

SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Evolutor

av

Josefin Eek

2020 - No K18

Evulator

Josefin Eek

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2020

Abstract

The main theme of this paper is the evolute. That is, a curve generated by all of the centers of curvature of a given plane curve. In order to understand this, terms as center of curvature and curvature itself are explained. The concept of curvature will be approached from different angles. First by having arc length as parameter and later by using circumscribed circles.

After these necessary definitions and basic concepts the evolute will be defined together with some of its properties, even the involute will be presented. As the cherry on top, the evolute will in fact be used to draw different curves and patterns, which is mostly just a treat for the eye.

The primary goal is to communicate all this in a way that is both comprehensible and interesting for someone who's been studying mathematics at university for about a year.

Förord och tack

Först och främst vill jag tacka min handledare Rikard Bögvad för att han haft tålamodet att svara på alla mina frågor och för att han sporrat mig att bli så bra som jag kan bli. Jag vill även tacka min granskare Boris Shapiro, vars ord verkligen stärkt mitt självförtroende och som gör att jag med stolthet presenterar det här arbetet.

Slutligen vill jag även tacka vänner och familj för att ni lyssnat och nickat uppmuntrande när jag berättat för er om evolutor i tid och otid.

Innehåll

1	Inledning	4
2	Differentialgeometri	4
2.1	Differentierbara kurvor	4
2.2	Parametrisering av en kurva	6
3	Oskulerande kurvor	6
3.1	Kontakt av grad k	6
4	Krökning	7
4.1	Båglängd	8
4.2	Båglängd som parameter	8
4.3	Från båglängd till krökning	10
4.4	Krökningscirkel	13
4.5	En omskriven cirkel	14
4.6	Krökning via den omskrivna cirkeln	17
4.7	Relationen mellan κ och ρ	19
5	Evoluta	19
5.1	Evoluta av en parametrisk kurva	20
5.2	Några vanliga exempel	20
6	Egenskaper hos evolutor	21
6.1	Tangenvektorerna	21
6.2	Evolutans spetsar	23
6.3	Båglängd och krökningsradie	24
6.4	Parallella kurvor	25
6.5	Involuta	27
6.6	Den oskulerande cirkeln	29
7	En babushka av evolutor	31
8	Sammanfattning	33

1 Inledning

I grundskolan under mattelektionerna var det ofta frågan “men när ska vi ha användning för det här *i verkligheten?*” dök upp. Jag ska inte ljuga för er, mycket av det som presenteras i det här arbetet har man egentligen ingen användning för i den så kallade *verkligheten*. Det är ju faktiskt så, att en del matematik inte fyller någon funktion mer än att vara matematiskt intressant. Men oj, vad intressant det kan bli ändå!

Under vägens gång kommer vi gå igenom begrepp såsom båglängd, omskrivna cirklar och krökning som kan ha tydliga användningsområden inom till exempel fysiken, men dessa användningsområden ska vi inte tala så mycket om. Istället ska vi se hur dessa kan användas för att rita häftiga kurvor, så kallade evolutor. För jag skulle ändå vilja säga att evolutan, som ju är det här arbetets absoluta huvudtema, det som allt annat bygger upp till, är utöver matematiskt intressant, även vackert att titta på. Men huruvida det räknas som en användning *i verkligheten* eller inte kan jag inte svara på.

Någonstans är ändå målet med arbetet att definiera evoluta på ett sådant sätt att det är intressant och begripligt för någon som läst matematik på universitet i ungefär ett år, eller för glada entusiaster!

2 Differentialgeometri

Differentialgeometri är en gren inom matematiken där man försöker lösa geometriska problem med hjälp av differentialkalkyl, integralkalkyl och linjär algebra. Nedan kommer ett gäng grundläggande begrepp, beteckningar och definitioner som kan vara bra att förstå resten av arbetet. Beskrivningar och härledningar i denna sektion är huvudsakligen hämtad från *Analys i Flera Variabler* av Persson och Böiers [3, s. 23, 52].

2.1 Differentierbara kurvor

Att en funktion f av en variabel är deriverbar i punkten a med derivatan $f'(a) = A$ kan tolkas som att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A = 0$$

eller som att

$$f(a+h) - f(a) = Ah + h\rho(h)$$

där $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$ och $A = f'(a)$. Vidare för en funktion av två variabler, eller varför inte för det mer generella fallet av n variabler, formulerar vi en liknande definition.

Definition 2.1. Låt funktionen f av n variabler ha en inre punkt $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ i definitionsmängden D . Vi säger då att f är *differentierbar* i punkten \mathbf{a} om det finns konstanter A_i och en funktion $\rho(\mathbf{h})$ så att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + |\mathbf{h}| \rho(\mathbf{h}),$$

där $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \rho(\mathbf{h}) = 0$. Vi säger även att om f är differentierbar i alla punkter $\mathbf{a} \in D$ så är f differentierbar.

Vidare finns även en sats som säger att om en funktion är differentierbar så ges dessa konstanter A_i av $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, med andra ord att f är partiellt deriverbar. Åt andra hållet gäller även att om en funktion har kontinuerliga partiella derivator så är funktionen differentierbar. Ännu en egenskap hos differentierbara funktioner är att de är kontinuerliga [3, s. 53-54]. Från den sist nämnda egenskapen kan det plockas ytterligare en definition.

Definition 2.2. Låt funktionen f vara definierad i den öppna mängden $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Vi säger då att f tillhör klass C^1 om f är partiellt deriverbar och om de partiella derivatorna är kontinuerliga i D .

På samma sätt som ovan kan vi även göra en definition för det mer allmänna fallet.

Definition 2.3. Låt funktionen f vara definierad i den öppna mängden $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Vi säger då att f tillhör klass C^k om det finns kontinuerliga, partiella derivator upp till ordning k i D .

Exempel 2.1. Låt oss exempelvis betrakta funktionen

$$f(x) = \int_{\alpha}^x |t| dt.$$

Vi konstaterar att $f \in C^1$ eftersom $f'(x) = |x|$. På samma sätt förstår vi sedan att $f \notin C^2$ eftersom

$$f''(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } x > 0 \\ -1 & \text{för } x < 0 \\ \text{odef.} & \text{för } x = 0 \end{cases}.$$

Exempel 2.2. Betraktar vi nu istället funktionen $f(x) = \cos(x)$ drar vi snabbt slutsatsen att denna tillhör C^k för alla k .

Värt att nämna är att detta, det vill säga att $f \in C^k$ för alla k , är den situation vi oftast kommer stöta på i det här arbetet. Detta gäller till exempel även för vanliga polynom eller exponentialfunktioner.

2.2 Parametrisering av en kurva

För att kunna fortsätta härifrån behöver vi förstå hur man kan skriva kurvor på parameterform. Mer specifikt kommer vi nu rikta in oss på plana kurvor, det vill säga kurvor vars värdemängd innefattas i \mathbf{R}^2 . Givet en vektorvärd funktion i planet, skulle den på parameterform då kunna ges av

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t)),$$

där t då kallas för *parametern*.

Exempel 2.3. Vi börjar med en simpel parabel, $y = x^2$, där $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Här ser vi då att det även kan skrivas som

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

och vidare på parameterform får vi därmed $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbf{R}$.

Exempel 2.4. På liknande vis kan vi göra med en godtycklig ellips med mittpunkt i origo. Denna kan ges av

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

där $a, b > 0$ representerar halvaxlarna. Samma ellips kan beskrivas på parameterform som $\mathbf{f}(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Värt att notera här är att en och samma kurva kan ha flera, alternativa parameterframställningar. Samma ellips skulle till exempel även kunna ges av $\mathbf{f}(t) = (a \cos(2\pi t), b \sin(2\pi t))$, $0 \leq t \leq 1$.

Att skriva kurvor på parameterform kan underlätta då vi gör det möjligt att beskriva en kurva av två variabler, x och y i det här fallet, med hjälp av endast en variabel, nämligen parametern, t .

3 Oskulerande kurvor

Ibland händer det att två olika kurvor i planet råkar ha lite saker gemensamt i en viss punkt. Det skulle kunna handla om ett gemensamt funktionsvärdet eller derivatan eller varför inte andraderivatan för den delen. Det här är precis vad oskulerande kurvor handlar om. Ordet oskulera kommer ifrån latinets *osculari* som betyder kyssa [6], vilket jag tolkar som att två kurvor har ett hastigt, intimt ögonblick tillsammans.

3.1 Kontakt av grad k

Philip Franklin formulerar detta något mindre utsmyckande i *Osculating Curves and Surfaces* [2, s. 401].

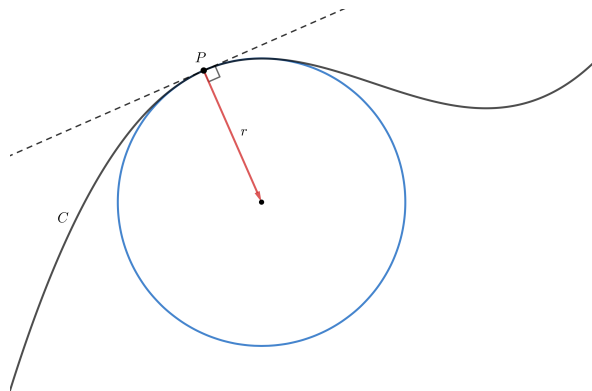
Definition 3.1. Vi säger att en plan kurva, $g(x)$, *oskulerar* kurvan $f(x)$ i punkten x_0 om

$$f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0),$$

för alla $0 \leq i \leq k$, där dessa då har kontakt av grad k .

