



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

En okänd geometrisk sats och dess tillämpningar

av

**Matilda Söderberg Jansson**

2020 - No K20



# En okänd geometrisk sats och dess tillämpningar

Matilda Söderberg Jansson

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2020



## ABSTRACT

In most of the books covering Euclidean geometry a few well known geometrical theorems is mentioned, but they forget a quite interesting one. In this paper we present Routh's theorem and it's application on famous theorems from Menelaus and Ceva, using only elementary Euclidean geometry methods. To do that we give an introduction on the foundation of Euclidean geometry, it's history and summarize the development of geometry after Euclid's lifetime.

**Key words:** geometry, triangle, Euclid

## Innehåll

<b>1 Inledning</b>	<b>3</b>
<b>2 Euklidisk geometri</b>	<b>4</b>
2.1 Skärningar, vinklar och kongruens . . . . .	5
2.2 Likformighet, dess tre likformighetsfall och topptriangelsatsen . . . . .	7
<b>3 Geometri efter Euklides tid</b>	<b>14</b>
3.1 Menelaos . . . . .	15
3.2 Ceva . . . . .	17
<b>4 Rouths sats och bakgrund</b>	<b>21</b>
4.1 Edward John Routh . . . . .	21
4.2 Rouths sats . . . . .	22
4.3 Tillämpningar till Rouths sats . . . . .	26
<b>5 Avslutande ord</b>	<b>30</b>
<b>6 Referenslista</b>	<b>31</b>

# 1 Inledning

I de flesta böcker som omfattar den Euklidiska geometrin nämns endast ett fåtal geometriska satser från kända matematiker som Menelaos (ca. 70-140 e Kr.) (Tambour, 2002, s.72) och Giovanni Ceva (år 1627-1734) (Roero, 2019). En sats som dessa böcker ofta missar publicerades år 1891 av matematikern och ingenjören John Edward Routh (Fuller, 1997). Satsen som namnges Rouths sats består av två formler, där Cevas sats är omedelbar konsekvens och med viss omskrivning även Menelaos.

Syftet med den här uppsatsen är att presentera denna bortglömda sats och visa dess tillämpningar för att bevisa Menelaos och Cevas satser, genom att använda metoder från den elementära Euklidiska geometrin. För att göra det kommer vi redogöra grundläggande beståndsdelarna för den Euklidiska geometrin, utforska Euklides historia och hur geometrin kom att utvecklas efter Euklides livstid. Vi kommer även utforska Menelaos och Cevas bakgrund samt introducera deras välkända satser.

Jag vill tacka min alltid så positiva handledare Torbjörn Tambour för sitt engagemang och smittsamma arbetsvilja. Jag vill även tacka Paul Vaderlind för tipset av detta ämnesval.

## 2 Euklidisk geometri

”The *Elements* of Euclid is the most important mathematical text of Greek times and probably of all time”, menar Victor J. Katz (2009, s.51). Likt Katz anser många att Euklides verk från 300 f. Kr. har varit betydande för matematikens historia. Slående med hans verk var att den i tretton böcker sammanställde tidigare matematikers satser och bevis, samt sina egna, i en enkel struktur.

I *Elementas* sex första böcker berörs ämnet geometri, där en mängd två-dimensionella geometriska satser presenteras (Katz, 2009, s.52). Allt från kongruens och likformighet till Pythagoras sats och cirkelgeometri. Vad som är speciellt med verket är att alla satser och bevis utgår från några grundförutsättningar. Dessa kallas axiom, eller postulat enligt Euklides, och är antaganden som gjordes men aldrig bevisades (Tambour, 2002, s.67). I *Elementa* så bygger böckerna på fem stycken sådana. I artikeln från Tambour (2002, s.67-68) finner vi en något uppdaterad variation av dessa som lyder:

1. Genom två punkter går en och endast en linje.
2. Varje sträcka kan förlängas till en linje.
3. Givet en punkt och en sträcka, så finns det en cirkel med punkten som medelpunkt och sträckan som radie.
4. Alla räta vinklar är kongruenta.
5. Om en linje skär två andra linjer och de inre vinklarna på samma sida om den skärande linjen tillsammans blir mindre än två räta vinklar, så kommer de två andra linjerna vid förlängning att skära varandra på den sidan som de två inre vinklarna ligger.

