



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Regelbundna polyedrar: Redogörelse för Platonska kroppar och Kepler-Poinsots stjärnpolyedrar

av

Oskar Nilsson

2019 - No K7

Regelbundna polyedrar: Redogörelse för Platonska kroppar och Kepler-Poinsots stjärnpolyedrar

Oskar Nilsson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Alan Sola

2019

Regelbundna polyedrar: Redogörelse för Platonska kroppar och Kepler-Poinsots stjärnpolyedrar

Oskar Nilsson

Höstterminen 2018

Innehållsförteckning

1	Introduktion	3
1.1	Kepler och elementen	3
1.2	Kepler och planeterna	4
2	Euklides Elementa	5
2.1	Definitioner, Postulat och Satser	5
2.2	Elementa bok XI	6
2.2.1	Definition Platonska kroppar	12
2.2.2	Propositioner för vidare bevisföring	14
2.3	Elementa bok XIII	16
3	Kropparna uttryckta i graf och sfär	19
3.1	Eulers formel	19
3.2	Fem platonska kroppar enligt Euler	38
3.3	Rotationssymmetri och kroppar	41
4	Kepler-Poinsot-polyedrar	53
4.1	Stellation	53
4.2	Kepler-Poinsot-polyedrar i Eulers formel	59
4.3	Ikosaedrala rotationer	60
5	Summering och avslut	63
5.1	Keplers tankar	63
5.2	Fem eller nio?	63
6	Referenser	66
7	Appendix	67

1 Introduktion

"...without doubt the authentic type of these figures exists in the mind of God the Creator and shares His eternity ..." - J. Kepler
(Coxeter 1975, s. 661ff.)

På grund av Platons fascination av de regelbundna polyedern, vilka på Platons tid var Tetraedern, Kuben, Oktaedern, Ikosaedern och Dodekaedern, kallar vi samlingen av dessa för de Platonska kropparna. Platon inkluderade dessa polyedrar i en atomisk geometri, och såg dem som grunden i allt.

1.1 Kepler och elementen

"Bland de regelbundna kropparna är den förstfödde kuben, vilken är fader till de andra, och hans fru, så att säga, är oktaedern, vilken har lika många hörn som kuben har sidor. Likaså finner vi att herr dodekaeder omsluter sin fru ikosaedern då sidytorna hos den omringande polyedern är lika många som den inskrivnas hörn, vilket skapar ett perfekt giftermål. Sist har vi tetraedern, vilken är hermafrodit i detta avseende då denne kan omskriva sig själv." - J. Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) var en tysk matematiker och astronom vars matematiska bidrag sker inom de regelbundna polygonernas och polyedernas geometri. Kepler nämns ofta i litteraturen kopplad till denna geometri, varpå hans tankar lyfts fram i detta arbete för att introducera området och koppla idéerna till matematiken bakom.

Kepler såg de tredimensionella regelbundna kropparna som byggstenar i det geometriska rummet, vilket lät fantasin flöda för honom. Under en tid då grunden för astronomin höll på att läggas, är det inte konstigt att Kepler försökte koppla geometriska kroppar till naturens egna byggstenar. Timaeus av Locri, en av Pythagoras lärjungar, uttryckte en koppling mellan de fyra elementen och de platonska kropparna. Timaeus kopplade ihop tetraedern med eld, oktaedern med luft, kuben med jord och ikosaedern med vatten. Den femte och sista kroppen dodekaedern tilläts representera hela himlakroppen och universum. Kepler håller med om dessa samband och visar detta genom att måla de fem kropparna med en lägereld på tetraedern, fåglar och moln på

oktaedern, en morot och trädgårdsverktyg på kuben, en kräfta på ikosaedern, samt solen, månen och stjärnorna på dodekaedern.

Kuben beskrevs stå upprätt på sin kvadratiska bas, vilket tycktes symbolisera stabilitet som också är ett kännetecken i markbunden materia. Oktaedern visade sig kunna delas på mitten genom ett kvadratisk snitt, likt polerna skärs av en cirkel, vilket här representerar flexibilitet som även kännetecknar det mest flexibla elementet luft. Tetraederns få sidytor sågs som en motsvarighet till den eldiga torkan, då torra saker per definition håller sig inom sina egna gränser. Å andra sidan motsvarar ikosaederns många sidor våthet som i vatten, vilken per definition håller sig inom ramarna för andra ting. Dodekaedern som återstår motsvarar som sagt den himmelska kroppen och universum, vilka omfamnar allt likt dodekaedern som visats ha den största volymen hos alla kropparna, likt universum eller himlen.

Kopplingarna må vara starkt teoretiska utan matematisk grund, men de är helt klart intressanta i tankarnas värld.

(Coxeter 1975, ss. 661-670)

1.2 Kepler och planeterna

Enligt Kepler fanns det plats för sex stycken sfärer som in- och omskriver de fem platonska kropparna, vilka motsvarar planeternas omloppsbanor i rymden, så var och en utav planeterna tilldelades en utav dessa sfäriska banor. De sex planeterna som var aktuella under Keplers tid var planeterna Merkurius, Venus, Jorden, Mars, Jupiter och Saturnus.

Kepler blev dock tvungen efter ett möte med Tycho Brahe (1546-1601) i Prag 1600 överge sin planetariska vision, bland annat då Brahes data kring Mars omloppsbanan inte stämde överens med Keplers tanke.

(Thompson 1991, s. 437)

Matematiken bakom Keplers planetariska vision är intressant att diskutera, men faller utanför ramen för vad som kommer tas upp i detta arbete. En annan rymdlik koppling som Kepler dock är med och upptäcker är Kepler-Poinsots stjärn-polyedrar, vilka presenteras och diskuteras i slutet utav detta arbete.

2 Euklides Elementa

Elementa är en utav de äldsta kända matematikböckerna och är utarbetad av den grekiske matematikern Euklides som verkade i Alexandria runt 300 före Kristus. Originalutgåvan av Elementa finns inte bevarad, utan det som används är avskrifter och översättningar. Utgåvan som används i detta arbete är webbaserad och översatt till engelska. Länk till denna utgåva finns i referenslistan.

Elementa har en stor betydelse för matematiska texter och hur matematik redovisas i skrift. Först kommer ett antal definitioner, grundläggande axiom och sedan satser med tillhörande bevis. Eventuellt finner vi också exempel som illustrerar satserna.

Elementa delas upp i tretton kapitel, eller böcker som de även kallas, vilka innehåller olika delar utav matematiken såsom plan geometri, likformighet, talteori, inkommensurabla storheter, rymdgeometri, och så vidare. Böckerna beskrivs med hjälp av de romerska siffrorna *I – XIII*.

Detta arbete använder delar från bok ett (*I*), bok elva (*XI*), samt bok tretton (*XIII*). Definitionerna, satserna och propositionerna som används i detta arbete refereras genom att visa vilken bok den kommer ifrån och vilken definition, sats eller proposition i ordningen som gäller. Exempelvis kommer definition nummer tjugofem ifrån bok tretton att användas, vilket refereras genom **Elementa XIII.25**.

2.1 Definitioner, Postulat och Satser

Elementa I.1

Definition 2.1. *En punkt är den som saknar delar.*

Euklidisk geometri utgår ifrån punkten, vilken tjänar som grund i alla de geometriska definitionerna, axiomen och satserna vilka bygger upp geometrin. En definierad startpunkt behöver definieras för att allt annat ska få möjlighet att uttryckas.

Euklides bygger upp sin geometri från fem postulat, vilka är de enda antagandena som behövs för att bygga bevisen i Elementa. De fyra första kan accepteras, men validiteten hos postulat fem går att diskutera. Postulaten är:

Postulat 1. Man kan dra en rät linje från en punkt till en annan.

Postulat 2. Varje begränsad rät linje kan förlängas obegränsat.

Postulat 3. Kring varje medelpunkt kan man rita en cirkel med given radie.

Postulat 4. Alla räta vinklar är lika.

Postulat 5/Parallellpostulatet. När en rät linje träffar två andra räta linjer, och de båda inre vinklarna på samma sida om den skärande räta linjen är mindre än två rätta, så skall de båda räta linjerna, om de förlängs obegränsat, råkas på den sida om den skärande räta linjen som de båda vinklarna ligger som är mindre än två rätta.

Det femte postulatet, eller *parallellpostulatet* som det också är känt som, är mer komplicerat än de fyra första. Under hundratals år funderade matematiker på om postulatet egentligen är en följd av de fyra första, med andra ord att det skulle vara en sats som kan bevisas med hjälp av de fyra första postulaten. Under det tidiga 1800-talet visar dock matematikerna János Bolyai och Nikolaj Lobatjevskij att parallellpostulatet verkligen är ett riktigt postulat och att det inte kan bevisas med hjälp av de fyra första postulaten, utan måste införas för vidare bevisföring i Elementa.

2.2 Elementa bok XI

Polygonen

Ordet "polygon" härstammar från Grekland och betyder "flervinklad". Definitionen baseras på hur vi konstruerar en polygon.

Definition Polygon

Definition 2.2. Låt $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 3$) vara en samling av punkter i planet sådana att inte fler än två punkter är kolinjära (kan sammanbindas med en rät linje). Om sträckorna $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ endast skär vid dess ändpunkter formar de en ***polygon***.

Detta arbete kommer ta upp begreppet konvex polygon, vilken definieras som:

Definition Konvex Polygon

Definition 2.3. En polygon kallas konvex om, för varje linje som innehåller en sida av polygonen, ligger resten av polygonen på ena sidan av linjen.

En polygon som inte är konvex kallas i arbetet för icke konvex polygon. (Jacobs 1987, s. 74f.)

Definition Stjärnkonvex Polygon

Definition 2.4. *En icke konvex polygon kallas **stjärnkonvex** om det finns en punkt x , vilken med en rät linje kan kopplas samman med varje punkt inom polygonen utan att skära dess kanter.*

En polygon kallas liksidig om alla dess sidor är lika (långa), och likvinklig om alla vinklarna är lika (stora). En polygon med p antal hörn måste uppfylla $p \geq 3$ och om $p > 3$ kan denna polygon vara liksidig utan att vara likvinklig och vice versa. Då $p = 2$ definierar Euklides som en sträcka och $p = 1$ definieras som en punkt, vilka inte kvalificerar som polygoner.

Definition Regelbunden polygon

Definition 2.5. *En plan polygon med p antal hörn kallas regelbunden om den är både liksidig och likvinklig och betecknas då med $\{p\}$.*

Notationen $\{p\}$ kallas för en *Schläfli-symbol*, och är uppkallad efter den Schweiziske matematikern Ludwig Schläfli (1814-1895) som var verksam under 1800-talet. Notationen $\{p\}$ beskriver antalet hörn hos en konvex polygon med p hörn, vilket gör att $\{3\}$ är en liksidig triangel (trigon) och $\{4\}$ är en kvadrat (tetragon), och så vidare. Regelbundna stjärnkonvexa polygoner (2.4) beskrivs med Schläfli-symbolen $\{\frac{p}{k}\}$, där p fortsatt beskriver antalet hörn och k beskriver antalet gånger polygonen omringar mittpunkten. Som exempel finner vi ett pentagram, vilken kommer visa sig viktig senare i detta arbete, som har Schläfli-symbolen $\{\frac{5}{2}\}$ med sina fem hörn samt att den omringar mittpunkten två gånger.

Definition Stel rörelse

Definition 2.6. *En **stel rörelse** är en förflyttning utav punkter i planet eller i rummet, så att det relativa avståndet mellan punkterna förblir de samma.*

Definition Kongruent polygon

Definition 2.7. *Två polygoner kallas kongruenta om och endast om en av dem kan omvandlas till den andre genom de stela rörelserna translation, rotation eller reflektion i planet.*

Detta betyder att om någon utav polygonerna kan ompositioneras genom en translation, vilken förflyttar alla punkter samma avstånd i samma riktning, roteras runt en fixt punkt eller speglas (inte förstoras eller förminskas) så att den sammanfaller exakt med den andra polygonen kallas polygonerna kongruenta. Dessa stela rörelser återkommer i (3.3).

Yttervinkelsatsen

Sats 2.8. *Summan av alla yttre vinklar hos en polygon är 2π .*

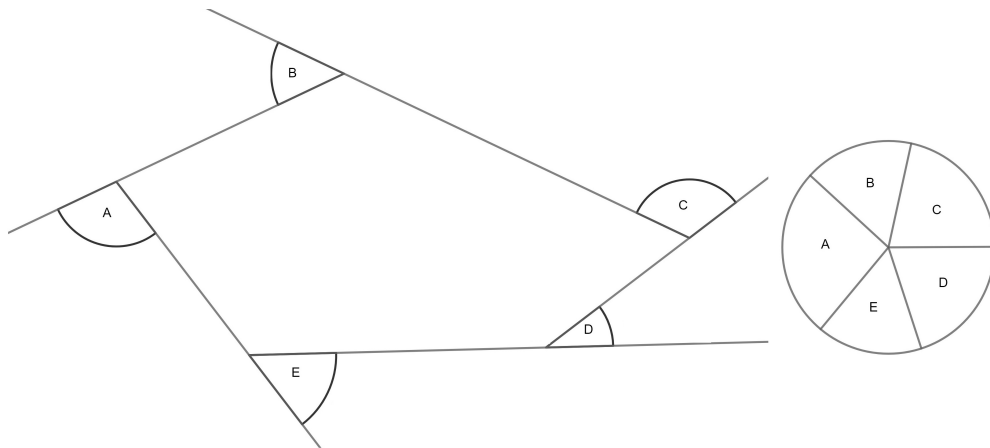


Bild 1: De yttre vinklarna A,B,C,D,E summeras till en hel cirkel

Bevis. Varje hörn förlängs i linjesegment som pekar vinkelrätt utåt från varje sida. Dra en enhetssektor mellan de förlängda sidorna. Observera att vinkeln som dessa segment skapar är precis den yttre vinkeln. Detta är sant då de två räta vinklarna summeras till π , så den inre vinkeln och den yttre vinkeln måste också summeras till π . Då sidorna på varje par av intilliggande sektorer är pararella, kan de samlas ihop och bilda en cirkel. Så, summan av alla yttre vinklar är lika med 2π . $\square$

Denna sats kan ge ett vagt bevis till varför en triangels vinkelsumma är π radianer eller 180 grader.

Om a, b, c är inre vinklar till en triangel, är $\pi - a, \pi - b, \pi - c$ de yttre vinklarna. Enligt den nyss bevisade satsen är då

$$(\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = \pi.$$

För generella polygoner utöver triangeln, ges en inre vinkelsumma som är större än π , men denna summering beror bara på antalet sidor hos polygonen. Om $a_1, a_2, \dots, a_n$ är de inre vinklarna hos polygonen, ger *yttrevinkelsatsen* (2.8) att

$$2\pi = (\pi - a_1) + (\pi - a_2) + \dots + (\pi - a_n),$$

som leder ut i följande sats.

Innervinkelsatsen

Sats 2.9. *Summan av alla inre vinklar hos en polygon med n sidor är $(n - 2)\pi$.*

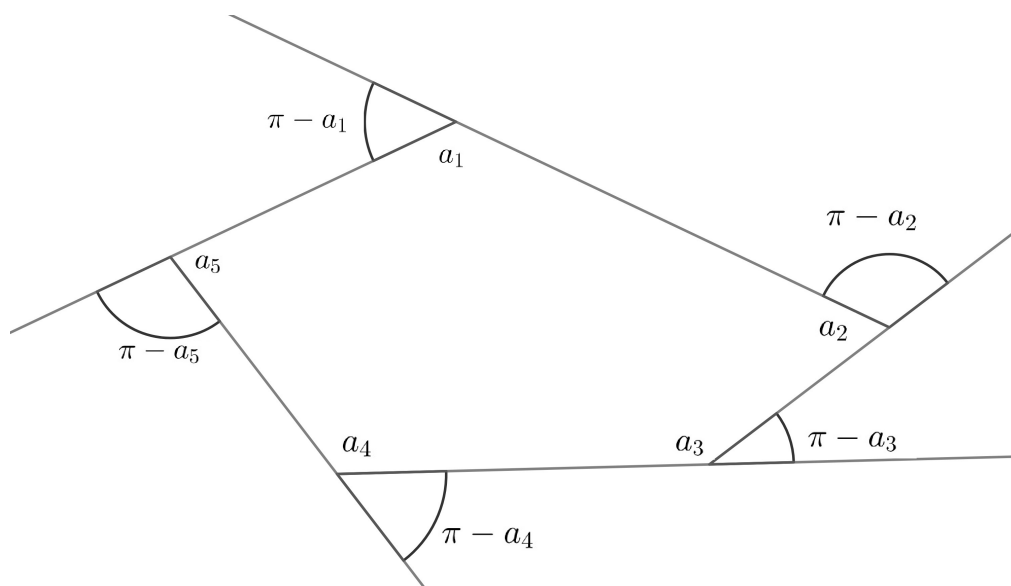


Bild 2: Polygon med inre- och yttre vinklar betecknade

Bevis. Antag $a_1, a_2, \dots, a_n$ inre vinklar i polygon med n stycken hörn, se Bild (2). Då är $(\pi - a_1), (\pi - a_2), \dots, (\pi - a_n)$ de yttre vinklarna i samma polygon. Enligt yttervinkelsatsen (2.8) summeras dessa till 2π , varpå vi ges:

$$(\pi - a_1) + (\pi - a_2) + \dots + (\pi - a_n) = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \pi - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow (n - 2)\pi = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Detta var det som skulle visas. □

(Richeson, D.S. s. 220f.)