Exempel 3.1. Tangentlinjen till kurvan $f(x)$ i punkten x_0 (se figur 1) kan ses som en osculerande kurva. De har kontakt av grad 1 då de har förstaderivatan gemensamt. Tangenten är därmed den rätta linje som bäst approximerar kurvan i en viss punkt.

Exempel 3.2. Den osculerande cirkeln (se figur 1) till kurvan $f(x)$ i punkten x_0 är, som namnet kanske redan avslöjat, en osculerande kurva. De har kontakt av grad 2 då de har både första- och andraderivatan gemensamt.



Figur 1: En kurva, C , med dess tangentlinje och osculerande cirkel i P .

Här skulle man kunna fråga sig vad en osculerande cirkel egentligen är. Senare, i kapitlet om krökning och omskrivna cirklar kommer detta att definieras, så håll till godo! I vardagligt språk kan man se det som att vara ute och köra bil där ratten plötsligt låser sig i en viss position så att bilen kör i en cirkel där cirkeln snuddar vägen i den punkt där ratten låste sig.

Kan för övrigt tipsa den som är intresserad av poetiska formuleringar av matematik om *The Kiss Precise* av Frederick Soddy, en dikt om hur dessa osculerande cirklar förhåller sig till varandra [4].

4 Krökning

Ett begrepp som kommer visa sig vara nära kopplat till just osculerande cirklar är krökning. Även detta skulle i vardagligt språk kunna förklaras i termer av att vara ute och köra bil. Krökningen skulle då kunna beskrivas som hur mycket man

behöver vrida ratten i varje given punkt. Rent matematiskt kanske man skulle beskriva det som ett sätt att beskriva hur en plan kurva beter sig i omgivningen till en viss punkt. Nedan ska vi definiera krökning på tre olika sätt. Först genom att ha båglängd som parameter och sedan genom att gå via den så kallade omskrivna cirkeln.

4.1 Båglängd

Innan vi går in på hur man kan använda båglängden som parameter kan det vara på sin plats för lite repetition av vad båglängd egentligen är. Denna definition är huvudsakligen hämtad ifrån [3, s. 124].

Definition 4.1. Givet en plan C^1 -kurva, $\mathbf{f}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, där $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$ för alla t sätter vi

$$s = s(t) = \int_{\alpha}^t |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau$$

som *båglängden* mellan $\mathbf{f}(t)$ och $\mathbf{f}(\alpha)$, där s då är en funktion av t .

Exempel 4.1. Låt \mathbf{f} vara en cirkel med radie r och mittpunkt i origo. Beräkna båglängden för halva cirkeln.

Lösning. En lämplig parametrisering av denna kurva skulle kunna vara $\mathbf{f}(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Detta ger att

$$s(\pi) = \int_0^{\pi} |(-r \sin \tau, r \cos \tau)| d\tau = r \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \tau + \cos^2 \tau} d\tau = r \int_0^{\pi} d\tau = \pi r,$$

vilket vi intuitivt borde se är korrekt. □

4.2 Båglängd som parameter

I termer av bilkörning kan båglängd som parameter förklaras med att åka från Stockholm till Uppsala. Då kan du förklara hur långt du har kommit antingen genom att berätta vilken punkt du befinner dig på, till exempel Märsta. Eller så kan du förklara det genom att berätta hur långt du har kört från Stockholm, knappt 4 mil. I det senare fallet har vi då kurvans båglängd som parameter. Senare har det visat sig att denna parametrisering för med sig en hel del fiffiga egenskaper som kommer att vara användbara framöver. Bevisen nedan är hämtade från [3, s. 124, 211].

Proposition 4.1. Givet en plan kurva, $\mathbf{f}(s)$, kommer riktningsvektorn för tangenten, även kallad kurvans tangentvektor, $\mathbf{T} = (f_1'(s), f_2'(s))$, alltid ha längden 1 då vi har båglängd, s , som parameter. Den kommer med andra ord alltid vara en enhetstangent till kurvan.

Bevis. Vi börjar med att betrakta definition 4.1 för båglängd där analysens huvudsats sedan ger oss att

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{f}'(t)| \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{f}'(t)|}. \quad (1)$$

Använder vi oss sedan av formeln

$$\frac{d}{ds} \mathbf{f}(\varphi(s)) = \mathbf{f}'(\varphi(s)) \varphi'(s)$$

för parameterbyte får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \frac{d\mathbf{f}}{ds} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} \\ &\Rightarrow |\mathbf{T}| = 1. \end{aligned}$$

□

Utifrån detta kan vi alltså dra slutsatsen att om vi har båglängden, s , som parameter och kurvan är $\mathbf{f}(s) = (f_1(s), f_2(s))$ så har tangentvektorn, $\mathbf{T}(s) = \mathbf{f}'(s)$, alltid längden 1. Anmärkningsvärt är att detta också är ekvivalent med påståendet att $f_1'^2 + f_2'^2 = 1$. Låt oss nu istället titta lite noggrannare på vektorn $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = (f_1''(s), f_2''(s))$.

Proposition 4.2. Givet en plan kurva, $\mathbf{f}(s)$, och dess enhetstangent, \mathbf{T} , så kommer vektorn $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ alltid vara ortogonal mot \mathbf{T} då vi har båglängd, s , som parameter.

Bevis. Från proposition 4.1 har vi att

$$|\mathbf{T}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1,$$

där vi använder oss av det faktum att längden av \mathbf{T} är 1 då vi har båglängd som parameter. Deriverar vi sedan båda sidor med avseende på s får vi att

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} &= 0. \end{aligned}$$

□

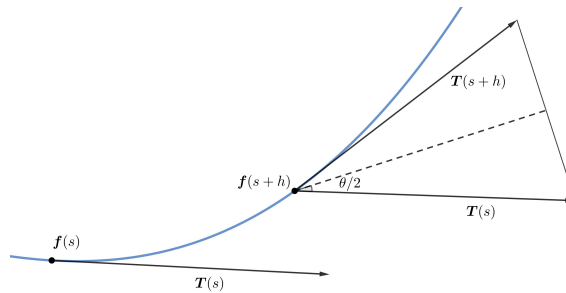
Att skalärprodukten mellan två vektorer blir 0 är, som vi redan vet, synonymt med att vektorerna är ortogonala. Detta för med sig att $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ är ortogonal mot själva kurvan i punkten $\mathbf{f}(s)$ och är en så kallad normalvektor till kurvan. Ett annat sätt att skriva detta på är $f'_1 f''_1 + f'_2 f''_2 = 0$. Vi ska komma tillbaka till denna normalvektor senare när vi går igenom krökningscirklar.

4.3 Från båglängd till krökning

När vi ska beskriva hur mycket en kurva, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(s(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, svänger i en viss punkt kan detta ses som att skildra förändringen i riktning av kurvans enhetstangent, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s)$. Vi kallar vinkeln mellan $\mathbf{T}(s)$ och $\mathbf{T}(s+h)$ för θ [3, s. 210] och vi ser att den motstående sidan till θ ges av $|\mathbf{T}(s+h) - \mathbf{T}(s)|$. Eftersom $|\mathbf{T}(s+h)| = |\mathbf{T}(s)| = 1$ kan vi även dra slutsatsen att den motstående katetern till $\frac{1}{2}\theta$ blir $\frac{1}{2}|\mathbf{T}(s+h) - \mathbf{T}(s)|$ (se figur 2). Detta ger oss att

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{h} &= \frac{\frac{1}{2}\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \cdot \frac{2 \sin(\frac{1}{2}\theta)}{h} = \frac{\frac{1}{2}\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \cdot \frac{2 \cdot \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{T}(s+h) - \mathbf{T}(s)|}{|\mathbf{T}(s)|}}{h} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \cdot \frac{|\mathbf{T}(s+h) - \mathbf{T}(s)|}{h} \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta}{h} &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{T}(s+h) - \mathbf{T}(s)}{h} \right| \right) = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|, \end{aligned}$$

där vi bland annat använder oss av standardgränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$.



Figur 2: En kurva med enhetstangenter $\mathbf{T}(s)$ och $\mathbf{T}(s+h)$.

Definition 4.2. Givet en C^1 -kurva i planet, $\mathbf{f}(s)$, parametriserad med båglängden, s , ges dess *krökning*, $\kappa = \kappa(s)$, i punkten $\mathbf{f}(s_0)$ av

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|.$$

Vi ser alltså att krökningen dels ges av hastigheten med vilken tangentvektorns vinkel förändras. Men då vi har båglängd, s , som parameter kan krökningen även ges av storleken av tangentvektorns derivata.

Exempel 4.2. Vi betraktar cirkeln som ges av $\mathbf{f}(s) = (f_1(s), f_2(s))$ där

$$\begin{cases} f_1 = r \cos\left(\frac{s}{r}\right) \\ f_2 = r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \end{cases} \quad 0 \leq s \leq 2\pi r.$$

Observera här att vi har båglängd, s , som parameter och att $\frac{s}{r}$ svarar mot vinkeln t från exempel 4.1. Dess tangentvektor ges då av

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d\mathbf{f}}{ds} = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

där vi snabbt och föga förvånande ser att $|\mathbf{T}| = 1$. Vidare beräknar vi dess krökning,

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) \right| = \frac{1}{r} \sqrt{\cos^2\left(\frac{s}{r}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{r}\right)} = \frac{1}{r},$$

som vi ser har ett konstant värde, $\frac{1}{r}$, som beror på cirkelns radie. Detta känns naturligt, för om vi återigen åker bil, denna gång längs en enorm cirkel, så kommer vi inte behöva vrida ratten lika mycket som om vi kör längs en väldigt liten cirkel.