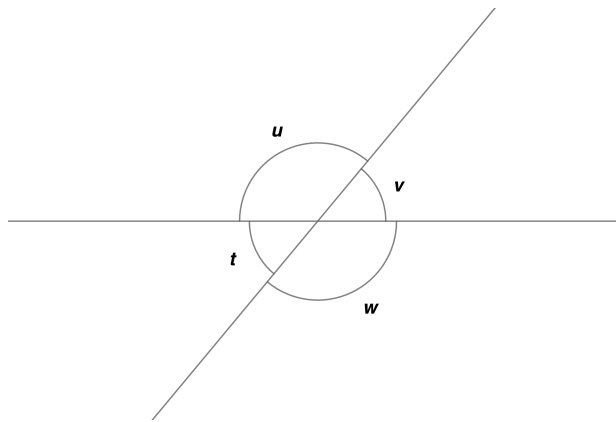
Fram till 1800-talet var det ett flertal matematiker som försökte bevisa det femte axiomet utifrån de första fyra. De ansåg att axiomet var för komplicerat för att vara ett axiom men fann att det inte gick att bevisa. För att bevisa satser på ett elementärt euklidiskt sätt, som Euklides och många matematiker under denna tid gjorde, användes endast jämförelser mellan storheter och verktyg som en passare samt en ograderad linjal (Tambour, 2002, s.48). Vilket är det sätt vi kommer använda oss av i denna uppsats. Trots att vi idag kan finna felaktigheter och luckor i *Elementas* resonemang och bevis har boken haft en betydande roll för dagens algebra.

I följande delavsnitt kommer vi gå igenom viktiga beståndsdelar inom den Euklidiska geometrin och väsentliga satser. Detta gör vi för att, liksom Euklides med sina axiom, bygga upp en grund varpå vi kan bevisa de framtida satserna.



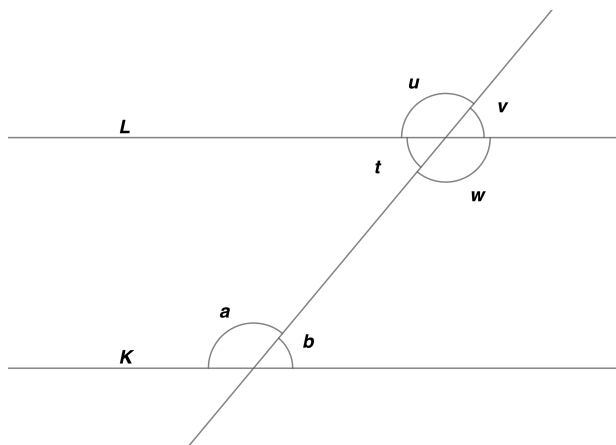
## 2.1 Skärningar, vinklar och kongruens

Linjer, längder och skärningar är grundläggande inom geometris värld. Begrepp har därmed uppkommit för att lättare förstå dess förhållanden mellan varandra. Man säger till exempel att om två linjer i planet inte skär varandra så är de *parallella* (Tambour, 2020a). När två linjer faktiskt skär varandra bildas fyra vinklar, i Figur 2.1 nedan kan vi avläsa dessa vinklar  $u$ ,  $v$ ,  $w$  och  $t$ . Vinklarna som är motstående i denna skärningspunkt, dvs  $u$  och  $w$  respektive  $v$  och  $t$ , kallar man för *vertikalvinklar* och är lika stora.



Figur 2.1

Om två linjer  $L$  och  $K$  skärs av en tredje, kallas denna tredje linje för en *transversal*, se Figur 2.2 nedan.



