



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Sfärisk Geometri

av

Christoffer Engqvist

2019 - No K6

Sfärisk Geometri

Christoffer Engqvist

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2019

Sfärisk Geometri

Christoffer Engqvist

Innehållsförteckning

1	Hur användningsområdet växte fram	3
1.1	Grundläggande om Euklides postulat	3
2	En introduktion till geometri på sfären	4
2.1	Linjer på sfären	4
2.2	Parallella linjer	7
2.3	Antipodala punkter	8
2.4	Postulat tre och fyra	9
3	Triangelolikheten och begränsning av omkrets	10
3.1	Kortaste avståndet mellan två punkter på sfären	12
3.2	Begränsning av omkretsen	13
4	Vinklar och vinkelsumman med hjälp av den polära triangeln	14
4.1	Polära triangeln	15
4.2	Polära dualitetsatsen	17
4.3	Vinkelsumman i en sfärisk triangel	18
5	Rätvinkliga trianglar, identiteter och exempel	18
5.1	Pythagoras sats på sfären	23
5.2	Navigeringsexempel	24
6	Trubbiga trianglar, cosinus-satsen och ett till navigeringsexempel	27
6.1	Cosinussatsen i den sfäriska geometrin	28
6.2	Avståndsberäkning på sfären	30
6.3	Exempel på användning med cosinussatsen	30
7	Diagonens area och Girards formel	32
7.1	Diagonens area	32
7.2	Girards formel	33

1 Hur användningsområdet växte fram

Tar vi fram en matematisk lärobok med inriktning från grundskolan eller gymnasiet från bokhyllan som behandlar ämnet geometri kan vi med största sannolikhet finna den euklidiska geometrin som en röd tråd genom läroboken. Vi finner de första fyra grundläggande postulaten följt av de femte, parallellpostulatet, och vad vi kan genomföra med dessa regler. Vi finner med största sannolikhet Pythagoras sats och områden där den kunskapen kan tillämpas samt givetvis bevis för satsen. Sfärisk geometri är däremot något vi inte finner mycket av i dagens läromedel på grundläggande nivå trots att sfärisk geometri under mer än 1500 år var som en storebror till trigonometri i planet. Sfärisk geometri var även fortsatt populärt fram till andra världskriget då vissa tillämpningar i marinen och militären präglades av detta och därför fick en framträdande plats. Därefter fann sig ämnet åsidosatt för den euklidiska geometrin vi ser mest av i läroböckerna idag. Detta för att pedagogiken kring geometri var på väg åt ett annat håll än mot den sfäriska, d.v.s. mot den plana geometrin [1].

Vad är då sfärisk geometri och varför fanns det en användning för det?

Sfärisk geometri motiveras av att det fanns en outhärlighet att lokalisera sig, främst för astronomer och sjömän, med hjälp av stjärnorna och planeterna i himmelen. Då jorden men även himmelen har en sfärisk form blev det naturligt att betrakta geometrin på just en sfär och de är det som menas med sfärisk geometri, geometrin på en sfärs yta.

Det är ett område som har utvecklats en hel del genom århundraden från bland annat Menelaus (70-140 e Kr.) samt Abu Sahl al Kuhi (940-1000 e Kr.) till det tillvägagångssättet som får anses som det moderna varav ett av tillvägagångssätten sattes i system av någon som inte var en renodlad matematiker. Med denna text vill jag ta med läsaren på en resa om vad vi kan lära oss om sfärisk geometri i alltifrån grundläggande egenskaper på en sfär till hur vi med fotfästet i sfärisk geometri kan navigera, med hjälp av trianglar, på öppet hav med vinden piskandes i ansiktet.

Större delen av detta arbete är hämtat ur Heavenly mathematics av Glen Van Brummelen.

1.1 Grundläggande om Euklides postulat

Som jag skrev tidigare är Euklidisk geometri den röda tråden i den geometrin som idag lärs ut i skolor över Sverige. Euklides är känd för det matematiska

verket Elementa. Euklides använder i Elementa olika typer av grundläggande antaganden. Ett av de antaganden han gör är postulaten som är de verklighetsnära förutsättningar som Euklides byggde hela geometrin på. I Elementa används fem postulat och de är,

1. Mellan två punkter går precis en rät linje.
2. En ändlig rät linje kan förlängas i en rät linje.
3. En cirkel kan uppritas med godtyckligt centrum och godtycklig radie.
4. Alla räta vinklar är lika.
5. Given en rät linje och en punkt som ligger utanför linjen kan man dra en och endast en rät linje som går igenom punkten och är parallell med linjen.

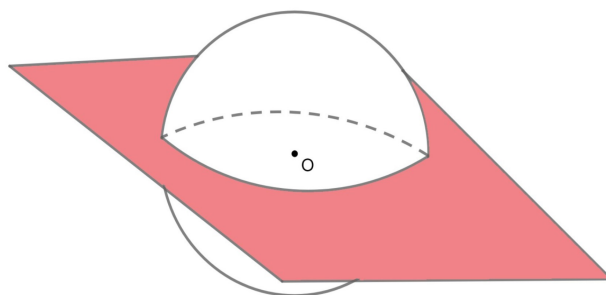
Det femte postulatet, parallellpostulatet, kunde ingen bevisa utifrån de tidigare fyra postulaten, det gick helt enkelt inte. Även Euklides själv försökte förgäves bevisa parallellpostulatet med de fyra postulten som grund då den euklidiska geometrin är uppbyggd på de fem postulaten jag listat ovan utan att lyckas. Varför tar jag upp detta? Jag skrev tidigare om den euklidiska geometrin är förenligt med de fem postulaten ovan. Det som skiljer den euklidiska geometrin mot icke-euklidiska är att den är förenlig med de fyra första postulaten men inte det femte, parallellpostulatet.

2 En introduktion till geometri på sfären

2.1 Linjer på sfären

Instinktivt kan vi säga att det inte finns, så som vi tänker oss, raka linjer på en sfärisk yta. Låt oss säga att du står vid nordpolen och påbörjar en lång vandring söderut, förbi sydpolen och tillbaka till din startpunkt. Du har då utifrån ditt perspektiv vandrat en rak linje framåt över jordens yta. Tittar vi istället på en betydligt mindre sfär i storleken av exempelvis en golfboll kan vi konstatera att den vandrade sträckan inte är speciellt rak. Den har formen av en cirkel, en storcirkel som det kallas. Detta leder oss in på våra först definitioner.

Definition 2.1. En storcirkel bildas på sfärens yta då ett plan skär sfären genom dess medelpunkt.



Figur 1:

Betrakta figur 1 ovan. En storcirkel bildas på sfärens yta då ett plan skär medelpunkten O i sfären. En storcirkel är den sfäriska geometris motsvarighet till en linje i planet. Vi kommer helt enkelt att kalla dem linjer framöver.

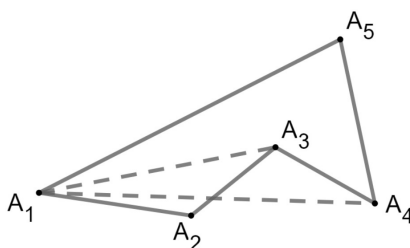
Definition 2.2. En sträcka är minsta cirkelbågen mellan två punkter som bildas av en storcirkel.

Vi vill senare visa att det kortaste avståndet mellan två punkter på sfären är det storcirkelsegment som går genom de båda punkterna. För att visa att det kortaste avståndet är just den sträckan vill vi gå tillbaka i planet och visa varför det kortaste avståndet i planet är en linje. Beviset består av triangelolikheten som vi för tillfället tar för given men kommer att redovisas vid senare del av arbetet. Triangelolikheten säger att summan av två sidor i en triangel är längre än den återstående. Vi behöver även för fall 3 i beviset en definition för vad en kurva är,

Definition 2.3. En kurva är en krökt figur i planet som begränsas av två ändpunkter.

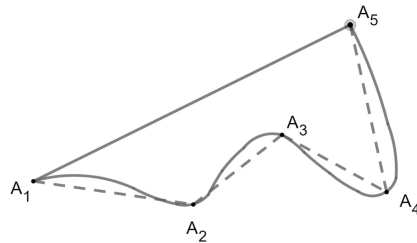
Sats 2.4. *Det kortaste avståndet mellan två punkter är den rätta linjen.*

Bevis. Fall 1. Vi visualiserar en sträcka mellan punkt A och B i planet. Sträckan AB kommer alltid att vara kortare än ACB om punkt C inte ligger på sträckan AB . Detta påstående är ekvivalent med triangelolikheten som bevisas vid sats 3.1. I detta fall får vi att AC och CB är längre än den återstående vilket är AB .