Vi har nu betraktat krökning med hjälp av vinkeln θ . Denna vinkel kan egentligen ses som en funktion av h så att $\theta = \theta(h)$ där $\theta(0) = 0$. På så vis får vi även

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(h) - \theta(0)}{h} = \theta'(0)$$

så att vi lika gärna kan tolka krökning som hastigheten med vilken kurvan vrider sig.

Richard Courant hade ett tämligen liknande sätt att se på krökning [1, s. 380-381]. Men istället för att betrakta derivatan av vinkeln θ valde han att arbeta med vinkeln λ , mellan den positiva tangentlinjen och x -axeln. Vi inser rätt snabbt att

$$\lambda(h) = \lambda(0) + \theta(h),$$

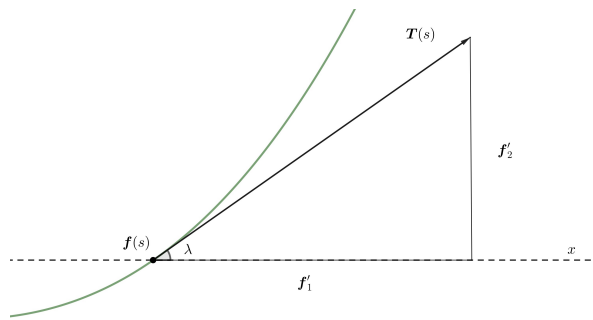
där det då finns ett tydligt koppling till föregående definition av krökning.

Vinkeln λ kan även beskrivas som vinkeln mellan tangentvektorn, $\mathbf{T}(s) = (f'_1, f'_2)$, och x -axeln. Vi förstår att λ kommer förändras beroende på var på kurvan vi är, den är alltså en funktion av s . För att få fram denna funktion börjar vi med att konstatera att

$$\begin{aligned}\tan(\lambda(s)) &= \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} \\ \Rightarrow \lambda(s) &= \arctan\left(\frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}\right),\end{aligned}$$

där vi vid närmare eftertanke (se figur 3) får att

$$\lambda(s) = \arctan\left(\frac{f'_2}{f'_1}\right). \quad (2)$$



Figur 3: Vinkeln λ mellan $\mathbf{T}(s)$ och x -axeln.

Vidare, för att få fram krökningen, κ , deriverar vi nu med avseende på s , vilket ger

$$\kappa = \frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{dt}{ds},$$

där den andra faktorn är bekant från (1) och den första faktorn fås med hjälp av kedjeregeln och kvotregeln. Detta ger oss att

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{f'_2}{f'_1}\right)^2} \cdot \frac{f''_2 f'_1 - f'_2 f''_1}{f_1'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}} \\ \Rightarrow \kappa &= \frac{f'_1 f''_2 - f'_2 f''_1}{(f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned} \quad (3)$$

Men då vi har båglängd som parameter, vilket från proposition 4.1 och 4.2 för med sig att $f_1'^2 + f_2'^2 = 1$ och att $f_1'f_1'' + f_2'f_2'' = 0$, så ger detta oss att

$$\kappa = \frac{d\lambda}{ds} = f_1'f_2'' - f_2'f_1'' = f_2'' \left(f_1' + f_2' \frac{f_2'}{f_1'} \right) = \frac{f_2''}{f_1'} = -\frac{f_1''}{f_2'}.$$

Definition 4.3. (Alternativ definition.) Givet en C^1 -kurva i planet, $\mathbf{f}(s)$, parametriserad med båglängden, s , ges dess krökning, $\kappa = \kappa(s)$ i punkten $\mathbf{f}(s_0)$ av

$$\kappa = \frac{f_2''}{f_1'} = -\frac{f_1''}{f_2'}.$$

Exempel 4.3. Låt oss betrakta samma cirkel som i tidigare exempel där

$$\begin{cases} f_1 = r \cos\left(\frac{s}{r}\right) \\ f_2 = r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \end{cases} \quad 0 \leq s \leq 2\pi r.$$

Detta ger oss att $f_2'' = -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right)$ och att $f_1' = -\sin\left(\frac{s}{r}\right)$. Använder vi oss nu av vår nya formel för krökning får vi

$$\kappa = \frac{f_2''}{f_1'} = \frac{-\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right)}{-\sin\left(\frac{s}{r}\right)} = \frac{1}{r},$$

vilket vi ser stämmer överens med vad vi fick i den tidigare uträkningen från exempel 4.2.

4.4 Krökningscirkel

Låt oss nu gå tillbaka till kurvans normalvektor, $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$. Vi vet från definition 4.2 att denna har längd κ . Normerar vi nu denna vektor får vi kurvans enhetsnormal.

Definition 4.4. Givet en kurva, $\mathbf{f}(s)$, i planet ges dess enhetsnormal, eller huvudnormal av

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{T}}{ds}.$$

Utifrån detta kan vi nu introducera ännu lite fler begrepp som kan vara bra att ha längre fram.

Definition 4.5. Givet en plan C^1 -kurva, $\mathbf{f}(s)$, definierar vi $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ som dess *krökningsradie* i punkten $\mathbf{f}(s)$.

Denna definition känns än mer naturlig då vi i exempel 4.2 och 4.3 kom fram till att krökningen av en cirkel var $\frac{1}{r}$, det vill säga det inverterade värdet av dess radie.

Definition 4.6. Givet en plan C^1 -kurva, $\mathbf{f}(s)$, kallar vi punkten

$$\mathbf{f}(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s)$$

för dess *krökningscentrum* i punkten $\mathbf{f}(s)$.

Definition 4.7. Givet en plan C^1 -kurva, $\mathbf{f}(s)$, kallar vi cirkeln, vars radie ges av krökningsradien och vars mittpunkt ges av krökningscentrum, för *krökningscirkeln* i punkten $\mathbf{f}(s_0)$. Denna ges på parameterform av

$$\mathbf{C}(\theta) = \rho(s_0)(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \mathbf{f}(s_0) + \rho(s_0)\mathbf{N}(s_0). \quad (4)$$

Anmärkning 4.1. Det visar sig sedan att kurvan \mathbf{f} och krökningscirkeln \mathbf{C} har kontakt av grad 2 i punkten $\mathbf{f}(s_0)$. Det vill säga, krökningscirkeln är den oskulerande cirkeln i punkten $\mathbf{f}(s_0)$. Att detta verkligen stämmer kommer bevisas senare i proposition 6.4, då vi har lite mer kött på benen.

Exempel 4.4. Använder vi oss än en gång av samma cirkel som i exempel 4.2 ser vi att dess krökningscentrum ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{f} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N} &= \mathbf{f} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \\ &= r \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) + r \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right) = r(0, 0). \end{aligned}$$

Det vill säga att dess krökningscentrum är själva cirkelns mittpunkt, nämligen origo och krökningsradien är r i alla punkter. Därmed är krökningscirkeln cirkeln själv i alla punkter.

4.5 En omskriven cirkel

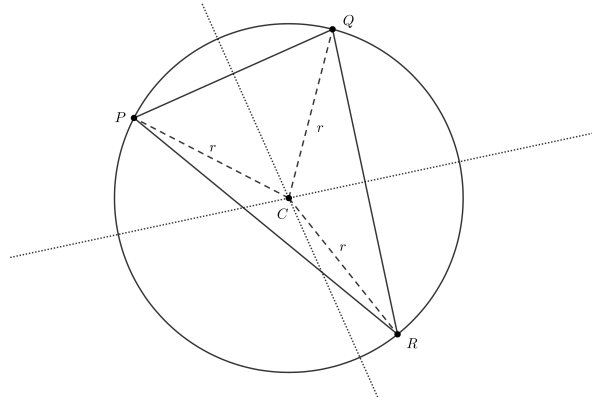
Som jag tidigare berättat så finns det fler än ett sätt att närma sig begreppet krökning. Vi vet sen innan enligt Euklides första postulat att det finns en unik rät linje mellan två punkter. Givet två punkter på en kurva, C , där vi låter de två punkterna närma sig varandra får vi derivatan, som riktningskoefficient för denna räta linje. På liknande vis ska jag nu visa att det finns en unik cirkel som går genom tre givna punkter och om vi låter dessa tre punkter närma sig varandra kan även detta leda oss till en definition av krökning.

Proposition 4.3. Givet tre godtyckliga punkter P, Q och R i planet finns en unik cirkel som går igenom dessa tre.

Bevis. Givet de tre godtyckliga punkterna i planet P, Q och R får vi triangeln $\triangle PQR$ med sidorna PQ, PR och QR . Ritar vi nu en mittpunktsnormal från två av dessa sidor ser vi att dessa linjer korsar varandra i en unik punkt som vi kallar C (se figur 4). Utifrån denna illustration drar vi slutsatsen att

$$\begin{aligned} |PC| &= |QC| \quad , \quad |QC| = |RC| \\ \Rightarrow |PC| &= |QC| = |RC| \end{aligned}$$

Alltså, det finns en unik punkt, C , sådan att den ligger på samma avstånd, r , från alla hörn i triangeln $\triangle PQR$. Om vi sedan konstruerar en cirkel sådan att den har mittpunkt i C och radien r ser vi, föga förvånande, att punkterna P, Q och R befinner sig på denna cirkel. \square



Figur 4: En omskriven cirkel med mittpunkt C och radien r .

