



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Att betrakta tapeter och symmetrier med matematisk blick

av

Adina Lerjefelt

2019 - No K8

Att betrakta tapeter och symmetrier med matematisk blick

Adina Lerjefelt

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Sven Raum

2019

Att betrakta tapeter och symmetrier med matematisk blick

Adina Lerjefelt

1 februari 2019

1 Abstrakt

Ett objekt eller ett mönster kan uppvisa olika symmetrier. I det Euklidiska planet finns isometrierna translation, spegling och rotation, som är de enda avbildningar i planet som bevarar avstånd. Om en isometri återskapar objektet eller avbildar mönstret på sig själv talar vi om en symmetri. Ett tapetmönster är ett mönster som är repetitivt i två riktningar, det vill säga som består av två linjärt oberoende translationer. Symmetrierna hos ett tapetmönster kan beskrivas som en produkt av en translation, en rotation och en reflektion. Varje tapetmönster kan även beskrivas med en hjälp av en specifik signatur, vilken beskriver de symmetrier som behövs för att producera hela mönstret utifrån ett grundelement.

Innehåll

1	Abstrakt	2
2	Inledning	5
2.1	Kommentarer	5
3	Symmetrier - en visuell inledning	6
3.1	Symmetrier av små objekt	6
3.1.1	Speglingar och kalejdoskop	6
3.1.2	Rotationer och gyrationer	7
3.1.3	Symmetrier hos den liksidiga triangeln	9
3.1.4	Symmetrier hos kvadraten	9
3.2	Repetitiva mönster	10
3.2.1	Frismönster	10
3.2.2	Tapetmönster	11
3.3	Signaturer av symmetrier	13
3.3.1	Speglingar	13
3.3.2	Gyrationer	13
3.3.3	Mirakel och wonderings	14
3.3.4	Tapetmönster och dess signaturer	14
3.3.5	The Magic Theorem	23
4	Grundläggande begrepp	24
4.1	Mängder och funktioner	24
4.2	Permutationer	24
5	Gruppteori	25
5.1	Heltalen utgör en grupp	27
5.2	Permutationsgrupper	27
5.3	Symmetrigrupper	29
5.3.1	Symmetrigruppen av kvadraten	29
5.4	Matrisgrupper	31
5.5	Transformationsgrupper	34
6	Talplanet	34
6.1	Talplanet och dess delmängder	34
6.2	Avbildningar i talplanet	35
6.3	Translation	35
6.4	Rotationer och speglingar	36
7	Isometrier och symmetrier	38
7.1	Isometrier	38
7.2	Isometriska gruppen i planet	38
7.3	Normal delgrupp och inre semidirekt produkt	40
7.4	Symmetrier i planet	42
7.5	Tapetgrupper	42

2 Inledning

Ett objekt eller mönster sägs vara symmetriskt om det går att manipulera det på olika sätt utan att det förändras. Vi kan till exempel rotera en cirkel 180 grader och cirkeln kommer att se likadan ut och befinna sig på samma plats för betraktaren. De enskilda punkterna på cirkeln kommer dock att ha flyttats. Detta är grunden för vad denna uppsats kommer att handla om, och är en enkel beskrivning av vad det innebär att något är symmetriskt.

Mönster med symmetrier finns överallt omkring oss och vi ser dem i vår vardag, till exempel på en husvägg, en bård i sovrummet eller i kaklet i badrummet. Huvudsyftet med denna uppsats är att införa lämpliga begrepp för att slutligen kunna ge en matematisk definition av vad en tapet samt en tapetgrupp är för något. För att redan nu få en känsla för begreppen kan vi tänka oss att ett tapetmönster är ett tvådimensionellt mönster som är repetitivt i två riktningar. En tapetgrupp är en symmetrigrupp bestående av specifika symmetrier hos just ett tapetmönster. Ett tapetmönster som många har vandrat över är den tesselering som finns på Sergels torg. Alla tapetmönster kan sorteras in i något av de sjutton olika tapetgrupperna (det finns faktiskt exakt sjutton stycken!). Ett exempel från verkligheten är palatset Alhambra i Granada i södra Spanien. Där är palatsets väggar täckta av tapetmönster, och det sägs, men det är ännu inte helt bevisat, att alla de sjutton tapetgrupperna är representerade bland dessa.

Uppsatsen är indelad i två avsnitt. Det första avsnittet ger en visuell inblick i symmetrier hos objekt (såsom kvadraten) och tapetmönster. Den andra delen av uppsatsen, syftar till att beskriva symmetrier hos figurer och mönster, utifrån mer matematiska begrepp. Vi kommer bland annat att visa att symmetrier i planet endast kan bestå av rotationer, reflektioner och translationer (förflyttningar). Slutligen ger vi en matematisk definition av vad en tapet respektive en tapetgrupp är, samt formulerar en kort avslutning kring hur det visuella och det matematiska avsnittet relaterar till varandra.

2.1 Kommentarer

I det visuella avsnittet (kapitel 3) refererar vi genomgående till huvudboken *The Symmetries of Things* [1]. I kapitlet finns till exempel ett antal bilder på olika objekt och tapetmönster, som samtliga framställts med hjälp av en digital app med influenser från huvudboken.

I huvudboken bevisas bland annat varför det just finns sjutton stycken olika tapetgrupper i planet, och läsare hänvisas till denna bok för fördjupning. Beviset tas inte upp i denna uppsats på grund av dess omfattning.

3 Symmetrier - en visuell inledning

I detta avsnitt ger vi exempel på olika symmetrier i planet. Syftet är att ge en intuitiv känsla för vad en symmetri är, för att senare, i kapitel 4 och framåt, beskriva samma sak men utifrån matematiska begrepp. Begreppet symmetri används i dagligt tal synonymt med spegelsymmetri, men symmetrier är mer än så. I detta avsnitt tänker vi oss att det finns symmetrier hos ett objekt eller mönster, om det är oförändrat efter att det har speglats, roterats eller förflyttats.

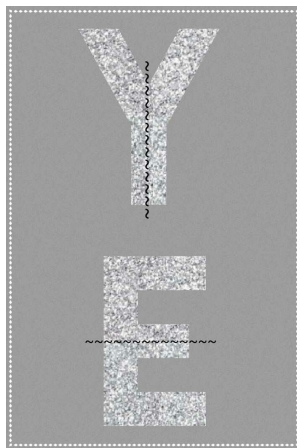
3.1 Symmetrier av små objekt

Vi börjar med att beskriva symmetrier av ändliga rosettmönster. Med det menas mönster där alla symmetrier är fixerade i dess centrum. Spegel- respektive rotationssymmetrier är de enda symmetrier ett sådant mönster kan ha.

Vi avslutar avsnittet med att beskriva samtliga symmetrier hos kvadraten och den liksidiga triangeln.

3.1.1 Speglingar och kalejdoskop

Vi talar om spegel - eller kalejdoskopisk symmetri om det går att dra en så kallad symmetrilinje så att delarna som bildas är spegelbilder av varandra. Exempelvis är bokstaven Y spegelsymmetrisk eftersom vi kan dra en lodrät symmetrilinje genom den och få två halvor som är varandras spegelbilder. Bokstaven E är också spegelsymmetrisk, men då dras linjen vågrätt istället. Symmetrilinjen kallas även för spegellinje (se figur 1).



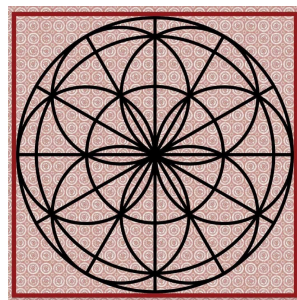
Figur 1: Spegelsymmetrier hos bokstäverna Y och E

Om det i figuren finns en punkt där flera spegellinjer korsar varandra kallar vi den för en kalejdoskopisk punkt. För att få en bild av fenomenet går det att

koppla det till ett riktigt kalejdoskop, som genom att vara försett med speglar reflekterar de föremål som finns där (se figur 2).



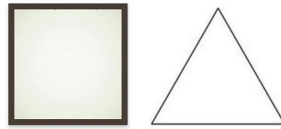
Figur 2: Symmetrilinjer mellan olika ord



Figur 3: Ett rosettmönster med kalejdoskopisk symmetri. Hur många symmetrilinjer finns det?

3.1.2 Rotationer och gyrationer

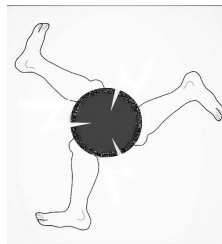
Det går alltid att rotera en figur ett helt varv och få tillbaka samma figur, men vissa geometriska former går att rotera mindre än ett varv utan att utseendet förändras. Vi säger då att figuren är rotationssymmetrisk. Exempelvis går det att rotera en kvadrat 90 grader och en triangel 120 grader och få tillbaka det identiska utseendet.



Figur 4: En kvadrat och en triangel har båda rotationssymmetrier

Inom geometri är en gyration en rotation som inte innehåller en spegellinje vilken passerar rotationscentrumet. Centrum för en gyration kallar vi gyrationspunkt. I figur 4 ser vi att både kvadraten och triangeln är spegelsymmetriska, där spegellinjerna går igenom rotationscentrum. Här kan vi alltså inte prata om gyrationer.

Bilden nedan på triskelion (se figur 5) kan å andra sidan inte återskapas med hjälp av speglingar så här har vi gyrationssymmetri. Denna figur ser likadan ut i tre orienteringar, då en gyration av 120 grader tar figuren tillbaka till sig själv. Ett annat exempel är damen i en vanlig kortlek (se figur 6). Här har vi också gyrationssymmetri, men i detta fall behöver figuren roteras 180 grader för att figuren ska återskapas.



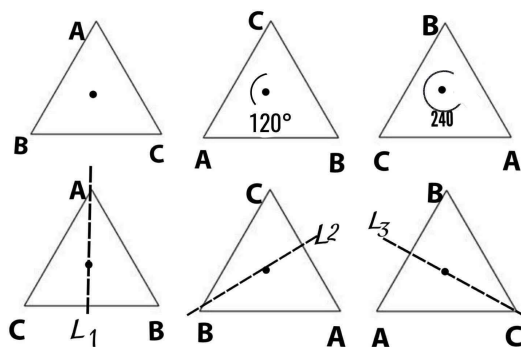
Figur 5: En triskelion har gyrationssymmetri med rotation 120 grader



Figur 6: En dam i en kortlek har gyrationssymmetri med rotation 180 grader

3.1.3 Symmetrier hos den liksidiga triangeln

Vi undersöker nu den liksidiga triangeln och dess symmetrier. Den enklaste symmetrin är identitetsavbildningen som inte gör någonting med figuren och därmed lämnar den helt oförändrad. Vi kan även rotera triangeln 120 respektive 240 grader. Om vi däremot roterar ett helt varv runt blir det samma sak som att tillämpa identitetsavbildningen, så denna rotation på 360 grader räknas inte som en ny symmetri. Vi kan även spegla i linjerna L_1 , L_2 och L_3 som är triangelns medianer. Sammanlagt blir det sex stycken symmetrier av den liksidiga triangeln, vilka illustreras i figur 7.