Polyedern

Då polyedern är en figur i det tredimensionella rummet introducerar vi nu begreppet *kropp* hämtat från Elementa.

Elementa XI.1

Definition 2.10. *En kropp är den som har längd, bredd och djup.*

Varpå vi nu kan definiera en polyeder som följande kropp:

Definition Polyeder

Definition 2.11. *En polyeder är den tredimensionella kropp (2.10) som konstrueras genom delar av skärande plan.*

(Jacobs 1987, s. 541)

De skärande planen formar polygonala områden som kallas sidytor hos polyedern. Sträckorna som utgör sidorna av polygonen kallas för kanter, och deras skärningspunkter kallar vi för polyederns hörn.

Definition Regelbunden polyeder

Definition 2.12. *En regelbunden polyeder är den polyeder som uppfyller följande krav:*

1. *Polyedern är konvex*
2. *Varje sidyta är en regelbunden polygon*

3. Alla sidytor är kongruenta

4. Varje hörn är omringat av lika många sidytor

(Richeson, D.S, s. 33)

En regelbunden polyeder med q stycken $\{p\}$ polygoner som möts vid varje hörn representeras utav Schläfli-symbolen $\{p, q\}$. Exempel på detta är kuben vilken ges symbolen $\{4, 3\}$.

Schläfli-symbolen kan användas för att beskriva en polytop, vilket är en figur i de högre dimensionerna, och dess uppbyggnad genom $\{p, q\}$ för en regelbunden polyeder där p som sagt fortsatt beskriver polygonen som utgör en sidyta hos polyedern och q som beskriver antalet sidytor som möts vid varje hörn. För en fyrdimensionell polytop ges r stycken $\{p, q\}$ polyedrar som möts vid varje kant, vilket ger notationen $\{p, q, r\}$, vilket exempelvis kan vara en tesseract som noteras $\{4, 3, 3\}$ vilket betyder att den är uppbyggd med 3 kuber rund en kant.

Allmänt gäller att för en regelbunden polytop $\{p, q, r, \dots, y, z\}$ så möts de z stycken $\{p, q, r, \dots, y\}$ sidor vid varje topp, som i det tredimensionella fallet är ett hörn.

I detta arbete kommer endast polygoner och polyedrar undersökas, vilket gör att resterande polytoper uteblir.

Ett begrepp som genomgående dyker upp i detta arbete är *dualitet*, vilket definieras som:

Definition Dualitet

Definition 2.13. *Dualitet är den procedur vilken startar med en platonska kropp och bildar en annan platonska kropp. Den nya kroppen konstrueras genom följande steg:*

1. Hörnen hos den nya kroppen är centrum på sidytan av den gamla kroppen.
2. Två hörn hos den nya kroppen sambinds med en ny kant precis där sidytorna hos den gamla kroppen delar en gammal kant.

En egenskap hos Schläfli-symbolen som är värd att nämna är att den på ett enkelt sätt uttrycker denna dualitet mellan två polyedrar, vilket representeras utav Schläfli-symbolen fast bakvänd. Exempel en polyeder $\{p, q\}$ kommer vara dual med polyedern $\{q, p\}$.

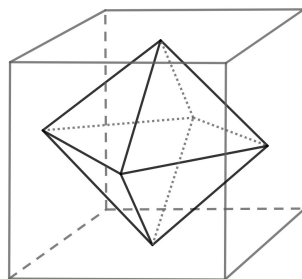


Bild 3: Det duala paret kuben $\{4, 3\}$ och oktaedern $\{3, 4\}$

Att dessa polyedrar är duala med en annan utav polyederna visste redan Kepler, vilket är det han liknar med giftermålen mellan kuben och oktaedern samt dodekaedern och ikosaedern. De hör enligt Kepler samman på grund av att de utgör *duala par*. Tetraedern är alltså dual med sig själv, eller hermafrodit som Kepler uttrycker sig (se (1.1)). (Coxeter 1948, s.14)

Punkten där polygonernas hörn möts kallas i arbetet också för *hörn*, vilket gör att läsaren bör vara uppmärksam på vilket hörn som beskrivs och skiljer mellan polygonens hörn i planet och polyederns hörn i rummet.

2.2.1 Definition Platonska kroppar

I bok elva introducerar och definierar Euklides de fem platonska kropparna. På engelska översätts platonska kroppar till platonic solids.

Genom **Definition XI.1** (2.10) från Elementa beskrivs att ”*en kropp är den som har längd, bredd och djup.*”, varpå Euklides sedermera relativt snabbt definierar de platonska kropparna i Elementa. Dessa beskrivs genom hur de

är uppbyggda och vilka polygoner som är aktuella för respektive polyeder.

Elementa XI.25

Definition 2.14. *En kub är den regelbundna kropp som är uppbyggd av sex lika kvadrater.*

Elementa XI.26

Definition 2.15. *En oktaeder är den regelbundna kropp som är uppbyggd av åtta lika och liksidiga trianglar.*

Elementa XI.27

Definition 2.16. *En ikosaeder är den regelbundna kropp som är uppbyggd av tjugo lika och liksidiga trianglar.*

Elementa XI.28

Definition 2.17. *En dodekaeder är den regelbundna kropp som är uppbyggd av tolv lika, liksidiga ekviangulära pentagoner.*

Den uppmärksamma läsaren märker att det endast definierats fyra utav de fem platonska kropparna. Detta beror på att Euklides aldrig explicit utformade en definition likt de ovanstående för tetraedern. Med hjälp utav

Elementa XI.12

Definition 2.18. *En pyramid är den figur bestående utav plan som konstrueras från ett plan till en punkt.*

definieras en tetraeder enligt följande:

Definition Tetraeder

Definition 2.19. *En tetraeder är den pyramid bestående utav fyra liksidiga trianglar som konstrueras från ett plan till en punkt.*

2.2.2 Propositioner för vidare bevisföring

För att förstå följande proposition behöver begreppen *plan vinkel* och *rymdvinkel* redas ut.

Elementa I.8

Definition 2.20. *En plan vinkel är vinkeln mellan två linjer i samma plan, vilka möts i en punkt och inte ligger i en rak linje.*

Elementa I.8

Definition 2.21. *En plan vinkel är vinkeln mellan två linjer i samma plan, vilka möts i en punkt och inte ligger i en rak linje.*

Elementa XI.11

Definition 2.22. *En rymdvinkel är vinkeln som utgörs av fler än två linjer som möts i en punkt men inte ligger i samma plan. Det vill säga en rymdvinkel är den som är uppbyggd av fler än två plana vinklar som inte ligger i samma plan och är konstruerade till en punkt.*

Angående beviset för varför det enbart kan existera fem stycken regelbundna polyedrar så bygger detta på proposition 21 från bok elva i Elementa, vilken lyder:

Proposition XI.21

Proposition 2.23. *Varje rymdvinkel är uppbyggd av plana vinklar, vilka summerade är mindre än fyra rätta vinklar.*

Denna proposition bygger på föregående propositioner, nämligen **Proposition XI.20** som säger att "om en rymdvinkel består av tre plana vinklar är summan utav två av vinklarna större än den tredje", samt **Proposition I.32** "Summan av de tre vinklarna i en triangel är lika med två rätta vinklar", vilken bevisas tidigare i detta arbete med hjälp av sats (2.8).

Vi lämnar beviset till Proposition XI.20 i ett Appendix i slutet av arbetet, men bevisar nu Proposition XI.21:

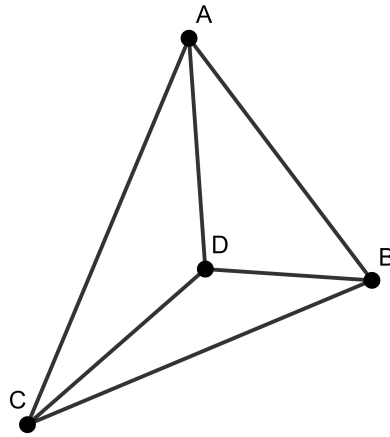


Bild 4: Oregelbunden tetraeder

Bevis. Följes enklast med uppritad bild, exempelvis Bild (4).

Låt $\angle A$ vara rymdvinkeln som består av de plana vinklarna $\angle BAC$, $\angle CAD$ och $\angle DAB$. Vi ska nu visa att $\angle BAC$, $\angle CAD$ och $\angle DAB$ är mindre än fyra rätta vinklar, vilket vi betecknar $4R$. Vi finner först att $\angle B$ består av de tre plana vinklarna $\angle CBA$, $\angle ABD$ och $\angle CBD$ och enligt proposition XI.20 så är summan av två utav dessa större än den tredje, varför

$$\angle CBA + \angle ABD > \angle CBD$$

. På samma sätt är

$$\angle BCA + \angle ACD > \angle BCD$$

och

$$\angle CDA + \angle ADB > \angle CDB.$$

Men summan av de sex vinklarna

$$(\angle CBA, \angle ABD, \angle BCA, \angle ACD, \angle CDA, \angle ADB)$$

är då större än de andra tre

$$(\angle CBD, \angle BCD, \angle CDB)$$

så

$$\angle CBA + \angle ABD + \angle BCA + \angle ACD + \angle CDA + \angle ADB > \angle CDB + \angle CBD + \angle BCD.$$

Men summan av dessa tre är lika stor som två rätta vinklar, detta enligt proposition I.32, så

$$\angle CBA + \angle ABD + \angle BCA + \angle ACD + \angle CDA + \angle ADB > 2R.$$

Och eftersom vinkelsummorna hos varje triangel $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ och $\triangle ADB$ är lika med $2R$ är summan utav de nio vinklarna från trianglarna

$$\angle CBA + \angle ACB + \angle BAC + \angle ACD + \angle CDA + \angle CAD + \angle ADB + \angle DBA + \angle BAD = 6R.$$

Av dem är summan av de sex vinklarna

$$\angle CBA + \angle ACB + \angle ACD + \angle CDA + \angle ADB + \angle DBA > 2R,$$

varför summan av de kvarstående ger oss

$$\angle BAC + \angle CAD + \angle BAD < 4R.$$

Därför är "Varje rymdvinkel är uppbyggd av plana vinklar, vilka summerade är mindre än fyra rätta vinklar." $\square$

2.3 Elementa bok XIII

Bevis för existens av endast fem regelbundna polyedrar

Med propositionerna ifrån tidigare böcker kommer nu Euklides kunna bevisa varför det enbart kan finnas fem regelbundna polyedrar, nämligen de platoniska kropparna.

Fem regelbundna polyedrar

Sats 2.24. *Ingen figur, förutom de fem figurerna, kan konstrueras av regelbundna och identiska polygoner.*

Bevis. Proposition XI.21 ger att en rymdvinkel inte kan konstrueras utav två liksidiga trianglar, inte heller utav två plan.

Med tre trianglar bygger vi rymdvinkeln för en pyramid (tetraeder), med fyra ges rymdvinkeln för oktaedern, och fem ges rymdvinkeln för ikosaedern. En rymdvinkel kan inte konstrueras utav sex regelbundna trianglar som möts i en punkt, då dessa sex vinklar är lika med fyra räta vinklar, vilket är omöjligt, då en rymdvinkel består av en vinkelsumma mindre än fyra räta vinklar.

Med tre kvadrater konstrueras rymdvinkeln för kubens. Utökas dessa till fyra kvadrater kan ingen rymdvinkel skapas, då de utgör fyra räta vinklar.

Rymdvinkeln hos dodekaedern skapas genom ihopsättning av tre pentagoner, men fyra utav dessa är omöjligt för någon rymdvinkel, då vinkeln hos en regelbunden pentagon är en och en fjärdedels rät vinkel, vilket gör att de fyra vinklarna tillsammans är större än fyra räta, vilket är omöjligt.

Inte heller kommer en rymdvinkel innehålla andra polygonala figurer med fler hörn än fem på grund av samma absurditet. $\square$

Bevis med Schläfli-notation

Med hjälp utav den tifigare introducerade *Schläfli-symbolen* (2.2), kan vi finna ytterligare ett bevis till satsen.

Proof. Vi uttrycker sidytorna som $\{p\}$, där p som tidigare beskrivits betecknar vilken polygon som används, och då polyedern har q stycken sådana polygoner som möts i varje hörn och utgör en rymdvinkel varpå polyedern betecknas, som tidigare nämnts, med Schläfli-symbolen $\{p, q\}$. Vi kan rent intuitivt påstå att också $q \geq 3$, då en rymdvinkel inte kan konstrueras utav färre plana vinklar än så.

Möjliga värden på p och q räknas ut som följande: Vi vet att rymdvinkeln hos ett hörn har $q \geq 3$ stycken sidvinklar. Varje sådan sidvinkel kan vi uttrycka som $(1 - \frac{2}{p})\pi$ eller $(\frac{p-2}{p})\pi$, då innervinkelsatsen ger att $(p-2)\pi$ är summan av de inre vinklarna vilka delas med p för att få en utav de inre

vinklarna. Proposition XI.21 säger att summan av dessa q stycken vinklar totalt måste vara mindre än 2π , så $q(1 - \frac{2}{p})\pi < 2\pi$. Vi förenklar ekvationen och ges $1 - \frac{2}{p} < \frac{2}{q}$ eller $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ eller $(p-2)(q-2) < 4$. Således, då heltalen $p, q \geq 3$, kan inte $\{p, q\}$ ha andra värden än $\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 3\}, \{5, 3\}$, vilka såklart är våra fem platonska kroppar.

□

(Coxeter 1948, s. 5)

3 Kropparna uttryckta i graf och sfär

3.1 Eulers formel

I mitten av november månad 1750 postar matematikern Leonhard Euler (1707-1783) ett brev från Berlin till sin kollega Christan Goldbach (1690-1764) i Sankt Petersburg. I brevet beskriver Euler ett begrepp som kommer utgöra grunden till det som i detta arbete kallas Eulers formel:

"föreningspunkterna där två sidytor kommer samman kallar jag, i brist på accepterad term, för 'kant'"- L.Euler
(Richeson 2008, s. 63).

Teorierna rörande polyedern var över två tusen år gamla och bestod genomgående av geometriska beskrivningar utav kropparna. Innan Euler var matematikerna enbart intresserade av kropparnas beräkningsbara egenskaper, såsom areor, längder, diagonaler och volymer.

Euler däremot hoppades finna ett nytt sätt att gruppera och klassificera polyedern genom att undersöka kropparnas uppbyggnad. Det var trots allt så man klassificerade polygoner, då alla tresidiga polygoner kallades trianglar och alla fyrsidiga kallades fyrkanter, och så vidare.

Euler fann att för att kunna beskriva den tredimensionella polyedern behövdes komponenter av noll, en och två dimensioner, nämligen hörn, kanter och sidytor.

När Euler bestämt att dessa tre var de som skulle beräknas dröjde det inte länge innan han såg ett samband mellan komponenterna. Vi kan bara föreställa oss Eulers förvåning då han upptäckte att varje polyeder uppfyllde sambandet $V - E + F = 2$.

Så:

Eulers Polyederformel

En polyeder med V hörn, E kanter, och F sidytor uppfyller

$$V - E + F = 2. \tag{1}$$

(Richeson 2008, s. 63 f.)

Följande kapitel tar upp mer historia kring denna formel och belyser några utav dess brister.