Vi har nu visat geometriskt att det finns en unik cirkel som går igenom tre givna punkter. Nu vill vi formulera en generell formel för hur man hittar denna. Låt oss börja med att beskriva dessa punkter som vektorer istället. Låt oss för enkelhetens skull anta att punkten \vec{P} är origo och vidare att $\vec{Q} = (a_1, a_2)$ och $\vec{R} = (b_1, b_2)$. Mittpunktsnormalerna till dessa ges då av $(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}) + t(-a_2, a_1)$ respektive $(\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}) + s(-b_2, b_1)$.

Det vi vill göra sen är att hitta punkten, \vec{C} , där dessa två mittpunktsnormaler korsas. Värt att nämna är att kommande formler kräver en hel del räkning och kanske inte inses med ens. Men det vi vill i det stora hela är att hitta t och s sådana att

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}\right) + t(-a_2, a_1) &= \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}\right) + s(-b_2, b_1) \\ \Rightarrow t &= -\frac{-a_1b_1 + b_1^2 - a_2b_2 + b_2^2}{2(a_2b_1 - a_1b_2)}, \quad s = -\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_1b_1 - a_2b_2}{2(-a_2b_1 + a_1b_2)}. \end{aligned}$$

Sätter vi sedan in någon av dessa i mittpunktsnormalen får vi att

$$\vec{C} = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2(-a_1b_1 + b_1^2 + a_2b_2 + b_2^2)}{2(a_2b_1 - a_1b_2)}, \frac{a_2}{2} - \frac{a_1(-a_1b_1 + b_1^2 - a_2b_2 + b_2^2)}{2(a_2b_1 - a_1b_2)} \right).$$

För att sedan få radien, r , är det inte svårare än att beräkna längden av \vec{C} , det vill säga

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2(-a_1b_1 + b_1^2 + a_2b_2 + b_2^2)}{2(a_2b_1 - a_1b_2)} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_1(-a_1b_1 + b_1^2 - a_2b_2 + b_2^2)}{2(a_2b_1 - a_1b_2)} \right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2)}}{2(a_2b_1 - a_1b_2)} = \\ &= \frac{|(a_1, a_2)|| (b_1, b_2)|| (a_1 - b_2, a_2 - b_2)|}{2|(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0)|}. \end{aligned}$$

Definition 4.8. Givet tre punkter \vec{P} , \vec{Q} och \vec{R} i planet kallar vi den unika cirkel som går genom dessa tre för den *omskrivna cirkeln* där

$$\vec{C} = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2(-a_1b_1 + b_1^2 + a_2b_2 + b_2^2)}{2(a_2b_1 - a_1b_2)}, \frac{a_2}{2} - \frac{a_1(-a_1b_1 + b_1^2 - a_2b_2 + b_2^2)}{2(a_2b_1 - a_1b_2)} \right)$$

är den *omskrivna cirkelns mittpunkt* och

$$\begin{aligned} r &= \frac{|(a_1, a_2)|| (b_1, b_2)|| (a_1 - b_2, a_2 - b_2)|}{2|(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0)|} = \\ &= \frac{|\vec{PQ}||\vec{PR}||\vec{QR}|}{2|\vec{PQ} \times \vec{PR}|} \end{aligned}$$

är den *omskrivna cirkelns radie*. Tolkar vi $|\vec{PQ} \times \vec{PR}|$ som arean av det parallelogram som spänns upp av \vec{PQ} och \vec{PR} kan vi även formulera den omskrivna cirkelns radie som

$$r = \frac{|\vec{PQ}||\vec{PR}||\vec{QR}|}{4A},$$

där A är arean av triangeln vars hörn ges av P , Q och R .

Då har vi både visat att det finns en unik cirkel som går genom tre givna punkter samt formulerat generella formler för denna cirkelns mittpunkt och radie. Det är hög tid att gå vidare till nästa steg.

4.6 Krökning via den omskrivna cirkeln

Här, i nästa steg, ska vi specificera oss lite. Istället för att låta de tre punkterna \vec{P} , \vec{Q} och \vec{R} vara helt godtyckliga låter vi dem vara tre godtyckliga punkter på en kurva, $\mathbf{f}(t)$, i planet. Vi kan då formulera våra punkter så att

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \mathbf{f}(t_0) \\ \vec{Q} &= \mathbf{f}(t_1) \\ \vec{R} &= \mathbf{f}(t_2),\end{aligned}$$

där $t_0 < t_1 < t_2$. Dessa formar en triangel med sidorna

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \vec{Q} - \vec{P} = \mathbf{f}(t_1) - \mathbf{f}(t_0) \approx \mathbf{f}'(t_0)\Delta t \\ \overrightarrow{QR} &= \vec{R} - \vec{Q} = \dots \approx \mathbf{f}'(t_1)\Delta t \\ \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \dots \approx (\mathbf{f}'(t_0) + \mathbf{f}'(t_1))\Delta t.\end{aligned}$$

Vidare sätter vi in dessa i vår formel för den omskrivna cirkelns radie, vilket ger

$$\begin{aligned}r &= \frac{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{QR}||\overrightarrow{PR}|}{2|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{PQ}|} = \frac{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{QR}||\overrightarrow{PR}|}{2|\overrightarrow{QR} \times (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})|} \approx \\ &\approx \frac{|\mathbf{f}'(t_0)||\mathbf{f}'(t_1)||\mathbf{f}'(t_0) + \mathbf{f}'(t_1)|}{2\left|\mathbf{f}'(t_1) \times \frac{\mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{f}'(t_1)}{\Delta t}\right|}.\end{aligned}$$

Låter vi nu alla $t_i \rightarrow t_1$ och antar att $\mathbf{f}(t) \in C^2$ (se definition 2.3) ser vi bland annat att

$$\begin{aligned}\lim_{t_i \rightarrow t_1} &= \mathbf{f}'(t_0) + \mathbf{f}'(t_1) = 2\mathbf{f}'(t_1) \\ \lim_{t_i \rightarrow t_1} &= \frac{\mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{f}'(t_1)}{\Delta t} = \mathbf{f}''(t_1),\end{aligned}$$

vilket ger oss att

$$\begin{aligned}\lim_{t_i \rightarrow t_1} &\frac{|\mathbf{f}'(t_0)||\mathbf{f}'(t_1)||\mathbf{f}'(t_0) + \mathbf{f}'(t_1)|}{2\left|\mathbf{f}'(t_1) \times \frac{\mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{f}'(t_1)}{\Delta t}\right|} = \frac{|\mathbf{f}'(t_1)|^3}{|\mathbf{f}'(t_1) \times \mathbf{f}''(t_1)|} = \\ &= \frac{(f'_1(t_1)^2 + f'_2(t_1)^2)^{\frac{3}{2}}}{f'_1(t_1)f''_2(t_1) - f''_1(t_1)f'_2(t_1)}.\end{aligned}$$

Men vänta, ser inte detta uttryck lite väl bekant ut? Det borde det göra i alla fall, för jämför vi det med uttrycket (3) för krökning ser vi nämligen att det är dess invers. Tittar vi dessutom på definition 4.5 för krökningsradie ser vi att den är definierad som just den inverterade krökningen.

Därmed kan vi konstatera att om vi har tre godtyckliga punkter på en plan kurva och sedan låter dessa punkter närma sig varandra så går den omskrivna cirkelns radie mot krökningsradien. På samma sätt går även den omskrivna cirkeln mot själva krökningscirkeln. Därmed har denna omskrivna cirkel och kurvan \mathbf{f} kontakt av grad 2 (bevisas senare i proposition 6.4). Lägg även märke till att vi här kunde komma fram till samma slutsats med vår helt godtyckliga parameter t istället för båglängden, s .

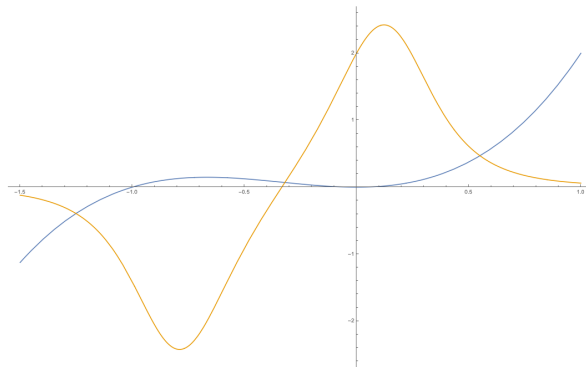
Definition 4.9. (*Alternativ definition.*) Givet en C^1 -kurva i planet, $\mathbf{f}(t)$, ges dess *krökning*, $\kappa = \kappa(t)$ i punkten $\mathbf{f}(t)$ av

$$\kappa = \frac{f_1' f_2'' - f_1'' f_2'}{(f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

där f_i' då är den partiella derivatan med avseende på t .

