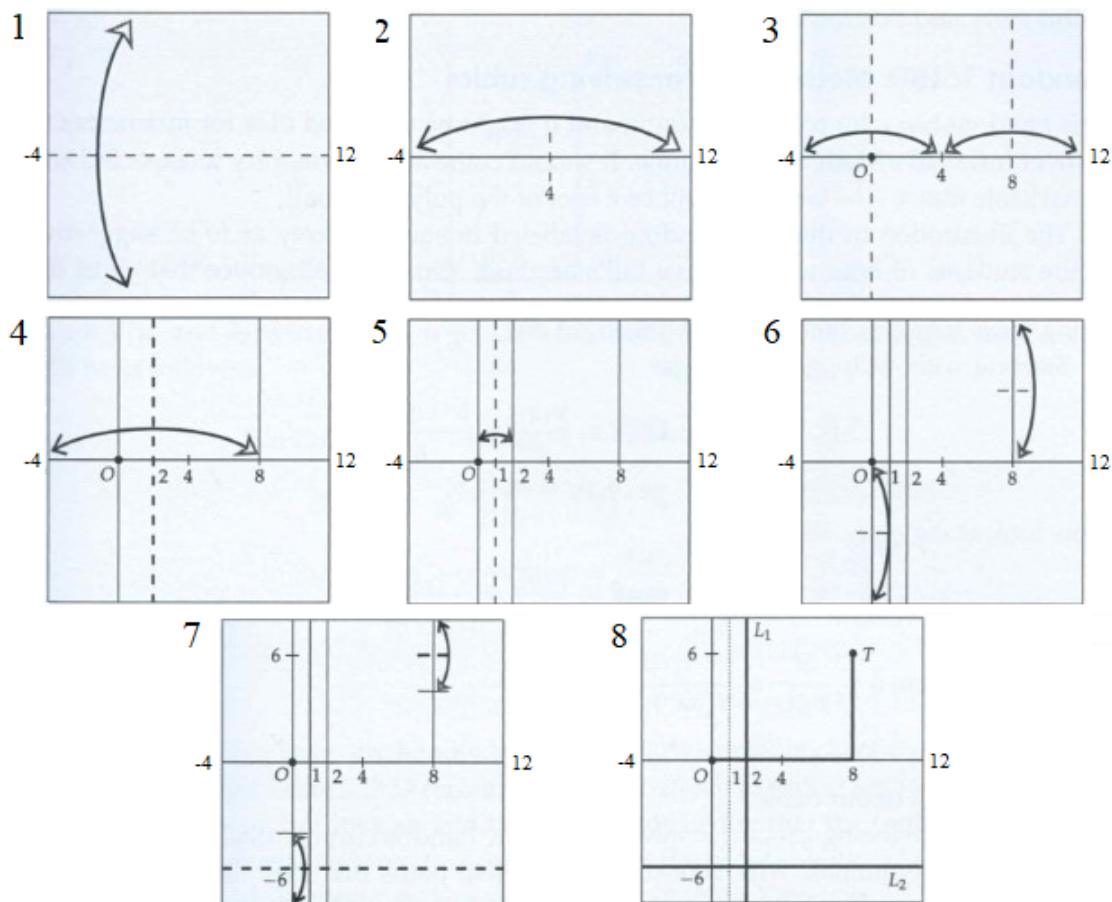
$$\begin{aligned} \text{I } \triangle q_2p_3T \text{ får vi } -x &= \tan \theta = \frac{d}{p_3q_2} = \frac{d}{-x(-ax - b) - c} \\ \Rightarrow -x(-x(-ax - b) - c) &= d \Rightarrow -ax^3 - bx^2 + cx = d \\ \Rightarrow ax^3 + bx^2 - cx + d &= 0 \end{aligned}$$

■

Vi ska nu med Lills metod lösa ett konkret exempel - hitta rötterna till polynomet $x^3 - 7x - 6$. Exemplet och lösningen är hämtat från Thomas Hull's bok *project Origami - Activities for exploring mathematics*. Vi börjar med att skapa ett koordinatsystem där vårt pappersark är xy -planet från $-4 \leq x \leq 12$ och $-8 \leq y \leq 8$. Stegen 1-8 illustreras i figur 5.13.

1. Vik upp nedre kanten av pappret till den övre delen så att ett veck skapat i mitten som är parallellt med den övre och undre sidan av arket. Detta kommer vara vår x -axel.
2. För över vänster sida av pappret till den högra och nyp till i mitten för att skapa en markering för $x = 4$.
3. Vik y -axeln och linjen $x = 8$.
4. Vik linjen $x = 2$. Detta blir vår linje L_1 eftersom $|a| = 1$ och $p_1 = (1, 0)$.
5. Vik linjen $x = 1$.
6. Markera genom att nypa till på dess två platser.
7. Vik linjen $y = -6$. Detta blir vår linje L_2 eftersom $|d| = 6$ och $p_3 = (8, 0)$.
8. För enkelhetens skull markera med en penna x - och y -axlarna, linjerna L_1 och L_2 , punkterna O i $(0, 0)$ och T i $(8, 6)$ samt koefficientvägen. Nu är vi redo att börja!