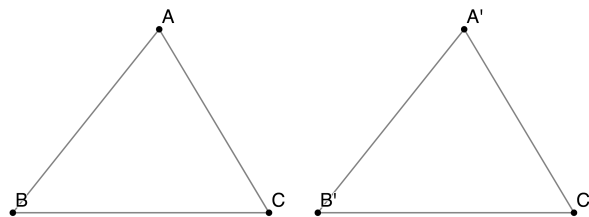
Figur 2.2

Vinklar som  $u$  och  $a$  respektive  $v$  och  $b$  är *likbelägna* vinklar medan vinklar som  $t$  och  $b$  respektive  $w$  och  $a$  är *alternatvinklar*. Om linjerna  $L$  och  $K$  däremot är parallella ger det att de likbelägna vinklarna och alternatvinklarna är lika stora. Detta har formulerats till en sats kallad alternatvinkelsatsen:

**Sats 2.1** (Alternatvinkelsatsen). *Antag att två linjer  $K$  och  $L$  skärs av en tredje transversal linje  $M$ . Om linjerna  $K$  och  $L$  är parallella så är alternatvinklar respektive likbelägna vinklar lika stora. Om det istället är ett par alternatvinklar eller likbelägna vinklar som är lika stora, ger det att  $K$  och  $L$  är parallella.*

För att uttrycka att två vinklar är lika stora använder vi oss av begreppet *kongruens*. Om två vinklar är kongruenta betecknar man det  $\angle u \cong \angle v$ . Det är inte endast vinklar som kan vara kongruenta utan även sidor, längder och geometriska figurer. I denna uppsats kommer vi betrakta kongruens av trianglar som definieras nedan.

**Definition 2.1** (Kongruens). *Två trianglar  $\triangle ABC$  och  $\triangle A'B'C'$  är kongruenta om motsvarande sidor ( $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  och  $BC \cong B'C'$ ) och vinklar ( $\angle A \cong \angle A'$ ,  $\angle B \cong \angle B'$  och  $\angle C \cong \angle C'$ ) är kongruenta. Kongruensen betecknar vi  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .*



Figur 2.3

Att två trianglar är kongruenta innebär att de har samma form och storlek. Definitionen för kongruens består av sex stycken villkor men det räcker med att vissa av de, i rätt kombinationer, är uppfyllda för att påvisa att resterande gäller. Dessa kombinationer av villkoren kallas de tre kongruensfallen:

**Sats 2.2** (Första kongruensfallet, SVS). *Om det i två trianglar  $\triangle ABC$  och  $\triangle A'B'C'$  gäller att  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  och  $\angle A \cong \angle A'$ , så är  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .*

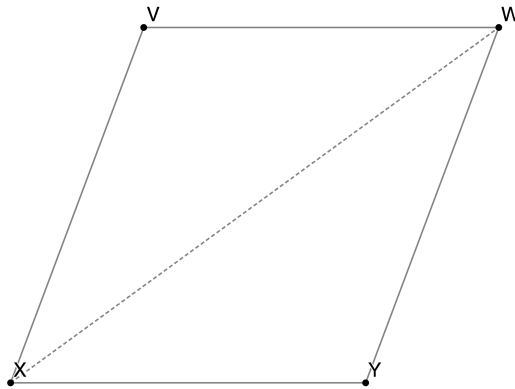
**Sats 2.3** (Andra kongruensfallet, SSS). *Om det i två trianglar  $\triangle ABC$  och  $\triangle A'B'C'$  gäller att  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  och  $BC \cong B'C'$ , så är  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .*

**Sats 2.4** (Tredje kongruensfallet, VSV). *Om det i två trianglar  $\triangle ABC$  och  $\triangle A'B'C'$  gäller att  $AB \cong A'B'$ ,  $\angle A \cong \angle A'$  och  $\angle B \cong \angle B'$ , så är  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .*

Kongruens mellan trianglar kan användas för att bevisa kongruens av andra geometriska figurer. Ett exempel på detta är parallelogramsatsen.

**Sats 2.5** (Parallelogramsatsen). *Om två kongruenta parallella sträckor  $XV$  och  $YW$  är sammanbundna med två sträckor  $XY$  och  $VW$  så är även dessa två kongruenta och parallella.*

*Bevis.* Drag en rät linje från punkten  $X$  till  $W$ , mellan de två parallellerna  $XV$  och  $YW$ . Enligt alternatvinkelsatsen ger det att vinklarna  $\angle YWX$  och  $\angle VXW$  är kongruenta, då de är alternatvinklar.