Exempel 4.5. Låt oss betrakta tredjegradskurvan $y = x^3 + x^2$, som på parameterform kan beskrivas som $\mathbf{f}(t) = (t, t^3 + t^2)$. Dess krökning ges då av

$$\kappa = \frac{6t + 2}{(1 + (3t^2 + 2t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



Figur 5: En graf över kurvan $y = x^3 + x^2$ (blå) och dess krökning (gul).

Vidare skulle man kunna fråga sig saker angående kurvans krökning. Till exempel, var kröker den sig kurvan som mest? Vad händer med krökningen då $t \rightarrow \infty$? För att svara på första frågan vill vi hitta t sådana att $\kappa' = 0$. Detta blir en del knöliga uträkningar som jag inte ska besvara er med. Ni får helt

enkelt lita på mig när jag säger att krökningen är som störst för $t \approx -0,8$ och $t \approx 0,1$, vilket vi i figur 5 borde se stämmer ganska bra.

För att svara på den andra frågan konstaterar vi att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6t + 2}{(1 + (3t^2 + 2t)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

vilket vi i princip kan tolka som att kurvan går att likna vid en rät linje då $t \rightarrow \infty$. På samma sätt ser vi att samma sak gäller då $t \rightarrow -\infty$.

4.7 Relationen mellan κ och ρ

Om vi stannar kvar i exempel 4.5 en kort stund kan vi även fråga oss vad som händer då $\kappa \rightarrow 0$. I figur 5 ser vi till exempel att $\kappa = 0$ precis i originalkurvans inflexionspunkt. Vi kom ju även fram till att $\kappa \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$. Eftersom vi definierat krökningsradien som $\rho = \frac{1}{\kappa}$ får detta konsekvensen att $\rho \rightarrow \infty$ (och därmed även krökningscirkeln) då $\kappa \rightarrow 0$. På samma sätt får vi ju även att $\rho \rightarrow 0$ då $\kappa \rightarrow \infty$.

Vidare kan vi även undersöka relationen mellan κ' och ρ' . Av definition 4.9 ges κ på formen $\frac{g(t)}{h(t)}$ där kvotregeln för derivering sedan ger oss

$$\kappa' = \frac{g'(t)h(t) - g(t)h'(t)}{(h(t))^2}. \quad (5)$$

Då $\rho = \frac{1}{\kappa}$, ges ρ därmed på formen $\frac{h(t)}{g(t)}$, vilket ger oss

$$\rho' = \frac{h'(t)g(t) - h(t)g'(t)}{(g(t))^2}, \quad (6)$$

där vi nu ser att $\kappa' = \rho' = 0$ då $g'(t)h(t) = g(t)h'(t)$. Vi kan alltså konstatera att de har lokala extrempunkter på samma ställen, men av olika karaktär. Detta kommer vi ha nytta utav senare när vi undersöker evolutans egenskaper.

5 Evoluta

Nu borde vi ha alla ingredienser för att börja tala om arbetets absoluta huvudämne, nämligen evoluta. Rent krasst kommer det handla om hur vi från en given funktion kan generera en ny funktion med hjälp av krökningscirkel. Låter det inte spännande?

5.1 Evoluta av en parametrisk kurva

Definition 5.1. Givet en C^2 -kurva, $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$, i planet definierar vi dess *evoluta*, $\mathbf{E}(t)$, som mängden av dess krökningscentra. Av definition 4.6 får vi därmed att

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{f}(t) + \rho(t)\mathbf{N}(t)$$

där $\rho(t)$ då är krökningsraden och $\mathbf{N}(t)$ är huvudnormalen. Detta ger oss vidare att

$$\mathbf{E}(t) = \left(f_1(t) - \frac{f_2'(t)(f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2)}{f_1'(t)f_2''(t) - f_1''(t)f_2'(t)}, \quad f_2(t) + \frac{f_1'(t)(f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2)}{f_1'(t)f_2''(t) - f_1''(t)f_2'(t)} \right). \quad (7)$$

5.2 Några vanliga exempel

Exempel 5.1. En godtycklig ellips på parameterform ges av

$$\mathbf{f}(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Av (7) får vi då att

$$\mathbf{E}(t) = \left(\frac{\cos^3(t)(a^2 - b^2)}{a}, \frac{\sin^3(t)(b^2 - a^2)}{b} \right).$$

Exempel 5.2. Parabeln $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$ har evolutan

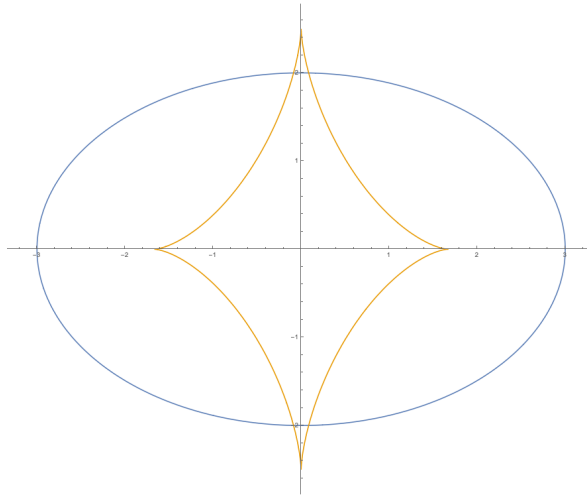
$$\mathbf{E}(t) = \left(-4t^3, \frac{1 + 6t^2}{2} \right),$$

vilken presenteras i figur 7.

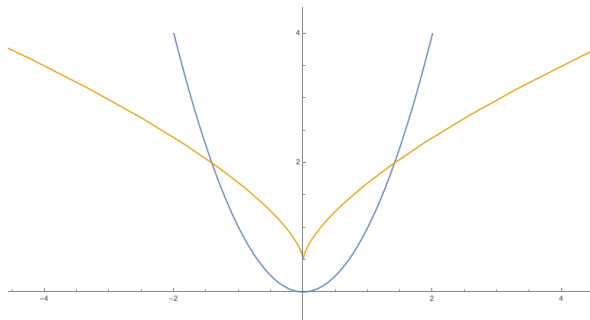
Exempel 5.3. Parametriseringen för en cirkel bör vara bekant vid det här laget och ges av

$$\mathbf{f}(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

I exempel 4.4 kom vi fram till att krökningscentrum för en cirkel alltid ges av dess mittpunkt. Därför kan vi konstatera att en cirkels evoluta ges av endast en punkt, nämligen cirkelns mittpunkt.



Figur 6: En ellips (blå) och dess evoluta (gul).



Figur 7: Kurvan $y = x^2$ (blå) och dess evoluta (gul).

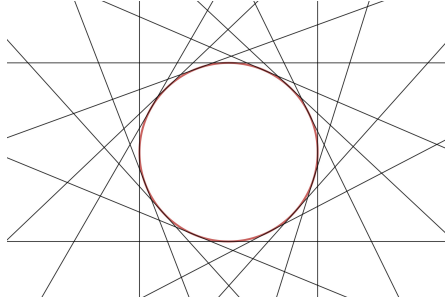
6 Egenskaper hos evolutor

I Courants *Differential and Integral Calculus, Vol.I*, [1, s. 307-310] presenteras en handfull egenskaper hos evolutor som jag nu ska presentera.

6.1 Tangentvektorerna

Vi börjar med att kolla in hur tangentvektorerna hos en kurva $\mathbf{f}(s)$ och dess evoluta $\mathbf{E}(s)$ förhåller sig till varandra. Vi observerar att vi återigen har båglängd, s , som parameter och därmed från proposition 4.1 och 4.2 gäller det att

$$f_1'^2 + f_2'^2 = 1 \quad \text{samt} \quad f_1' f_1'' + f_2' f_2'' = 0.$$



Figur 8: En cirkel och dess tangenter.

Vidare från definition 4.5 och 4.3 får vi att

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{f_2''}{f_1'} = -\frac{f_1''}{f_2'}$$

$$\Rightarrow \rho f_2'' = f_1' \quad \text{sam} \quad \rho f_1'' = -f_2'. \quad (8)$$

Uttrycket för evolutan (7) kan nu förenklas och skrivas som

$$\mathbf{E}(s) = (f_1 - \rho f_2', f_2 + \rho f_1') \quad (9)$$

där (8) och (9) sedan ger oss tangentvektorn

$$\mathbf{E}'(s) = (f_1' - \rho f_2'' - \rho' f_2', f_2' + \rho f_1'' + \rho' f_1') = (-\rho' f_2', \rho' f_1'). \quad (10)$$

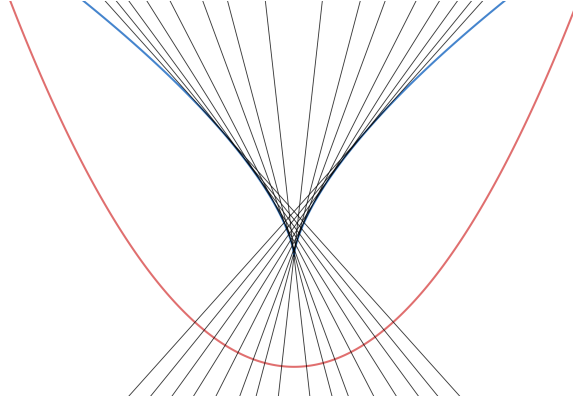
Betraktar vi nu

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{f}' = -\rho' f_2' f_1' + \rho' f_1' f_2' = 0$$

så konstaterar vi att evolutans tangentvektor är en normal till kurvan eller att kurvans normal är tangent till evolutan. Det visar sig även att detta ger oss ett nytt sätt att se på evoluta. Men för att förstå det måste vi i först veta vad ett envelopp är.