Figur 2:

Fall 2. Vi betraktar figur 2 och punkt A_1 och A_5 . Sträckan som bildas mellan de två punkterna blir alltså A_1A_5 . Vi vill nu visa att den sträckan är kortare än $A_1A_2A_3A_4A_5$. Enligt fall 1 kan vi konstatera att sträckan $A_1A_3 < A_1A_2A_3$ och då det är den kortaste sträckan vi är intresserade av utesluter vi därför $A_1A_2A_3$ och behåller sträckan A_1A_3 . På samma sätt är sträckan $A_1A_4 < A_1A_3A_4$ genom samma resonemang som tidigare utesluter vi $A_1A_3A_4$ och upprepar vi detta en gång till kommer vi erhålla att $A_1A_5 < A_1A_4A_5$ och vi har då med hjälp av fall ett visat att kortaste avståndet mellan de två punkterna A_1 och A_5 är sträckan A_1A_5 . Vi får de allmänna fallet $A_1A_n < A_1A_{n-1}A_n$. Detta påstående gäller med samma resonemang som fall ett, att A_{n-1} inte ligger på sträckan A_1A_n .



Figur 3:

Fall 3. Betrakta figur 3 ovan. Vi har då sträckan A_1A_5 och kurvan som har startpunkt i A_1 och slutpunkt i A_5 . Vi kan approximera delar av kurvan med rätta linjer om varje linje har sin start och ändpunkt på kurvan. Gör vi sedan avståndet mellan start och ändpunkten väldigt litet får vi något som liknar den ursprungliga kurvan fast med rätta linjer. Vi får då i figur 3 sträckorna A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 . Men då har vi liknande situation som i fall två som vi visade ges av det allmänna fallet $A_1A_n < A_1A_{n-1}A_n$. Då vi kan approximera en kurva med linjer kan vi med hjälp av fall ett och två dra slutsatsen att den kortaste sträckan mellan två punkter är den linje som förbinder de två punkterna.

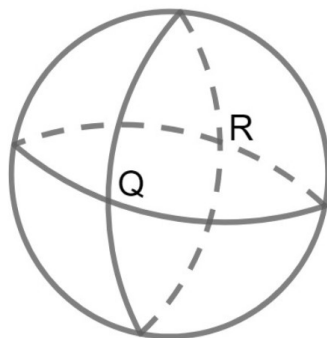
□

Resonemanget gäller även på sfären givet att triangelolikheten gäller. Givet att triangelolikheten gäller kommer det kortaste avståndet mellan två punkter på sfären vara det segment av en storcirkelbåge som förbinder de två punkterna. Detta kommer vi att återkomma till senare i arbetet.

2.2 Parallella linjer

I geometrin på planet kan vi dra endast en linje mellan två punkter. På sfären däremot kan vi dra oändligt många linjer mellan vissa två punkter och det är om de två punkterna är antipodala. Även detta kommer vi att återkomma till senare i texten. Innan antipodala punkter definieras ska vi undersöka om det på sfären existerar parallella linjer. I planet är linjer parallella om de inte skär varandra. Vi använder samma definition på sfären.

Sats 2.5. *På sfären finns inga parallella linjer.*



Figur 4: Skärningspunkter

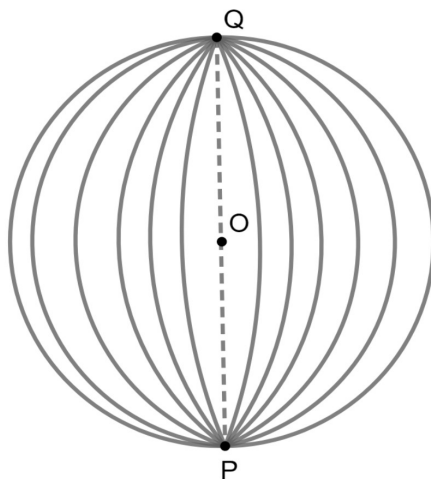
Bevis. Genom en punkt utanför en linje kan man inte dra någon linje alls som är parallell med den givna, eftersom alla linjer skär varandra. Detta visas lättast med illustrationen ovan där vi ritat en storcirkel. Vi ritar sedan ut en till godtycklig storcirkel. Då kan se att de två linjerna skär varandra vid två ställen, Q och R och vi har då, med hjälp av illustrationen visat att det i den sfäriska geometrin inte existerar parallella linjer. $\square$

2.3 Antipodala punkter

Vi behöver nu en definition för vad antipodala punkter är. Detta för att, som jag nämnde tidigare, genom två antipodala punkter går det oändligt många linjer. En differens från vad vi ser i planet där det endast går en linje mellan två punkter.

Definition 2.6. *Två punkter på sfären säges vara antipodala om de ligger på samma diameter*

Sats 2.7. *Mellan två antipodala punkter går det oändligt många linjer.*



Figur 5:

Bevis. Vi drar en diameter genom sfärens medelpunkt O och får de antipodala punkterna P och Q . Dessa punkter kan liknas med nord och sydpolen på jordens yta. Vi kan se på figur 5 att vi kan dra oändligt många linjer mellan P och Q . Dessa linjer kan jämföras med longitudsträckorna på jorden. $\square$

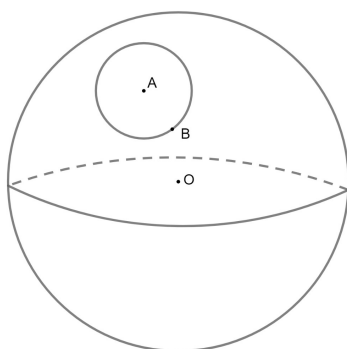
2.4 Postulat tre och fyra

Definition 2.8. Om två linjer skär varandra så att de fyra vinklarna som bildas är lika stora är de vinklarna räta.

Alla räta vinklar är lika vilket även är postulat fyra, detta medför att vi får en naturlig enhet för mätning av vinklar som uttrycker en homogenitet i rummet. En rät vinkel är alltid 90° och detta gäller även i den sfäriska geometrin. Postulat fyra kommer bland annat vara användbart när vi ska visa att vinkelsumman i en triangel överstiger 180° som kommer att göras med hjälp av den polära triangeln.

Definition 2.9. En cirkel är mängden av punkter som ligger på samma avstånd från en given punkt, cirkelns medelpunkt, där avståndet är cirkelns radie.

Betrakta figur 6 nedan. Vi väljer ut en punkt A på sfären som vår medelpunkt och en annan punkt B på sfären. Vi får då cirkeln med bågen AB som radie. Varje punkt i cirkeln kommer att ha samma avstånd till A d.v.s längden AB . Man kan även tolka det som att ett plan skär sfären men inte sfärens medelpunkt och skärningen bildar då en cirkel på sfärens yta. Cirklar på sfären, med undantag för storcirklar, är den sfäriska geometrins motsvarighet till cirklar i planet.

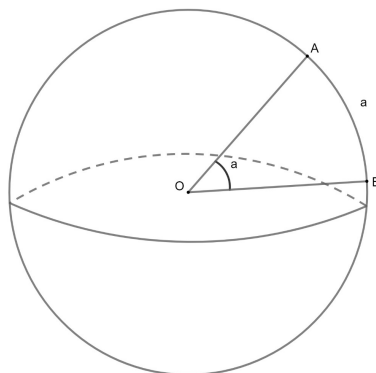


Figur 6:

Det här är ingenting vi kommer att diskutera vidare i detta arbete då vi främst kommer fokusera på olika trianglar på sfären. För kuriosa kan vi betrakta cirklar på sfären som latitudsträckorna på jorden med undantag från ekvatorn som är en storcirkel. Med detta med oss i vår matematiska ryggsäck kan vi börja utforska sfären utförligare.

3 Triangelolikheten och begränsning av omkrets

Vi kommer senare se hur man kan använda trianglar för att lösa praktiska navigeringsproblem. Naviering med hjälp av trianglar var även ett utav de sätt som exempelvis sjömän navigerade på innan diverse hjälpmedel som GPS fanns tillgängliga och det sättet kallas storcirkelnavigering. I navigering mäts längden av en sträcka i form av grader och jag kommer därför att beskriva längden av sträckor i grader. Det gör vi genom att betrakta en sfär med radie ett där centrumvinkeln är lika med sträckan som bildas på sfärens yta.

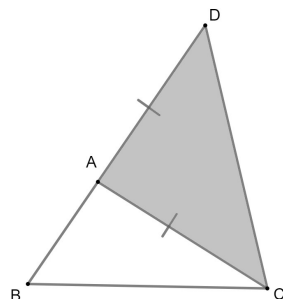


Figur 7: Centrumvinkel med benämning a

Sträckan AB har alltså längden a° , om radien hade varit r hade sträckan varit $r \cdot a^\circ$ men då vi betraktar sfären med radie ett är alltså längden a° . Vid navigering översätts sträckan som ges av centrumvinkeln till enheten sjömil. En sjömil motsvarar en bågminut på en storcirkel vilket på en sfär motsvarar $\frac{1}{60}^\circ$. Om vi då betraktar centrumvinkel a som 10° . Då kommer även sträckan AB vara lika med 10° . Vill vi skriva sträckan AB i enheten sjömil behöver vi alltså multiplicera den givna sträckan med 60. Vi får i vårt fall att AB i sjömil är motsvarande, $10 \cdot 60 = 600$. Sträckan AB är alltså 600 sjömil. Vi kommer att ha användning av detta senare i de olika exemplen.