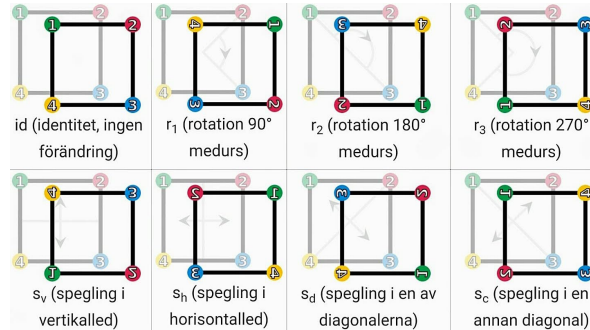
Figur 7: Den liksidiga triangeln har sex olika symmetrier

3.1.4 Symmetrier hos kvadraten

För en kvadrat finns åtta symmetrier. Varje bild i figur 8 representerar en symmetri av kvadraten. Den enklaste symmetrin som vi kan hitta är återigen identitetsavbildning (id) som inte förändrar någonting.

Dessa symmetrier kan alltså delas in i tre olika kategorier:

- 1) Avbildningen som inte förändrar någonting (id)
- 2) Rotation 90° , 180° eller 270° medsols (vi kallar dessa r_1 , r_2 eller r_3)
- 3) Spegling kring den vertikala, den horisontella eller längs de diagonala mittlinjerna (s_h , s_v , s_d eller s_c)



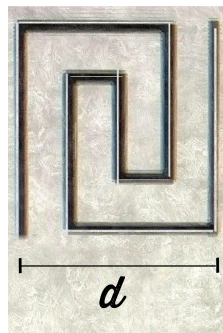
Figur 8: En kvadrat har åtta symmetrier [2]

3.2 Repetitiva mönster

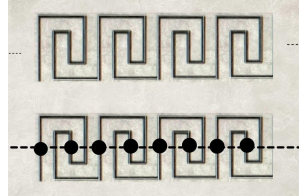
Vi kommer nu att undersöka repetitiva mönster i planet. Skillnaden mellan dessa oändliga mönster och symmetrier hos isolerade figurer, som vi precis beskrev, är att dessa mönster, förutom speglings- och gyrationssymmetri, även innehåller translationer. En translation förflyttar figuren till en närliggande figur. I detta avsnitt kommer vi dels att beskriva frismönster, vilka är repetitiva i en riktning, samt tapetmönster som är repetitiva i två riktningar.

3.2.1 Frismönster

Ett frismönster kan beskrivas som en oändligt långmönstrad remsa, som upprepar sig med ett minsta avstånd d längs remsans riktning (se figur 9). Skillnaden mellan frismönster och rosettmönster är att frismönster, förutom spegel- och rotationssymmetri, även har en symmetri som gör att en förflyttning i en riktning tar figuren till en närliggande figur och bevarar mönstret (se figur 10). Frismönster har alltså translationssymmetri. Vi ser att frismönstret i figur 10 även har gyrationssymmetri med rotation 180 grader, både kring mittpunkterna av grundelementen samt mellan dem. Gyrationspunkterna är utritade i figur 10.

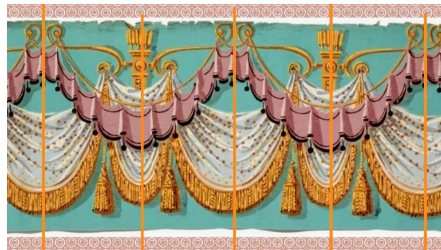


Figur 9: Ett frismönster som upprepar sig med minsta avståndet d [3]



Figur 10: Frismönster med translations - och gyrationssymmetri [3]

Mönstret i figur 11 är ytterligare ett exempel på frismönster, där vi förut translationssymmetri även finner spegelsymmetri. Spegellinjerna är utritade i figuren.

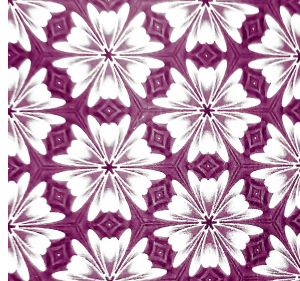


Figur 11: Frismönster med translations - och spegelsymmetri

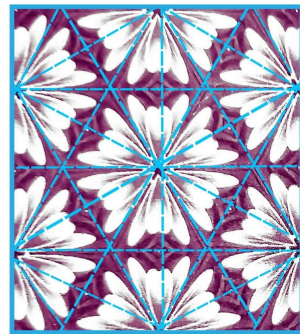
3.2.2 Tapetmönster

Vi kommer nu att beskriva vad som menas med ett tapetmönster, som vi nämnde kort i inledningen. Ett tapetmönster sträcker ut sig oändligt i planet och upprepar sin struktur i två olika riktningar.

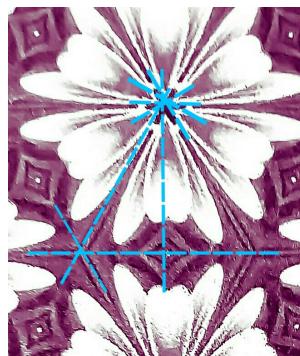
Tapetmönstret i figur 12 består av oändligt många kopior av grundfiguren som täcker hela planet. Strukturen upprepar sig både i horisontell och vertikal riktning. Förutom translationssymmetri i två riktningar har detta mönster även kalejdoskopisk symmetri. Symmetrilinjerna korsar varandra i tre kalejdoskoiska punkter; en punkt där sex linjer möts, en punkt där tre linjer möts, och en punkt där två linjer möts. I figur 13 och 14 kan vi urskilja ett minsta grundelement (i form av en triangel), som är arean mellan de tre kalejdoskopiska punkterna. Detta grundelement bygger på egen hand upp hela mönstret genom att vi speglar det längs dess spegellinjer.



Figur 12: Ett tapetmönster med translationer i två riktningar



Figur 13: Tapetmönstrets spegellinjer



Figur 14: Tre kalejdoskopiska punkter

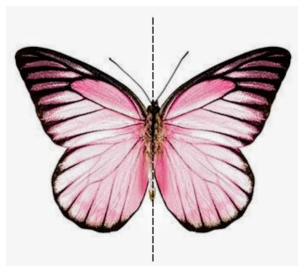
3.3 Signaturer av symmetrier

För att beskriva symmetrier hos objekt och mönster används olika typer av symboler. Vi kommer nu att introducera hur dessa signaturer skrivs och kan användas.

3.3.1 Speglingar

Symmetrier av ett mönster kan beskrivas med olika symboler som vi kallar mönstrets signatur, t.ex. $3*3$.

Den enklaste signaturen är en $*$ (stjärna). En $*$ betecknar en spegel - eller kalejdoskopisk symmetri. En ensam $*$ betyder att det inte finns några andra symmetrier i figuren, såsom hos fjärilen i figur 15 eller som hos bokstäverna Y och E i figur 1.



Figur 15: En fjäril med spegelsymmetri

Om vi har två eller fler spegellinjer som korsar varandra i en punkt blir signaturen en annan. Vi tittar tillbaka på ordet OXIHO i figur 2. I denna bild har vi två spegellinjer, en vertikal och en horisontell, som möts i centrum av figuren. Det ger oss signaturen $* 2 \bullet$ vilken uttalas "kalejdoskopisk symmetri av period två fixerad i en punkt".

Perioden av en kalejdoskopisk punkt är alltså mängden av spegellinjer genom denna. Dessa betecknas $* 3 \bullet$, $* 4 \bullet$, $* 5 \bullet$, $* 6 \bullet$ och så vidare.

3.3.2 Gyrationer

Gyrationer betecknas med sin period och sedan en punkt som symboliserar gyrationspunkten, t.ex. $3 \bullet$. Vi säger att figuren har "period tre rotationspunkts-symmetri". Exempelvis har triskelion i figur 5 signaturen $3 \bullet$, som innebär att figuren kan roteras 120 grader tre gånger tills vi återigen har identitetsfiguren. Damen i kortleken i figur 6 har signaturen $2 \bullet$ då hon roteras 180 grader åt gången.

Andra beteckningar är $4 \bullet$, $5 \bullet$, $6 \bullet$ och $7 \bullet$, med ordning fyra, fem, sex respektive sju. Signaturen $1 \bullet = \bullet$ är notationen för ingen symmetri.

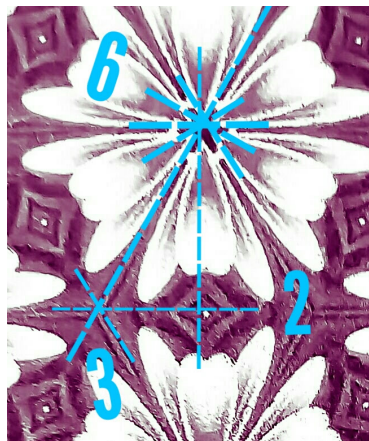
3.3.3 Mirakel och wonderings

Vi introducerar nu ytterligare två symboler. Vi har dels mirakel som skrivs som $\mathbf{x}$ och dels wonderings (engelskt begrepp) som betecknas $\mathbf{o}$. Ett mirakel innebär att mönstret speglas längs en linje och sedan förflyttas i någon riktning. Wonderings innebär enbart förflyttning (translation) och dessa translationer kommer alltid i par. Notationen för wonderings används bara om symmetrierna inte kan förklaras med hjälp av speglingar, rotationer eller mirakel.

3.3.4 Tapetmönster och dess signaturer

Ett tapetmönster är, som vi tidigare beskrivit, ett mönster i planet som är repetitivt i två riktningar. För att beskriva ett sådant mönster utifrån dess symmetrier använder vi oss av olika symboler och det finns exakt sjutton stycken olika varianter av dessa signaturer. I matematiska termer handlar det om sjutton olika tapetgrupper i planet. Vi kan alltså välja vilket tapetmönster som helst och symmetrierna hos det mönstret kommer alltid att beskrivas av en av de sjutton olika signaturerna. Två mönster som till synes ser helt olika ut kan alltså ha samma signatur, det vill säga samma kombination av symmetrier.