Eulers bevis för formeln

Beviset i fråga kan finnas likna en föregångare till nutidens kombinatoriska bevis. Metoden Euler använder är att dissekera en komplicerad polyeder, innehållande många hörn till exempel, och systematiskt förenkla polyedern till en utav simplare slag. Euler föreslog att genom att ta bort hörnen ifrån en polyeder, ett i taget, tills det bara återstår fyra stycken vilket ger oss en triangulär pyramid. Genom att hålla koll på antalet hörn, kanter och sidytor under varje steg i processen, samt använda de kända egenskaperna hos den triangulära pyramiden, att den har fyra hörn, sex kanter och fyra sidytor ($4 - 6 + 4 = 2$), kan Euler dra slutsatsen att $V - E + F = 2$ gäller för den ursprungliga polyedern.

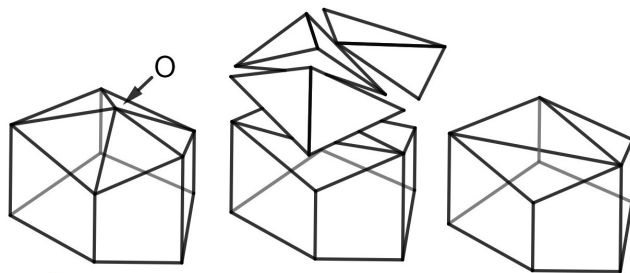


Bild 5: Avlägsna hörnet O genom att skära bort pyramider

Antag att vi har en polyeder vilken har V stycken hörn, E stycken kanter samt F stycken sidytor. Vår första uppgift blir nu att ta bort ett hörn från polyedern, och efter det bestämma hur många kanter och sidytor som återstår.

Låt nu O beteckna det hörn vi avser att ta bort från polyedern och anta att det möts n stycken sidytor vid O .

Euler såg att O kan tas bort genom att skära bort $n - 2$ stycken triangulära pyramider som har O som gemensamt hörn. Nu vill vi veta antalet sidytor och kanter som finns kvar efter nedskärningen utav polyedern.

För att finna svar på denna fråga behöver vi analysera tre tänkbara utfall.

Fall 1: Att alla sidytor som möts vid O är triangulära.

Genom att skära bort O försvinner dessa n stycken sidytor, men under de

$n - 2$ stycken bortklippta pyramiderna finner vi $n - 2$ nya triangulära sidytor. Antar vi också att dessa ytor ligger i olika plan är antalet sidytor i den nya polyedern

$$F - n + (n - 2) = F - 2.$$

Under denna process har vi också gjort av med n stycken kanter som möts vid hörnet O , men vi adderar de $n - 3$ kanterna mellan de $n - 2$ nya triangulära sidytorna. Då ges antalet kanter i den nya polyedern av

$$E - n + (n - 3) = E - 3.$$

I detta argument har vi som tidigare nämnts antagit att alla sidytorna som möts vid O är triangulära samt ligger i olika plan. Vi måste nu reda ut vad som händer om ett eller båda antagandena inte gäller.

Fall 2: Att en utav sidytorna vid hörnet inte är triangulär.

Då kommer den bortskurna pyramidens del utav ytan som inte försvunnit. Det uppstår också en ny kant där sidytan delats, vilket gör att både sidytorna och kanterna är en fler än vad som förväntats. Generellt gäller att om vi tar bort s antal sidytor som möts vid O kommer antalet ytor och kanter vara s fler än förväntat, så $F - 2 + s$ och $E - 3 + s$.

Fall 3: Att två utav de nya triangulära sidytorna befinner sig bredvid varandra och ingår i samma plan.

Då kommer de gemensamt utgöra en fyrsidig yta, vilket gör att det kommer finnas en sida färre än förväntat. Också kanterna kommer vara färre då det inte finns någon begränsande kant i den nya ytan, så det saknas en kant också. Om detta i sin tur inträffar t gånger kommer det alltså finnas t stycken färre av sidytor och kanter, varpå vi ges $F - 2 + s - t$ sidytor och $E - 3 + s - t$ kanter i den nya polyedern.

Formlerna ovan gäller alltså då enbart ett utav hörnen i ursprungspolyedern skärs bort, vilket kommer kräva mycket räknekraft och många pappersark om denna procedur fortsätter. Som tur är gör Euler en upptäckt som får oss att slippa komma ihåg dessa värden för varje borttaget hörn. Om vi tar antalet kanter hos den nya polyedern och subtraherar antalet sidytor i densamma ges vi

$$(E - 3 + s - t) - (F - 2 + s - t) = E - F - 1.$$

Med andra ord har differensen mellan antalet kanter och antalet sidytor förändrats med ett då vi tar bort ett hörn, vilket i det generella fallet kan

beskrivas med att differensen mellan kanter och sidytor är

$$E - F - n.$$

Med detta i bagaget kan vi sammanfatta och avrunda beviset. Vi började med en polyeder innehållande V antal hörn, E antal kanter och F antal sidytor. Antag att vi skär bort ett hörn i taget, n totalt, tills det enbart finns fyra stycken kvar vilka utgör den triangulära pyramiden. Då kommer $V - n = 4$ beskriva händelseförloppet för hörnen, vilket vi skriver om som $n = V - 4$. Den triangulära pyramidens differens mellan kanter och sidytor är $6 - 4 = 2$, vilket är på formen $E - F - n$, som tillsammans ger $E - F - n = 2$ och $n = V - 4$. Substituerar vi den andra ekvationen in i den första ger detta oss att:

$$E - F - (V - 4) = 2$$

$$\Leftrightarrow V - E + F = 2.$$

Konvexitetsproblemet

Tidigare definieras en *konvex polygon* (2.3), så nu är det dags att definiera en konvex polyeder.

Definition Konvex polyeder

Definition 3.1. *En konvex polyeder är en polyeder sådan att alla punkter inom polyedern kan förbindas med rätta linjer som ligger inom densamma.*

I Eulers argumentation syns det tydligt att Euler med försiktighet och precision håller reda på hur många kanter samt sidytor som försvinner då ett hörn elimineras. Det han dock inte var tydlig nog med är hur detta hörn elimineras eller tas bort från polyedern, samt om det finns några villkor som gäller för hur processen bör se ut. Euler uttalar sig om att det finns ett flertal sätt hur dessa hörn kan "skäras bort" från polyedern, men utvecklar inte resonemanget genom att förklara vilka konstruktioner som är eftersträvarvärda och inte. Det visar sig att felsteg i processen kan leda till felaktiga beräkningar med formeln.

Det första hindret infaller när den nya polyedern som skapas inte är konvex. Euler ger ett exempel då hörnet O har fyra intilliggande hörn A, B, C, D , och beskriver:

Detta kan göras på två sätt, två pyramider behöver skäras bort. Antingen

$OABC$ och $OACD$ eller $OABD$ och $OBCD$. Och om punkterna A, B, C, D inte ligger i samma plan kommer den resulterande kroppen följaktligen ha en annan form.

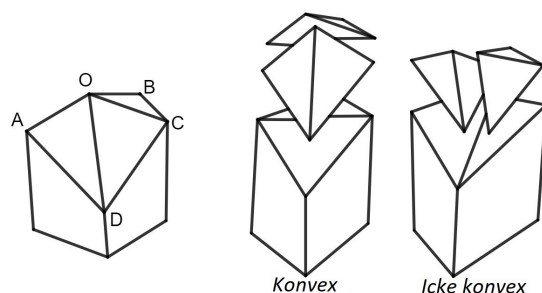


Bild 6: Att avlägsna ett hörn från en polyeder kan ge en konvex eller icke konvex polyeder.

Detta är sant, men om de fyra hörnen ligger i samma plan kommer ett av sätten resultera i en konvex polyeder, medans det andra sättet ger en icke konvex polyeder som resultat. Om vi i Bild (6) väljer att ta bort pyramiderna $OABD$ och $OBCD$ ger det oss en sådan icke konvex polyeder.

Euler nämner aldrig konvexiteten, utan verkar anta att alla polyedrar är av konvex art. Detta går inte bara anta, utan att få problem på vägen.

Hinder nummer två uppmärksammar Henri Lebesgue (1875-1941) genom att säga att den resulterande polyedern kunde bli icke-konvex, men likaså kan figuren som skapas falla utanför ramarna för vad vi är beredda att kalla för en polyeder.

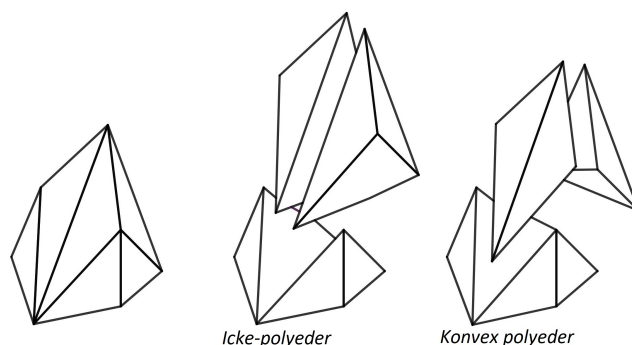


Bild 7: Eulers teknik applicerad på polyedern till vänster kan ge en konvex polyeder eller en så kallad icke-polyeder

Bild (7) visar ett hörn bestående utav fyra sidytor hos en polyeder. Liksom i det tidigare exemplet kan vi skära bort hörnet på två olika sätt, och liksom tidigare fungerar en av metoderna bra och den andra ger oss problem då den skapar en form som inte är en polyeder. Metoden ger oss en kropp som består utav två polyederkroppar som sammanlänkas längs en kant. Vad som gör detta utfall värre är att denna icke-polyeder inte uppfyller Eulers formel, vilket indikerar en allvarlig brist i Eulers bevis för formeln.

Det bör tilläggas att Eulers bevis inte är utom räddning, utan kan räddas med några få taktiska modifikationer. I de exempel som getts ovan har utfallen varit tvådelade, ett sätt som inte fungerar och ett som fungerar. Genom strategiska val kan ett hörn skäras bort och samtidigt garantera att resultatet är en konvex polyeder.

Om proceduren utförs med försiktighet kan det fastslås att Eulers formel (1) gäller för alla konvexa polyedrar.

I graf

Eulers eget bevis är såklart inte det enda beviset för varför formeln skulle fungera, och vi ska nedan beskriva ett som kopplar samman polyedrar och grafer på ett vackert sätt. Men först lite introduktion av kopplingen mellan polyedern och grafens värld.

Detta tanke sätt introduceras utav en viss Augustin-Louis Cauchy (1789-

1857), vilken gett namn åt satser och teorem inom bland annat komplex analys, algebra, differentialekvationer med flera.

Cauchys bevis för formeln grundar sig i att han tar bort en utav sidytorna på vilken polyedern står och visualiserar sig polyedern som ihålig, för att sedermera projicera resterande delar ned på planet. Här kan vi tänka oss en polyeder som byggds upp utav ståltråd som med rätt vinkel på ljuset kan projicera en skugga på ett papper vilken representerar planet.

Enligt Cauchy bör denna projektion uppfylla sambandet $V - E + F = 1$ då en sidyta räknats bort. Han använder sedan denna projektion för att eliminera sidytor, hörn och kanter strategiskt så att $V - E + F$ blir oförändrad. Men också Cauchy stöter på problem...

Precis som i fallet med Euler kommer problemen då hans svaga instruktioner i hur elimineringen går till och i vilken ordning processen bör utföras. Det visar sig till och med att det är möjligt att eliminera delar av polyedern så att Eulers formel (1) inte längre stämmer.
(Richeson 2008, s. 112ff.)

Som sagt länkar Cauchy ihop en polyeder med en graf genom en projektion på planet, varför vi nu kan diskutera nyare bevis med hjälp utav grafteorin.

Definition 3.2. *En graf är ett par $G = (V, E)$ där V är en mängd av punkter, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, vilka kallas hörn och E är en mängd sträckor mellan punkterna, $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k\}$, vilka kallas kanter.*

Svårigheten med detta blir dock att Eulers formel (1) inte går att tillämpa på alla typer av grafer, att beräkna hörn och kanter går bra, men en graf behöver inte nödvändigtvis ha sidytor. Även då vi skissar vår graf på ett papper kan vi inte vara helt säkra på om en kant delar en yta till två stycken sidytor eller inte. En graf som vi dock kan rita utan att kanterna korsar varandra kallar vi för en *planär graf*.

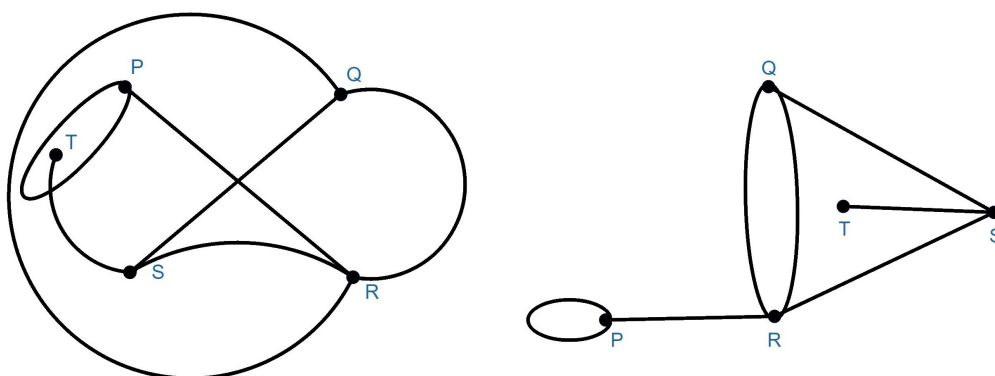


Bild 8: Två representationer av samma graf

Hos polyedern ser vi en sidyta som en region omringad av en polygon av något slag, men för grafen kan vi ge en annan definition.

Definition Bana

Definition 3.3. En sekvens av hörn $\{v_1, \dots, v_k\}$ i en graf G sådana att v_i och v_{i+1} ligger bredvid varandra ($1 \leq i \leq k-1$), kallas för **bana** om varje hörn endast finns med en gång.

Om banan börjar och slutar i samma punkt, det vill säga när $v_1 = v_{k+1}$ ovan kallas denna för **krets**.

En sidyta hos en polyeder kommer uttryckas som en krets i grafen, vilket kan ske på olika sätt:

En sidyta i grafen kan nämligen förbindas av en kant, som P till P i figuren, eller begränsas av två kanter, likt mellan Q och R , och slutligen kan en sidyta till och med ha en kant som sticker inåt i den, likt S och T . Vi kommer också likt många grafteoretiker att räkna grafens yttre region som en oändligt stor sidyta.

Eulers formel ges av en plan graf med V hörn, E kanter och F sidytor vilka ska uppfylla $V - E + F = 2$.

Definition Träd

Definition 3.4. Ett **träd** är den graf som inte har några kretsar.

På grund av **Definition** (3.4) har ett träd enbart en sidyta, nämligen den oändligt omgivande, vilket gör att $V - E + 1 = 2$ eller $V = E + 1$. Alltså är antalet hörn i trädet en fler än antalet kanter.
(Richeson 2008, s. 119ff.)

Argumentet för varför Eulers formel kan beskrivas med hjälp av en graf är nu relativt rakt på.

Vi börjar med en valfri plan graf som hänger ihop. Välj nu en kant. Om detta är en kant med ändpunkter i två olika hörn låter vi denna kant förminskas tills den inte finns mer och de två hörnen har sammanslutits och blivit till ett och samma hörn. Detta gör att antalet kanter blir en färre, vilket likaså händer för hörnen som också tappar ett i antal. Antalet sidytor är dock oförändrad, likt för Q och R i bild (8) vilket gör att $V - E + F$ fortsatt gäller.

Om den valda kanten istället varit en loop och haft samma start- och sluthörn hade vi istället tagit bort denna kant, vilket hade reducerat antalet kanter och antalet sidytor med en vardera. Hörnen är fortsatt lika många, så $V - E + F$ upprätthålls.

Denna process fortsätter tills vi enbart har ett hörn finns kvar. Då är $V = 1$, $E = 0$ och $F = 1$, varpå $V - E + F = 2$. Och då $V - E + F$ förblivit oförändrad genom hela beviset stämmer också $V - E + F = 2$ för den ursprungliga grafen.

(Richeson 2008, s. 121)

Med kopplingen mellan polyederformeln och grafen leder detta oss vidare till Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867), som under 1847 kommer med ett klyftigt bevis utav polyederformeln. Men innan det beskriver han i boken *Geometrie der Lage* en samling kriterier som appliceras på de så kallade *Eulerska polyedern*.

Till att börja med antar Staudt att dessa polyedrar kan ses som tomma skal istället för solida figurer, varpå följande antaganden görs för polyedern:

1. Det är möjligt att gå från valfritt hörn till annat hörn via diverse kanter.
2. Varje bana som börjar och slutar i samma hörn utan att gå genom något hörn två gånger kallas *krets*, vilken delar polyedern i två delar.