Innan vi kan påbörja navigeringsexemplet behöver vi fastställa mer teori, bland annat den största omkretsen av en triangel på sfären. För att göra det kommer vi utgå från en triangel planet och Euklides än en gång genom proposition 20 i bok ett av Elementa, triangelolikheten.

Sats 3.1 (Triangelolikheten). *I en triangel är summan av de två sidorna större än den återstående.*



Figur 8:

Bevis. Vi låter ABC vara en triangel och vi ska visa att i den är två sidor större än den återstående. Vi ska alltså visa att summan av BA och AC är större än BC , AB och BC är större än AC och att BC och CA är större än AB . Vi förlänger sträckan BA så den skär genom punkt D så att sträckan DA är lika lång som sträckan AC . Sedan förbinder vi D med C och får triangeln ADC . Eftersom AC är lika med DA är vinkel ADC lika med vinkel ACD vilket resulterar i att vinkel BCD är större än vinkel ADC . Proposition 19 i Elementa bok ett säger att i en godtycklig triangel är sidan motstående den större vinkeln större. I vårt fall får vi då att i triangeln DCB är vinkel BCD större än BDC och enligt proposition 19, som vi nu tar för givet, är alltså DB större än BC . Men DA är lika med AC därför är summan av BA och AC större än BC . På liknande sätt kan vi visa att summan av BC och AB är större än AC och att summan AC och BC är större än AB . $\square$

3.1 Kortaste avståndet mellan två punkter på sfären

Jag skrev tidigare om att den sfäriska geometrin är en icke-euklidisk geometri då den inte är förenlig med parallellpostulatet. Euklides utgår i Elementa utifrån de fem postulaten som han använder för att bevisa olika propositioner. När Euklides bevisat en proposition kan han sedan använda den nyss bevisade i nästkommande proposition o.s.v. Euklides drog sig däremot från att använda parallellpostulatet och använde inte denna förrän i proposition 29. Alltså är inga bevis innan proposition 29 beroende av just parallellpostulatet. Triangelolikheten som är proposition 20 i elementa är alltså inte beroende av parallellpostulatet. Detta resulterar i att beviset för triangelo-

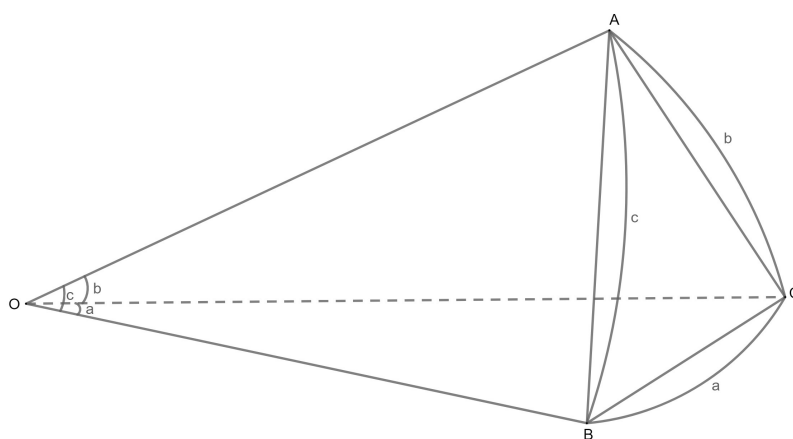
likheten är överförbar i den sfäriska geometrin

Men om triangelolikheten gäller i den sfäriska geometrin kan vi upprepa det bevis som följde efter sats 2.4. Då visade vi att det kortaste avståndet mellan två punkter är den räta linjen som går genom just de två punkterna. Detta kommer alltså gälla även på sfären p.g.a. triangelolikheten och den kortaste sträckan är alltså det segmentet av en storcirkelbåge som går mellan de två punkterna.

3.2 Begränsning av omkretsen

Nu behöver vi en begränsning av omkretsen i sfäriska trianglar. Detta är för att, som jag beskrev tidigare, underlätta våra beräkningar vid senare tillfälle.

Sats 3.2. *Summan av sidorna i en sfärisk triangel kan inte överstiga 360° .*



Figur 9:

Bevis. Enligt det första postulatet kan vi dra en rät linje mellan två punkter. Vi drar därför sträckorna AB , BC och AC och har då bildat tetraedern $OABC$. De nio vinklarna som hör ihop med de tre plana trianglarna $\triangle OAB$, $\triangle OAC$, $\triangle OCB$ blir då 540° . Vi vet det eftersom vi sedan tidigare från den plana geometrin vet att vinkelsumman i en triangel är 180° i planet. Vi får då $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Med hjälp av bland annat triangelolikheten, som vi bevisade tidigare, kan proposition 20 i bok 11 av elementa bevisas. Den säger att i

en rymdvinkel, d.v.s. ett hörn, bestående av tre plana vinklar så är summan utav två vinklar större än den tredje. Denna sats bevisas inte i detta arbete utan läsaren hänvisas i det fallet till Euklides verk Elementa.

I vårt fall får vi då att av de nio vinklarna vid A , B , C överstiger två av de vinklarna vid A , nämligen $\angle OAB$ och $\angle OAC$, den tredje som är $\angle A$ i triangel ABC d.v.s. $\angle BAC$. Likaså för paret vid B och C . Summan av sidorna i den sfäriska triangeln är lika med $a + b + c$. Detta följer av att sträckorna i den sfäriska triangeln är lika med centrumvinkeln, som i figur 9 är vinklarna vid O . Av det tidigare resonemanget följer att summan av sidorna i tetraeden $OABC$ bortsett från $\triangle ABC$ att vinkelsumman är 540° . Tidigare visades att den tredje sidan av en triangel ej kan överstiga summan av de andra två. Med den kännedomen får vi följande uttryck,

$$\begin{aligned} a+b+c &= 540^\circ - ((\angle OAB + \angle OAC) + (\angle OBC + \angle OBA) + (\angle OCA + \angle OCB)) < \\ &< 540^\circ - (\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB) \end{aligned}$$

Summan av $\angle BAC$, $\angle ABC$ och $\angle ACB$ är 180° då de är vinklar i en plan triangel, nämligen $\triangle ABC$. Till höger om olikhetstecknet får vi alltså $540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$. Således får vi att

$$a + b + c < 360^\circ$$

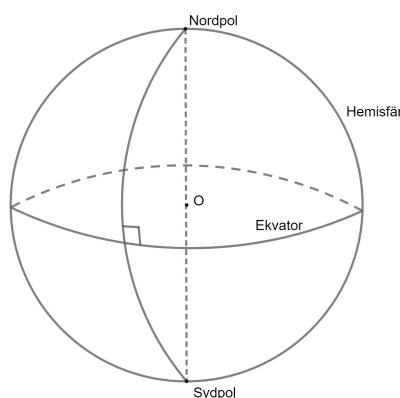
□

Detta kommer vi även ha användning av i nästkommande del när vi börjar diskutera vinkelsumman i sfäriska trianglar.

4 Vinklar och vinkelsumman med hjälp av den polära triangeln

Nu har vi begränsat omkretsen av en sfärisk triangel men vi har inte börjat diskutera vinklar än. I planet har vi blivit inskolade i att vinkelsumman i en triangel är 180° men vi kommer snart att se att detta inte stämmer i den sfäriska geometrin. Innan vi påbörjar nästa definition behöver vi diskutera

antipodala punkter lite djupare än vi gjorde vid de inledande definitioner. Betrakta figur 10.



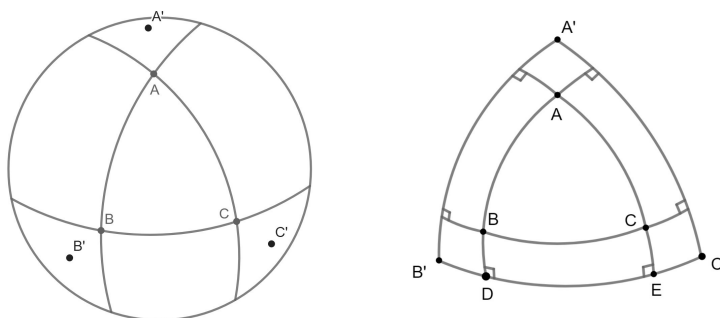
Figur 10:

De två antipodala punkterna kunde beskrivas som nord- och sydpol. Dessa två punkter ligger på varsin hemisfär som delas av en ekvator, som är en storcirkel. Vi såg tidigare att det fanns oändligt många linjer mellan de två antipodala punkterna. Det vi behöver ta med oss till nästa stycke är att linjen mellan nord- och sydpol och ekvatorn är vinkelrät.

4.1 Polära triangeln

Vi kommer nu att göra en till synes mystisk skapelse på sfären. Den skapelsen kommer att användas för att klargöra några samband som senare kommer leda till att vi kan visa att vinkelsumman i en triangel överstiger 180° .