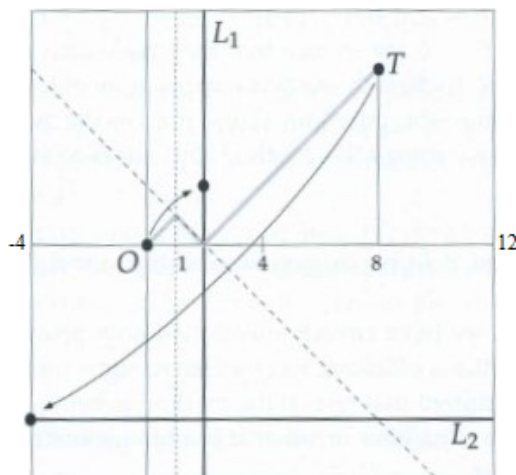
Figur 5.13:



Vi ska nu vika så att punkten O placeras på linjen L_1 samtidigt som punkten T placeras på linjen L_2 , vi använder således axiom 6. Detta kan göras på tre olika sätt.

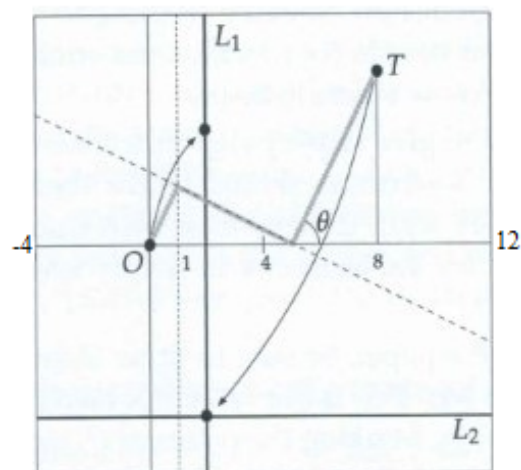
Vi börjar med att titta på figur 5.14. Här förs punkten O till punkten $(2, 2)$ på linjen L_1 och punkten T till punkten $(-4, -6)$ på linjen L_2 . Vinkeln θ vid O är 45° så $\tan \theta = 1$ så -1 bör vara en rot till polynomet $x^3 - 7x - 6$. Vid insättning av $x = -1$ får vi $-1 + 7 - 6 = 0$ vilket bekräftar att vi funnit en rot till polynomet.

Figur 5.14:



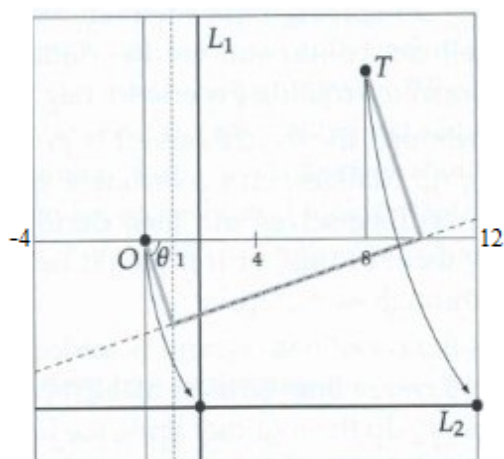
Nu tittar vi på figur 5.15. Den här gången ser vi att T viks till punkten $(2, -6)$ där L_1 och L_2 möts. Vecket kommer alltså korsa x -axeln i punkten $(0, 5)$ eftersom vecket är en vinkelrät bisektris till segmentet mellan $T = (8, 6)$ och $(2, -6)$ vars medelpunkt ligger i $(0, 5)$. Det innebär att den rätvinkliga triangel som bildas av koefficientvägen och laservägen vid punkten T har längderna 3 och 6 på sina kateter. Detta innebär att tangens för den utmarkerade vinkeln θ är $\frac{6}{3} = 2$. -2 bör då vara en till rot till polynomet $x^3 - 7x - 6$. Vi får $(-2)^3 + 14 - 6 = 0$ då vi sätter $x = -2$ vilket bekräftar att det är en rot till vårt polynom.