Staudt ger ett vackert argument för varför varje polyeder som uppfyller dessa kriterier också följer Eulers formel.

Bevisargumentation

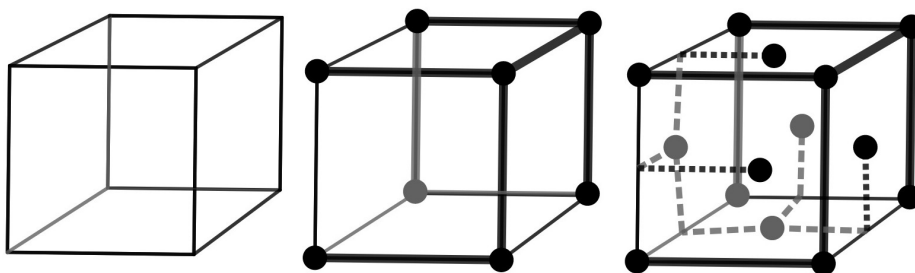


Bild 9: De två träden i Staudts bevis

Färglägg ett hörn hos polyedern röd. Börja vid detta hörn och färglägg en utav de angränsande kanterna samt kantens andra hörn. Välj sedan ett av de färglagda hörnen och färglägg en annan angränsande kant och dess andra hörn. Fortsätt sedermera denna process utan att skapa en röd krets tills det inte går att fortsätta.

För en polyeder som uppfyller Staudts kriterier inträffar detta när V hörn färglagts. Då denna bana inte bildar en krets kan vi se detta som ett tidigare nämnt träd (3.4), varpå det måste finnas $V - 1$ stycken kanter.

Byt färgpenna (förslagsvis till blå) och skissera ut en blå prick på varje sidyta. Dra sedermera linjer som går utanpå skalet hos polyedern mellan alla prickarna, med regel att ingen blå linje får skära en röd. Detta kommer också ge oss ett träd med F stycken prickar, så det finns $F - 1$ stycken kanter.

Den avgörande observationen är att varje kant i den ursprungliga polyedern är röd eller korsas av en blå kant, varpå antalet kanter är summan av alla röda och blå kanter.

$$E = (V - 1) + (F - 1)$$

$$\Leftrightarrow V - E + F = 2.$$

Behov av definition

Kan vi verkligen påstå att Eulers formel gäller för alla typer utav polyedrar? Svaret är nej, då det existerar flertalet exempel av polyedrar vars sidytor, kanter och hörn inte stämmer överens med Eulers samband $V - E + F = 2$. Intresset för att finna de egenskaper som karakteriserar en polyeder som passar in i formeln har länge funnits, så tätt efter Eulers formel publiceras påbörjas jakten efter de Eulerska polyedrarna.

Simon-Antoine-Jean Lhulier (1750-1840) var en utav de första att undersöka dessa egenskaper och vilka som skiljer polyedrarna som passar in i formeln och de polyedrar som inte gör det. År 1813 presenterar Lhulier i en artikel tre klasser av polyedrar vilka inte uppfyller polyederformeln, vilka han kallar för undantag.

Den första klassen är de polyedrar som har ringformade sidytor med hål i sig, den andra klassen som Lhulier nämner är polyedrar med en eller fler tunnlar genom centrum utav polygonen, och slutligen den tredje klassen innehåller de polyedrar som har en polyederformad hålighet inuti polyedern själv.

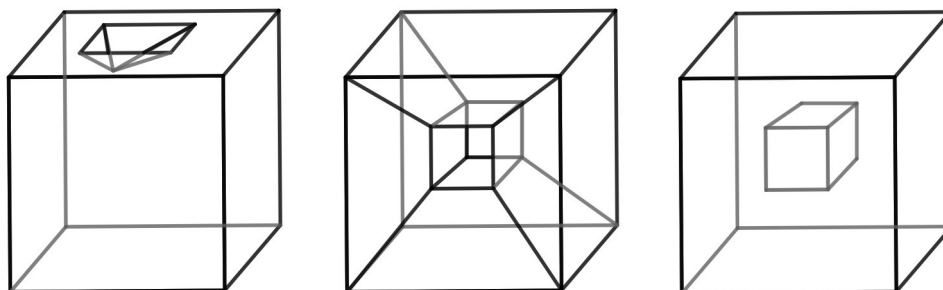


Bild 10: Lhuliers tre undantag

Det tredje undantaget gäller så klart bara då polyedern är av solid karaktär och inte ihålig ifrån start.

Lhulier ger dock inte upp på formeln, utan skriver:

"En kan lätt övertygas om att Eulers teorem generellt är sann för alla polyedrar, oavsett om de är konvexa eller inte, förutom i de fall som specificerats."

- S Lhulier

Istället för att bortse från de funna undantagen försöker Lhulier anpassa formeln så att undantagen också stämmer in. Han antar nu att polyedern har T stycken tunnlar, C stycken håligheter i sidytor och P stycken inre polyedrar vilket ger den nya formeln:

$$V - E + F = 2 - 2T + P + 2C,$$

vilket är en formel som även stämmer överens med Lhuliers undantag, se Bild (10).

(Richeson 2008, s. 146ff.)

Johann Hessel (1796-1872) är en annan som studerat polyedrarnas koppling till formeln och beskriver, ovetande om Lhuliers verk, fem stycken undantag som inte uppfyller sambandet i Eulers formel. Tre utav dessa visar sig vara Lhuliers undantag, men de sista är polyedrar vilka är uppbyggda av två polyederkroppar med antingen en gemensam kant eller ett gemensamt hörn. Detta gör att de två polyederkropparna med en gemensam del utgör en och samma kropp. Ett utav Hessels nya undantag stötte vi på i Bild (7) i samband med metoden för att skära bort ett hörn, vilken kunde skapa en icke-polyeder. Huruvida de två sistnämnda undantagen verkligen räknas som polyedrar går att debattera, men hur som helst uppfyller de inte Eulers formel.

(Richeson 2008, s. 149)

Då polyedern i en graf diskuteras här passar vi på att beskriva en sats vilken används senare i arbetet, men först en definition:

Definition 3.5. En *grafisk avbildning* av en polyeder, med V hörn, E kanter och F sidytor, är då polyedern representeras av en planär graf V hörn som punkter, E kanter som streck och F sidytor som områden inklusive den oändligt omgivande.

Sats 3.6. För en polyeder $\{p, q\}$ med V hörn, E kanter och F sidytor gäller att:

$$qV = 2E = pF \quad (2)$$

Bevis. Som tidigare beskrivits utgör kanterna och hörnen hos en polyeder en speciell typ av graf, vilken har V stycken punkter eller hörn och E stycken linjer eller kanter som sammanbinder hörnen i par.

En polyeder med Schläfli-notation $\{p, q\}$ (2.2) har q stycken kanter som möts i varje hörn. Om ett hörn tillhör q stycken kanter ges $\sum q = 2E$. Antalet hörn är V stycken, varpå $qV = 2E$.

Som sagt är denna representation en grafisk avbildning av polyedern. Denna grafiska avbildning ger upphov till en dual avbildning på samma yta, vilket är en avbildning som istället har F stycken punkter eller hörn, en på varje sidyta hos den ursprungliga avbildningen, samt E kanter vilka var och en korsar en kant hos den ursprungliga avbildningen.

Motsvarande för en p -gonal sidyta hos den ordinarie avbildningen, kommer den duala att ha hörn där p stycken kanter möts. Likt tidigare resonemang finnes att $pV = 2E$. $\square$

På sfären

Ett utav de mest innovativa sätten att bevisa Eulers formel tillskrivs Adrien-Marie Legendre (1752-1853). Legendre skrev boken *Elements de geometrie* som publicerades 1794, där Legendre diskuterar Eulers formel utan att försöka reparera Eulers eget bevis. Istället kommer Legendre med en egen tolkning som med hjälp av sfärisk geometri bevisar att formeln $V - E + F = 2$ stämmer.

Några grunder då vi talar om sfären:

På sfären uttrycker vi inte trianglar och andra polygoner med hjälp utav räta och plana linjer, utan istället genom korsande bågar av *storcirklar*. En storcirkel är den cirkel som har samma radie som sfären själv, vilket gör att en sådan har den maximala radien som är möjlig på sfären. Ett enkelt exempel på en storcirkel är Jordens ekvator vilken delar Jordens radie.

Vi kan nu definiera en triangel på en sfär att vara en region som inbinds utav tre stycken storcirklar, vilket med engelsk terminologi kallas *geodesic triangle* och introduceras utav Menelaus av Alexandria i boken *Spherica*. Vi kallar denna triangel för en sfärisk triangel.

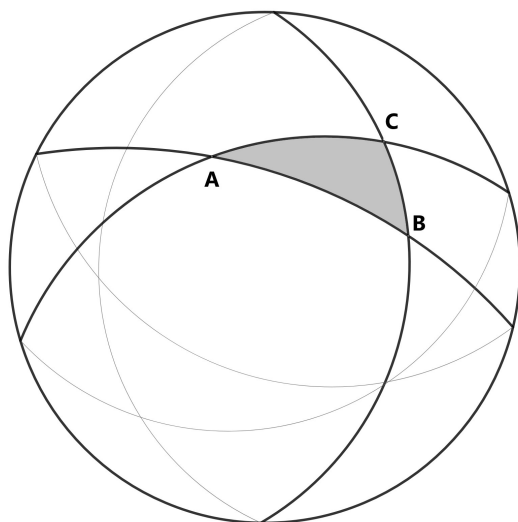


Bild 11: En triangel uppbyggd av tre storcirklar

När vi arbetar med sfären kommer vissa satser ifrån den plana geometrin att se annorlunda ut. Exempelvis kommer vinkelsumman hos den sfäriska triangeln att vara större än π radianer, vilket vi i planet är vana vid (se **Proposition XI.20**).

Under 1600-talet kom Thomas Harriot (1560-1621) och Albert Girard (1595-1632) fram med en sats där vinkelsumman hos en sfärisk triangel används. Satsen relaterar till tre delar nämligen triangelns vinkelsumma, triangelns area och sfärens radie. För enkelhetens skull används en enhetssfär då radien är 1.

Harriot-Girards sats

Sats 3.7. *Låt vinklarna a, b, c vara innervinklar hos en sfärisk triangel på enhetssfären.*

Då är

$$\text{Area (Sfärisk triangel)} = a + b + c - \pi. \quad (3)$$

Med andra ord är arean lika med vinkelsumman av de inre vinklarna minus π .

(Richeson 2008, s. 87ff.)

Anmärkning:

För att bevisa satsen introducerar vi begreppet *Lune*, eller bisektor, vilket är ett område som begränsas av två storcirklar. De två cirkarna möts med en vinkel a på båda sidorna av området. Om denna vinkel a beräknas i radiander är alltså bisektorns area på enhetssfären $2a$, då arean av bisektorn kontra arean utav hela sfären, vilken är 4π , är som vinkel a till 2π .

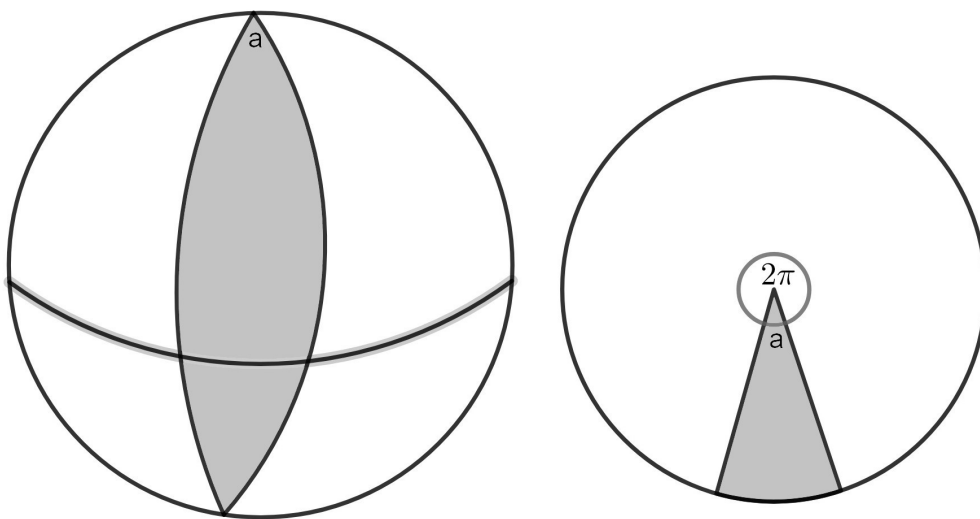


Bild 12: En bisektor på sfären (vänster), och samma bild ovanifrån (höger)

Vi ges då att

$$\frac{\text{Area av bisektor}}{4\pi} = \frac{a}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \text{Area av bisektor} = 2a.$$

Bevis (Harriot-Girards sats). Antag en sfärisk triangel ABC på enhetssfären med inre vinklar a, b, c , samt att hela triangeln ligger på samma hemisfär.

Vi vill nu visa att $\text{Area av } ABC = a + b + c - \pi$.

Vi förlänger sidorna hos ABC och betecknar skärningspunkterna med halvklotets kant med D, E, F, G, H, I . Av symmetriskäl hos sfären kommer nu arean av ADE och AGH tillsammans lika stora som en bisektor med inre vinkel a . Alltså $\text{Area}(ADE) + \text{Area}(AGH) = 2a$.

Med samma resonemang ges också att $\text{Area}(BFG) + \text{Area}(BDI) = 2b$ och

$$\text{Area}(CHI) + \text{Area}(CEF) = 2c.$$

Om vi nu summerar dessa ges:

$$\begin{aligned} & [\text{Area}(ADE) + \text{Area}(AGH)] + [\text{Area}(BFG) + \text{Area}(BDI)] \\ & + [\text{Area}(CHI) + \text{Area}(CEF)] = 2a + 2b + 2c. \end{aligned}$$

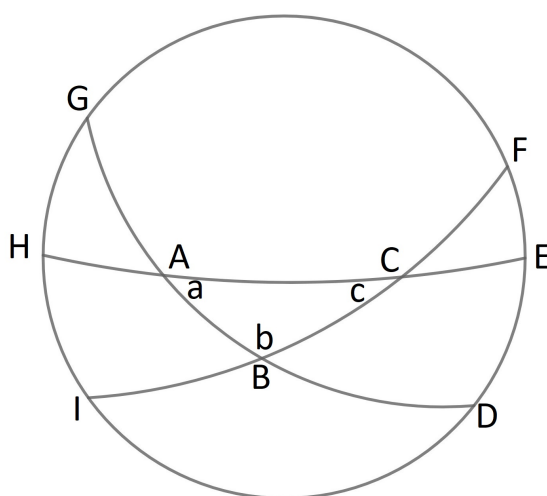


Bild 13: Storcirklar på halvklot

Tittar vi närmare på vänsterledet ser vi att summan utav dessa areor täcker hela halvklotet en gång, förutom området ABC vilken innesluts tre gånger. Vi kan därför skriva om ekvationen som

$$\text{Area}(\text{Halvklot}) + 2 \cdot \text{Area}(ABC) = 2a + 2b + 2c,$$

och då arean utav halvklotet är $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$ så ges vi

$$2\pi + 2 \cdot \text{Area}(ABC) = 2a + 2b + 2c$$

$$\Leftrightarrow \text{Area}(ABC) = a + b + c - \pi,$$

vilket var det samband vi ville visa. □

För Legendres bevis generaliseras Harriot-Girards sats så den passar till andra geodesiska- eller sfäriska polygoner med fler sidor än tre.

Harriot-Girards sats för sfäriska polygoner

Sats 3.8. *Låt vinklarna $a_1, a_2, \dots, a_n$ vara de inre vinklarna hos en n -sidig geodesisk polygon på enhetssfären.*

Då är

$$Area(Polygon) = a_1 + a_2 + \dots + a_n - n \cdot \pi + 2\pi. \quad (4)$$

eller

$$Area(Polygon) = \text{Vinkelsumman} - n \cdot \pi + 2\pi.$$

Anmärkning:

Med hjälp utav *innervinkelsatsen* (2.9) finner vi att arean utav en sfärisk polygon helt enkelt är värdet som vinkelsumman i den sfäriska polygonen överskrider vinkelsumman hos den plana polygonen med lika många sidor. Alltså

$$Area(Polygon) = \text{Vinkelsumma på sfär} - \text{Vinkelsumma i plan}.$$

För att förstå denna generalisering ordentligt delar vi in den sfäriska polygonen i sfäriska trianglar genom att lägga till diagonaler i figuren, se Bild (14). Denna uppdelning ger oss $(n - 2)$ stycken trianglar.