Definition 4.1. *I en godtycklig sfärisk triangel $\triangle ABC$ kan vi förlänga sidan AB . Vi ser den sidan som en ekvator och C' som en motsvarande pol som är på samma hemisfär som punkten C . Vi upprepar detta för de övriga sidorna och förbinder punkterna A' , B' och C' . Då får vi $\triangle A'B'C'$ som bildar det vi nu framöver kommer kalla den polära triangeln till $\triangle ABC$.*



Figur 11:

Jag skrev innan om att vinkeln som bildas av en linje mellan de två antipodala punkterna nord- och sydpol och ekvatorn är vinkelrät. Det är något vi behöver ha i åtanke vid sats 4.2 samt efterföljande bevis. I den högra bilden i figur 11 är de räta vinklarna utplacerade för att förenkla bevisresonemanget som följer efter sats 4.2 samt 4.4.

Sats 4.2. *Den polära triangeln av en polär triangel är den ursprungliga triangel.*

Bevis. Enligt bilden ovan förlänger vi BC och ser resultatet som ekvator. Vi antar att punkt A' på samma hemisfär som A är pol till sträckan BC . På samma sätt att B' ligger på samma hemisfär som B och är pol till sträckan AC och att C' ligger på samma hemisfär som C och är pol till AB .

Men om C' är en pol till förlängningen av sträcka AB och A' är en pol till den förlängda sträckan BC kommer B vara en pol till $A'C'$. På samma sätt kan vi se i figuren att C är pol till $B'A'$ och att A är pol till $B'C'$. Vi utgår alltså ifrån triangel $\triangle ABC$ och finner den polära triangeln $\triangle A'B'C'$. Ska vi finna den polära triangeln till $\triangle A'B'C'$ kommer vi att komma tillbaka till $\triangle ABC$. Den polära triangeln av en polär triangel är den ursprungliga. Vi har då visat att relationen är tvåfaldigt. $\square$

Nu är vi på god väg till att visa det som var meningen då vi konstruerade den polära triangeln. En repetition av vad som menas med supplement för en vinkel kan vara på sin plats innan nästa sats.

Definition 4.3. *Supplementet av en vinkel α är $180^\circ - \alpha$.*

Innan vi kan visa att vinkelsumman i en sfärisk triangel överstiger 180° behöver ett till samband från den polära triangeln klargöras.

4.2 Polära dualitetsatsen

Sats 4.4 (Polära dualitetsatsen). *Sidan i en polär triangel är supplement av motsvarande vinkel i den ursprungliga triangeln, och vinklarna av en polär triangel är supplement av sidorna hos originalet.*

Bevis. Betrakta den högra bilden i figur 11. Sträckan DE motsvarar $\angle A$. Vi kan även utifrån figuren se att C' är en pol till sträckan ABD . På samma sätt följer att B' är en pol till sträckan ACE . Följaktligen kan vi då, utifrån figuren igen, konstatera att både sträckan $C'D$ och $B'E$ är 90° . För att räkna ut sidan av den polära triangeln d.v.s. sträckan $B'C'$ får vi följande uttryck,

$$B'C' = B'E + C'D - DE = 180^\circ - DE = 180^\circ - \angle A.$$

Alltså att sträckan $B'C'$ är supplementet av vinkeln i den ursprungliga triangeln. På samma sätt visas motsvarande påståenden om de resterande sidorna.

För att bevisa att vinklarna i en polär triangel är supplementet av sidorna hos den ursprungliga triangeln betraktar vi den högra bilden i figur 11 igen. C är en pol till sträckan $A'B'$ och B är en pol till sträckan $A'C'$. Genom liknande resonemang som tidigare får vi då,

$$\angle A' = 180^\circ - BC,$$

på samma sätt kan även de resterande vinklarna visas. □

Med hjälp av det vi har visat är vi nu redo att visa att vinkelsumman i en sfärisk triangel överstiger 180° .

4.3 Vinkelsumman i en sfärisk triangel

Sats 4.5. *Vinkelsumman av en triangel inom sfärisk geometri överstiger 180° .*

Bevis. Vi vet att summan av sidorna av den polära triangeln måste vara mindre än 360° , detta redovisades i det tidigare stycket. Tidigare beskrevs även att sidorna av den polära triangeln är supplement av vinklarna i den originella triangeln och vise versa. Genom att kombinera det som tidigare har visats får vi då följande,

$$(180^\circ - A) + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) < 360^\circ.$$

Genom att applicera kända räknelagar skriver vi om olikheten till,

$$A + B + C > 180^\circ.$$

□

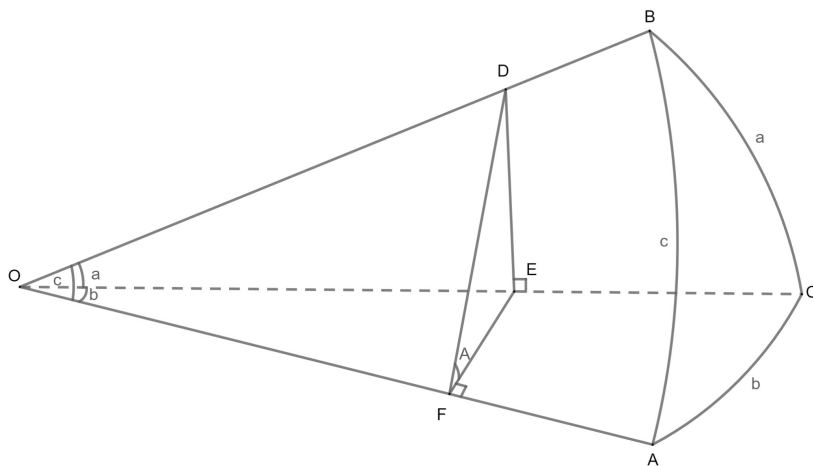
Vi har alltså visat att det som sitter i väggarna i var och varannat klassrum ute i Sverige, att vinkelsumman i en triangel är 180° och har då visat att vinkelsumman i en triangel faktiskt kan överstiga 180° men då på en sfär. Vi kommer senare på ett annat sätt se att vinkelsumman i en sfärisk triangel överstiger 180° men då genom att betrakta arean av den sfäriska triangeln.

För den intresserade kan det vara av intresse att veta att Euklides i proposition 32 i bok ett av Elementa bevisade att vinkelsumman i en plan triangel är 180° . I det beviset utgår Euklides bland annat ifrån postulat fem, d.v.s. parallellpostulatet. Som jag skrev tidigare är sfäriskt geometri inte förenlig med parallellpostulatet och därför får vi även ett annorlunda svar i den sfäriska geometrin gällande vinkelsumman i en triangel än det resultatet vi har i den plana geometrin.

5 Rätvinkliga trianglar, identiteter och exempel

Att det är en skillnad på trianglar i planet jämfört med i sfären har nu visats. I inledningen beskrivs ett målande exempel där vi med piskande vind i ansiktet navigerar oss på öppet hav. Det kommer vi i det första exemplifierandet att göra med hjälp utav den rätvinkliga triangeln. Innan vi

kastar oss ut i det exemplet behöver vi ha med oss några formler som hjälper oss på vägen. Vi betraktar den sfäriska rätvinkliga triangeln nedan för att skapa formler där $\angle BCA$ är rätvinklig.



Figur 12:

För att kunna härleda formlerna behöver vi använda oss utav en rätvinklig triangel i planet. Den rätvinkliga triangeln kan vi skapa, betrakta figur 12. Det första vi vill göra är att förvandla $\angle A$ och $\angle B$ från det sfäriska till planet. Vi gör detta genom att betrakta $\angle A$ som en vinkel mellan triangel $\triangle OAC$ samt $\triangle OAB$ då den är lika stor som $\angle BAC$ i den sfäriska triangeln. Vi gör på liknande sätt med $\angle B$ som då blir vinkeln mellan den vertikala bakre väggen $\triangle OBC$ samt planet $\triangle OAC$. Vi uttrycker $\angle A$ och $\angle B$ som vinklar mellan linjesegment hellre än mellan planen. För att göra detta väljer vi en punkt D på sträckan OB vi drar en vinkelrät linje mot sträckan OC och kallar skärningspunkten E . Vi drar därefter en vinkelrät linje till sträckan OA och kallar skärningspunkten F . Detta gör att $\triangle DEF$ bildar en rätvinklig triangel inne i den sfäriska med den räta vinkeln vid E . I det första steget vid skapandet av formlerna kommer vi betrakta $\angle A$ som motsvarar $\angle DFE$ i den plana triangeln $\triangle DFE$.

Innan vi påbörjar att skapa dessa formler behöver vi klargöra en sak gällande den plana triangeln $\triangle DFE$. Vi kan konstatera att $\triangle ODE$, $\triangle DEF$ och

$\triangle OEF$ är rätvinkliga på grund av hur vi drog linjerna men kan vi vara säkra på att $\triangle ODF$ är rätvinklig? Svaret är ja vilket jag nedan kommer att visa med hjälp av Pythagoras sats som seglar in till undsättning.