I figur 12, i det tidigare kapitlet, har vi ett tapetmönster med notationen $*632$. Anledningen till det, är att vi har tre kalejdoskopiska punkter, som vardera korsas av sex, tre respektive två spegellinjer. Orsaken till att det inte är en $\bullet$ i slutet beror på att där finns flera kalejdoskopiska punkter (se figur 16).



Figur 16: Mönster med signatur $*632$

Nu undersöker vi ytterligare ett tapetmönster (se figur 17) i vilket vi kommer att hitta både gyrationer och speglingar. Detta mönster har notationen $3*3$ (se figur 18). Siffran framför stjärnan betecknar gyrationssymmetri av period tre. Vi ser även att vi har tre kalejdoskopiska punkter, men då dessa är av samma slag, skriver vi $*3$ istället för $*333$. Mönstret har även en gyrationspunkt av ordning tre, vilket alltså ger oss notationen $3*3$. Vi noterar att vi har en till punkt för gyrationssymmetri i varje kalejdoskopisk punkt, men då dessa redan täcks upp av speglingar skriver vi inte in dem i notationen.



Figur 17: Mönster med signatur $3*3$

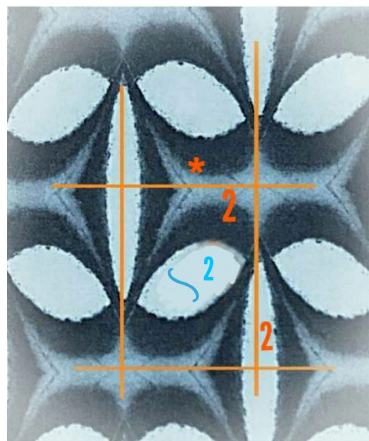


Figur 18: Tre kalejdoskopiska punkter och en gyrationspunkt av ordning tre

I figur 19 har vi ett mönster med signaturen $2 * 22$. Detta mönster har alltså en gyrationspunkt av ordning två, och två olika kalejdoskopiska punkter. För att förstå varför det inte är fyra kalejdoskopiska punkter behöver vi inse att två av dem redan täcks upp av rotationsymmetri med 180 grader (se figur 20).



Figur 19: Mönster med signatur $2 * 22$

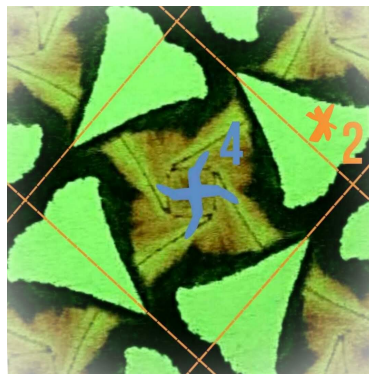


Figur 20: Två kalejdoskopiska punkter och en gyrationspunkt av ordning två

Vi beskriver ytterligare ett mönster (se figur 21). Detta mönster har signaturen $4 * 2$. Som vi ser har vi en gyrationspunkt av ordning fyra (90 graders rotation) samt en variant av kalejdoskopisk punkt med två korsande spegellinjer (se figur 22).

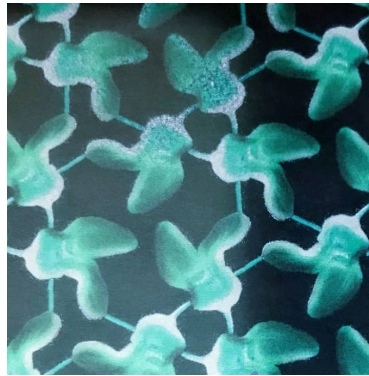


Figur 21: Mönster med signatur $4 * 2$



Figur 22: En gyrationspunkt av ordning fyra och en variant av kalejdoskopisk punkt

Mönstret i figur 23 är ett exempel på ett mönster som inte har någon spegelsymmetri, utan endast tre olika varianter av gyrationspunkter. För att markera att det är tre olika punkter skrivs signaturen för mönstret som 333 (se figur 24).



Figur 23: Mönster med signaturen 333



Figur 24: Tre gyrationspunkter

Mönstret i figur 25 har signaturen ** vilket står för att det är två varianter av spegellinjer som inte korsar varandra (se figur 26). Någon annat vi kan notera i detta mönster är att regionen mellan de två kalejdoskoperna är oändlig.



Figur 25: Mönster med signaturen **



Figur 26: Två spegellinjer som inte korsar varandra

Vi tittar nu på ytterligare ett mönster (se figur 27) som liknar det föregående. Vid en första anblick kan vi tro att vi har två olika spegellinjer, men i denna figur har vi endast en variant av spegellinje. Anledningen till det är att vi har ett mirakel i detta mönster (se figur 28). Ett mirakel innebär, som vi tidigare beskrev, en spegling längs en linje och sedan en förflyttning längs linjen. Vi ser här att vi har spegelvänt figuren och sedan förflyttat den nedåt. Detta mönster har signaturen $* \mathbf{x}$, där $\mathbf{x}$ står för ett mirakel.



Figur 27: Ett mönster med signaturen $* \mathbf{x}$



Figur 28: En spegellinje och ett mirakel

Vi kan även ha två mirakel i ett mönster, som ges av signaturen $\mathbf{x} \mathbf{x}$ (se figur 29 och 30).



Figur 29: Ett mönster med signaturen $\mathbf{x} \mathbf{x}$

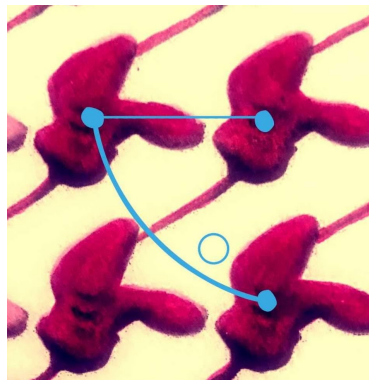


Figur 30: Två mirakel

Slutligen ger vi ett exempel på ett mönster vars enda symmetri är wonderings (se figur 31 och 32) . Mönstret har signaturen $\mathbf{o}$, vilket innebär translationer i två riktningar som på bilden. Det finns alltså inga andra symmetrier i mönstret såsom rotation, spegling eller mirakel.



Figur 31: Mönster med signatur $\mathbf{o}$



Figur 32: Två translationer

3.3.5 The Magic Theorem

Vi ska nu introducera satsen "the Magic Theorem". Det finns som sagt sjutton stycken signaturer som är möjliga för upprepande mönster i planet.

Vi använder oss av tabellen nedan där vi introducerar en kostnad till varje symbol i signaturen. Att associera en kostnad till varje symbol i signaturen är en god idé för att kunna analysera olika mönster i planet.

Symbol (gyration och wondering)	Kostnad	Symbol (spegling och mirakel)	Kostnad
O (wondering)	2	* eller x	1
2	1/2	2	1/4
3	2/3	3	1/3
4	3/4	4	3/8
5	4/5	5	2/5
6	5/6	6	5/12
...	...	...	
N	N-1/N	N	N-1/2N
∞	1	∞	1/2

Figur 33: Kostnaden för signaturerna

Sats 3.1. *Signaturen för upprepande mönster i planet är precis den som ger en total kostnad av 2 dollar.*

Alla de tapetmönster som vi precis beskrivit har alltså kostnaden 2 dollar, till exempel så har *632 kostnaden

$$1 + 5/12 + 1/3 + 1/4 = 2 \text{ dollar.}$$

Denna sats är användbar för att till exempel ta reda på om ett specifikt mönster är en tapet eller inte, och om så är fallet, vilken symmetrigrupp den i så fall tillhör. Alternativt, om vi vet att vi har en tapet och vi ser att vi saknar en dollar, så kan vi med säkerhet veta att vi har missat symmetrier i mönstret. För ett fullständigt bevis av denna sats se huvudboken The Symmetries of things [1].

4 Grundläggande begrepp

Vi har nu kommit till den del av uppsatsen som syftar till att förklara symmetrier utifrån matematiska begrepp. I inledningen beskrev vi att det finns något som kallas en symmetrigrupp. För att matematiskt förstå vad detta innebär behöver vi ha med oss några grundläggande begrepp, bland annat begreppen symmetri och grupp. Vi börjar med att mycket kortfattat definiera mängder, funktioner och permutationer. Detta kommer till slut att leda oss fram till den matematiska definitionen för vad en symmetrigrupp respektive en tapetgrupp är.

4.1 Mängder och funktioner

Vi börjar med att beskriva vad en mängd är inom matematiken. En mängd består av en samling objekt. Vi kallar objekten för element i mängden. Om vi låter A vara en mängd som består av elementen 1,2,3 och 4 så skriver vi

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Definition 4.1. Låt A och B vara två mängder. Om alla element i mängden A också är element i mängden B så säger vi att A är en delmängd till B . Vi skriver då $A \subseteq B$.

4.2 Permutationer

En permutation är en funktion från en mängd A till sig själv. En permutation σ av en mängd $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ kan representeras på en tvåradsform där elementet x_k står på första raden och $\sigma(x_k)$ på andra raden.

Exempel 4.2. Mängden $A = \{1, 2, 3\}$ innehåller sex stycken element (permutationer). Exempelvis kan ett element som avbildar 1 på 3, 2 på 1 och 3 på 2, skrivas som

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De resterande fem elementen i gruppen är:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exempel 4.3. Mängden $A = \{1, 2\}$ är en delmängd till mängden $B = \{1, 2, 3, 4\}$ då element 1 och 2 uppenbarligen finns i mängden B .

Definition 4.4. Låt X och Y vara två mängder. En funktion $f: X \rightarrow Y$ är ett sätt att till varje element x i X tilldela ett väldefinierat y i Y .

Anmärkning 4.5. Ett annat namn för ordet funktion är avbildning eller transformation.

5 Gruppteori

Gruppteori är studier av algebraiska strukturer som vi kallar för grupper. Vi kommer nu att ge exempel på tre olika typer av grupper; transformationsgrupper, permutationsgrupper och matrisgrupper. Permutationsgrupper och matrisgrupper är speciella fall av transformationsgrupper. En transformationsgrupp är nära besläktad med begreppet symmetrigrupp. En symmetrigrupp är en transformationsgrupp som består av alla avbildningar som bevarar en viss struktur.

Definition 5.1. En grupp $(G, \cdot)$ består av en mängd G , som tillsammans med en binär operation, representerad av tecknet $\cdot$, definieras av följande axiom.