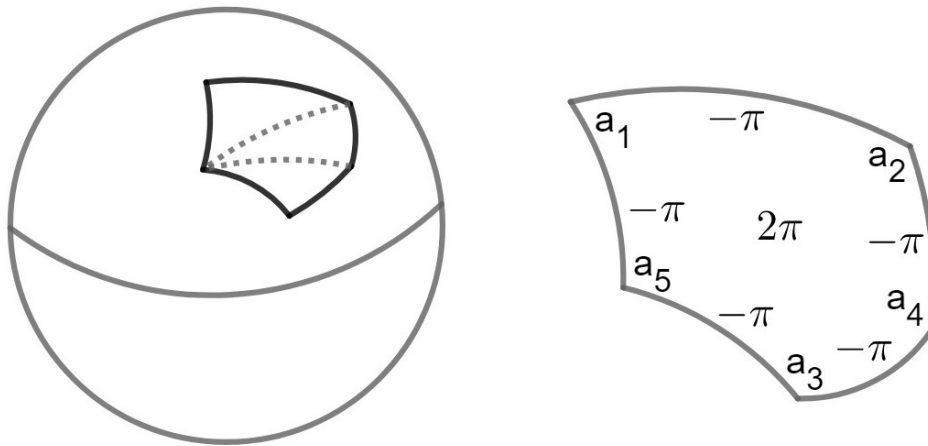


Bild 14: En polygon på sfären indelad i trianglar (vänster), arean hos den sfäriska polygonen är summan av siffrorna i diagrammet (höger)

Den summerade arean av dessa trianglar motsvarar hela polygonen, och summan utav alla vinklar i triangeln är samma som i polygonen, så om standardversionen utav Harriot-Girards sats (3.7) appliceras på alla dessa trianglar ges vi

$$\begin{aligned} \text{Area(Polygon)} &= a_1 + a_2 + \dots + a_n - (n - 2)\pi \\ &\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n - n \cdot \pi + 2\pi. \end{aligned}$$

Det finns ett enkelt sätt att komma ihåg denna formel, nämligen genom att visualisera polygonen på sfären som ges i den högra delen utav Bild (14). Placera vinklarna i varje hörn, $-\pi$ längs varje kant och 2π i mitten av sidytan, så ges arean utav polygonen genom summering utav dessa. Denna visualisering kommer vara viktig för förståelsen av Legendres bevis för Eulers formel. (Richeson 2008, s. 92ff.)

Bevisresonemang utav Legendre:

Antag en konvex polyeder med V hörn, E kanter och F sidytor. Vi vill nu visa att $V - E + F = 2$.

Låt x vara en punkt innuti kroppen. Finn en sfär med x som sin centrum och som innesluter hela polyedern. Då enheterna är oviktiga bestämmer vi att denna sfär har radien 1.

Projicera nu polyedern mot sfären genom strålar från punkten x . Vi visualiserar detta som att polyedern är uppbyggd av ståltråd och att x är en glödlampa vilken projicerar en skugga från polyederna ståltrådskanter. Inget bevis kommer ges i detta arbete, men sidytorna hos polyedern ger då sfäriska polygoner på sfärens yta.

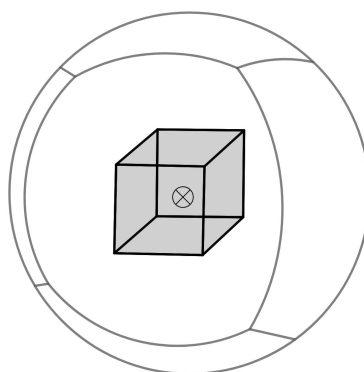


Bild 15: Projektion utav polyeder på sfärens innanmäte

Legendre använder sedermera ett allmänt känt trick när han beskriver en storhet, i detta fall sfärens area, på två skilda sätt. Först genom den kända areaformen då arean beskrivs vara 4π och sen att alla sidytornas area totalt ger hela arean av sfären.

Genom Harriot-Girards sats (3.8) vet vi att arean av varje n -hörnad sidyta är summan av alla inre vinklar minus $(n - 2)\pi$. Istället för att direkt arbeta med formeln använder vi en visuell representation genom Bild (16).

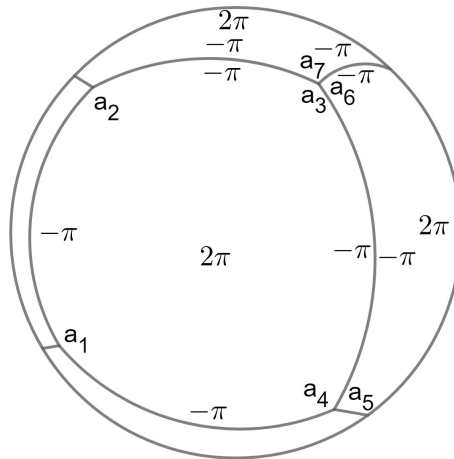


Bild 16: Projektionen med utsatta siffror

Märk alla vinklar, kanter och sidytor på sfären genom vinkelmått vid varje vinkel, $-\pi$ på båda sidorna av varje kant och 2π i mitten på varje sidyta. För att beräkna totala arean summerar vi dessa enheter.

Trots att vinklarna som möts vid varje hörn i polyedern är mindre än 2π kommer deras projektion på sfären att ge 2π , och då det finns V stycken hörn ges $2\pi V$. Varje kant bidrar med -2π då $-\pi$ finns på vardera sida om varje kant. Med E stycken kanter tillförs $-2\pi E$. I mitten utav varje sidyta finns 2π skrivet, och med F stycken sådana ges $2\pi F$. Detta summerat ger $4\pi = 2\pi V - 2\pi E + 2\pi F$, som dividerat med 2π ger oss Eulers formel $V - E + F = 2$.

(Richeson 2008, s. 96ff.)

Definition Eulersk polyeder

Definition 3.9. En polyeder med V stycken hörn, E stycken kanter och F stycken sidytor, som uppfyller sambandet $V-E+F=2$ kallas för en **Eulersk polyeder**.

3.2 Fem platonska kroppar enligt Euler

”Det var väldigt bra, men vad kan vi använda formeln till?” är en rimlig fråga att ställa.

Med hjälp utav denna formel kan vi ge ytterligare ett kompletterande bevis för varför det enbart existerar fem stycken regelbundna polyedrar.

Bevis för existens av endast fem regelbundna polyedrar

För att bevisa det unika hos de fem regelbundna polyedrarna kommer Eulers formel att användas med hjälp av en del aritmetik. Så återigen, satsen i Elementa vilken antyder att det endast finns fem regelbundna polyedrar.

Fem regelbundna polyedrar

Sats 3.10. *Ingen figur, förutom de fem figurerna, kan konstrueras av regelbundna och identiska polygoner.*

Bevis. Antag att vi har en regelbunden polyeder. Vi ska nu visa att det måste vara en utav de platonska kropparna tetraeder, kub, oktaeder, ikosaeder eller dodekaeder. Antag att denna polyeder har V hörn, E kanter och F sidytor. Eulers formel säger att $V - E + F = 2$.

Då polyedern är regelbunden är varje sidyta en regelbunden polygon med samma antal (plana) hörn. Självklart är detta antal, kalla det p , större än tre. Definitionen ger att samma antal sidytor möts vid varje (rumsligt) hörn. Detta antal q måste också vara minst tre, och motsvarar antalet sidytor som möts vid varje hörn i polyedern.

Så, varje sidyta bidrar med p stycken kanter, men då varje kant delas utav två sidytor beräknar mängden Fp varje kant två gånger. Så $E = \frac{Fp}{2}$.

Liknande ger varje sidyta upphov till p stycken hörn, men q stycken sidytor möts vid varje hörn, så mängden Fp beräknar varje hörn q gånger. Så $V = \frac{Fp}{q}$.

Substitueras dessa resultat in i Eulers formel ges:

$$\begin{aligned} V - E + F &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{Fp}{q} - \frac{Fp}{2} + F &= 2 \\ \Leftrightarrow F \left(\frac{p}{q} - \frac{p}{2} + 1 \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow F \left(\frac{2p - pq + 2q}{2q} \right) &= 2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{4q}{2p - pq + 2q}.$$

Vi vet här att $4q$ och F båda är positiva, då polyedern varken kan ha negativt antal sidytor eller ett negativt antal sidytor som möts vid varje hörn, så för att ekvationen ska gälla måste $2p - pq + 2q > 0$.

Genom prövning ges att enbart fem par av heltal (p, q) uppfyller denna olikhet tillsammans med kravet $p, q \geq 3$. Dessa par är:

$$(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3).$$

Använder vi formeln för V , E och F från tidigare ges vi de fem platonska kropparnas komposition, vilket är det som syftas till att bevisas. $\square$

Om vi stannar upp och funderar över vad som bevisats ovan kommer vi fram till att beviset egentligen inte styrker det ideala utseendet hos de platonska kropparna, vilket är då sidytorna är regelbundna polygoner. Detta då beviset olik Euklides och det kompletterande beviset i (2.3) och (2.3) inte använder vinklar i argumentationen. Då beviset inte anknyter till alla delar utav satsen måste vi bevisat någonting annat. Det som antogs var att varje sidyta hade lika många kanter, samt att vid varje hörn möts lika många sidytor. Med detta sagt kan figurerna som överensstämmer med dessa krav se olika ut och rymdvinklarna som utgör ett hörn kan skilja sig i den givna figuren.

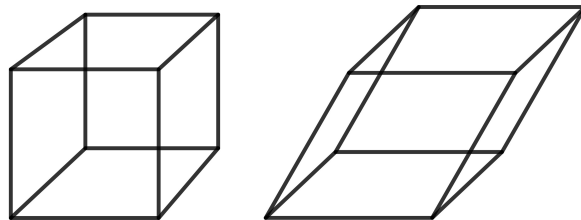


Bild 17: Kubliknande former

Dessa kombinationer och de figurer som kan skapas under dessa krav kommer dock enbart vara de polyedrar som liknar tetraedern, kuben, oktaedern, ikosaedern, samt dodekaedern.

Alltså, antalet hörn, kanter och sidytor måste vara lika många som i en av de platonska kropparna.

(Richeson 2008, s. 75ff.)

3.3 Rotationssymmetri och kroppar

Rent intuitivt går det att påstå att de regelbundna polyederna i hög grad bör vara symmetriska figurer, men hur beskrivs dessa symmetrier?

I matematiken beskrivs symmetrier genom något som kallas *grupp teori*.

Definition Grupp

Definition 3.11. En grupp är en mängd som tillsammans med en operation, $G \times G \rightarrow G$, uppfyller följande axiom:

- **Associativitet:** För alla $a, b, c \in G$ gäller att $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
- **Existens av identitet:** Det finns ett element $e \in G$, kallat identiteten i G , så att $e \times a = a = a \times e$ för alla $a \in G$.
- **Existens av invers:** För varje $a \in G$ finns ett element $b \in G$, kallat inversen till a , så att $a \times b = e = b \times a$, där e är identiteten i G .

(Löh, C. 2017, s. 10)

Historiskt sett har de platonska kropparna ofta visualiserats som verkliga objekt som går att ta på och manipulera, detta synsätt kan underlätta förståelse utav symmetrier.

Den mest naturliga formen av symmetri är vad som kallas en *stel rörelse* (2.6), vilken innebär förflyttning utav punkter i rummet denna gång så att det relativa avstånden och positionerna hos punkterna förblir de samma. I tre dimensioner finner vi de stela rörelserna translation, rotation och reflektion.

Definition Symmetri

Definition 3.12. Symmetri hos ett objekt i rummet betyder att en stel rörelse i rummet omvandlar kroppen utan att förändra kroppens form eller dimensioner.

En sak som är värd att nämna är att kropparnas storlek inte har någon betydelse för de stela rörelsernas inverkan på kroppen. För enkelhetens skull brukar kroppar med kantlängd 1 utav valfri måttenhet användas. Dessa kroppar kallas ibland för enhetskroppen, och om inget annat nämns i detta arbete är det dessa som används.

För att förstå hur symmetrierna uppfyller axiomen för att skapa en grupp behöver operationen *sammansättning*, eller *composition* på engelska, definieras.

Definition Sammansättning

Definition 3.13. Om A och B är stela rörelser i rummet, så är $A * B$ den stela rörelsen given av att först utföra B och sedan utföra A . Operationen, $*$, kallas **sammansättningen** av A och B .

Sammantaget utgör symmetrierna translation, rotation och spegling en grupp för objektet under operationen av sammansättning. Denna grupp kallas *Symmetrigruppen* för objektet, vilken innehåller de rotationer, translationer och speglingar som kan utföras på objektet.

För att förklara detta används kvadratens symmetrier i planet. Men först en definition.

Dihedral symmetrigrupp

Definition 3.14. Antag $n \geq 2$.

Symmetrigruppen hos en regelbunden n -sidig polygon märks D_n och kallas den n :te dihedrala gruppen.

Kvadraten har symmetrigrupp D_4 , där elementen i gruppen är de stela rörelser som kan utföras utan att förändra proportionerna eller form på kvadraten.

$$D_4 = \{Id, Rot_{90}, Rot_{180}, Rot_{270}, HF, VF, DF, D'F\},$$

(med Id = Identiteten, Rot_k = Rotation medurs med k grader, HF = Horisontal flip, VF = Vertikal flip, DF = Diagonal flip, $D'F$ = Den andra diagonala flippen) är då samlingen av alla de stela rörelserna.

Vi ser att kvadratens symmetrigrupp innehåller rotationer och speglingar, men ingen translation. Anledningen till detta är att en translation enbart förlyttar kvadraten runt i rummet, vilket inte ger oss ett nytt sätt att ordna om hörnen på.

Om vi alltid läser av bokstaven i det vänstra hörnet först hos kvadraterna

i Bild (18) och sedan resterande medsols kommer vi se att de fyra kvadraterna inte har hörnen på samma plats, vilket är det vi menar med att en stel rörelse påverkar ett objekt utan att förändra proportion eller form hos objektet. Translationen hade inte givit oss en ny omordning utav bokstäverna som representerar varje hörn, då en sådan stel rörelse inte påverkar hörnens position jämfört varandra.

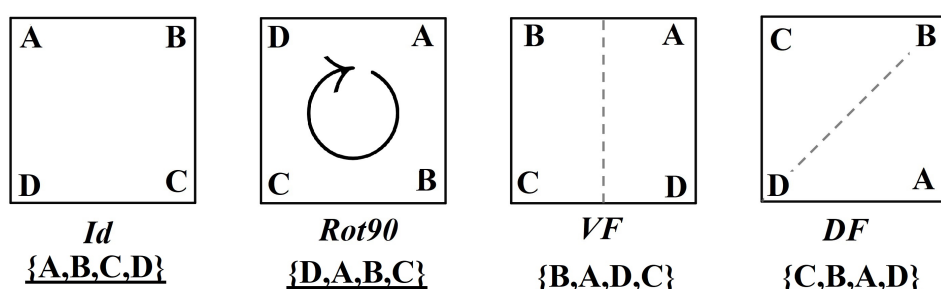


Bild 18: Fyra utav elementen i gruppen D_4 och hur hörnen avläses

Symmetrigruppen uppfyller axiomen enligt följande resonemang.

Först kan det neutrala elementet beskrivas som den operation vilken inte påverkar kroppen i rummet, som inträffar då kroppen inte har en stel rörelse. Denna kallas identiteten för objektet och kommer användas i redogörelsen för kropparnas rotationer.

Om A , B , C är stela rörelser, kan det vara svårt att visualisera varför $A * (B * C)$ utgör samma stela rörelse som $(A * B) * C$. Ett sätt att föreställa sig detta är genom att undersöka vad som händer med en specifik punkt hos objektet. Genom sammansättningarna kommer både $A * (B * C)$ och $(A * B) * C$ att först utföra operation C , sedan B och sist A . De har samma effekt på punkten och utgör därför samma stela rörelse.

Att varje operation har en invers kan förstås genom att föreställa sig att kroppen exempelvis roteras moturs, för att sedermera roteras lika mycket tillbaka medurs. Rotationen medurs blir då inversen till rotationen moturs, och vice versa. Om den första rörelsen filmas, kan den inversa rörelsens visualiseras genom att spola tillbaka filmen.