Vi antar att kvadraten av den förmodande hypotenusan OD .

$$\begin{aligned} OD^2 &= OE^2 + ED^2 \\ &= (OF^2 + EF^2) + (DF^2 - EF^2) = OF^2 + DF^2 \end{aligned}$$

Vi har då visat att $\triangle OFD$ är rätvinklig precis som $\triangle ODE$ och $\triangle OEF$ i tetraeden $ODEF$. Varför gjorde vi detta? Om vi applicerar trigonometri direkt ur figuren kommer vi att kunna härleda inte mindre än sju användbara formler där nyckeln är att betrakta tetraedern $ODEF$. Exempelvis,

$$\sin(a) = \frac{DE}{OD}$$

Då $\frac{DE}{OD}$ har punkten D gemensamt multiplicerar vi högerledet med den tredje sträckan som har punkten D gemensam. Vi multiplicerar alltså högerledet med $\frac{DF}{DF}$. Detta ändrar ingenting i vänsterledet då $\frac{DF}{DF} = 1$. Således får vi,

$$\sin(a) = \frac{DE}{OD} = \frac{DE}{DF} \cdot \frac{DF}{OD}$$

Betrakta figur 12 igen. Vi kan skriva om $\frac{DE}{DF}$ till $\sin(A)$ och $\frac{DF}{OD}$ till $\sin(c)$. Alltså är

$$\sin(a) = \sin(A) \cdot \sin(c)$$

Kom ihåg att a, b, c motsvarar sidorna i den sfäriska triangeln och A, B, C är vinklarna. Vi kan på samma sätt erhålla följande formler,

$$\begin{aligned} \sin(b) &= \frac{FE}{OE} = \frac{FE}{DE} \cdot \frac{DE}{OE} = \cot(A) \cdot \tan(a) \\ \cos(A) &= \frac{FE}{DF} = \frac{FE}{OF} \cdot \frac{OF}{DF} = \tan(b) \cdot \cot(c) \\ \cos(c) &= \frac{OF}{OD} = \frac{OE}{OD} \cdot \frac{OF}{OE} = \cos(b) \cdot \cos(a) \end{aligned}$$

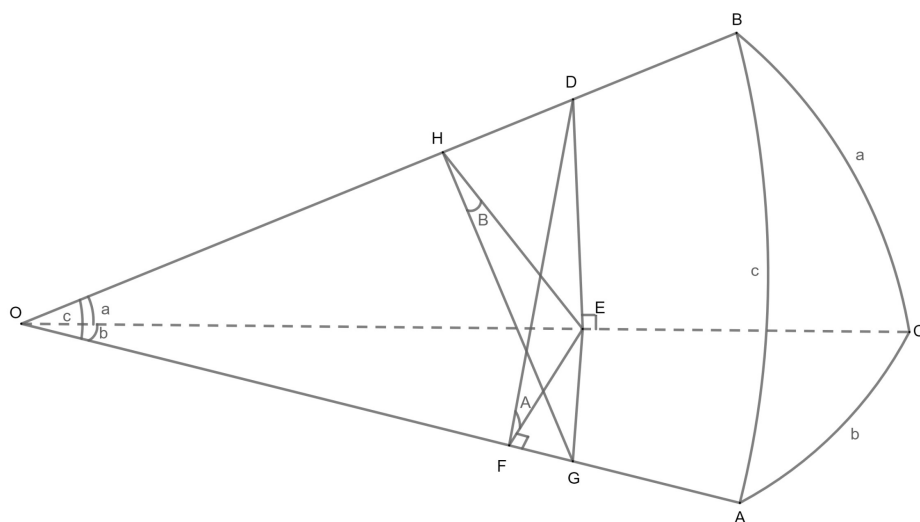
Eftersom A och B är två godtyckligt valda punkter kan vi därför byta plats på A och B , likaså gäller för sträckorna a och b . Genom att göra detta kan vi härleda ytterligare tre satser.

$$\sin(b) = \frac{DE}{OD} = \frac{DE}{DF} \cdot \frac{DF}{OD} = \sin(B) \cdot \sin(c)$$

$$\sin(a) = \frac{FE}{OE} = \frac{DE}{OE} \cdot \frac{FE}{DE} = \tan(b) \cdot \cot(B)$$

$$\cos(B) = \frac{FE}{DF} = \frac{FE}{OF} \cdot \frac{OF}{DF} = \tan(a) \cdot \cot(c)$$

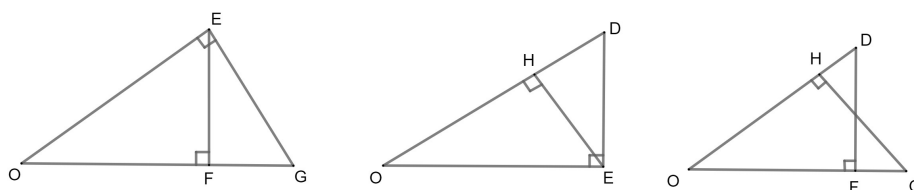
Vi kan konstatera att bytet inte gav oss någonting nytt i $\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$ och jag hänvisar även läsaren att testa detta. Hittills har vi alltså de sju formlerna att lita oss på men vi är inte klara riktigt än. Vi har nu inga identiteter som refererar till både A och B . Detta gör vi geometriskt genom att betrakta figur 13 nedan.



Figur 13:

Vi måste lägga till $\angle B$ så vi förhåller oss till en liknande process vi använde vid bildandet av $\angle A$. Vi väljer en punkt G på OA och drar en vinkelrät linje mot OC som skär OC vid E . Vi drar därefter en vinkelrät linje på OB och kallar skärningpunkten H . Vi drar sedan en linje från H till G och kan med tidigare förda resonemang säga att $\triangle OHG$ är rätvinklig med den räta vinkeln vid H och $\angle B = \angle H$.

Vi får då de tre trianglarna nedan som beskriver de tre planen av tidigare bild. Med hjälp av dessa omvandlar vi de nya förhållanden till trigonometriska funktioner för andra kända vinklar.



Figur 14: Trianglarna i planet från figur 13.

Exempelvis får vi följande genom att betrakta figur 13,

$$\cos(b) = \frac{OF}{OD}$$

Vi gör som i det föregående exemplet då vi multiplicerade sträckorna med den tredje sträckan som har en gemensam punkt med de båda sträckorna i detta fall med sträckan OE . Således får vi,

$$\cos(b) = \frac{OF}{OD} = \frac{OF}{OE} \cdot \frac{OE}{OD}$$

Med hjälp av figur 14 kan vi konstatera att förhållandet mellan $\frac{OF}{OE}$ är lika med förhållandet mellan $\frac{EF}{EG}$ och även att förhållandet mellan $\frac{OE}{OD}$ är lika med förhållandet mellan $\frac{EH}{DE}$. Vi applicerar det och får följande uttryck,

$$\cos(b) = \frac{OF}{OD} = \frac{OF}{OE} \cdot \frac{OE}{OD} = \frac{EF}{EG} \cdot \frac{EH}{DE}$$

För att skriva om förhållandet till en trigonometrisk funktion behöver vi observera att $\frac{EF}{EG} \cdot \frac{EH}{DE} = \frac{EF}{DE} \cdot \frac{EH}{EG}$. Återgår vi sedan till figur 13 kan vi se att,

$$\frac{EF}{DE} \cdot \frac{EH}{EG} = \cot(A) \cdot \cot(B)$$

Följaktligen har vi slutligen att,

$$\cos(b) = \cot(A) \cdot \cot(B)$$

På samma sätt erhåller vi ytterligare två formler,

$$\cos(A) = \frac{FE}{DF} = \frac{FE}{OF} \cdot \frac{OF}{DF} = \frac{EG}{OE} \cdot \frac{OH}{HG} = \frac{EG}{HG} \cdot \frac{OH}{OE} = \cos(a) \cdot \sin(B)$$

$$\cos(B) = \frac{HE}{HG} = \frac{HE}{OH} \cdot \frac{OH}{HG} = \frac{DE}{OE} \cdot \frac{OF}{DF} = \frac{OF}{OE} \cdot \frac{DE}{DF} = \cos(b) \cdot \sin(A)$$

5.1 Pythagoras sats på sfären

Om en sfärisk triangel blir mindre och mindre, d.v.s. då a, b, c går mot 0 försvinner krökningen och den sfäriska triangeln börjar mer och mer anta formen av en triangel i planet, vi kan likna detta med att du har en stor triangel på jordens yta. Om sedan sidorna blir mindre och mindre tills vi kan rita den på marken vi står på inom exempelvis en kvadratmeter kommer den framstå som en triangel i planet från vårt perspektiv. Då vi sedan tidigare vet de trigonometriska funktionerna gällande en vinkel i planet kan vi utifrån det vi härledde tidigare, med hjälp av figur 12, skriva den sfäriska motsvarigheten.

$$\sin(A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}$$

$$\cos(A) = \frac{\tan(b)}{\tan(c)}$$

$$\tan(A) = \frac{\tan(a)}{\sin(b)}$$

Vi får liknande resultat för de andra identiteterna, exempelvis, $\cos(A) = \sin(B) \cdot \cos(a)$ som har motsvarigheten $\cos(A) = \sin(B)$ i planet då a går mot noll. Det finns däremot en identitet som kräver att vi kavlar upp ärmarna.