Definition 6.1. Givet en mängd kurvor i planet, M , kallar vi kurvan (om den finns) som i varje punkt tangerar något element i M samt tangerar varje element i M för mängdens *envelopp*.

Exempel 6.1. Låt M vara mängden av tangenter till enhetscirkeln. Enveloppen av M blir därmed enhetscirkeln självt (se figur 8).



Figur 9: En parabel (röd) tillsammans med dess evoluta (blå) och ett par normaler (svarta).

Proposition 6.1. Givet en kurva, $\mathbf{f}(s)$, ges dess *evoluta*, $\mathbf{E}(s)$, av enveloppen av kurvans normaler.

I exempel 6.1 såg vi att en kurva är enveloppen till sina tangenter. Tidigare kom vi även fram till att evolutans tangenter är normaler till kurvan. I figur 9 kan vi sedan se hur evolutan därmed kan ses som enveloppen av kurvans normaler.

6.2 Evolutans spetsar

På de flesta evolutor uppstår spetsar, eller hörn (se figur 6 och 7). Dessa beror på singulariteter på evolutan.

Definition 6.2. En *singulär punkt* på en kurva $\mathbf{f}(t)$ är en punkt där derivatorna $f'_1 = f'_2 = 0$. Med andra ord, punkter på kurvan där tangentvektorn ges av nollvektorn.

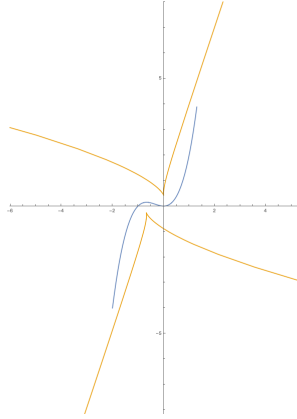
Vidare, för att hitta singulariteter på evolutan behövs evolutans tangentvektor. Av (10) får vi

$$\mathbf{E}'(s) = (-\rho' f'_2, \rho' f'_1),$$

där vi sedan ser att

$$\begin{aligned} (-\rho' f'_2, \rho' f'_1) &= \vec{0} \\ \Rightarrow \rho'(-f'_2, f'_1) &= \vec{0} \\ \Rightarrow \rho' &= 0. \end{aligned}$$

Vi observerar däremot att den sista implikationen endast gäller då motsvarande punkt på den ursprungliga kurvan är icke-singulär, det vill säga då $\mathbf{T}'(s) =$



Figur 10: Kurvan $y = x^3 + x^2$ (blå) och dess evoluta (gul)

$(f'_1, f'_2) \neq \vec{0}$. Vi ser alltså att dessa spetsar uppstår där krökningsradiens derivata, $\rho' = 0$. Av (5) och (6) vet vi att detta även implicerar att $\kappa' = 0$ då vi har spetsar på evolutan.

Exempel 6.2. Om vi återigen betraktar tredjegradskurvan $y = x^3 + x^2$ från exempel 4.5 får vi efter en del räkning evolutan

$$\mathbf{E}(t) = \left(-\frac{t^2(-3 + t(2 + 3t)^3)}{6t + 2}, \frac{1 + t^2(6 + 5t(4 + 3t))}{6t + 2} \right).$$

I figur 5 kunde vi se hur krökningen beter sig i förhållande till \mathbf{f} . Om vi nu istället betraktar figur 10 kan vi se hur evolutan beter sig i förhållande till \mathbf{f} . Vi vet nu att evolutan har sina spetsar då $\rho'(t) = \kappa'(s) = 0$. Vi har från exempel 4.5 att $\kappa'(t) = 0$ då $t \approx -0,8$ och $t \approx 0,1$ och det är även för dessa t :n evolutan har sina spetsar.

Några andra egenskaper vi kan få ut av detta är att då \mathbf{f} är konkav så hamnar evolutan under kurvan och då \mathbf{f} är konvex hamnar evolutan över kurvan.

En sista sak som bör nämnas angående det här exemplet är vad som händer då kurvan har en inflexionspunkt, det vill säga där $\kappa = 0$. Evolutan är inte definierad då $\kappa = 0$ eftersom $\rho = \frac{1}{\kappa}$ och division med 0 ej är definierad. Däremot vet vi sedan innan att $\rho \rightarrow \infty$ då $\kappa \rightarrow 0$, vilket i sin tur leder till att även evolutan sticker iväg. Detta är också precis vad vi ser i figur 10 i alla ändrar på den gula kurvan, att den sticker iväg.

6.3 Båglängd och krökningsradie

Då går vi vidare till att jämföra evolutans båglängd med krökningsradien. Låt oss kalla evolutans båglängd från en godtycklig punkt för σ . Med hjälp av (10)

och proposition 4.1 får vi sedan att

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \sigma'^2 = |\mathbf{E}'|^2 = (-\rho' f_2')^2 + (\rho' f_1')^2 = \rho'^2.$$

Väljer vi en lämplig riktning på σ indikerar detta även att

$$\sigma' = \rho'$$

för $\sigma \neq 0$. Integrerar vi nu båda sidor får vi

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \rho_1 - \rho_0,$$

där vi nu med tydlighet ser att evolutans båglängd mellan två punkter är lika med skillnaden i motsvarande krökningsradier. Observera däremot att detta endast gäller för segment som inte innehåller några spetsar på evolutan.

6.4 Parallella kurvor

I den här delen ska det visas att parallella kurvor har samma evoluta. Men för att kunna göra det är det lite andra saker vi måste veta först.

Som bekant är \mathbf{N} och \mathbf{T} ortogonala, det vill säga

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}' &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Det är även känt sen innan att $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1 \Rightarrow \mathbf{N}' \cdot \mathbf{N} = 0$. Att \mathbf{N} är ortogonal mot både \mathbf{T} och \mathbf{N}' implicerar även att \mathbf{N}' är parallell med \mathbf{T} , med andra ord

$$\mathbf{N}' = \alpha \mathbf{T}.$$

Av definition 4.4 får vi även att $\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$. Sätter vi nu in allt detta i (11) får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}' &= 0 \\ \Rightarrow \alpha \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha + \kappa &= 0 \\ \Rightarrow \alpha &= -\kappa \\ \Rightarrow \mathbf{N}' &= -\kappa \mathbf{T}. \end{aligned} \tag{12}$$

Lemma 6.1. Givet en kurva \mathbf{f} i planet med krökningsradie ρ ges krökningsradien till en parallell kurva, \mathbf{f}_λ , med avstånd λ av

$$\rho_\lambda = \rho - \lambda.$$

Bevis. Givet en godtycklig kurva, \mathbf{f} , ges en parallell kurva med avstånd λ av

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_\lambda &= \mathbf{f} + \lambda \mathbf{N} \\ \Rightarrow \mathbf{f}'_\lambda &= \mathbf{f}' + \lambda \mathbf{N}' = \mathbf{T} - \lambda \kappa \mathbf{T} = (1 - \lambda \kappa) \mathbf{T} \\ |\mathbf{f}'_\lambda| &= 1 - \lambda \kappa.\end{aligned}$$

Av definition 4.1 får vi därmed att

$$\frac{ds_\lambda}{ds} = |\mathbf{f}'_\lambda| = 1 - \lambda \kappa.$$

Vidare har vi även

$$\mathbf{T}_\lambda(s_\lambda) = \frac{\mathbf{f}'_\lambda}{|\mathbf{f}'_\lambda|} = \frac{(1 - \lambda \kappa) \mathbf{T}(s)}{1 - \lambda \kappa} = \mathbf{T}(s),$$

där derivering med avseende på s_λ ger att

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}_\lambda(s_\lambda)}{ds_\lambda} &= \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds_\lambda} \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{T}_\lambda(s_\lambda)}{ds_\lambda} &= \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_\lambda} \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{T}_\lambda(s_\lambda)}{ds_\lambda} &= \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} \cdot \frac{1}{1 - \lambda \kappa}.\end{aligned}$$

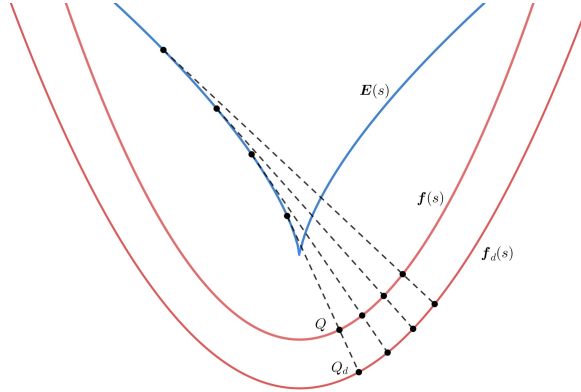
Definition 4.2 för krökning ger sedan att

$$\kappa_\lambda = \left| \frac{d\mathbf{T}_\lambda(s_\lambda)}{ds_\lambda} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} \cdot \frac{1}{1 - \lambda \kappa} \right| = \frac{\kappa}{1 - \lambda \kappa},$$

där definition 4.5 för krökningsradie slutligen ger oss

$$\rho_\lambda = \frac{1}{\kappa_\lambda} = \frac{1 - \lambda \kappa}{\kappa} = \rho - \lambda.$$

□



Figur 11: Två parallella kurvor, \mathbf{f} och \mathbf{f}_d , med deras evoluta, \mathbf{E} .