(G1) Slutenhet. För alla $x, y \in G$ gäller $x \cdot y \in G$.

(G2) Associativitet. För varje $x, y, z \in G$ så gäller $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(G3) Identitet. Det finns ett element e i G så att $e \cdot x = x \cdot e = x$ för varje element x i G .

(G4) Invers. Till varje element x i G finns ett element x' i G sådant att $x' \cdot x = x \cdot x' = e$.

Anmärkning 5.2. Elementet e kallas för identitets-elementet. Elementet x' kallas för inverselementet till x och betecknas x^{-1} .

Anmärkning 5.3. En grupp $(G, \cdot)$ sägs vara kommutativ (abelsk) om den dessutom uppfyller att för alla $a, b \in G$ så gäller $a \cdot b = b \cdot a$.

Definition 5.4. Låt $(G, \cdot)$ vara en grupp. och $H \subseteq G$ en delmängd. Då är $H \leq G$ en delgrupp under operationen $\cdot$ om den är icke tom samt att följande två axiom är uppfyllda:

(i) För alla $h_1, h_2 \in H$ så gäller $h_1 \cdot h_2 \in H$

(ii) För alla $h \in H$ så gäller $h^{-1} \in H$.

Exempel 5.5. Låt G vara en grupp. Då är $G \leq G$ en delgrupp, det vill säga en grupp är alltid en delgrupp till sig själv.

Bevis. Då varje mängd är en delmängd till sig själv har vi att $G \subseteq G$. Då G är en grupp, som är en delmängd av G , har vi att G är en delgrupp till G . $\square$

Exempel 5.6. Låt G vara en grupp med det neutrala elementet $e \in G$. Då är $\{e\} \leq G$ en delgrupp.

Bevis. Vi noterar att $\{e\}$ är icke-tom.

(i) Vi vill visa att för alla $h_1, h_2 \in \{e\}$ så gäller $h_1 \cdot h_2 \in \{e\}$. Då $h_1, h_2 \in \{e\}$ medför det att $h_1 = e$ samt $h_2 = e$. Då gäller $e \cdot e = e \in \{e\}$

(ii) Vi visar nu att för alla $h \in \{e\}$ så gäller $h^{-1} \in e$. Då $e \cdot e = e$ medför det att $e = e^{-1}$ så $e^{-1} \in \{e\}$

□

Sats 5.7. Om $H \leq G$ är en delgrupp, så är H en grupp.

Bevis. Vi visar att H är en grupp utifrån gruppaxiomen:

(G1) Slutenhets. Då H är en delgrupp till G vet vi att för alla $h_1, h_2 \in H$ gäller att $h_1 \cdot h_2 \in H$.

(G2) Associativitet. Det följer av associativitet i G att $(H, \cdot)$ är associativ.

(G3) Identitet. Då H är icke-tom så ligger $\{e\}$ i H .

(G4) Invers. Då H är en delgrupp till G vet vi att för alla $h \in H$ så finns det en $h^{-1} \in H$.

□

Exempel 5.8. Vi låter $Sym(\{1, 2, 3\})$ beteckna alla permutationer på mängden $\{1, 2, 3\}$. Då är delmängden

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq Sym(\{1, 2, 3\})$
en subgrupp till $Sym(\{1, 2, 3\})$.

Bevis. Vi noterar att delmängden H är en icke-tom mängd och visar att de två axiomen är uppfyllda.

(i) Utifrån definitionen för matrismultiplikation är H sluten under sammansättning. Som ett exempel ser vi att

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) H är även sluten under inverstagning utifrån definitionen av matrismultiplikation. Som ett exempel ser vi att

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

5.1 Heltalen utgör en grupp

En av de mest välkända grupperna är mängden av heltal, $\mathbb{Z}$, som består av talen $\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ och fungerar som ett exempel på den tidigare abstrakta definitionen av en grupp. Vi visar nedan att heltalen utgör en grupp utifrån de fyra axiomen:

(G1) Slutenhets. Vi ser att heltalen är slutna under addition då det gäller för alla heltal a och b att även $a + b$ är ett heltal.

(G2) Associativitet. För alla heltal a, b och c , är $(a + b) + c = a + (b + c)$. Det vill säga om samma tre tal adderas blir det samma resultat oavsett i vilken ordning man utför de två deladditionerna..

(G3) Identitet. Om a är ett godtyckligt heltal är $0 + a = a$ och $a + 0 = a$ där talet 0 är identitetsselement för addition.

(G4)= Invers. För varje heltal a finns ett tal b , som är sådant att $a + b = 0$ och $b + a = 0$.

Andra exempel på grupper är de reella talen med addition som gruppoperation och talet 0 som enhetselement. Låter vi istället multiplikation vara den binära operationen så bildar mängden reella tal (skilt från talet 0) en grupp med 1 som identitetsselement. I alla dessa exempel gäller den kommutativa lagen, vilket alltså inte gäller för alla grupper.

5.2 Permutationsgrupper

Vi har tidigare definierat vad en permutation är, och vi kommer i detta kapitel definiera vad en permutationsgrupp är för något. Detta gör vi dels för att ge ett exempel på en grupp, men också dels för att det har betydelse senare när vi vill beskriva symmetrier i planet. För att förstå definitionen för en permutationsgrupp definierar vi begreppen surjektiv, injektiv och bijektiv funktion samt identitetsfunktionen och inversfunktionen.

Definition 5.9. Låt $f: X \rightarrow Y$. Vi säger att f är surjektiv om det för alla $y \in Y$ existerar minst ett $x \in X$ så att $f(x)=y$. Vi säger att f är injektiv om $f(x_1) = f(x_2)$ medför att $x_1 = x_2$ för varje par $x_1, x_2 \in X$. Vi säger att f är bijektiv om den är både surjektiv och injektiv, det vill säga att det för varje $y \in Y$ finns exakt ett $x \in X$ sådant att $f(x)=y$.

Definition 5.10. Vi kallar funktion $id: X \rightarrow X$, definierad av $id(x)=x$ för alla $x \in X$, för identitetsfunktion id_x på mängden X .

Definition 5.11. Sammansättningen av funktioner betecknas med $\circ$. Om vi har två funktioner f och g så gäller $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Definition 5.12. Låt $f: X \rightarrow Y$. En funktion $g: Y \rightarrow X$ är en invers till f om det för alla $x \in X$ och $y \in Y$ gäller att $g \circ f(x) = id_x = x$ och $f \circ g(y) = id_y = y$.

Lemma 5.13. Sammansättningen av injektiva funktioner är igen injektiv.

Bevis. Låt f och g vara två injektiva funktioner, där $f: X \rightarrow Y$ och $g: Y \rightarrow Z$. Då är sammansättningen $f \circ g$ injektiv. Givet $x_1, x_2 \in X$ vill vi visa att om $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ så måste $x_1 = x_2$. Vi skriver om uttrycket så att $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ och då f enligt definition är injektiv så måste $g(x_1) = g(x_2)$. Då g är injektiv så vet vi att $x_1 = x_2$. Vi har visat att $(f \circ g)(x)$ är injektiv. $\square$

Lemma 5.14. Sammansättningen av surjektiva funktioner är igen surjektiv.

Bevis. Vi visar nu att om f och g är surjektiva så måste $f \circ g$ vara surjektiv. Låt $f: X \rightarrow Y$ och $g: Y \rightarrow Z$. Vi vill visa att för varje $z \in Z$ finns det ett $x \in X$ så att $(g \circ f)(x) = z$. Vi vet att f och g är surjektiva och använder oss av detta. Då g är surjektiv finns det ett $y \in Y$ så att $g(y) = z$. Vi vet att f är surjektiv så $f(x) = y$. Det ger oss $g(f(x)) = z$. Vi har visat att $(f \circ g)(x) = z$ för något $x \in X$. $\square$

Sats 5.15. Om f och g är bijektioner så är $f \circ g$ en bijektion.

Bevis. Påståendet följer direkt av lemma 5.13 och 5.14. $\square$

Definition 5.16. Låt X vara en icke-tom mängd. Vi sätter $Sym(X) = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv}\}$ och kallar elementen av $Sym(X)$ för permutationer av X .

Vi vill nu visa att $Sym(X)$ uppfyller kraven för att vara en grupp. Vi börjar därför med att visa att en funktion som är bijektiv alltid har en invers. Vi visar även att en invers funktion alltid är en bijektion, något som vi kommer använda oss av i en senare sats.

Lemma 5.17. Låt $f: X \rightarrow Y$ vara bijektiv. Då har f en invers.

Bevis. Vi visar existensen av en invers där $f \in Sym(X)$. Låt $f: X \rightarrow Y$. Vi definierar en funktion $g: Y \rightarrow X$. Låt $y \in Y$. Då f är surjektiv finns det ett $x \in X$ så att $f(x) = y$. Låt $g(y) = x$. Då f är injektiv så är detta x unikt, så g är väldefinierad. Vi vill nu visa att g är invers till f . Vi visar först att $g \circ f = Id_X$. Låt $x \in X$. Enligt definition så är $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$. Vi visar nu att $f \circ g = Id_Y$. Låt $y \in Y$. Enligt definition är $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$. Vi har visat existens av en invers g . $\square$

Lemma 5.18. Låt $f: X \rightarrow Y$ ha en invers. Då är f bijektiv.

Bevis. Låt $f: X \rightarrow Y$ ha en invers $g: Y \rightarrow X$. Först visar vi att f är surjektiv. Anta att $y \in Y$. Låt $g(y) = x$. Då är $f(x) = f(g(y)) = f \circ g = id_y = y$. Så f är surjektiv. Nu vill vi visa att f är injektiv. Låt $x_1, x_2 \in X$ vara så att $f(x_1) = f(x_2)$. Vi vill visa att då måste $x_1 = x_2$. Låt $f(x_1) = f(x_2) = y$ och låt $g(y) = x$. Då är $x_2 = id_x(x_2) = g \circ f(x_2) = g(f(x_2)) = g(y) = x$. På samma gång gäller $x_1 = id_x(x_1) = g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g(y) = x$. Då är $x_1 = x_2$ och vi har visat att f är bijektiv om den har en invers. $\square$

Sats 5.19. $Sym(X)$ är en grupp med funktionssammansättning som gruppoperation.

Bevis. Låt $f, g \in Sym(X)$. Vi ska nu verifiera gruppaxiomen G1-G4.

(G1) Slutenhets. Då $f \circ g$ är bijektiv (för bevis se Sats 5.15) så vet vi att $f \circ g \in Sym(X)$.