Sats 5.1. *Den sfäriska motsvarigheten till Pythagoras sats är $\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$.*

Bevis. Då a, b, c går mot 0 kan vi se att vi får det måttligt spännande $1 = 1 \cdot 1$. För ett mer givande resultat använder vi oss utav Maclaurin-utveckling där,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \text{då } x \rightarrow 0$$

Om x är väldigt litet räcker det att approximera $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ eftersom att de andra termerna kommer vara väldigt små i jämförelse. Vi använder oss utav substitutet och får,

$$1 - \frac{c^2}{2} = (1 - \frac{a^2}{2})(1 - \frac{b^2}{2})$$

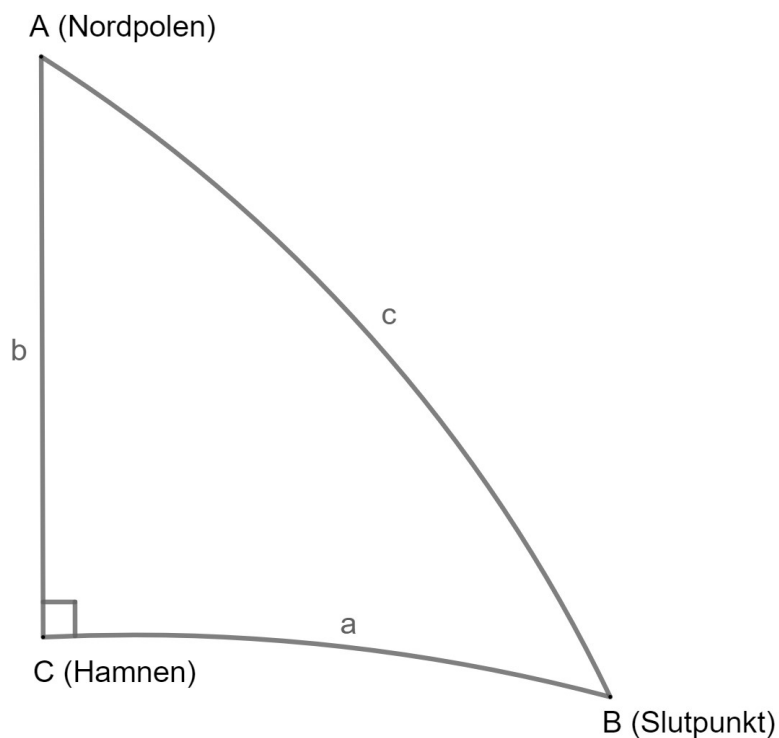
Genom att förenkla uttrycket får vi, $c^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{2}$. Vi ser att den sista termen är oändligt liten jämfört med de andra så när vi låter $a, b, c \rightarrow 0$ blir $\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$ inget annat än Pythagoras sats. $\square$

Detta kommer vi finna användbart framöver bland annat när vi ska bevisa cosinussatsen på en sfär.

5.2 Navigeringsexempel

Tidigare förklarades att vi tänker oss sträckor i mått av grader, som när vi såg att summan av sidorna i en triangel inte överstiger 360° . Sträckorna i följande exempel kommer representeras av sjömil vilket jag skrev om tidigare i arbetet hur vi räknade ut med hjälp av att betrakta en sjömil motvarandes av en bågminut på sfären, dvs $\frac{1}{60}^\circ$.

Nu är det däremot dags att hissa segel och se vad våra nyfunna identiteter kan hjälpa till med på ett exempel till sjöss.



Figur 15:

Vi antar att ett skepp lämnar en hamn vid koordinaterna $(44, 67^\circ\text{N}, 63, 58^\circ\text{W})$. Skeppet tar riktning österut och seglar längst en storcirkel där ett segment av storcirkeln representeras i sträckan CB i figur 15. Vi ska nu hitta dess position efter 1000 sjömil (1852 km). Skeppet påbörjar sin färd österut men rikningen skulle gradvis ändras, på grund av att vi färdas utmed en storcirkel, och börja röra sig mot en riktning mer söderut. Vi tittar på den rätvinkliga triangeln som bildas där C är hamnen vi startar vid och B är slutdestinationen 1000 sjömil bort. Vi sammansluter dessa två punkter med nordpolen A och får då $\triangle ABC$. Vi kan konstatera att

$$AC = b = 90^\circ - 44,67^\circ = 45,33^\circ.$$

Detta får vi eftersom vi börjar räkna de nordliga koordinaterna från ekvatorn upp till nordpolen där den totala sträckan är 90° . Vi får även,

$$BC = a = 1000 = 16,67^\circ$$

BC är alltså sträckan vi kommer att färdas och som vi skrev tidigare att en sjömil motsvarar en bågminut så får vi sambandet ovan då $\frac{1}{60}^\circ \cdot 1000 = 16,67^\circ$. Vi börjar med att hitta skeppets latitud som är komplementet av AB , d.v.s. $90^\circ - AB$. Eftersom vi nu vet sidorna AC och BC kan vi använda oss utav Pythagoras sats på sfären som vi härledde tidigare.

$$\begin{aligned}\cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \\ AB = c &= \cos(c) = \cos(45,33^\circ) \cdot \cos(16,67^\circ) \\ c &= \cos^{-1}(\cos(45,33^\circ) \cdot \cos(16,67^\circ)) = 47,66^\circ\end{aligned}$$

Då har vi således funnit längden på AB , som är lika med c , och med hjälp av det kan vi nu finna latitudkoordinaten för B vilket, som jag skrev tidigare, är komplementet av AB . Detta för att vi befinner oss på den övre hemifären och vi räknar latitudkoordinaterna från 0 vid ekvatorn till 90° vid nordpolen. Latitudkoordinaten för B är alltså följande,

$$90 - 47,66 = 42,34$$

Det som är kvar nu är att finna longituden för vår slutdestination. Vi kan med hjälp av bilden avläsa att vi behöver beräkna $\angle A$ för att kunna beräkna den nya koordinaten och finner vi $\angle A$ är vi nästan klara. Då vi vet b och c kan vi använda det samband vi härledde tidigare, utifrån figur 12, då $\cos(A) = \tan(b) \cdot \cot(c)$ och får,

$$\begin{aligned}\cos(A) &= \tan(45,33^\circ) \cdot \cot(47,66^\circ) \\ A &= \cos^{-1}(\tan(45,33^\circ) \cdot \cot(47,66^\circ))\end{aligned}$$

Vi får då att A är $22,81^\circ$

Då ursprungspositionen var 63.58°W och vi vet att färden var i östlig riktning subtraherar vi därför A från ursprungspositionen och får således,

$$63,58^\circ - 22,81^\circ = 40,78^\circ\text{W}$$

De nya koordinaterna, vid slutpunkten, är alltså $(42,34^\circ\text{N}, 40,78^\circ\text{W})$.

Som det kanske märks ur exemplet ovan kan det inte ha varit lätt att stå på sitt skepp ute på havet och räkna det vi ovan visade utan hjälpmedel. För kom ihåg att det var nödvändigt att navigera till sjöss även innan tiden då datorer och miniräknare gjorde entré. För att göra detta användes tabeller där de som navigerade till sjöss kunde få ett värde på den eftersökta trigonometriska funktionen. Nedan, i figur 16, har vi ett exempel på hur en sådan tabell kan se ut.