Figur 5.15:



Det tredje sättet vi kan vika så att punkten O placeras på linjen L_1 samtidigt som punkten T placeras på linjen L_2 ser vi i figur 5.16. Den här gången är det istället punkten O som viks till punkten $(2, -6)$ där L_1 och L_2 möts. Vecket kommer korsa linjen $x = 1$ i punkten $(1, -3)$. Den här gången har vi en rätvinklig triangel med hörnen $O = (0, 0)$, $(1, -3)$ och $(1, 0)$. Kateterna i denna triangel är 1 och negativ 3 vilket ger oss $\tan \theta = -3$. Den sista roten är således 3. Detta stämmer också ty $27 - 21 - 6 = 0$.

Figur 5.16:



6

Bildförteckning

Figur 4.1 och **Figur 4.2** är hämtade från Lang (1996-2003) sidan 38 men jag har redigerat dem, tagit bort axiomen skrivna på engelska och numrerat dem, för att bättre passa in i min uppsats.

Figur 4.3 är hämtad från Hull (2013) sida 113.

Figur 4.4 har jag ritat själv i datorn.

Figur 5.1 och **Figur 5.2** har jag ritat själv i datorn.

Figur 5.3 är hämtad från Lang (1996-2003) sidan 33. Jag har lagt till siffrorna 1-8 i bilden.

Figur 5.4 är hämtad från Hull (2013) sidan 65 men jag har gjort små redigeringar.

Figur 5.5 och **Figur 5.6** är hämtad från Lang (1996-2003) sidan 34. De var en bild som jag dela i två och lagt till siffrorna 1-6.

Figur 5.7 har jag ritat själv, skannat in och i datorn lagt till beteckningar.

Figur 5.8, **Figur 5.9** och **Figur 5.10** har jag skapat själv genom att skanna in vikningen steg för steg och i datorn lagt till beteckningar och pilar.

Figur 5.11 och **Figur 5.12** är hämtade från Hull (2013) från sida 85, 86 respektive 89.

Figur 5.13 är hämtad från Hull (2013) sidan 87 men jag har redigerat dem, tagit bort de engelska beskrivningarna och numrerat dem, för att bättre passa in i min uppsats.

Figur 5.14, **Figur 5.15** och **Figur 5.16** är hämtade från Hull (2013) från sida 91-92.

7

Referenslista

Euklides (ca 300 år f.kr). *Elementa* översatt av R. Fitzpatrick baserat på L. Heibergs grekiska text, publicerat av B.G. Teubneri

Friedman. M. (2018). *Origami⁷: The proceedings from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education*. i Lang. R. J., Bolitho. m. & You. Z. (red.) Mathematical Recreational Folding in the 20th Century: Between and Gardner. St Abans:Tarquin, s. 165-180

Hiraoka, K, & Kokot, L. (2016). *Trisecting an Angle and Doubling the Cube Using Origami Method*. Hiroshima University of Economics volym 38. nummer 4

Hull, T., & Damour, T. Red. (2002). *Origami³: Third international meeting of origami science, math, and education*. Hämtat den 19-09-2019 från: <https://ebookcentral-proquest-com.ezp.sub.su.se>

Hull, T., (2011). *Solving Cubics With Creases*. Amer. Math. Monthly. 118.04.307 s.307-315

Hull, T., (2013). *project Origami - Activities for exploring mathematics*. 2. uppl., Boca Raton: Taylor and Francis Group

Juslenius, A., (2015) *Origami och matematik* [Examensarbete i matematik] Uppsala: Uppsala universitet s.14-15

Lang, R. J., (1996-2003). *Origami and Geometric Constructions*. Hämtad den 20-10-2019 från: <https://www.semanticscholar.org/paper/Lang%2C-Origami-and-Geometric-Constructions-Origami-1-Lang/aa2de2db35a0dcaa6ab929c95ef9e0168f14659c>

Lang, R. J., (2015). *Huzita-Justin Axioms*. Hämtat den 25-09-2019 från: <https://langorigami.com/article/huzita-justin-axioms/>

Lucero, J. C., (2017). *On the Elementary Single-Fold Operations of Origami: Reflections and Incidence Constraints on the Plane*. Forum Geometricorum, Volume 17

Mathleaks u.å *Regelbunden polygon* Hämtat den 24-10-2019 från: https://mathleaks.se/utbildning/kb/begrepp/regelbunden_polygon

Ono, M. (2008). *Origami, Japansk papperskonst*. 3. uppl., Västerljung: Valentin Förlag AB. s.6-9

Pierpont, J. (1895). *On an undemonstrated theorem of the disquisitiones arithmeticae*. Bull. Ams. Math. volym 2. s.77-83

Tambour, T. (2002). *Euklidisk geometri*. Matematiska institutionen. Stockholms universitet. Första upplagan. s. 47-48

Woodhouse. A. & Salhi. A. (2018). *Origami⁷: The proceedings from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education*. i Lang. R. J., Bolitho. m. & You. Z. (red.) Mathematical Modelling of Errors in Origami. St Abans:Tarquin, s.373-404