(G2) Associativitet. Vi vill visa att $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$. Enligt regeln för funktionsammansättning noterar vi att för varje $x \in X$ så gäller det att $(f \circ (g \circ h))(x) = f \circ (g(h(x))) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x)$, och vi har visat associativitet.

(G3) Identitet. Vi visar nu att det finns ett enhetslement. Vi tar ett godtyckligt element ur $Sym(X)$, säg $g \in Sym(X)$. Vi definierar en avbildning $id : X \rightarrow X$ genom $id(x) = x$ för alla $x \in X$, där $id(x) \in Sym(X)$. Vi noterar att $g \circ id(x) = g(id(x)) = g(x)$ samt $id \circ g(x) = id(g(x)) = g(x)$ varför $id(x)$ är enhetslementet.

(G4) Invers. Vi visade existens av en invers i Lemma 5.17. □

Anmärkning 5.20. Vi kommer i fortsättningen att kalla $Sym(X)$ för den symmetriska gruppen på mängden X .

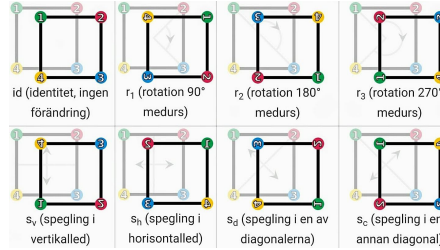
5.3 Symmetrigrupper

I förra avsnittet definierade vi den symmetriska gruppen på en mängd X . Detta kommer att ha betydelse för hur vi senare matematiskt definierar vad en symmetrigrupp är för något. I detta avsnitt kommer vi dock endast ge ett inledande exempel på vad en symmetrigrupp är. Vi kommer nu att koppla tillbaka till avsnitt 3.1.4 där vi beskrev symmetrierna hos kvadraten. Nu när vi har definierat vad en grupp är, kan vi visa att kvadratens åtta symmetrier faktiskt utgör en grupp.

Anmärkning 5.21. Vi kan se symmetrierna som transformationer eller avbildningar. Om det är så att transformationerna avbildar figuren eller mönstret på sig själv talar vi om en symmetri. En symmetrigrupp består således av den uppsättning av avbildningar (symmetrier) som bevarar figuren eller mönstret.

5.3.1 Symmetrigruppen av kvadraten

Symmetrigruppen för kvadraten består av åtta symmetrier (element), som vi sett tidigare (se figur 34). Varje sådan symmetri innebär då en transformation som leder till att kvadraten avbildar sig på sig själv. En kvadrat har, som vi nämnde i kapitel 3.1.4, åtta symmetrier. Vi ska nu med hjälp av en grupptabell visa att dessa åtta element av symmetrier tillhör en grupp, som vi kallar symmetrigruppen av kvadraten, betecknad D_4 .



Figur 34: En kvadrat har åtta symmetrier [2]

En grupp defineras genom att de åtta avbildningarna för en kvadrat får utgöra elementen. Den binära operationen utgörs av en sammansättning av avbildningar. Tillämpat på avbildningarna a och sedan b skrivs detta som $b \circ a$, där vi tillämpar a och sedan applicerar b på resultatet av a . Vi visar att gruppaxiomen G1-G4 är uppfyllda genom att använda oss av grupptabellen (se figur 35). Grupptabellen är en förteckning över resultatet av sammansättningen av alla de möjliga paren i D_4 .

(G1) Slutenhet. Utifrån grupptabellen går det att se att sammansättningen $b \cdot a$ av ett godtyckligt par av de åtta avbildningarna, a och b , också ingår bland dessa avbildningar.

Grupptabell för D_4

$\cdot$	id	r_1	r_2	r_3	s_v	s_h	s_d	s_c
id	id	r_1	r_2	r_3	s_v	s_h	s_d	s_c
r_1	r_1	r_2	r_3	id	s_c	s_d	s_v	s_h
r_2	r_2	r_3	id	r_1	s_h	s_v	s_c	s_d
r_3	r_3	id	r_1	r_2	s_d	s_c	s_h	s_v
s_v	s_v	s_d	s_h	s_c	id	r_2	r_1	r_3
s_h	s_h	s_c	s_v	s_d	r_2	id	r_3	r_1
s_d	s_d	s_h	s_c	s_v	r_3	r_1	id	r_2
s_c	s_c	s_v	s_d	s_h	r_1	r_3	r_2	id

Figur 35: Grupptabell för kvadratens symmetrier [2]

(G2) Associativitet. Vi vill visa att om a, b och $c \in D_4$ så gäller $(a \cdot b) \cdot c$ eller $a \cdot (b \cdot c)$. Vi kontrollerar likheten $(s_d \cdot s_v) \cdot r_2 = s_d \cdot (s_v \cdot r_2)$ och använder oss av grupptabellen. Det ger oss $(s_d \cdot s_v) \cdot r_2 = r_3 \cdot r_2 = r_1$ som är samma sak som $s_d \cdot (s_v \cdot r_2) = s_d \cdot s_h = r_1$. Det går att visa att detta gäller för samtliga tripplar i D_4 .

(G3) Identitet. Identitetselementet i D_4 är avbildningen id . Detta ger $id \cdot a = a$ och $a \cdot id = a$.

(G4) Invers. Var och en av symmetriavbildningarna har en invers och kan återställas. Vi har att följande avbildningar är sina egna inverser: id , r_2 , och alla speglingarna s_h, s_v, s_d, s_c . Utför vi någon av dessa transformationer två gånger efter varandra så är vi tillbaka där vi började, till exempel så är $s_h \cdot s_h = id$. Vi har att rotationerna r_3 och r_1 är varandras inverser. Med symboler kan det skrivas som: $r_3 \cdot r_1 = r_1 \cdot r_3 = id$. Det gäller alltså att om vi roterar 90 grader och sedan roterar 270 grader så får vi en total rotation av 360 grader och figuren är återställd.

Till skillnad från gruppen av heltal, där resultatet inte påverkas av i vilken ordning transformationerna utförs, har ordningsföljden i D_4 betydelse. Till exempel så är $s_h \cdot r_1 = s_c$ medan $r_1 \cdot s_h = s_d$. Operationen i D_4 är alltså inte kommutativ. Detta gör att den här gruppens struktur är mer komplicerad än heltalsgruppen.

5.4 Matrisgrupper

Vi behöver nu ett sätt att representera elementen i symmetrigruppen, exempelvis en rotation på 180 grader. Vi använder oss då av matrisrepresentation för att beskriva de olika transformationerna. Vi börjar med att definiera att mängden av alla inverterbara $n \times n$ matriser utgör en grupp, den så kallade allmänna linjära gruppen. Vi visar sedan att $O(2)$ är dess delgrupp, som representerar speglingar och rotationer i planet.

Definition 5.22. Vi låter $GL(n, R)$ vara mängden av alla inverterbara $n \times n$ matriser, som vi kallar för den allmänna linjära gruppen.

Definition 5.23. Inom linjär algebra har en matris A egenskapen inverterbarhet om och endast om det existerar en matris B sådan att $AB=BA=I$ där I är enhetsmatrisen. Då kallas A en inverterbar matris och B kallas inversen till A och skrivs A^{-1} .

Sats 5.24. Produkten av två inverterbara matriser är igen inverterbar.

Bevis. Detta följer av egenskaper hos determinanten. En inverterbar matris har alltid en determinant som är nollskild [4]. Om $A, B \in GL(n, R)$ så är $\det A \neq 0$ och $\det B \neq 0$. Då är $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0$. Så $AB \in GL(n, R)$. $\square$

Sats 5.25. $GL(n, R)$ utgör en grupp med matrismultiplikation som binär operation.

Bevis. Vi verifierar gruppaxiomen D1 till D4.

(G1) Slutenhets. Produkten av två inverterbara matriser är också inverterbara (se Sats 5.24).

(G2) Associativitet. Från linjär algebra vet vi att matrismultiplikation är associativ. Om $A, B, C \in GL(n, R)$ så gäller att $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

(G3) Identitetselementet. Identitetselementet av en $n \times n$ matris är $I_n =$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikation ger $AI = A = IA$ för alla $A \in GL(n, r)$.

(G4) Inverterbarhet. Då $GL(n, R)$ är mängden av alla inverterbara matriser finns det för en inverterbar matris A ett $B \in GL(n, R)$ så att $A \cdot B = I_n = B \cdot A$. $\square$

Lemma 5.26. *Det finns en isomorfi mellan $GL(n, R) \rightarrow \text{Sym}(R^n)$ via $A \rightarrow t_A$ för $A \in GL(n, R)$ definierad av $T_A(v) = A \cdot v$.*

Bevis. Vi visar existens av en isomorfi genom att visa att $t_{A \cdot B} = t_A \circ t_B$ och att t_A är bijektiv för alla $A \in GL(n, R)$.

(i) Vi visar att för alla $v \in R^n$ så gäller $T_{A \cdot B}(v) = (A \cdot B)v = A \cdot (B \cdot v) = T_A(B \cdot v) = T_A(T_B(v)) = T_A \circ T_B(v)$.

(ii) Vi visar nu att t_A är inverterbar och därmed bijektiv enligt lemma 7.18. Vi visar inverterbarhet genom $T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{A \cdot A^{-1}} = T_{I_n} = \text{id}_{R^n}$. På samma sätt visar vi att $T_{A^{-1}} \circ T_A = \text{id}_{R^n}$. $\square$

Anmärkning 5.27. *Vi kallar elementen i $\text{Sym}(R^n)$ som är på formen T_A för ortogonala transformationer.*

Definition 5.28. *En inverterbar $n \times n$ matris A är ortogonal om $A^T A = I_n = A A^T$, det vill säga $A^{-1} = A^T$.*

Definition 5.29. *Vi låter $O(n)$ vara mängden av alla ortogonala $n \times n$ matriser.*

Proposition 5.30. *$O(n) \leq GL(n, R)$ är en delgrupp.*

Bevis. Det är klart att $I_n \in O(n)$. Om $A, B \in O(n)$ så gäller

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T I_n B = B^T B = I_n$$

och på samma sätt $(AB)(AB)^T = I_n$. Och då $A^T = A^{-1}$ så vet vi att $A^{-1} \in O(n)$. $\square$

Den ortogonala gruppen $O(2)$ är relevant för att förstå symmetrier i planet och beskrivs närmare i kapitel 6 och 7. Både rotation och spegling i planet representeras nämligen av matriser i $O(2)$.