										32° 10' — 20'			
										P. P.			
M.	S.	Sin.	Diff.	Tang.	D. c.	Cotang.	Cosin.	Diff.	"				
10	0	9,7262 249	335	9,7985 964	467	0,2014 036	9,9276 285	133	0	50	132	133	134
	10	9,7262 584	335	9,7986 431	467	0,2013 569	9,9276 153	132	50				
	20	9,7262 919	334	9,7986 898	467	0,2013 102	9,9276 020	133	40				
	30	9,7263 253	335	9,7987 365	467	0,2012 635	9,9275 888	132	30				
	40	9,7263 588	335	9,7987 832	468	0,2012 168	9,9275 755	133	20				
	50	9,7263 923	334	9,7988 300	467	0,2011 700	9,9275 623	132	10				
11	0	9,7264 257	335	9,7988 767	467	0,2011 233	9,9275 490	133	0	49	132	133	134
	10	9,7264 592	334	9,7989 234	467	0,2010 766	9,9275 358	132	50				
	20	9,7264 926	335	9,7989 701	467	0,2010 299	9,9275 225	133	40				
	30	9,7265 261	334	9,7990 168	467	0,2009 832	9,9275 093	132	30				
	40	9,7265 595	334	9,7990 635	467	0,2009 365	9,9274 960	133	20				
	50	9,7265 929	335	9,7991 102	467	0,2008 898	9,9274 828	132	10				
12	0	9,7266 264	334	9,7991 569	467	0,2008 431	9,9274 695	133	0	48	132	133	134
	10	9,7266 598	334	9,7992 036	467	0,2007 964	9,9274 563	133	50				
	20	9,7266 932	335	9,7992 503	466	0,2007 497	9,9274 430	133	40				
	30	9,7267 267	334	9,7992 969	467	0,2007 031	9,9274 297	132	30				
	40	9,7267 601	334	9,7993 436	467	0,2006 564	9,9274 165	133	20				
	50	9,7267 935	334	9,7993 903	467	0,2006 097	9,9274 032	133	10				
13	0	9,7268 269	334	9,7994 370	467	0,2005 630	9,9273 899	132	0	47	132	133	134
	10	9,7268 603	335	9,7994 837	467	0,2005 163	9,9273 767	133	50				
	20	9,7268 938	334	9,7995 304	466	0,2004 696	9,9273 634	133	40				
	30	9,7269 272	334	9,7995 770	467	0,2004 230	9,9273 501	132	30				
	40	9,7269 606	334	9,7996 237	467	0,2003 763	9,9273 369	133	20				
	50	9,7269 940	333	9,7996 704	466	0,2003 296	9,9273 236	133	10				

Figur 16: Tabell som kunde användas vid exempelvis navigering [2]

6 Trubbiga trianglar, cosinus-satsen och ett till navigeringsexempel

Cosniussatsen är användbar i planet då vi med hjälp av den exempelvis kan beräkna en sidas längd, om en vinkel samt de två andra sidorna är kända. Om de tre sidorna är kända kan vi också beräkna en vinkel. Senare i texten kommer vi stöta på ett exemplifierande på sfären där avståndet mellan två punkter beräknas med hjälp av cosinussatsen. Men hur ser egentligen cosinussatsen ut på sfären? Vi vet sedan tidigare att den i planet ser ut som

följande, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\theta)$. Pythagoras sats visades tidigare på sfären var

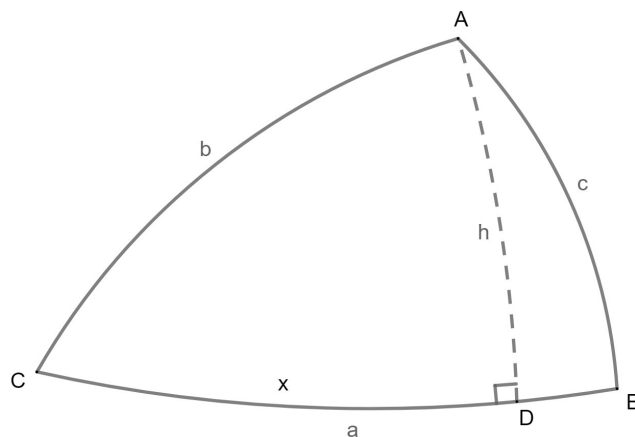
$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b).$$

Med hjälp av den kommer vi nu härleda cosinussatsen

6.1 Cosinussatsen i den sfäriska geometrin

Sats 6.1. *Den sfäriska motsvarigheten till cosinussatsen är*
 $\cos(c) = \cos(b) \cdot \cos(a) + \cos(C) \cdot \sin(a) \cdot \sin(b)$

Bevis. Nedan i figur 17 är den sfäriska triangeln $\triangle ABC$. Vi drar sedan en linje från A som skär sträckan BC vinkelrätt och kallar skärningspunkten D . Vi får då två rätvinkliga trianglar. Den vänstra, $\triangle ACD$ som består av sträckan AC som betecknas som b , sträckan CD som betecknas x . Sträckan AD är gemensam för de båda rätvinkliga trianglarna och betecknas h . Den högra rätvinkliga triangeln $\triangle ABD$ består av den gemensamma sträckan h samt DB som är $a - x$ och sträckan AB som motsvarar c .



Figur 17:

Applicerar vi den sfäriska motsvarigheten till Pythagoras sats på $\triangle ACD$

och $\triangle ABD$ fås de följande två uttrycken.

$$\cos(b) = \cos(x) \cdot \cos(h),$$

$$\cos(c) = \cos(h) \cdot \cos(a - x)$$

Eftersom de båda rätvinkliga trianglarna har sträckan h gemensam kommer denna variabel att finnas med i de båda uttrycken. Vi löser därför de båda uttrycken för $\cos(h)$ vilket ger,

$$\cos(h) = \frac{\cos(b)}{\cos(x)},$$

$$\cos(h) = \frac{\cos(c)}{\cos(a - x)}.$$

Genom att lösa de båda uttrycken för $\cos(h)$ kan vi sätta dem lika med varandra och sedan börja med algebraisk förenkling av uttrycket,

$$\frac{\cos(b)}{\cos(x)} = \frac{\cos(c)}{\cos(a - x)},$$

$$\cos(b) \cdot \cos(a - x) = \cos(c) \cdot \cos(x).$$

Enligt den så kallade subtraktionssatsen för cosinus är,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha).$$

Således appliceras därför subtraktionssatsen för cosinus till vårt uttryck och följande fås,

$$\cos(c) \cdot \cos(x) = \cos(b)(\cos(a) \cdot \cos(x) + \sin(a) \cdot \sin(x)).$$

Genom att dividera högerled och vänsterled med $\cos(x)$, och då $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ får vi uttrycket,

$$\cos(c) = \cos(b) \cdot \cos(a) + \cos(b) \cdot \sin(a) \cdot \tan(x)$$

För att skriva om $\tan(x)$ betraktar vi illustrationen där vi härledde de tidigare formlerna, alltså figur 12. Vi betraktar då formeln $\cos(A) = \tan(b) \cdot \cot(b)$ där A motsvarar vårt C , b motsvarar vårt x och c motsvarar vårt b . Alltså får vi,

$$\cos(C) = \tan(x) \cdot \cot(b),$$

$$\tan(x) = \frac{\cos(C)}{\cot(b)} = \frac{\cos(C) \cdot \sin(b)}{\cos(b)}.$$

Genom att ersätta $\tan(x)$ med uttrycket ovan i det ursprungliga uttrycket får vi,

$$\cos(c) = \cos(b) \cdot \cos(a) + \cos(C) \cdot \sin(a) \cdot \sin(b)$$

□

Vi har då visat cosinussatsen motsvarighet på sfären. Satsen lämpar sig väldigt bra när vi arbetar med geografiska problem vilket vi kommer att se genom ett exempel där avståndet mellan två punkter på en sfär skall beräknas.

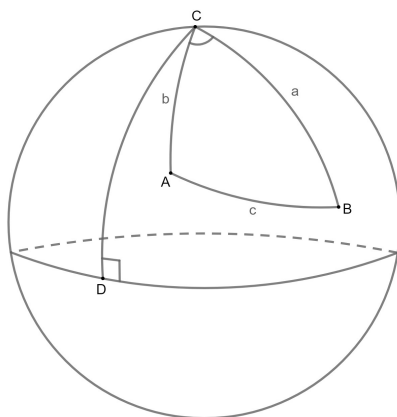
6.2 Avståndsberäkning på sfären

Med hjälp av cosinussatsen skall ett exempel genomföras där sträckan mellan två punkter på sfären, i detta fall på jordens yta, är av intresse.

Ett nytt begrepp som kommer att användas är nollmeridian. Nollmeridianen är stercirkeln som går från de antipodala punkterna, nord- och sydpol, igenom staden Greenwich i den sydöstra delen av London. Nollmeridianen är utgångslinjen när vi talar om koordinater öst eller väst om just den stercirkeln. Exempelvis är antal grader öst om nollmeridianen en punkt på det östra halvklotet sett från just den linjen. Nu till exemplet.