Den stela rörelsen som kommer studeras under följande del av detta arbete är rotationer utav kropparna vilka sker runt en axel med en viss vinkel. Vinkeln som kroppen roteras utgår från den plana vinkeln vilken omger axeln. Samlingen av rotationerna för en given kropp utgör en *undergrupp* till symmetrigruppen för samma kropp.

Undergrupp

Definition 3.15. Låt G vara en grupp.

En samling, H , av element i G kallas *undergrupp* om den själv utgör en grupp, vilket betyder att den uppfyller axiomen i **Definition** (3.11).

Exempel på en undergrupp, kalla den $r_{\{4\}}$, till D_4 är samlingen av enbart rotationerna hos kvadraten.

Alltså:

$$r_{\{4\}} = \{Id, Rot_{90}, Rot_{180}, Rot_{270}\} \quad (5)$$

vilken uppfyller axiomen på samma vis.

Ett naturligt sätt att beskriva rotationen är att utgå ifrån hur stor del utav ett helt varv rotationen utgör. Den naturliga enheten i denna beskrivning blir då ett varv, vilket annars hade uttrycks som rotation med 360° eller 2π radianer.

Tabellen nedan visar relationen mellan antal varv, grader och radianer.

Varv	Grader	Radianer
$\frac{1}{4}$	90°	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	180°	π
1	360°	2π
$\frac{1}{3}$	120°	$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{1}{5}$	72°	$\frac{2\pi}{5}$
$\frac{1}{6}$	60°	$\frac{\pi}{3}$

Självklart kan vi använda negativa varv också, då vi roterar en kropp åt motsatt riktning, men låt oss vara positiva.

Kvadratens rotationsgrupp skrivs nu om med den nya enheten varv som:

$$r_{\{4\}} = \{Id, Rot_{\frac{1}{4}}, Rot_{\frac{1}{2}}, Rot_{\frac{3}{4}}\}$$

Beskrivningen ger oss en naturlig och enkel visualisering av vad som egentligen händer med kroppen, så omställningen till den nya enheten bör inte vara allt för besvärlig.

Med den naturliga enheten varv uttrycks den minsta rotationen runt en given rotationsaxel genom $\frac{1}{p}$ varv, och alla de andra rotationerna runt samma axel utgör sedermera multiplar av den minsta rotationen. Rotationerna runt denna axel formar en grupp av ordning p , då den innehåller p stycken element och sägs då vara en p -faldig rotationsaxel. Ett exempel på en sådan finnes i gruppen (5) för en kvadrats rotationer.

I det följande reds rotationssymmetrierna för respektive kropp ut. Den simplaste regelbundna polyedern är tetraedern, vilket ger en utmärkt start. Vi finner tetraedern i ett neutralt läge, exempelvis som på Bild (19).

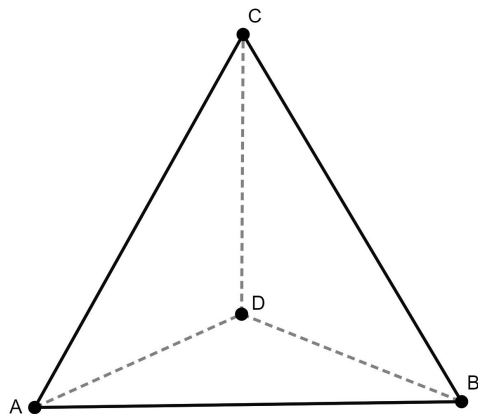


Bild 19: Ursprungspositionen för tetraedern

De rotationer eller stela rörelser som eftersöks är de som får tetraedern att likna tetraedern i det neutrala läget, men att kanterna, sidytorna och hörnen förflyttats.

Som sagt finner vi tetraedern i en ursprungsposition, vilket är den första möjliga rotationen hos tetraedern. En rotation med noll varv runt valfri axel räknas nämligen också som en rotation, och utgör identitetselementet i rotationsgruppen.

Nästa rotation som vi nu finner runt en specifik typ utav axel är då axeln går ifrån valfritt hörn vinkelrät ner i motstående sida, alltså från punkt

B vinkelrät genom $\triangle ACD$ i Bild (19). Då tetraedern roteras runt denna axel kommer rotation med $\frac{1}{3}$ varv och $\frac{2}{3}$ varv att få tetraedern att se ut som identiteten men med kanter, sidytor och hörn omdirigerade. Detta kallas också för en 3-delad rotationsaxel, eller 3-faldig rotation. Då vi i tetraedern kan finna fyra sådana axlar från ett hörn genom en sidyta ges vi $2 \cdot 4 = 8$ rotationer som får tetraedern att återgå till ursprungspositionen.

Sista rotationsmöjligheten hos tetraedern finner vi genom att undersöka kanterna, mer specifikt de par utav motstående kanter som finns i tetraedern. Om vi låter en rotationsaxel gå genom mittpunkten på till exempel kanten AB och CD så kommer vi ges en rotationsaxel som efter $\frac{1}{2}$ varv kommer ge oss något som liknar identiteten, även kallad en 2-delad rotationsaxel. Efter ytterliggare ett halvt varv ges vi identiteten, vilken redan är medräknad i vår första typ av rotation, den med noll varv. Då tetraedern har sex stycken kanter kan vi finna tre stycken axlar genom par av motstående kanter, vilket ger $1 \cdot 3 = 3$ rotationer till.

Totalt har vi kunnat finna en rotation med 0 varv, åtta rotationer kring axeln genom hörn och motstående sidyta, samt tre rotationer runt axel genom motstående kantpar, vilket summerat ger oss tolv rotationer hos tetraedern. Tetrahedral symmetrigrupp är det vi kallar samlingen av alla tetraederns symmetrier, men i detta arbete är vi speciellt intresserade av rotationssymmetrierna vilka likt med exemplet hos kvadraten (5) utgör en undergrupp till den tetrahedralla symmetrigruppen. Gruppen innehållande rotationssymmetrierna hos tetraedern betecknas i detta arbete genom $r_{\{3,3\}}$.

Med tetraederns rotationer utredda är det dags för kuben, vilken också har en identitet som ska efterliknas genom rotationerna.

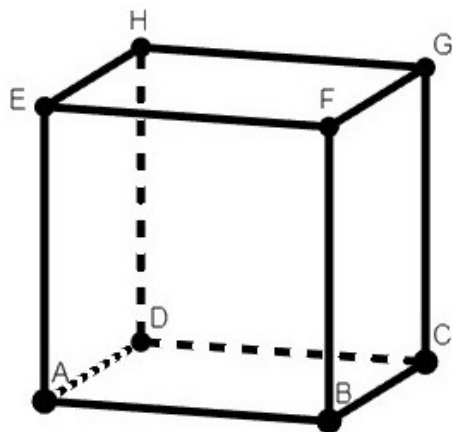


Bild 20: Ursprungspositionen för kubens

Likt föregående fall finner vi den första rotationen med 0 varv runt valfri axel, vilket inte är någon nyhet. Nästa rotation sker dock genom en axel genom par av motstående sidytor, exempelvis genom sidytorna $\square ABCD$ och $\square EFGH$ i Bild (20). Denna typ av axel ger upphov till rotationer med $\frac{1}{4}$ -, $\frac{2}{4}$ -, $\frac{3}{4}$ varv och kallas en 4-delad rotationsaxel. Vi finner tre par av motstående sidytor, så $3 \cdot 3 = 9$ rotationer runt denna typ av axel.

Nästa typ är den axel som går genom motstående kanter hos kubens, exempelvis genom mittpunkten på AB och GH i Bild (20). I detta fall ges rotation med $\frac{1}{2}$ varv runt rotationsaxeln, och med sex sådana par finner vi $1 \cdot 6 = 6$ rotationer.

Sist finner vi rotationer runt en axel som sträcker sig genom par av motstående hörn i kubens, vilka exempelvis kan vara genom A och H . Denna axel ger oss rotationerna $\frac{1}{3}$ varv och $\frac{2}{3}$ varv. Med fyra par av motstående hörn ges $2 \cdot 4 = 8$ rotationer, vilket gör att det totala antalet rotationer hos en kub är tjugofyra stycken. Dessa tjugofyra rotationssymmetrier utgör en undergrupp till den oktaedrals symmetrigruppen, vilken innehåller alla kubens symmetrier och betecknas i detta arbete genom $r_{\{3,4\}}$.

Slutligen undersöker vi dodekaedern, vilken också har en identitet och en 0 varvs rotation i samlingen av rotationer.

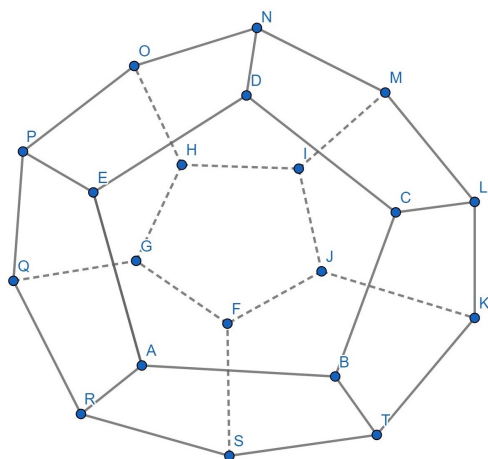


Bild 21: Ursprungspositionen för dodekaedern

Vi finner sedermera en axel genom motstående sidytor, exempelvis sidytorna $ABCDE$ och $FGHIJ$ i Bild (21), vilka ger en 5-delade rotationsaxlar, alltså rotationer med $\frac{1}{5}$ -, $\frac{2}{5}$ -, $\frac{3}{5}$ -, $\frac{4}{5}$ varv. Då det finns sex sådana par utger dessa $4 \cdot 6 = 24$ rotationer.

Nästa rotation sker runt en axel genom motstående kanter, genom mittpunkt på AB och IJ , som med $\frac{1}{2}$ varvs rotation och femton sådana par ger oss $1 \cdot 15 = 15$ rotationer.

Slutligen rotationsaxel genom motstående par av hörn, vilka ger rotationer med $\frac{1}{3}$ - och $\frac{2}{3}$ varv. Det finns tio sådana par vilket ger $2 \cdot 10 = 20$ rotationer. Totalt för dodekaedern finns det $1 + 24 + 15 + 20 = 60$ stycken rotationer. Som sagt kan en undergrupp skapas utav dessa sextio rotationssymmetrier, vilken blir undergrupp till den så kallade ikosaedrals symmetrigruppen. Den ikosaedrals symmetrigruppen betecknas i detta arbete $r_{\{3,5\}}$ och återkommer senare i detta arbete då symmetrierna hos Kepler-Poinsots stjärnpolyedrar diskuteras.

(Tapp 2012, ss.87-114)

Rotationssymmetri hos tre av de fem platonska kropparna har nu blivit utredda, vilket leder fram till frågan: Vad har oktaedern och ikosaedern för rotationer? Och varför har inte de presenterats som de andra?

Likt symmetrigruppernas namn indikerar visar det sig att oktaedern och ikosaederns rotationer redan är bestämda och är desamma som för kuben re-

spektive dodekaedern. Detta på grund utav dualiteten (2.13) mellan kuben och oktaedern, samt dodekaedern och ikosaedern.

Kuben och oktaedern utgör ett dualt par, då oktaedern har lika många kanter som kuben och lika många hörn som kuben har sidytor. Samma sak gäller för dodekaedern och ikosaedern, vilka har lika många kanter och lika många hörn som den duala polyedern har sidytor.

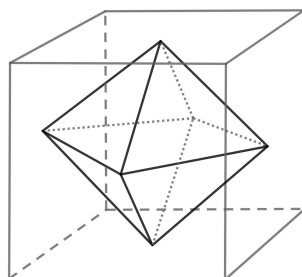


Bild 22: Oktaederns hörn mot kubens sidytor

Om vi markerar centrum hos varje sidyta hos en utav kropparna i det duala paret och sedan förbinder dessa kommer vi ha skapat den andra kroppen i paret. Kubens symmetri är då likställd med oktaederns, och vice versa, och samma sak gäller för dodekaedern och ikosaedern.

Antalet rotationer hos en polyeder kunde dock beräknats väldigt mycket snabbare, genom följande sats till exempel.

Sats 3.16. *Antalet rotationer hos en polyeder med V hörn, E kanter och F sidytor är $2E$. Alltså två gånger så många som antalet kanter hos polyedern.*

Bevis. Den centrala punkten i polyedern $\{p, q\}$ sammanlänkas med hörnen, mittpunkterna på kanterna, samt centripunkterna på sidytorna genom q -faldiga rotationsaxlar mellan två hörn eller ett hörn och en sidyta, 2 -faldiga rotationsaxlar mellan motstående kantmittpunkter, samt p -faldiga rotationsaxlar mellan motstående sidytor.

Med andra ord består symmetrioperationerna hos polyedern av rotationer med $\frac{k}{q}$ varv, $\frac{1}{2}$ varv och $\frac{j}{p}$ varv runt respektive axel, med k, j positiva heltal och $k < q$ samt $j < p$.

Om identiteten bortses finns då $q - 1$ värden på k och $p - 1$ värden på j , då

k och j måste vara heltal.

Men hörnen, kanternas mittpunkter och centrum av sidytorna finns i motstående par, varför antalet rotationer (exklusive identiteten) är:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(V(q-1) + E + F(p-1)) &= [\text{med Eulers formel (1)}] \\ &= \frac{1}{2}(qV - 2 + pF) = [\text{med sambandet (2)}] \\ &= 2E - 1, \end{aligned} \tag{6}$$

och antalet element är då $2E$. □

Då två stycken duala polyedrar har lika många kanter (se tabell i (??)) kommer de alltså ha samma antal rotationer och därmed dela rotationsgrupp. (Coxeter 1948, s.46f.)

Så även om det finns fem platonska kroppar har vi enbart tre grupper av symmetrier som verkar på dem.

De tre grupperna kallas som sagt för *tetrahedral*-, *oktahedral*- och *ikosaedral symmetri*grupp, men i detta arbete tas som sagt enbart elementen i symmetrigrupperna vilka utgör rotationer upp. (Tapp 2012, s. 121ff.)

Det är rätt vackert att visualisera likt Kepler i introduktionen paret som ett giftermål mellan herr och fru, vilket gör att herr kub och herr dodekaeder för sina fruar oktaedern och ikosaedern genom en dans i form av rotationerna. Som kuben och dodekaedern roterar kommer också oktaedern eller ikosaedern göra.

Rotationselementen

För att avrunda kapiteldelen om rotationer ska vi visa hur elementen i rotationsgrupperna kan representeras. Vi använder kvadraten och tetraederns rotationer för att exemplifiera detta.

Hos den platonska kroppen tetraedern finns som tidigare nämnts olika typer av rotationsaxlar, vilka roterar kroppen i olika riktningar. De olika typerna av axlar är:

- Fyra stycken 3-faldiga rotationsaxlar genom hörn och motstående sidyta. Dessa benäms som axel 1-4, vilka betecknas A1-A4 då elementen summeras.
- Tre stycken 2-faldiga rotationsaxlar genom motstående kanter, vilka då är axel 5-7 eller A5-A7.

Summeras tetraederns rotationer ges rotationsgruppen, med rotationsenheten varv:

$$r_{\{3,3\}} = \{Id, A1_{\frac{1}{3}}, A1_{\frac{2}{3}}, A2_{\frac{1}{3}}, A2_{\frac{2}{3}}, A3_{\frac{1}{3}}, A3_{\frac{2}{3}}, A4_{\frac{1}{3}}, A4_{\frac{2}{3}}, A5_{\frac{1}{2}}, A6_{\frac{1}{2}}, A7_{\frac{1}{2}}\}$$

Vi ser här att det finns tolv stycken element i gruppen, varpå

$$|r_{\{3,3\}}| = 12.$$

Om vi nu studerar kvadraten i planet finner vi att denna enbart har en rotationsaxel, vilken går genom mittpunkten hos kvadraten. Denna axel är en 4-faldig rotationsaxel, vilket ger oss kvadratens rotationsgrupp:

$$r_{\{4\}} = \{I, Rot_{\frac{1}{4}}, Rot_{\frac{1}{2}}, Rot_{\frac{3}{4}}\}$$

och

$$|r_{\{4\}}| = 4.$$

Båda rotationsgrupperna uppfyller axiom 1 – 3 ifrån **Definition** (3.11) och utgör därmed grupper.

En samling utav elementen hos de resterande platonska kropparna går likväl också att finna, men dessa är väldigt mycket större grupper då:

$$|r_{\{3,4\}}| = |r_{\{4,3\}}| = 24 \text{ och } |r_{\{3,5\}}| = |r_{\{5,3\}}| = 60.$$

För att vara pedagogiska visar vi nu hur rotationernas inverkan på tetraedern bildligt, vilket kan förklara **Definition** (3.12).