Exempel 5.31. Avbildningarna i D_4 kan representeras med hjälp av matriser. Vi använder oss av grundläggande kunskaper i linjär algebra för att beskriva elementen i kvadratens symmetrigrupp. Vi kan då representera D_4 på följande sätt.

$$\text{Identitetsmatrisen } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spegling i y-axeln } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spegling i x-axeln } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rotation 180 grader medurs } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spegling i linjen } y = x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rotation 90 grader moturs } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rotation 270 grader moturs } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spegling i linjen } y = -x \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 5.32. *Vi låter*

$$D_4 = \{I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

Sats 5.33. D_4 utgör en grupp tillsammans med matrismultiplikation.

Bevis. Vi verifierar gruppaxiomen G1-G4.

(G1) Slutenhet. Den binära operationen av D_4 är given av matrismultiplikation med I_n som identitetselement. Produkten av två godtyckliga element i D_4 är ett element i D_4 , och är alltså sluten under matrismultiplikation.

(G2) Associativitet. Vi visar enligt definition för matrismultiplikation att för alla $a, b, c \in D_4$ gäller $a \cdot b \cdot (c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(G3) Identitet. Vi visar enligt definition för matrismultiplikation att för alla $a \in D_4$ gäller $I_n \cdot a = a \cdot I_n = a$.

(G4) Invers. Vi visar enligt definition för matrismultiplikation att det för alla element $a \in D_4$ finns en invers $b \in D_4$ så att $a \cdot b = b \cdot a = I_n$. $\square$

5.5 Transformationsgrupper

De grupper som vi hittills beskrivit har varit definierade som mängder av funktioner med gruppoperationen tolkad som sammansättning av funktioner. Vi har även definierat grupper bestående av matriiser med matrismultiplikation som binär operation.

Vi ska nu låta en grupp verka på en mängd X . Transformationsgrupper verkar på ett rum X och bevarar dess struktur. För matrisgrupper, som är speciella fall av transformationsgrupper, är X ett vektorrum.

Definition 5.34. Om G är en godtycklig grupp och X en godtycklig mängd så är en gruppverkan av G på X en regel som till varje par $g \in G$ och $x \in X$ ordnar ett element $gx \in X$. Regeln ska uppfylla följande axiom.

(i) *Associativitet.* För alla $g, h \in G$ och $x \in X$ så gäller $(gh)x = g(hx)$.

(ii) *Identitet.* För alla $x \in X$ gäller $id(x) = x$.

Sats 5.35. $GL(n, R) \times R^n \rightarrow R^n$ är en gruppverkan under matrismultiplikation för alla $g \in GL(n, R)$ och $v \in R^n$.

Bevis. Vi visar att de två axiomen är uppfyllda.

(i) *Associativitet.* Vi har $I_n \in GL(n, R)$. Enligt definitionen för matrismultiplikation är $I_n \times v = v$ för alla $v \in R^n$.

(ii) *Identitet.* Vi visar associativitet genom att $g \cdot h \cdot (x) = (g \cdot h) \cdot x$ för alla $g, h \in GL_n(R)$ och $x \in R^n$ enligt definitionen för matrismultiplikation. $\square$

6 Talplanet

Målet med uppsatsen är att beskriva symmetrier hos olika tvådimensionella mönster. Av den anledningen ges nu en matematiskt tolkning av något som ligger i det så kallade talplanet. Därefter beskrivs några avbildningar i planet, som kommer att spela roll för att sedan förstå symmetrier.

6.1 Talplanet och dess delmängder

Definition 6.1. Det Euklidiska planet (talplanet) är mängden $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ som består av alla reella par (x, y) .

I planet går det att ta reda på längden av ett element, samt avståndet mellan två olika punkter. För att göra detta använder vi formlerna nedan.

Definition 6.2. Längden, eller normen, av ett element $x \in \mathbb{R}^2$ ges av $\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Definition 6.3. Avståndet mellan två punkter $x=(x_1, y_1)$ och $y=(x_2, y_2)$ i $\mathbb{R}^2$ betecknas

$$d(x, y) = \| (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Vi ger nu några exempel på olika delmängder av det Euklidiska talplanet, däribland ett tapetmönster.

Exempel 6.4. En cirkel med medelpunkt i origo är en delmängd av $\mathbb{R}^2$ som vi kallar S^1 . Då är $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) = 1\}$.

Exempel 6.5. En linje längs x -axeln är en delmängd av $\mathbb{R}^2$ som vi kallar P . Då är $P = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \text{ för alla } x\}$.

Exempel 6.6. Ett tapetmönster är en delmängd av $\mathbb{R}^2$ som upprepar sig i två riktningar och sträcker ut sig oändligt långt.

6.2 Avbildningar i talplanet

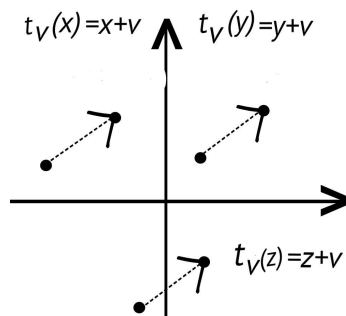
Vi definierar nu några avbildningar i talplanet som har betydelse för hur vi senare beskriver symmetrier i planet. Nedan ges exempel på identitetsavbildningen. Det är en funktion som tar en punkt i planet och avbildar den på sig själv. Därefter beskrivs avbildningarna translation, rotation, och spegling.

Exempel 6.7. Identitetsavbildningen definieras som $id: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ där $id(x) = x$ för alla x i $\mathbb{R}^2$.

6.3 Translation

Translation betyder parallellförflyttning. Det som en translation gör, är att den förflyttar alla punkter i planet en viss sträcka i en viss riktning.

Definition 6.8. En translation, $t_v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i riktning $v \in \mathbb{R}^2$ är en avbildning som flyttar alla punkter i planet i riktning av vektorn v . Den definieras av $t_v(x) = x + v$ för alla $x \in \mathbb{R}^2$.



Figur 36: Punkterna x, y och z parallellförflyttas i riktning av vektorn v

Exempel 6.9. Translation med $v=0$ ger $t_v(x)=t_0(x)=0+x=id$.

Lemma 6.10. Sammansättningen av två translationer är återigen en translation.

Bevis. Vi vill visa att för alla $v, w \in \mathbb{R}^2$ så gäller $t_v \circ t_w = t_{w+v}$. Vi skriver $(t_v \circ t_w)(x) = t_v(t_w(x)) = t_v(x+w) = (x+w)+v = x+(w+v) = t_{w+v}(x)$, vilket vi ville visa.

Sats 6.11. Varje translation t_v har en invers $t_v^{-1} = t_{-v}$ och mängden av alla translationer är en subgrupp till $\text{Sym}(\mathbb{R}^2)$

Bevis. Vi visar först existensen av en invers. Då gäller att varje t_v i gruppen av translationer är inverterbar med inversen $t_v^{-1} = t_{-v}$. Vi visar att $(t_v \circ t_{-v})(x) = t_{-v+v} = t_0 = id$. Då alla inversa funktioner är bijektioner enligt lemma 7.18 har vi att alla translationer är en delmängd av $\text{Sym}(\mathbb{R}^2)$. Vi använder oss nu av axiomen för en subgrupp:

(i) Vi vill visa att sammansättningen av två translationer återigen är en translation. Det har vi redan visat i Lemma 6.10.

(ii) Vi har precis visat existens av invers t_{-v} . Alltså är mängden av alla translationer en subgrupp av $\text{Sym}(\mathbb{R}^2)$

□

Anmärkning 6.12. Gruppen av alla translationer är isomorf med $\mathbb{R}^2$ som en grupp via $v \rightarrow t_v$ för $v \in \mathbb{R}^2$. Vi skriver att $t_v \cong \mathbb{R}^2$.

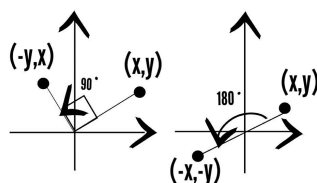
6.4 Rotationer och speglingar

Rotation inom matematiken har sina rötter inom geometrin. En rotation runt punkten v är en avbildning som roterar alla punkter i planet moturs runt v . Vi kommer dock endast att definiera rotation runt origo.

Definition 6.13. Vi definierar en rotation runt origo med vinkeln θ som

$$r_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exempel 6.14. Rotationer med 90 grader respektive 180 grader ges av $r_{90}(x, y) = (-y, x)$ och $r_{180}(x, y) = (-x, -y)$



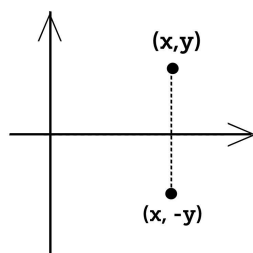
Figur 37: Rotation 90 respektive 180 grader moturs runt origo

Vi ska nu definiera vad som menas med en spegling. En speglingen i en linje L är en avbildning som ges av att vi speglar alla punkter i planet i den givna linjen L . Vi kommer endast definiera en spegling längs x -axeln.

Definition 6.15. En spegling M längs x -axeln kan beskrivas av av

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, -y).$$

Anmärkning 6.16. Vi ser att avbildningen för rotation respektive spegling fixerar 0 och därför är ortogonala transformationer, som vi betecknar T_A där $A \in O(n)$. $O(n)$ är, som vi tidigare nämnt, gruppen av alla ortogonala $n \times n$ matriser.



Figur 38: Spegling i x -axeln

7 Isometrier och symmetrier

Det visar sig att avbildningarna translationer, rotationer och speglingar är funktioner som alla bevarar avståndet mellan samtliga punkter i planet. Dessa är faktiskt de enda avbildningarna i talplanet som bevarar avstånd, om man inte räknar med identitetsavbildningen. Vi kallar dessa avbildningar för isometrier.

7.1 Isometrier

Vi börjar med den formella definitionen av en isometri och visar att avbildningarna från kapitel 6 är isometrier. Som vi tidigare nämnt så betecknas avståndet mellan två punkter $x, y \in \mathbb{R}^2$ som $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definition 7.1. En isometri är en avbildning som bevarar avståndet mellan alla punkter, det vill säga en funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som uppfyller att

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \text{ för alla } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Exempel 7.2. Vi ger exempel på en funktion som inte är en isometri. Vi låter $f(x, y) = (2x, 2y)$. Vi tar punkterna $(0, 0)$ och $(1, 0)$ vilket ger oss avståndet $\|(1, 0) - (0, 0)\| = \|(1, 0)\| = 1$ medan avståndet $\|f(1, 0) - f(0, 0)\| = \|(2, 0) - (0, 0)\| = 2$. Funktionen är därmed inte en isometri.