Proposition 6.2. Parallella kurvor har samma evoluta.

Bevis. Givet en godtycklig kurva \mathbf{f} ges en parallell kurva med avstånd d (se figur 11) som bekant av

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{f} + d\mathbf{N}$$

där vi alldeles nyss i lemma 6.1 kommit fram till att $\rho_d = \rho - d$. Den parallella kurvans evoluta ges således av

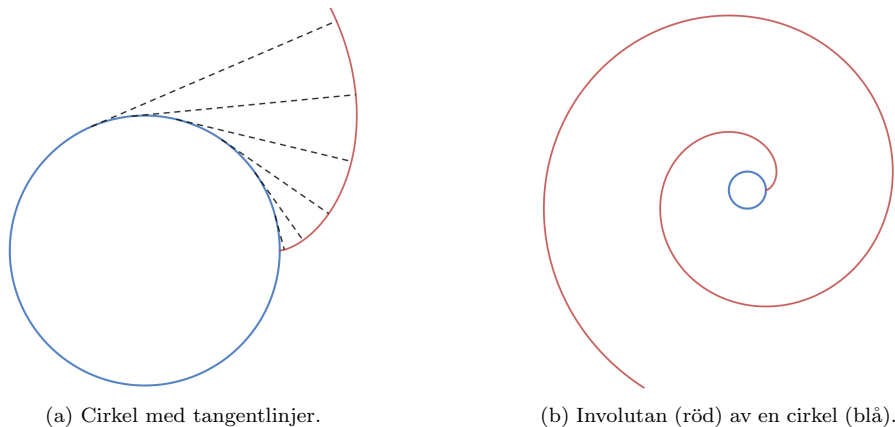
$$\mathbf{E}_d = \mathbf{f}_d + \rho_d\mathbf{N} = \mathbf{f} + d\mathbf{N} + (\rho - d)\mathbf{N} = \mathbf{f} + \rho\mathbf{N} = \mathbf{E},$$

där vi ser att vi får samma evoluta som för den ursprungliga kurvan. Det vill säga, parallella kurvor har samma evoluta. \square

6.5 Involuta

Föreställ dig nu en evoluta, \mathbf{E} , och att det ligger en otänjbar tråd längs med denna kurva. Den sista snutten av tråden viker sedan av från kurvan tangentiellt på så sätt att slutändan ges av punkten Q på kurvan \mathbf{f} . Fortsätter vi sedan att linda upp tråden på det här sättet kommer punkten Q att beskriva kurvan \mathbf{f} . Det är faktiskt så att ordet evoluta kommer från latinets *evolvere linea* som betyder ungefär utrullad linje [5]. Vidare kallas då kurvan \mathbf{f} för involutan till \mathbf{E} .

Definition 6.3. Givet en C^2 -kurva, $\mathbf{f}(t)$, i planet definierar vi dess *involuta* som



(a) Cirkel med tangentlinjer.

(b) Involutan (röd) av en cirkel (blå).

Figur 12: Konstruktion av involuta.

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{f}(t) - \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} \left(\int_a^t |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau + l_0 \right),$$

där l_0 då är längden av den bit som viker av tangentiellt från kurvan i början.

Exempel 6.3. Låt oss nu rita en involuta av en cirkel tillsammans på det här sättet. I figur 12a ser vi hur den otänjbara tråden viker av tangentiellt från cirkeln allt eftersom vi lindar upp tråden från cirkeln. Fortsätter vi att linda upp tråden på det här viset får vi tillslut involutan som visas i figur 12b.

Ska vi istället till att få fram en formel för involutan konstaterar vi att för en cirkel med radie r och centrum i origo gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= (r \cos(t), r \sin(t)) \\ \mathbf{f}'(t) &= (-r \sin(t), r \cos(t)), \\ |\mathbf{f}'(t)| &= \sqrt{(-r)^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = r. \end{aligned}$$

Detta infört i definitionen för involuta ger sedan

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= r(\cos(t), \sin(t)) - \frac{r(-\sin(t), \cos(t))}{r} \int_0^t r d\tau = \\ &= r(\cos(t) + t \sin(t), \sin(t) - t \cos(t)), \end{aligned}$$

vilket även är kurvan som illustreras i figur 12b.

Proposition 6.3. Givet en kurva, $\mathbf{f}(s) \in C^2$, i planet är kurvan involutan av dess evoluta, för segment där $\rho' > 0$ eller $\rho' < 0$.

Bevis. Det här beviset är för fallet då $\rho' > 0$. En involuta av en evoluta kan med hjälp av definition 6.3 då beskrivas som

$$\mathbf{C} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}'}{|\mathbf{E}'|} \left(\int_0^s |\mathbf{E}'(\tau)| d\tau + l_0 \right).$$

Eftersom $\mathbf{E} = \mathbf{f} + \rho\mathbf{N}$ kan vi beskriva dess derivata med hjälp av (12) som

$$\mathbf{E}' = \mathbf{f}' + \rho'\mathbf{N} + \rho\mathbf{N}' = \mathbf{T} + \rho'\mathbf{N} - \rho\kappa\mathbf{T} = \rho'\mathbf{N}.$$

Vidare ger detta att

$$\mathbf{C} = \mathbf{f} + \rho\mathbf{N} - \mathbf{N} \left(\int_0^s \rho'(\tau) d\tau + l_0 \right) = \mathbf{f} + (\rho(0) - l_0)\mathbf{N},$$

som vi ser är lika med \mathbf{f} just då $\rho(0) = l_0$.

□

I början av arbetet nämnde jag att vi inte skulle tala så mycket om användningsområden men här kommer i alla fall ett. För det är nämligen så att cirkeln involuta är helt essentiell när man konstruerar de flesta av dagens kugghjul, så kallade *involute gears*. Det man gör i stora drag är att konstruera kugghjulens tänder på så vis att den övre delen ges av just en cirkels involuta. En skiss för hur dessa kugghjulständer kan se ut ser vi i figur 13. Det har visat sig fördelaktigt att använda just denna funktion eftersom det resulterar i att två sammanfallande kugghjul endast har kontakt i en enda punkt, vilken minskar friktionen [7].

6.6 Den osculerande cirkeln

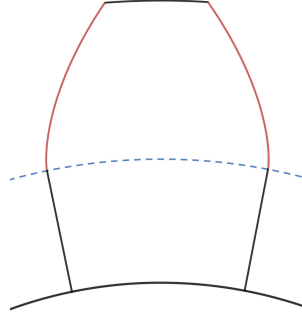
Som jag nämnde i anmärkning 4.1 skulle vi vänta med att bevisa att krökningscirkeln är den osculerande cirkeln tills vi hade tillräckligt med kött på benen. Tiden är nu kommen så här kommer det.

Proposition 6.4. En plan kurva $\mathbf{f}(s)$ och dess krökningcirkel $\mathbf{C}(\theta)$ har kontakt av grad 2 i en given punkt $\mathbf{f}(s_0)$.

Bevis. Det vi i stora drag vill visa är att

$$\mathbf{f}^{(i)}(s) = \mathbf{C}^{(i)}(\theta)$$

för $0 \leq i \leq 2$. För \mathbf{f} gäller som bekant att



Figur 13: En tand på ett kuggjul där de rödmarkerade partierna är involutan till den blåstreckade cirkelbågen.

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(s) &= (f_1, f_2) \\ \mathbf{f}'(s) &= (f'_1, f'_2) = \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{f}''(s) &= (f''_1, f''_2) = \mathbf{T}'(s) = \kappa \mathbf{N}(s).\end{aligned}$$

Med hjälp av (4) får vi sedan parametriseringen

$$\mathbf{C}(\theta) = \rho(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \mathbf{E}(s)$$

av krökningscirkeln. Om vi istället har krökningscirkelns båglängd, s_c , som parameter där $\theta = \frac{s_c}{\rho}$, får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(s_c) &= \rho \left(\cos\left(\frac{s_c}{\rho}\right), \sin\left(\frac{s_c}{\rho}\right) \right) + \mathbf{E}(s) \\ \mathbf{C}'(s_c) &= \left(-\sin\left(\frac{s_c}{\rho}\right), \cos\left(\frac{s_c}{\rho}\right) \right) \\ \mathbf{C}''(s_c) &= \frac{1}{\rho} \left(-\cos\left(\frac{s_c}{\rho}\right), -\sin\left(\frac{s_c}{\rho}\right) \right).\end{aligned}$$

Vidare vill vi hitta s_{c_0} som motsvarar s_0 så att

$$\mathbf{f}(s_0) = \mathbf{C}(s_{c_0}).$$

Då vi har båglängd som parameter får vi av (9) att

$$(f_1, f_2) = \left(f_1 + \rho \left(\cos\left(\frac{s_{c_0}}{\rho}\right) - f'_2 \right), f_2 + \rho \left(\sin\left(\frac{s_{c_0}}{\rho}\right) + f'_1 \right) \right).$$

Vi noterar att denna likhet gäller för s_{c_0} sådan att

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{s_{c_0}}{\rho}\right) = f'_2 \\ \sin\left(\frac{s_{c_0}}{\rho}\right) = -f'_1 \end{cases} \\ \Rightarrow s_{c_0} = \rho \arctan\left(\frac{-f'_1}{f'_2}\right).$$

Vidare ger oss detta att

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'(s_{c_0}) &= (f'_1, f'_2) = \mathbf{f}'(s_0) \\ \mathbf{C}''(s_{c_0}) &= \frac{1}{\rho}(-f'_2, f'_1) \end{aligned}$$

där vi ser att $\mathbf{C}''(s_{c_0})$ har samma längd och riktning som $\kappa\mathbf{N}(s_0) = \mathbf{f}''(s_0)$. Med andra ord, kurvan \mathbf{f} och dess krökningscirkel \mathbf{C} har kontakt av grad 2 i punkten $\mathbf{f}(s_0)$ och krökningscirkeln är därmed den osculerande cirkeln i denna punkt.