Finn tetraedern i en ursprungsposition, se vänster del av bild (23).

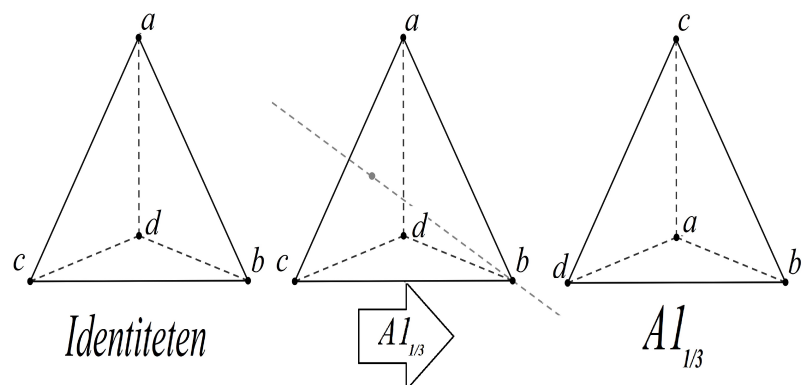


Bild 23: Genom operationen sammansättning ges enliknande tetraeder

Med en rotation runt A1 med $\frac{1}{3}$ –varv medurs ges den högra figuren i Bild (23).

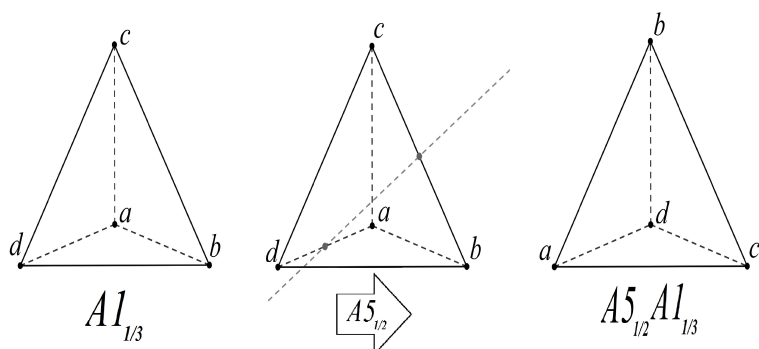


Bild 24: Genom ytterliggare sammansättning ges en annan liknande tetraeder

Om denna roteras runt A5 med $\frac{1}{2}$ –varv medurs ges den högra figuren i Bild (24).

Att tetraedern efter operationerna har genomförts ser oförändrad ut, bortsett ifrån hörnens nya positioner är det som menas med att polyederns ”form och dimensioner lämnas oförändrade” i **Definition** (3.12).

4 Kepler-Poinsot-polyedrar

4.1 Stellation

Begreppet *stellation* (eller *stellation* på engelska) kommer från det latinska ordet "*stella*", vilket betyder stjärna. Vi kan finna stellationer både i planet och i rummet och genom dessa ges stjärn-polygoner respektive stjärn-polyedrar. Exakt vad som menas med stellation förstås bäst genom att rita bilder istället för en abstrakt definition.

Keplers definition

Definition 4.1. *Stellation av en polygon eller en polyeder är processen då alla kanter eller sidor förlängs tills de möts och bildar en ny polygon eller polyeder.*

I planet

Om vi börjar med den enklaste polygonen så finner vi den vara den liksidiga triangeln. Vi ska nu undersöka vad som händer då vi förlänger alla triangelns sidor, vilket vi kan göra genom Euklides andra postulat (varje begränsad rät linje kan förlängas obegränsat). Det visar sig att vi inte finner någon ny yta i planet som omges i vår geometriska figur då dessa linjer kommer fortsätta längre och längre ifrån varandra. Denna insikt kommer vi till då vi undersöker förlängningen av sidorna hos en kvadrat, varpå dessa sidor delas in i parallella par och kommer därmed aldrig att mötas och omge en del av planet (bortsett från den ursprungliga kvadraten).

Det är först när vi undersöker pentagonen som det intressanta inträffar. De förlängda sidorna kommer nu att skära varandra och omger en större yta än den ursprungliga geometriska formen, vilket i detta fall visar sig vara den välkända stjärnsybolen, pentagrammet. Liknande resultat får vi med vår sex-sidiga hexagon, som istället ger oss en sex-taggig stjärna eller ett hexagram som den kallas.

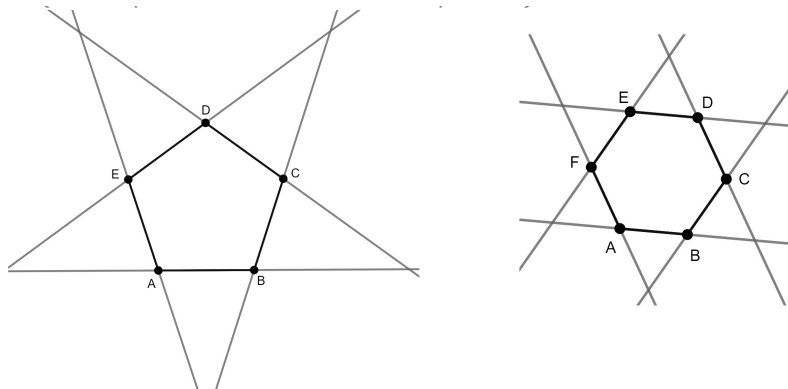


Bild 25: Stellation utav pentagon och hexagon

Vidare kommer stellationen av en n -hörning med $n > 5$ fortsatt omge andra delar i planet och därmed ge oss nya geometriska figurer. Bland annat oktagrammet och decagrammet som vi kan steller från en oktagon samt en decagon. Vi kallar fortfarande pentagrammet, hexagrammet, oktagrammet och decagrammet för polygoner med fem, sex, åtta, samt tio sidor. Detta då vi kan följa sidornas kontinuerliga rörelse runt mittpunkten två varv för pentagrammet, i jämförelse med pentagonens enda varv runt mittpunkten. Oktagrammet och decagrammet tar sig tre varv runt polygonens mitt. Notera dock att de interna punkterna inte beaktas. Dessa data uttrycks symboliskt genom: $\{\frac{5}{2}\}$ (pentagram), $\{\frac{8}{3}\}$ (oktagram) och $\{\frac{10}{3}\}$ (decagram).

Detta för det tvådimensionella fallet i planet, nu vidare till det tredimensionella fallet i rummet.

(Wenninger 1988, s. 34 f.)

I rummet

Innan stellationen i rummet förklaras kommer två begrepp att redas ut. Stellationen i rummet kan nämligen ske och visualiseras på två olika sätt, dels genom *stellation* eller genom det som kallas *sidförstoring*, eller *greatening* med engelsk terminologi. Denna terminologi kommer från John Conway (1937-), vilken ville beskriva vilken typ av stellation som applicerats på kroppen. Dessa kommer i den nya kroppens namn beskriva hur den nya kroppen

skapats genom stellation eller genom sidförstoring.

Definition 4.2. *Processen då samtliga kanter hos en polyeder utvidgas kallas **stellation**. Processen då samtliga sidytor expanderar eller utvidgas kallas **sidförstoring**.*

(Coxeter 1974, s.46)

De stellationer, läs stellation och sidförstoring, som är av intresse i detta arbete är de stellationer som kan utföras på de platonska kropparna.

Vi börjar också här med de enklaste fallet, tetraedern. Istället för att sidorna som förlängda sträckor kommer att omge fler delar i planet, kommer en stellation nu innesluta nya områden i rummet. Om tetraederns kanter förlängs kommer inga nya områden inneslutas, likt för exemplet med triangeln i planet. Inte heller kommer en sidförstoring innesluta ytterligare delar av rummet, varpå kubens nästkommande kropp att undersöka.

Likt med kvadraten kommer kubens och dess tolv kanter att komma i parallella par, vilket i detta fall inte heller gör att en ny kropp skapas genom stellation eller sidförstoring.

De tolv kanterna hos oktaedern leder däremot till något intressant. Dessa kommer skära varandra i rummet och innesluta delar av rummet utanför den ursprungliga oktaedern. Vi finner att dessa är en uppsättning av åtta mindre tetraedrar, som celler, som var och en delar en sidyta med den ursprungliga oktaedern och inkapslar en ytterligare del av rummet. Om vi nu visualiserar oss dessa adderade tetraedrar på oktaedern med de gemensamma sidytorna borttagna, så har vi nu funnit en ny polyeder.

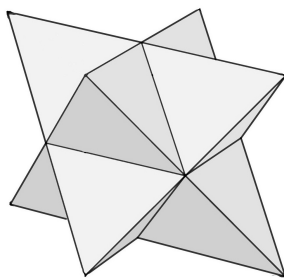


Bild 26: Stellerad oktaeder

Ett annat sätt att visualisera just denna nya figur är att vi ser det som en uppsättning korsande trianglar, vilket dock inte följer **Definition** (3.1). Kanterna skär förstås också varandra, men de inre skärningspunkterna från linjesegmenten ignoreras, likt i fallet med de tvådimensionella stjärnorna. Varje sida av pentagrammet korsar två andra sidor, men dessa punkter bortser vi ifrån då vi beräknar sidorna. Slutligen kan vi se att den stellerade oktaedern fortsatt har åtta sidor, vilka nu är skärande trianglar, och ändpunkterna hos dess kanter är polyederns hörn.

Vid närmare observation av denna kropp finner vi att denna polyeder inte är en, utan en sammanslagning av två större tetraedrar som delar en gemensam mittpunkt. Kepler fann denna kropp under det tidiga 1600-talet och döpte denna till *Stella octangula*. Ytterligare utvidgning av sidorna hos oktaedern kommer inte ge oss någon mer avgränsning i rummet, varpå stellationen avslutas med en stellerad form av oktaedern.

Nu är det hög tid att undersöka vad som inträffar då de platonska kropparna dodekaedern och ikosaedern stelleras.

Om dodekaedern genomgår stellationsprocessen utvidgas dess kanter ut i rummet, vilket leder till en formation där dodekaedern själv nu utvidgats med fem pentagonala pyramider. Denna nya polyeder liknar en stjärna, varpå den kallas *den stjärnlika dodekaedern*.

Utförs istället en sidförstoring hos dodekaedern expanderar sidorna och skapar inbuktningar i dodekaederns yttre. Sidförstoringen konverterar dodekaedern till *stora dodekaedern*.

Slutligen i stellationsprocesserna ytterligare en polyeder vilken skapas genom en kombination utav stellationen och sidförstoringen, nämligen *den stora stjärnlika dodekaedern*. Genom att först utföra en sidförstoring på dodekaedern ges som sagt en stor dodekaeder, vilken om den stelleras skapar pyramider med tresidig bas runt de tidigare inbuktade områdena. Denna nya kropp kallas *den stora stjärnlika dodekaedern*. Om vi byter plats på processerna och sidförstör dodekaedern först och stellerar sen, kommer samma resultat ges.

Här avslutas dock stellationsprocesserna, då ingen av processerna skapar någon ny polyeder. Från dodekaedern kan det alltså skapas tre nya polyedrar, varav två upptäcktes av Johannes Kepler 1619 och sedermera en utav Louis Poincaré (1859-1942) 1894.

Vidare finner vi den sista platonska kroppen ikosaedern, vilken har många stellationer att räkna. En utav ikosaederns 59(!) stycken stellationer visar sig vara *den stora ikosaedern*, vilken är den sista Kepler-Poinsot-polyedern. Denna kropp ges utav en sidförstoring hos ikosaedern, varpå dess 20 sidytor skär varandra i rummet och skapar denna regelbundna stjärnpolyeder.

Vad som finnes extra intressant är att Kepler-Poinsot-polyedrarna inte kan skapas genom en sammanslagning utav två redan existerande polyedrar, utan ger oss nya polyedrar till skillnad från exemplet med *Stella octangula*. Vi kan till och med dra det så långt att vi kallar dessa för regelbundna polyedrar, då två av dem har sidytor som är en uppsättning utav tolv skärande pentagrams (stjärnlika dodekaedern och stora stjärnlika dodekaedern), den tredje en uppsättning av tolv skärande pentagoner (stora dodekaedern), samt den fjärde som byggs upp av 20 skärande ekviangulära trianglar (stora ikosaedern). För att vi dock ska få lov att kalla dessa regelbundna krävs en avslappnad definition av regelbundenhet, vilken tillåter en regelbunden polyeder att vara icke konvex.

Det var matematikern Cauchy som 1811 i sin artikel *Recherches sur les polyèdres* i tidsskriften *Journal de l'École Polytechnique* 9 pekade på att det faktiskt finns stellationer från dodekaedern och att dessa tillsammans med *den stora ikosaedern* är de enda regelbundna stellerade kropparna som är möjliga (Richeson 2008, s. 151).

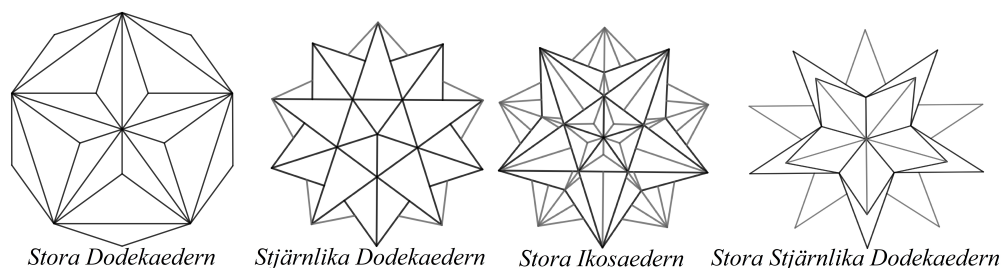


Bild 27: Kepler-Poinsot-polyedrarna

De historiska fem platonska kropparna får därmed sällskap utav de fyra nya stjärn-polyedrarna, vilka alla har sidytor som antingen är regelbundna polygoner eller stjärnpolygoner.

(Wenninger 1988, s.35)

Följande är en summering av Kepler-Poinsot-polyederns komponenter:

Polyeder	V	E	F	V-E+F
Stora dodekaedern	12	30	12	-6
Stjärnlika dodekaedern	12	30	12	-6
Stora stjärnlika dodekaedern	20	30	12	2
Stora ikosaeder	12	30	20	2

Fasettering

Ofta kan operationer likt stellationen och sidförstoringen vara svåra att visualisera för en vanlig invånare i *Flatland*, vilket är en som är van vid penna och papper och tvådimensionella ting (Abbott 1952, s. 1). Det finns dock en dual metod kallad *fasettering* (facetting i engelsk terminologi), vilken ger en mer naturlig förklaring.

Definition 4.3. *Fasettering* är den process inom geometri då delar utav polyedern tas bort utan att skapa några nya hörn.

Då en polyeder fasetteras plockas de gamla kanterna bort och de nya kanterna skapas längs den gamla sidytans diagonal alternativt längs den gamla polyederns inre diagonal vilken skär genom den tredimensionella kroppen. För att ytterligare förklara fasetteringen och stellationen i jämförelse med varandra behövs två begrepp redas ut, vilka är:

Definition 4.4. *Kärnkroppen* (*core* i engelsk terminologi) hos en stjärnpolyeder är den största konvexa kroppen som kan upprättas innuti polyedern. ***Skalkroppen*** (*case* i engelsk terminologi) är den minsta konvexa kroppen som omringar hela polyedern.

Som exempel på dessa finner vi Stella octangula vilken har en oktaeder som kärnkropp och en kub som skalkropp. Stjärnpolyedern kan här konstrueras genom antingen en stellation utav kärnkroppen eller genom en fasettering utav skalkroppen.

Således innebär stellation att bitar adderas till polyedern, medans fasetteringen betyder att delar plockas bort från polyedern.

(Coxeter 1948, s.98f.)

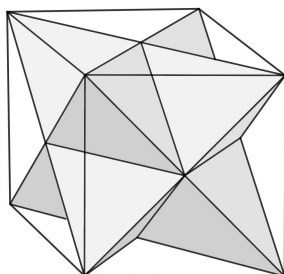


Bild 28: Kuben som skalkropp och Stella octangula som kärnkropp

Hos de nyfunna Kepler-Poinsot-polyedern kan vi som sagt finna olika typer av stellationer genom en utvidgning utav samtliga kanter eller genom utvidgning av polygonen som sidyta. Vi kan finna skalkroppar i form utav de platoniska kropparna, vilka genom en process av fasettering kan skapa just Kepler-Poinsot-polyedern.