Vi visar nu att identitetsavbildningen, translationen och de ortogonala transformationerna spegling och rotation är isometrier.

Exempel 7.3. Identitetsavbildningen är en isometri då $\|id(x) - id(y)\| = \|x - y\|$.

Exempel 7.4. En translation t_v är en isometri då $\|t_v(x) - t_v(y)\| = \|(x + v) - (y + v)\| = \|x - y\|$.

Sats 7.5. Varje ortogonal transformation T_A är en isometri.

Bevis. Vi låter $A \in O(n)$ och $T_A \in \text{Sym}(\mathbb{R}^n)$. Vi vill visa att $T_A \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Vi ska visa att för alla $v, w \in \mathbb{R}^2$ så gäller $d(T_A(v), T_A(w)) = d(v, w)$. Vi får att $d(T_A(v), T_A(w)) = \|T_A(v) - T_A(w)\| = \|A \cdot v - A \cdot w\| = \|A(v - w)\| = \|v - w\| = d(v, w)$. $\square$

7.2 Isometriska gruppen i planet

Vi kommer nu att definiera en ny grupp i planet som består av alla bijektiva permutationer i $\mathbb{R}^2$ som bevarar avståndet.

Definition 7.6. Vi låter $\text{Isom}(\mathbb{R}^2) = \{f \in \text{Sym}(\mathbb{R}^2) \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = d(f(x), f(y))\}$

Sats 7.7. $\text{Isom}(\mathbb{R}^2) \leq \text{Sym}(\mathbb{R}^2)$ är en delgrupp.

Bevis. Vi observerar först att $id_{\mathbb{R}^2} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ och för alla $x, y \in \mathbb{R}^2$ så gäller $id_{\mathbb{R}^2}(x) = x$ och $id_{\mathbb{R}^2}(y) = y$ och vi har att $d(id_{\mathbb{R}^2}(x), id_{\mathbb{R}^2}(y)) = d(x, y)$.

(i) Vi visar slutenhet under funktionssammansättning. Låt $f, g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Ta $x, y \in \mathbb{R}^2$. Vi vill visa att $d((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) = d(x, y)$. Då f och g är isometrier gäller det att $d((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) = d(f(g(x)), f(g(y))) = d(g(x), g(y)) = d(x, y)$.

(ii) Vi visar slutenhet under inverstagning. Låt $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ och $x, y \in \mathbb{R}^2$. Vi vill visa $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(x, y)$, det vill säga att $f^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Då f är surjektiv så är $f(z) = x$ och $f(w) = y$ för några $z, w \in \mathbb{R}^2$. Då gäller $f^{-1}(x) = z$ och $f^{-1}(y) = w$, och då vi vet att f är en isometri gäller $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(z, w) = d(f(z), f(w)) = d(x, y)$.

□

Anmärkning 7.8. Vi kallar $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ för den isometriska gruppen i planet som består av alla bijektiva funktioner som bevarar avstånd.

Lemma 7.9. Låt $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en isometri så att $\lambda(0,0) = (0,0)$, $\lambda(1,0) = (1,0)$ och $\lambda(0,1) = (0,1)$. Då är $\lambda = id_{\mathbb{R}^2}$.

Bevis. Låt $x \in \mathbb{R}^2$. Vi vill visa att $\lambda(x) = x$. Låt oss skriva $y = \lambda(x)$ och notera att följande samband gäller

$$\begin{aligned} (1) \quad & y_1^2 + y_2^2 = \|y\|^2 = d(y, 0)^2 = d(x, 0)^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ (2) \quad & (y_1 - 1)^2 + y_2^2 = d(y, (1, 0))^2 = d(\lambda(x), \lambda(1, 0))^2 = d(x, (1, 0))^2 = \\ & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ (3) \quad & y_1^2 + (y_2 - 1)^2 = d(y, (0, 1))^2 = d(x, (0, 1))^2 = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \end{aligned}$$

Om vi subtraherar (2) från (1) får vi $-2y_1 + 1 = -2x_1 + 1$ och därmed att $x_1 = y_1$. På samma sätt får vi $y_2 = x_2$ genom att subtrahera (1) från (3). Så vi har visat att $y = (y_1, y_2) = (x_1, x_2) = x$.

□

Sats 7.10. Varje element i $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ är en produkt av en translation, en rotation och en reflektion. Mer specifikt, för alla $\lambda \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ finns det $x \in \mathbb{R}^2$ och $\theta \in [0, 2\pi]$ så att $\lambda = t_x \circ R_\theta$ eller $\lambda = t_x \circ R_\theta \circ M$

där M är beteckningen för speglingen i x -axeln.

Bevis. Låt $\lambda \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Sätt $x = \lambda(0)$. Då är $t_{-x} \circ \lambda(0) = t_{-x}(\lambda(0)) = \lambda(0) + (-x) = 0$. Vi skriver $\sigma = t_{-x} \circ \lambda$. Då $\sigma(0) = 0$ och $\sigma \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ finner vi att $d(\sigma(1, 0), 0) = d(\sigma(1, 0), \sigma(0)) = d((1, 0), 0) = 1$. Så punkten $\sigma(1, 0)$ ligger på avståndet 1 från origo. Då finns det en vinkel $\theta \in [0, 2\pi]$ så att $R_\theta(1, 0) = \sigma(1, 0)$. Det följer att $R_\theta^{-1} \circ \sigma(1, 0) = (1, 0)$. Vidare är $R_\theta^{-1} \circ \sigma(0) = 0$. Vi skriver $\sigma_2 = R_\theta^{-1} \circ \sigma$. Vi hävdar att $\sigma_2(0, 1) \in \{(0, 1), (0, -1)\}$. Då $\sigma_2(0) = 0$, $\sigma_2(1, 0) = (1, 0)$ samt $\sigma_2 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ hittar vi på ett liknande sätt som

ovan att $d(\sigma_2(0, 1), 0) = 1$ och $d(\sigma_2(0, 1), (1, 0)) = \sqrt{2}$. Genom att korsa de två cirkelarna som beskrivs av dessa likheter finner vi att $\sigma_2(0, 1) \in \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ s\aa att } d(x, 0) = 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ s\aa att } d(x, (1, 0)) = \sqrt{2}\} = \{(0, 1), (0, -1)\}$

I fallet $\sigma_2(0, 1) = (0, 1)$ kan vi applicera lemma 7.10 och finna att $\sigma_2 = id_{\mathbb{R}^2}$. Om vi skriver ut $\sigma_2 = id = R_\theta^{-1} \circ T_{-x} \circ \lambda$ kan vi dra slutsatsen att $\lambda = T_x \circ R_\theta$. I fallet $\sigma_2(0, 1) = (0, -1)$ kan vi applicera Lemma 7.9 till $M \circ \sigma_2$ d\aa r M betecknas som spegling genom x-axeln. Fr\aa n $M \circ \sigma_2 = id_{\mathbb{R}^2}$ kan vi dra slutsatsen att $\lambda = T_x \circ R_\theta \circ M$.

7.3 Normal delgrupp och inre semidirekt produkt

Vi har nu visat att varje element i $Isom(\mathbb{R}^2)$ \u00e4r en produkt av en translation, rotation och en reflektion. Vi vill nu visa att elementen i $Isom(\mathbb{R}^2)$ \u00e4r en unik produkt av en translation och en ortogonal transformation. F\u00f6r att visa detta beh\u00f6ver vi definiera vad som menas med en normal delgrupp samt en inre semidirekt produkt.

Definition 7.11. Om G \u00e4r en grupp och $H \leq G$. D\aa r H en normal delgrupp till G om det f\u00f6r alla $g \in G$ och f\u00f6r alla $h \in H$ g\u00e4ller att $ghg^{-1} \in H$. Vi skriver att $H \trianglelefteq G$.

Exempel 7.12. $\{e\} \trianglelefteq G$ f\u00f6r varje grupp G , eftersom $geg^{-1} = gg^{-1} = e$ f\u00f6r alla $g \in G$.

Exempel 7.13. $G \trianglelefteq G$ f\u00f6r varje grupp G , eftersom $ghg^{-1} \in G$ f\u00f6r alla $g, h \in G$.

Exempel 7.14. Vi visar att $\{(12), id\}$ inte \u00e4r en normal delgrupp till $Sym(\{1, 2, 3\})$ eftersom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \notin \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, id \right\}$$

Proposition 7.15. Delgruppen av alla translationer i $Isom(\mathbb{R}^2)$ \u00e4r normal, det vill s\u00e4ga

$$\{t_v \in Isom(\mathbb{R}^2) \text{ f\u00f6r } v \in \mathbb{R}^2\} \trianglelefteq Isom(\mathbb{R}^2)$$

Bevis. Enligt Sats 7.10 \u00e4r varje element av $Isom(\mathbb{R}^2)$ en produkt av en translation och en ortogonal transformation. Vi vill visa att f\u00f6r varje $A \in O(2)$ och f\u00f6r varje $v \in \mathbb{R}^2$ har vi att $t_A \circ t_v \circ t_A^{-1} = t_{Av}$. Vi noterar att $t_A^{-1} = t_{A^T}$ och r\u00e4knar f\u00f6r n\u00e5got godtyckligt $w \in \mathbb{R}^2$. Vi skriver $(t_A \circ t_v \circ t_{A^T})(w) = t_A(t_v(t_{A^T}(w))) = t_A(t_v(A^T w)) = t_A(A^T w + v) = A(A^T w + v) = AA^T w + Av = w + Av = t_{Av}(w)$ vilket implicerar att gruppen av translationer \u00e4r normal i $Isom(\mathbb{R}^2)$. $\square$

Definition 7.16. Givet en grupp G med identitetslementet e , $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$ s\aa kallar vi G en inre semidirekt produkt av N och H , som vi skriver $G = N \rtimes H$, om $G = N \cdot H = \{n \cdot h \mid n \in N, h \in H\}$ och $N \cap H = \{e\}$

Sats 7.17. Låt $G = N \rtimes H$ vara en inre semidirekt produkt. Då är varje element i G en unik produkt av ett element i N och ett element i H . Så för alla $g \in G$ existerar det ett unikt $n \in N$ och ett unikt $h \in H$ så att $g = nh$.