6.3 Exempel på användning med cosinussatsen

Vi väljer ut två punkter, i detta fall kommer vi att titta på den övre hemisfären. Punkt A ges av koordinaterna $(55^\circ\text{N}, 20^\circ\text{E})$ och punkt B av $(25^\circ\text{N}, 70^\circ\text{E})$. Vi ser nordpolen som punkt C och förbinder de tre punkterna och får $\triangle ABC$



Figur 18:

Med informationen om var punkt A och B ligger koordinatmässigt kan vi räkna ut sträckorna a och b . Detta gör vi genom att ta deras latitudkoordinat och subtraherar dem från 90° . Då vi befinner oss på den övre hemisfären och vi börjar räkna från noll vid ekvatorn som vi tidigare sa delar en sfär i två hemisfärer.

$$AC = b = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$

$$BC = a = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

Betrakta nu cosinussatsen, $\cos(c) = \cos(b) \cdot \cos(a) + \cos(C) \cdot \sin(a) \cdot \sin(b)$. Vi har då a och b men vet ej ännu $\angle C$. Vi betraktar bilden igen och tittar på sträckan CD som ska representera nollmeridianen. Vinkel C kommer alltså vara differensen mellan vinkel $\angle DCB$ och $\angle DCA$.

$$\angle DCB - \angle DCA = 70^\circ - 20^\circ$$

Alltså, vinkel C är 50° och nu har vi allt vi behöver för att räkna ut avståndet mellan punkterna A och B . Vi för in de grader vi har i cosinussatsen och får,

$$\cos(c) = \cos(35^\circ) \cdot \cos(65^\circ) + \cos(50^\circ) \cdot \sin(65^\circ) \cdot \sin(35^\circ),$$

$$c = \cos^{-1}(\cos(35^\circ) \cdot \cos(65^\circ) + \cos(50^\circ) \cdot \sin(65^\circ) \cdot \sin(35^\circ)).$$

Vi får då att,

$$c \approx 47,13$$

Enheten för sträckan är då angiven i grader. Kom ihåg det jag tidigare förklarade att en sjömil motsvarar $\frac{1}{60}^\circ$ och det för att erhålla sträckan i sjömil behöver vi alltså multiplicera sträckan angiven i grader med 60.

$$47,13 \cdot 60 = 2827,8$$

Då har vi sträckan angiven i sjömil. Denna kan vi även givetvis skriva om till km och det då en sjömil motsvarar ungefär 1,85km. $2827,8 \cdot 1,85 = 5231,43$. Då en sjömil inte är exakt 1,85km kommer svaret inte att vara exakt men ger en ungefärlig uppskattning om hur lång sträckan är i enheten kilometer vilket kan vara av intresse.

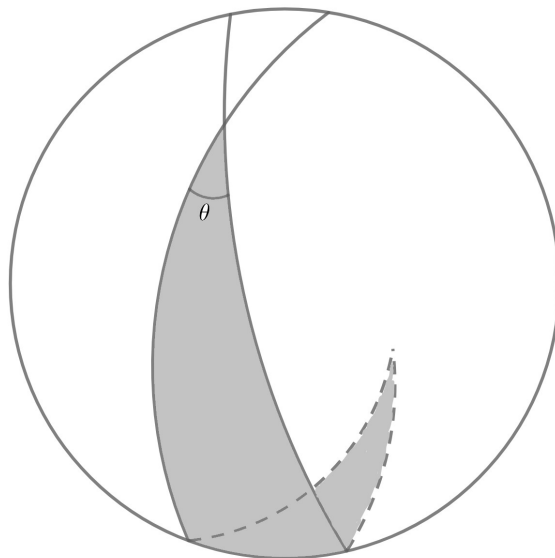
7 Diagonens area och Girards formel

En till sak som skiljer den sfäriska geometrin från geometrin i planet är att vi i den sfäriska geometrin kan finna tvåhörningar, eller diagoner som det kallas. Dessa geometriska figurer kommer vi ha användning för när vi senare kommer att fastställa en formel för arean hos en sfärisk triangel men för att fastställa det behövs först en viss kännedom om diagonens area.

7.1 Diagonens area

Definition 7.1. *En diagon är en tvåhörning som bildas då ett område på sfären begränsas av två storcirklar.*

Sats 7.2. *Diagonens area är beroende av dess vinkel och ges av formeln $D_\theta = 2r^2\theta$.*



Figur 19:

Bevis. Sfärens area är $4\pi r^2$ och för att finna diagonens area betraktar vi vinkel θ mellan de två storcirkarna och då förhållandet mellan θ till 2π är lika med förhållandet mellan arean av diagonalen till sfärens area. Ställer vi upp det erhålls,

$$\frac{D_\theta}{4\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi},$$

$$D_\theta = 2r^2\theta.$$

Vi kan då se att diagonalens area är beroende av dess vinkel, vilket skulle visas. $\square$

7.2 Girards formel

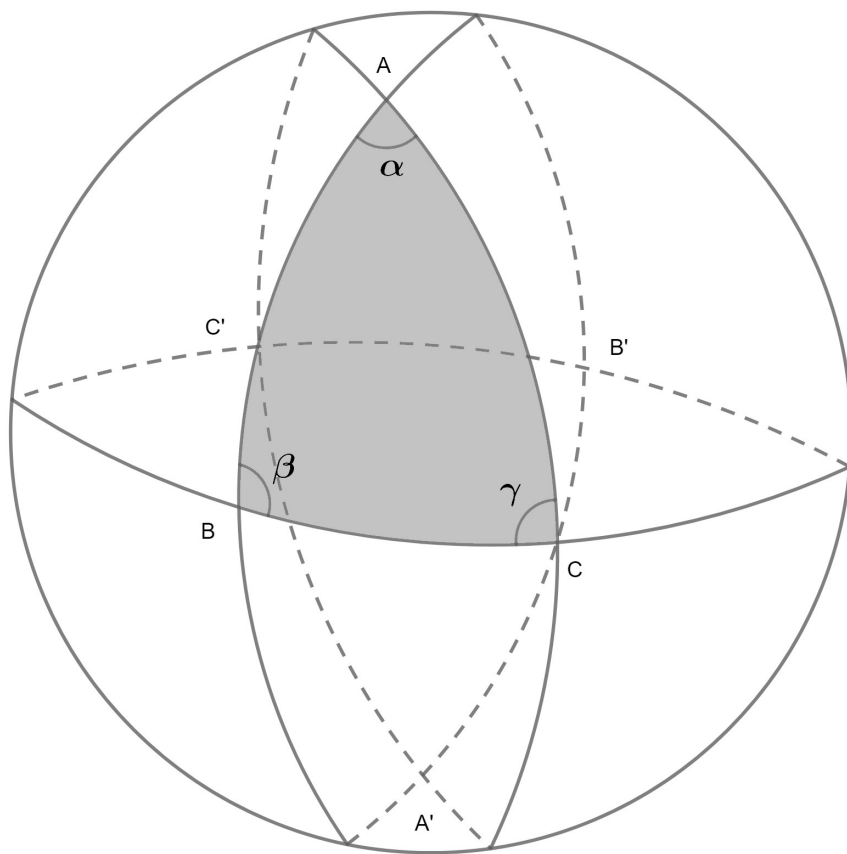
En triangel på sfären har en area given en formel som är namngiven efter den franska matematikern Albert Girard som levde mellan 1595-1632. Under den tiden var symbolerna vi idag tar för givet inom algebran under utveckling

och Girard var den som uppfann bland annat kubikroten utöver det vi nu ska visa, Girards formel.

Sats 7.3. *Arealen av en sfärisk triangel ges av formeln, $T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$, där T står för triangelns area.*

Bevis. En sfärisk triangel begränsas av tre storcirklar och vi kallar då skärningspunkterna A , B och C . Vi har då även tre antipodala punkter, A' , B' och C' . Vinklarna vid A , B och C namnes för dessa i ordningen α, β, γ .

betrakta illustrationen och se att vi har sex stycken diagonaler på vår sfär, 3 stycken par som är kongruenta med den motstående diagonalen. Dessa har vi tidigare visat arean av. Vi kan nu med hjälp av detta visa att arean av en sfärisk triangel överensstämmer med Girards sats.



Figur 20:

$$4\pi r^2 = 2D_\alpha + 2D_\beta + 2D_\gamma - 4T$$

Anledningen till att vi subtraherar $4T$ är att vi har två kongruenta trianglar på sfären. När vi adderade de sex diagonerna, $2D_\alpha + 2D_\beta + 2D_\gamma$ räknades de trianglarna totalt sex gånger, alltså $6T$. Vi måste därför subtrahera $4T$. Tidigare visades att $D_\theta = 2\theta r^2$. Vi kan nu enkelt lösa uttrycket för T ovan och vi har då triangelns area.

$$4T = 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4\pi r^2$$

Dividera uttrycket med fyra och bryter ut r^2 i högerledet så får vi en formel

för vad T är,

$$T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$$

Vilket skulle visas. □

Vi kan se att arean av en sfärisk triangel ges av en förhållandevis elegant formel där triangelns area, liksom diagonalen, är beroende av triangelns vinklar. Vi kan även se i den eleganta formeln att vinkelsumman i en triangel alltid är större än 180° . Om vinkelsumman hade varit 180° som i den plana geometrin hade triangelns area varit noll.

References

- [1] Brummelen, Glen Van. (2013). *Heavenly mathematics: the forgotten art of spherical trigonometry*. Princeton: Princeton University Press
- [2] Schrön, Ludwig (1818). *Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000 und der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Winkel des Quadranten von 10 zu 10 Secunden: Tafel 1 and 2 des Gesamtwertes in drei Tafeln*. Upplaga 19. Vieweg.
- [3] Tambour, Torbjörn (2015) *Lite sfärisk geometri och trigonometri*.
https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/20144/mod_resource/content/1/Sfariskgeometri.pdf
(Hämtad 2018-12-06)