□

7 En babushka av evolutor

Nu när vi har lite koll på vad evoluta faktiskt är så är det hög tid att vi börjar använda oss utav detta för att konstruera lite mer avancerade grejer. För vad händer om vi har en funktion och dess evoluta och sedan hittar evolutan av dess evoluta och evolutan av den evolutan? Hur skulle det här kunna se ut? Frågorna är många och spänningen är olidlig så jag ska inte hålla på det längre. Här kommer en samling babushkor av evolutor.

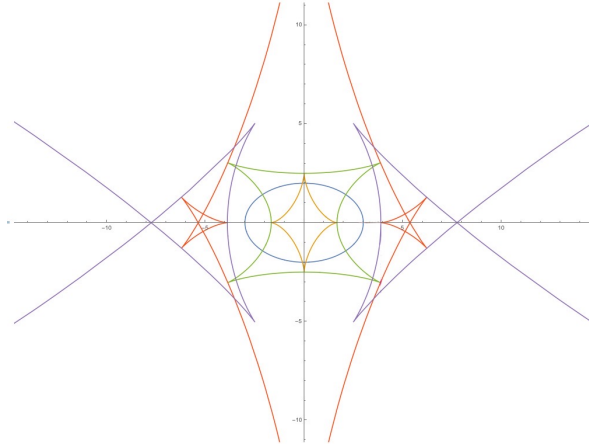
Exempel 7.1. Från exempel 5.1 vet vi att en ellips evoluta ges av en asteroid, vilket även illustreras i figur 6. Jag tänkte bespara er mödan att läsa igenom uträkningarna här. Den här gången får ni helt enkelt nöja er med att endast betrakta det stiliga resultatet i figur 14.

Exempel 7.2. Tänk dig en cirkel som rullar längs en rät linje. Skapar du sedan en kurva av en fix punkt på denna rullande cirkel får du en så kallad cykloid. Denna ges på parameterform av

$$\mathbf{f}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

Vidare får vi då att

$$\mathbf{E}(t) = (t + \sin(t), \cos(t) - 1),$$

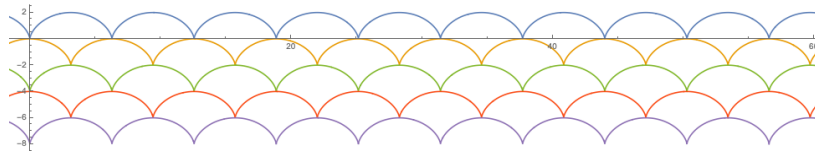


Figur 14: En ellips (blå), dess evoluta (gul) och vidare evolutor i ordningen grön, röd och till sist lila.

där vi gör parameterbytet $t = \tau + \pi$, vilket ger oss

$$\mathbf{E}(\tau) = (\tau + \pi + \sin(\tau + \pi), \cos(\tau + \pi) - 1) = (\tau - \sin(\tau) + \pi, 1 - \cos(\tau) - 2)$$

som vi ser även det är en cykloid men förskjuten med vektorn $(\pi, -2)$. Gör vi nu som i figur 14 där vi illustrerade en kurva, dess evoluta och vidare evolutor får vi i figur 15 ett slags fiskfjällsliknande mönster.



Figur 15: En cykloid (blå), dess evoluta (gul) samt vidare evolutor i ordningen grön, röd och lila.

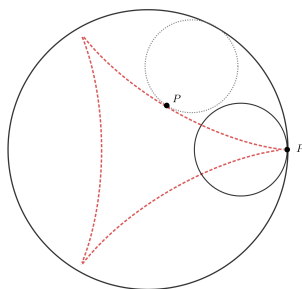
Exempel 7.3. I det förra exemplet använde vi oss av en cykloid. Låter vi nu istället cirkeln med den fixa punkten rulla längs insidan av en annan cirkel får vi en hypocykloid. Dessa kurvor kan se lite olika ut beroende på den lilla cirkelns radie i relation till den stora cirkelns radie. Är den stora cirkelns radie tre gånger så stor som den lilla cirkelns får vi till exempel en deltoid (se figur 16). På parameterform ges en godtycklig hypocykloid med centrum i origo av

$$\mathbf{f}(t) = \left((a - b) \cos(t) + b \cos\left(\frac{a - b}{b}t\right), (a - b) \sin(t) - b \sin\left(\frac{a - b}{b}t\right) \right) \quad (13)$$

där a är radien på den större cirkeln och b är radien på den mindre cirkeln med den fixa punkten.

I det här exemplet är det däremot hypocykloiden där den stora cirkelns radie är fem gånger så stor som den lilla cirkelns som ska undersökas. Närmare bestämt låter vi $a = 5$ och $b = 1$. Av (13) får vi då att

$$\mathbf{f}(t) = (4 \cos(t) + \cos(4t), 4 \sin(t) - \sin(4t)). \quad (14)$$



Figur 16: En hypocykloid där $\frac{a}{b} = 3$, även kallad deltoïd.

Vidare får vi då att

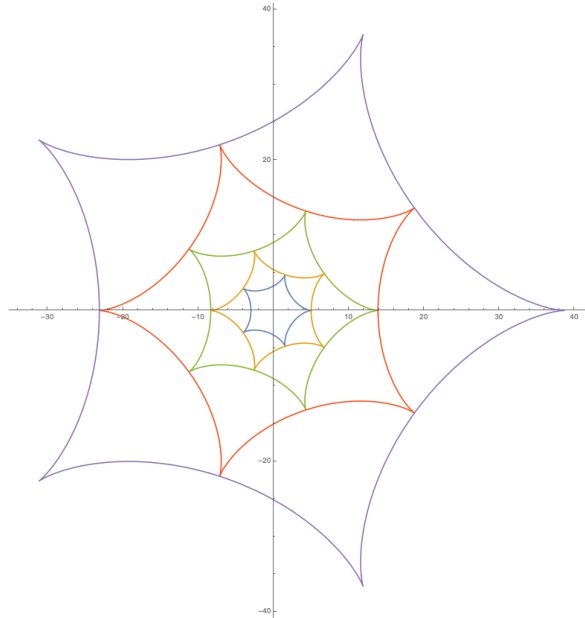
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \left(\frac{20}{3} \cos(t) - \frac{5}{3} \cos(4t), \frac{20}{3} \sin(t) + \frac{5}{3} \sin(4t) \right) = \\ &= \frac{5}{3} (4 \cos(t) - \cos(4t), 4 \sin(t) + \sin(4t)). \end{aligned}$$

Betraktar vi detta uttryck så märker vi att det är tämligen likt vårt ursprungliga uttryck (14). Undersöker vi saken lite noggrannare märker vi att det är en $\frac{5}{3}$ gånger så stor hypocykloid som är förskjuten $\frac{1}{10}$ -dels varv (se figur 17). På samma sätt som i tidigare exempel kan vi även lägga till vidare evolutor.

8 Sammanfattning

Då har vi alltså kommit fram till slutet. Tillsammans har vi nu definierat evoluta på två olika sätt. Dels som mängden av en kurvas krökningscentrum och dels som enveloppet av en kurvas normaler. Därefter har vi använt oss av evolutan för att rita kurvor och mönster.

På vägen dit fick vi dessutom en djupare förståelse för såväl krökning som oskulerande och omskrivna cirklar. Vi har definierat krökning på inte mindre än tre olika sätt.



Figur 17: En hypocykloid (blå), dess evoluta (gul) och vidare evolutor i ordningen grön, röd och slutligen lila.

“Men när ska vi ha användning för det här *i verkligheten?*”, frågar ni. “Det vet väl inte jag”, svarar jag. För det är ju så att ibland är matematik en formel på ett papper eller ett kugghjul i en maskin, men ibland kan det också få vara en dikt eller ett vackert mönster.

Referenser

- [1] R. Courant. *Differential and Integral Calculus I*. John Wiley & Sons, 1988.
- [2] P. Franklin. *Osculating Curves and Surfaces*. American Mathematical Society, 1926.
- [3] A. Persson, L-C. Böiers. *Analys I Flera Variabler*. Studentlitteratur AB, 2017
- [4] F. Soddy. *The Kiss Precise*. Nature 137, 1936.
- [5] Svenska Akademiens Ordbok (SAOB). *Evoluta*. Svenska Akademien, 1922.
- [6] Svenska Akademiens Ordbok (SAOB). *Oskulera*. Svenska Akademien, 1951.
- [7] Wikipedia contributors. *Involute gear*. Wikipedia, The Free Encyclopedia, 22 okt. 2019. (Hämtad 25 feb. 2020.)
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Involute_gear&oldid=922474305