Bevis. Enligt definitionen för en inre semidirekt produkt har vi att $G = N \cdot H$, där $N \cdot H = \{n \cdot h \mid n \in N \text{ och } h \in H\}$. Alltså för alla $g \in G$, finns det $n \in N$ och $h \in H$ så att $g = nh$. Vi vill visa att denna produkt är unik. Vi låter $n_1, n_2 \in N$ och $h_1, h_2 \in H$ så att $n_1 h_1 = n_2 h_2$. Vi vill visa att $n_1 = n_2$ och $h_1 = h_2$. Från den givna likheten drar vi slutsatsen att $n_1^{-1} n_2 = h_1 h_2^{-1}$. Då N och H är subgrupper av G finner vi att detta element ligger i $N \cap H$. Enligt definitionen för en semidirekt produkt har vi att $N \cap H = \{e\}$ så att $n_1^{-1} n_2 = e = h_1 h_2^{-1}$ som visar att $n_2 = n_1$ och $h_1 = h_2$. $\square$

Exempel 7.18. $S_3 = Z_3 \rtimes Z_2$ är en inre semidirekt produkt, där $\langle (123) \rangle \cong Z_3$ och $\langle (23) \rangle \cong Z_2$.

Bevis. Vi visar nedan i tre steg att $S_3 = Z_3 \rtimes Z_2$.

(i) Vi verifierar att $\langle (123) \rangle \trianglelefteq S_3$. Vi undersöker produkten ghg^{-1} där $h \in \langle (123) \rangle$ och $g \in S_3$. Det räcker att undersöka generatoren, vilket reducerar problemet till kalkyleringen $(12)(123)(12)^{-1} = (132)$, som är ett element i S_3 .

(ii) Vi noterar att $\langle (123) \rangle \cap \langle (23) \rangle = \{id\}$

(iii) Det är klart att $id, (123), (132)$, och (23) kan skrivas som en produkt av element i Z_3 och Z_2 . Efter lite räkning går det även att visa att $(12) = (132)(13)$ och $(13) = (132)(23)$. Alla element i S_3 går alltså att skrivas som en produkt från element i undergrupperna. Vi har visat att $S_3 = Z_3 \rtimes Z_2$. $\square$

Sats 7.19. $Isom(\mathbb{R}^2)$ kan skrivas som en inre semidirekt produkt så att $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$.

Bevis. Vi vill visa att varje isometri i $Isom(\mathbb{R}^2)$ är en produkt av en translation och en ortogonal transformation. Vidare vill vi visa att $\mathbb{R}^2 \cap O(2) = \{id\}$. Enligt Proposition 7.15 så är $\mathbb{R}^2 \trianglelefteq Isom(\mathbb{R}^2)$. Om vi antar att t_v är en translation som också är en ortogonal transformation så gäller $t_v(0) = 0$, eftersom ortogonala transformationer fixerar 0. Då gäller $v = v + 0 = t_v(0) = 0$ och vi ser att $t_v = t_0 = id$. Tack vare Sats 7.10 så vet vi att alla isometrier i $\mathbb{R}^2$ antingen är en produkt på formen $t_v \circ R_\theta$ eller $t_v \circ R_\theta \circ M$, där t_v är en translation, R_θ är en rotation runt origo och M är reflektion längs x-axeln. Då både R_θ och M är ortogonala transformationer finner vi att varje isometri är en produkt av en translation och en ortogonal transformation. $\square$

7.4 Symmetrier i planet

Utifrån de definitioner vi nu infört är vi nu redo att ge en mer matematisk definition av vad en symmetrigrupp i planet är. Vi beskrev tidigare att symmetrier hos en figur eller ett mönster är de avbildningar som avbildar figuren/mönstret på sig själv. Det sammanlagda antalet symmetrier hos en viss figur eller ett mönster bildar tillsammans en symmetrigrupp.

Definition 7.20. Om $P \subseteq \mathbb{R}^2$ är någon delmängd så är $Isom(P \subseteq \mathbb{R}^2) = \{ \lambda \in Isom(\mathbb{R}^2) \mid \lambda(P) = P \}$ som vi kallar för symmetrigruppen av P .

Exempel 7.21. Om $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) = 1\}$ så är $Isom(P \subseteq \mathbb{R}^2) = O(2)$

Exempel 7.22. Om $P = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in R\}$ så är $Isom(P \subseteq \mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes D_2$ där D_2 består av 180 graders rotation och reflektion i två axlar.

7.5 Tapetgrupper

Vi inför nu begreppet tapetgrupper som är symmetrigrupper i planet över de så kallade tapetmönstrena. Vi vet nu att ett tapetmönster är ett mönster som upprepar sin struktur i två riktningar. Nu utvecklar vi detta, och definierar vad en tapet respektive en tapetgrupp är rent matematiskt utifrån de begrepp som vi nu har infört.

En tapetgrupp är en grupp av isometrier i det Euklidiska planet, som innehåller två linjärt oberoende translationer. Med det menas att det finns två linjärt oberoende vektorer v och w i $\mathbb{R}^2$ så att gruppen innehåller både t_v och t_w . Detta skiljer tapetgrupper från grupper av frismönster, där det endast finns en translation längs en axel. Ett annat villkor för att vara en tapetgrupp är att gruppen ska innehålla en kompakt fundamental domän som repeteras genom hela planet. Nedan ges den formella definitionen.

Definition 7.23. G är en tapetgrupp om $G \leq Isom(\mathbb{R}^2)$ samt att följande två villkor gäller.

(i) Genom att identifiera gruppen av translationer med $\mathbb{R}^2$ (se Anmärkning 6.12), har vi att $G \cap \mathbb{R}^2$ ska innehålla en bas för $\mathbb{R}^2$.

(ii) $G \cap \mathbb{R}^2$ är diskret, dvs det finns ett $r > 0$ där $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) \leq r\}$ och $B_r(0) \cap (G \cap \mathbb{R}^2) = \{0\}$

Definition 7.24. Mängden $P \subseteq \mathbb{R}^2$ är en tapet om $Isom(P \subseteq \mathbb{R}^2)$ är en tapetgrupp.

Exempel 7.25. $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ är en tapet.

Bevis. Vi ska visa att $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ är en tapet. Vi behöver visa att $Isom(\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2) \cap \mathbb{R}^2$ innehåller en bas för $\mathbb{R}^2$. Med andra ord, vi ska bestämma vilka translationer som bevarar $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Först noterar vi att för $v \in \mathbb{Z}^2$ har vi $t_v(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2 + v = \mathbb{Z}^2$.

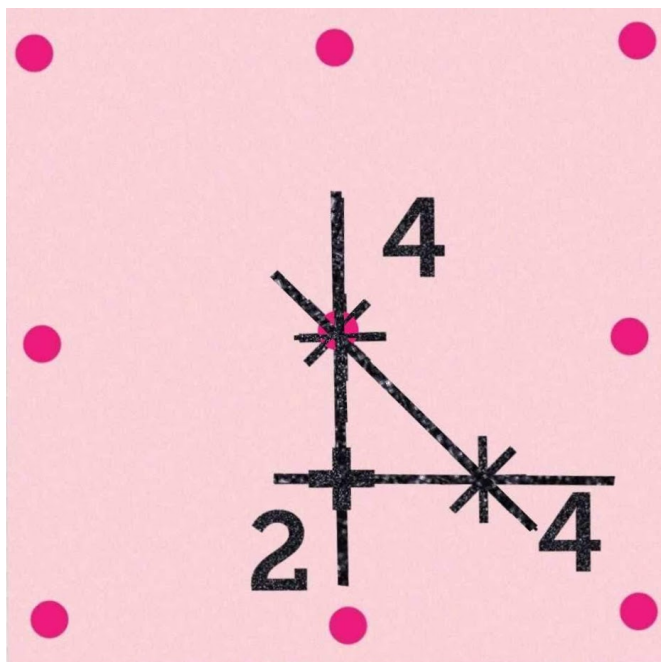
Å andra sidan, om $v \in \mathbb{R}^2$ gäller $t_v(Z^2) = Z^2$ så $t_v(0) = v \in \mathbb{Z}^2$. Så $Isom(\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2) \cap \mathbb{R}^2 = Z^2$. Nu är det lätt att se (i). Vidare $B_{1/2}(0) \cap \mathbb{Z}^2 = \{0\}$ så då är också (ii) verifierad. Så $Isom(\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2)$ är en tapetgrupp och därför är $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ en tapet.

□

8 Avslutande ord

I den första delen av denna uppsats beskrev vi symmetrier utifrån ett visuellt perspektiv. Vi introducerade begreppen speglingar, gyrationer, mirakel och wonderings. I det matematiska avsnittet definierade vi symmetrier som de isometrier i planet vilka avbildar någon delmängd i $\mathbb{R}^2$ på sig själv. Vi bevisade att varje element i den isometriska gruppen består av en produkt av en translation, en rotation och en reflektion. På så vis finns det en koppling i denna uppsats mellan det visuella och det matematiska. Exempelvis är wonderings detsamma som translationer i planet, medan ett mirakel kan beskrivas som avbildningen reflektion följt av en translation.

Vi avslutade föregående kapitel med att visa att $\mathbb{Z}^2$ är en tapet. Om vi ritar upp mönstret av $\mathbb{Z}^2$ ser vi direkt att den är repetitiv i två riktningar (figur 39). Vi använder oss nu av terminologin från det visuella kapitlet för att bestämma signaturen av $\mathbb{Z}^2$. I figur 39 visas det minsta grundelement som behövs för att återskapa hela mönstret med hjälp av speglingar. Signaturen ges av $*442$, då vi har tre kalejdoskopiska punkter där var och en av punkterna korsas av fyra, två respektive fyra spegellinjer. Vi ser även att vi har rotationssymmetri, men då denna symmetri täcks upp av reflektionerna skrivs det inte in i signaturen för mönstret.



Figur 39: Tapetmönstret $\mathbb{Z}^2$ med signaturen $*442$

Referenser

- [1] John H. Conway, Heidi Burgiel, Chaim Goodman-Straus. *The Symmetries of things*, 1st edition. A K Peters/CRC Press, 2008.
- [2] Wikipedia (2018) *Grupp (matematik)*. Tillgänglig: [https://sv.wikipedia.org/wiki/Grupp\(matematik\)](https://sv.wikipedia.org/wiki/Grupp(matematik)) (2018-01-14).
- [3] Wikipedia (2018) *Grupper, mönster och symmetrier*. Tillgänglig: https://www.kth.se/polopoly_fs/1.466057!/komp.pdf (2018-01-14).
- [4] Wikipedia (2018) *Inverterbar matris*. Tillgänglig: <https://sv.wikipedia.org/wiki/Inverterbarmatris> (2018-01-14).

□