Exempelvis finner vi att den stora dodekaedern har lika många hörn som en ikosaeder, varpå om ikosaedern genomgår en fasettering ger det oss en stor dodekaeder. Detta likt för exemplet med kubens och Stella octangula i Bild (28). Ett annat exempel är den stora stjärnlika dodekaedern, vilken har dodekaedern som skalkropp. Genom fasettering av dodekaedern kan vi då skapa en stor stjärnlik dodekaeder.

4.2 Kepler-Poinsot-polyedrar i Eulers formel

Då Eulers formel appliceras på en polyeder är vi försiktiga, mer än Euler själv var, och ser till att polyedern är konvex. Likt Euler antog också Legendre (3.1) att polyedern som projiceras på sfären är konvex.

I ett appendix i Poinsots arbete från 1810 görs dock en upptäckt i Legendres bevis, vilket gör att beviset även kan appliceras på en något mer generell klass än enbart de konvexa polyedern. Dessa polyedrar kommer att kallas *stjärnkonvexa*.

Första steget i Legendres bevis (3.1) är att projicera polyedern på sfärens insida. För att göra detta behöver vi en punkt x inuti polyedern, vilken tidigare liknades med en glödlampa som skickar en skuggavbildning på insidan

av sfärens yta. Denna punkt x har egenskapen att den kan kopplas samman med varje annan punkt i polyedern. För en konvex polyeder kan punkt x väljas godtyckligt, detta på grund av **Definition** (3.1).

De flesta icke konvexa polyedrar saknar däremot en sådan punkt, men de som har en sådan kallas stjärnkonvexa.

Definition Stjärnkonvex polyeder

Definition 4.5. *Låt x vara en punkt inuti en polyeder, vilken med en rät linje kan kopplas samman med varje punkt inuti polyedern. Om dessa linjer inte skär någon sidyta i polyedern, kallas polyedern **stjärnkonvex**.*

Från denna speciellt utvalda punkt x kan projektionen utföras, och Legendres bevis (3.1) kan appliceras på dessa stjärnkonvexa polyedrar.

I det nyss nämnda arbetet utav Poincaré nämns den stora dodekaedern och den stora ikosaedern för första gången, vilka tillsammans med den stjärnlika dodekaedern och den stora dodekaedern utgör de fyra Kepler-Poincaré-polyedrarna.

Några utav dessa kommer att visa sig vara undantag till Eulers formel.

Om formeln appliceras på stora ikosaedern, vilken har $V = 12, E = 30, F = 20$ eller stora stjärnlika dodekaedern $V = 20, E = 30, F = 12$, ges rätt samband och Eulers formel (1) stämmer. Men för de andra två stjärnpolyedrarna uppfylls inte sambandet, då stora dodekaedern ($V = 12, E = 30, F = 12$) ger $12 - 30 + 12 = -6$ och stjärnlika dodekaedern ($V = 12, E = 30, F = 12$) vilket också ger $12 - 30 + 12 = -6$.

De två sistnämnda kan alltså betraktas som ytterligare undantag till formeln. Den stora dodekaedern och stjärnlika dodekaedern ingår därmed inte bland de Eulerska polyedrarna, men har fortfarande chans att kvala in som regelbundna polyederar tillsammans med de andra två Kepler-Poincaré-polyedrarna. (Richeson 2008, s. 149ff.)

4.3 Ikosaedrala rotationer

Med sats (3.16) bevisad är det relativt enkelt att bestämma hur många rotationsoperationer som finns för var och en utav Kepler-Poincaré-polyedrarna. Då alla de fyra polyedrarna har 30 stycken kanter beräknas antalet rotationsoperationer till 60 stycken, vilket är lika många som hos dodekaedern samt

ikosaedern och inte minst den ikosaedralla rotationsgruppen.

Det visar sig dock att dessa 60 rotationer är samma rotationer som för ikosaedern och dodekaedern, varpå Kepler-Poinsot-polyedern också har ikosahedral rotationssymmetri.

För att beskriva hur dessa rotationer kan vara samma samling av rotationersom hos dodekaedern och ikosaedern kan vi blicka tillbaka till **Definition** (4.4) och dess efterföljande förklaring.

Som tidigare beskrivits är den stjärnlika dodekaedern en stellation av dodekaedern (4.1). Detta i sin tur gör att dodekaedern är kärnkropp åt den stjärnlika dodekaedern, då vi kan se den stjärnlika dodekaedern som en dodekaeder med tolv stycken pyramider med pentagoner som baser vilka sticker ut från varje sidyta.

Rotationerna för en dodekaeder beskrivs i (3.3) och utgörs av rotationer runt 3-faldiga axlar genom motstående hörn, 2-faldiga axlar genom motstående kanter, samt 5-faldiga axlar genom motstående sidytor. Om vi nu tänker oss att dessa axlar finns kvar genom stellationsprocessen som konverterar dodekaedern till den stjärnlika dodekaedern, så kommer de 3-faldiga axlarna gå genom ett par utav de tolv inåtvända hörnen, de 2-faldiga axlarna genom motstående invända kanter, samt de 5-faldiga axlarna vilka går genom motstående toppar på de pyramider som har de gamla sidytorna som sina baser. Dessa toppar är den stjärnlika dodekaederns hörn, vilka dessa axlar går genom. (se Bild (25)).

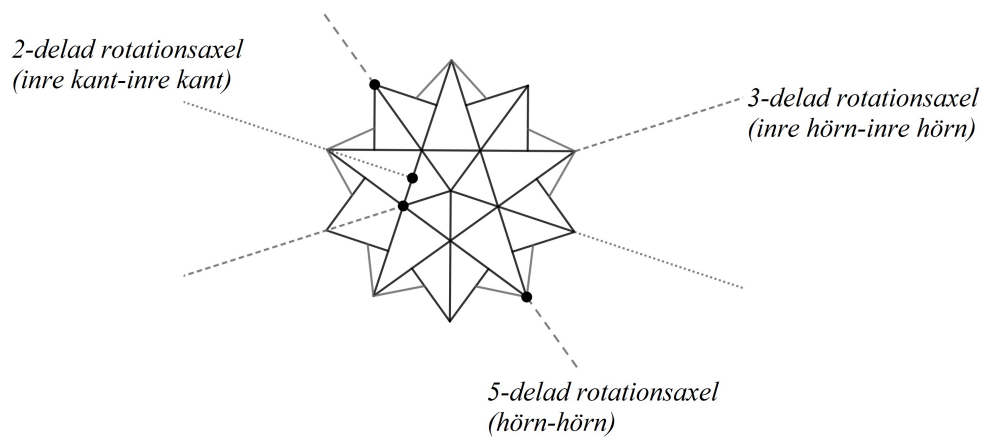


Bild 29: Rotationsaxlarna hos den stjärnlika dodekaedern

Därmed kan vi säga att det är samma axlar som är kvar för kropparna stjärnlika dodekaedern och dess duala polyeder den stora dodekaedern.

Samma sak gäller också för den stora stjärnlika dodekaedern, vilken har en ikosaeder som kärnkropp, och den stora ikosaedern som är dual med den stora stjärnlika dodekaedern.

Alla fyra Kepler-Poinsot-polyedrarna har därmed ikosahedral rotationssymmetri.

5 Summering och avslut

5.1 Keplers tankar

I introduktionen till detta arbete (1.1) beskrivs ett giftermål mellan kuben och oktaedern, samt mellan dodekaedern och ikosaedern. Giftermålet kan förklaras med hjälp utav det som kallas dualiteten mellan kropparna vilken beskrivs i **Definition** (2.13).

Utöver att polyedern som ingår i giftermålet är duala med varandra visar det sig också att de ingår i samma symmetrigrupp, vilket ytterligare parar ihop de duala polyedern med varandra. Som sagt, en av kropparna för och den andre följer under äktenskapets många turer.

5.2 Fem eller nio?

Resonemanget och det uppenbara exemplet på att två utav stjärnpolyedern inte är exempel på de Eulerska polyedern kanske räcker som motiv för att fälla tanken att Kepler och Poincaré fann fyra nya kroppar vilka kunde kopplas samman med de fem platonska regelbundna kropparna.

”Från denna speciellt utvalda punkt x kan projektionen utföras, och Legendres bevis (3.1) kan appliceras på dessa”, beskrivs i (4.2) i samband med **Definition** (4.5) om stjärnkonvexa polyedrar.

Alla Kepler-Poincaré-polyedern är just stjärnkonvexa och vi kan finna en punkt x i alla dessa kroppar.

Att Legendres bevis kan appliceras på en stjärnkonvex polyeder betyder att istället för kubens i Bild (15) i Legendres bevisresonemang (3.1) kan en stjärnkonvex polyeder användas och ge samma resultat och ett bevis som håller.

Senare i (3.1) beskrivs dock varken den stora dodekaedern eller den stjärnlika dodekaedern uppfylla sambandet i Eulers formel (1), vilket tordes höja ett ögonbryn då detta skapar en motsägelse.

Det är nämligen så att om vi mot all förmodan hade utfört ett experiment där vi finner en punkt i centrum av en sfär, vilken ”ser” alla punkter i den

stora dodekaedern eller den stjärnlika dodekaedern, hade vi getts en projek-
tion i form utav en skuggavbildning på sfären. Självklart förutsätter detta
att polyedern är uppbyggd av ståltråd och punkten x är en glödlampa.
Anledningen till att denna projektion, likt kubens projektion i Bild (15), ger
en samling av kanter, hörn och sidytor vilka överrensstämmer med Eulers
formel (1) är att vi med denna projektion räknar alla polyederns komponenter,
och inte enbart de som den beskrivs vara uppbyggd utav.

Om den stora dodekaedern och den stjärnlika dodekaedern ska vara en del
av de Eulerska polyederna krävs att varje sidyta uttrycks som liksidiga tri-
anglar, att varje innåtriktat hörn är ett hörn samt att alla innåtriktade kanter
räknas som kanter. I detta fall överrensstämmer både stora- och stjärnlika do-
dekaedern med sambandet $V - F + E = 2$, och kropparna är en del av de
Eulerska polyederna enligt **Definition** (3.9).

Dock anses det säkerligen mer prestigefullt att tillhöra de regelbundna poly-
edrarna, varpå sidytorna ej kan vara liksidiga trianglar, vilka inte är regel-
bundna polygoner. De regelbundna polyederna är som flest nio stycken,
medans de Eulerska är oändligt många. Alltså ett lätt val för popularitet.

För att sammanlänka de stjärnkonvexa Kepler-Poinsot-polyederna med de
platonska kropparna ordentligt behöver vi lätta på konvexitetskraven för
polygonerna, ifrån vilka vi bygger upp polyederna. Detta genom att låta
dem korsas, vilket gör att också pentagrammet kan ses som en regelbunden
polygon och utgöra sidytorna hos den stjärnlika dodekaedern samt den stora
stjärnlika dodekaedern.

Är vi också villiga att lätta på konvexitetskravet hos en regelbunden polyeder
kan de stjärnkonvexa Kepler-Poinsot-polyederna kallas regelbundna, pre-
cis som de platonska kropparna, trots att de är uppbyggda av korsande
polygoner vilket gör att inte alla punkter i Kepler-Poinsot-polyederna är
”allseende”.

Det fanns endast fem regelbundna polyedrar, men 1811 bevisar som sagt
Cauchy i artikeln *Recherches sur les polyèdres* att bara fyra polyedrar till
uppfyller den utvidgade definitionen av regelbundenhet, nämligen Kepler-
Poinsot-polyederna.

Definition Regelbunden polyeder

Definition 5.1. *En regelbunden polyeder är den polyeder som uppfyller följande krav:*

1. *Polyedern är konvex*
2. *Varje sidyta är en regelbunden polygon*
3. *Alla sidytor är kongruenta*
4. *Varje hörn är omringat av lika många sidytor*

Definition: Regelbunden polyeder (utvidgad version)

Definition 5.2. *En regelbunden polyeder är den polyeder som uppfyller följande krav.*

1. *Varje sidyta är en regelbunden polygon, som kan vara stjärnkonvex.*
2. *Alla sidytor är kongruenta*
3. *Varje hörn är omringad av lika många sidytor*

Med denna definition sätter vi punkt på arbetet, och tackar läsaren för visat intresse.

6 Referenser

Abbott, E.A. (1952). *Flatland: a romance of many dimensions*. 6. ed. New York
Coxeter, H.S.M. (1948). *Regular Polytopes*. London: Methuen.

Coxeter, H.S.M. (1974). *Regular complex polytopes*. London: Cambridge
University Press

Coxeter, H.S.M. (1975). Kepler and Mathematics. *Vistas in Astronomy*,
11(3), ss. 661-670.

Jacobs, H.R. (1987). *Geometry*. 2. ed. New York: W. H. Freeman.

Joyce, D. E. *Euclid's elements*. <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/>

Löh, C. (2017). *Geometric Group Theory An Introduction*. Cham: Springer
International Publishing

Richeson, D.S. (2008). *Eulers gem: The polyhedron formula and the birth of
topology*. New Jersey: Princeton University Press.

Tapp, K. (2012). *Symmetry A Mathematical Exploration*. New York, NY:
Springer New York.

Thompson, J. (1991). *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur.

Wenninger, M.J. (1988). *Polyhedron Models*. Cambridge: Cambridge Uni-
versity Press.

7 Appendix

För att bevisa **Proposition XI.20** behöver tre stycken propositioner redas ut, vilka sedermera bygger upp beviset. Dessa propositioner kommer inte bevisas i detta arbete. Propositionerna beskrivs nedan utan bevis.

Proposition I.4

Proposition 7.1. *Om två trianglar har två sidor lika och vinkeln mellan dessa sidor är lika stor hos båda trianglarna, så är även den tredje sidan hos trianglarna lika lång, och trianglarna är lika.*

Denna proposition kallas ibland för det *första kongruensfallet*.

Proposition I.20

Proposition 7.2. *I en triangel $\triangle ABC$ är två utav sidorna summerade större än den tredje sidan.*

Denna proposition kallas ibland för *triangelolikheten*.

Proposition I.25

Proposition 7.3. *Om två trianglar skulle ha två sidor som är lika långa, men den tredje sidan i en av trianglarna är längre än i den andra triangeln, ska den också ha en större vinkel än den andra som spänns upp av de lika räta linjerna.*

Nu kan proposition XI.20 bevisas:

Proposition XI.20

Proposition 7.4. *Om en rymdvinkel består av tre plana vinklar är summan utav två av vinklarna större än den tredje.*

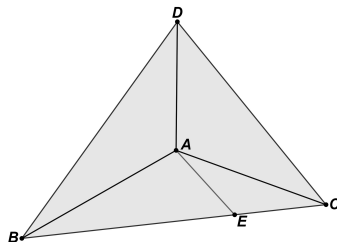


Bild 30: Bevisbild för Proposition XI.20

Bevis. Låt rymdvinkel $\angle A$ i Bild (30) bestå av de plana vinklarna $\angle BAC$, $\angle CAD$ och $\angle DAB$.

Om $\angle BAC$, $\angle CAD$ och $\angle DAB$ är lika stora är såklart summan av två utav vinklarna större än den tredje.

Men om inte, låt $\angle BAC$ vara större, så ska vi visa att $\angle CAD + \angle DAB > \angle BAC$.

I planet genom BA och AC konstruera en vinkel $\angle BAE$ som är lika stor som $\angle DAB$ vid punkten A på den rätta linjen AB . Gör $|AE| = |AD|$, och rita BEC genom punkten E som skär de rätta linjerna AB och AC vid punkterna B och C och sammanfoga DB och DC .

Nu, då $|AE| = |AD|$, och AB gemensam är två utav sidorna i trianglarna $\triangle BAD$ och $\triangle BAE$ lika. Vinklarna $\angle DAB$ och $\angle BAE$ är också lika, varpå $|BD| = |BE|$ (enligt (7.1)). Och då summan av två sidor BD och DC är större än den tredje BC , och av dessa är $|BD| = |BE|$, kommer $|DC| > |EC|$ (enligt (7.2)).

Nu, då $|AD| = |AE|$, AC gemensam, samt att $|DC| > |EC|$ är vinkel $\angle DAC > \angle EAC$ enligt (enligt (7.3)).

Men, $\angle BAE = \angle DAB$, så $\angle DAC + \angle DAB > \angle EAC + \angle BAE =$. Vilket var det som skulle visas.

På liknande sätt visas att summan av två andra vinklar är större än den tredje. $\square$