Figur 2.4

Då de två vinklarna har sidan  $XW$  gemensamt samt att  $XV \cong WY$  så ger det enligt första kongruensfallet att

$$\triangle XVW \cong \triangle WYX.$$

Enligt definitionen för kongruens ger det att  $XY \cong VW$ , men även att  $\angle VWX \cong \angle YXW$ . Då de två vinklarna är kongruenta och alternatvinklar får vi enligt alternatvinkelsatsen att de två sidorna  $XY$  och  $VW$  är parallella. Beviset är då klart.

□

## 2.2 Likformighet, dess tre likformighetsfall och topptriangelnsatsen

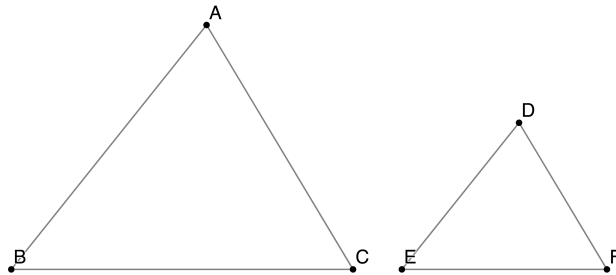
Två geometriska objekt är likformiga om de har samma form men nödvändigtvis inte samma storlek. Alla geometriska former som kvadrater och cirklar är likformiga, men för trianglar så skiljer det sig. Definitionen för likformighet för trianglar lyder:

**Definition 2.2.** *Två trianglar  $\triangle ABC$  och  $\triangle DEF$  är likformiga om*

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

och

$$\angle A \cong \angle D, \quad \angle B \cong \angle E, \quad \angle C \cong \angle F.$$



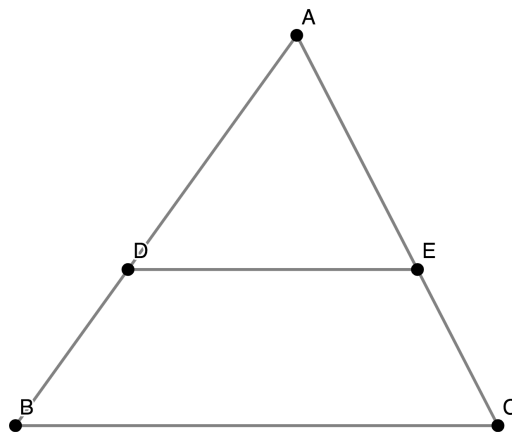
Figur 2.5

I definitionen förutsätts att  $|AB|$  är längden av sträckan  $AB$  och att motsvarande vinklar i trianglarna är kongruenta. Likformighet mellan två trianglar betecknas

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

För att visa likformighet mellan två trianglar krävs dock inte att visa att alla de sex förhållandena stämmer utan endast några i rätt kombinationer. Detta har resulterat i tre stycken likformighetsfall som presenteras senare i kapitlet. För att bevisa de tre fallen använder vi oss av topptriangelsatsen som vi nedan introducerar och bevisar.

**Sats 2.6** (Topptriangelsatsen). *Låt det i en given triangel  $\triangle ABC$  finns två punkter  $D$  och  $E$  på sidorna  $AB$  respektive  $AC$  sådana att  $DE$  är parallell med  $BC$ . Då gäller att  $\triangle ADE$  och  $\triangle ABC$  likformiga, dvs  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ .*



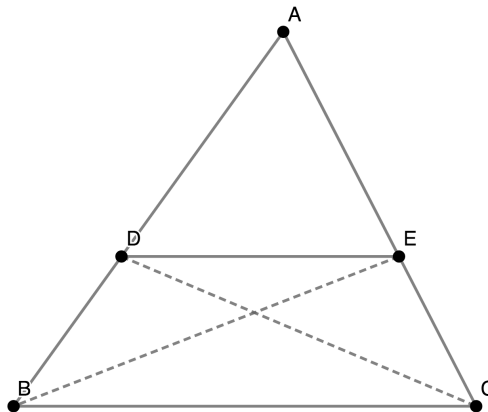
Figur 2.6

Grundläggande för bevisa satsen är att förstå hur vi använder begreppet *area* för trianglar. Euklides utvecklade aldrig ett begrepp som definierade area, utan resonerade kring olika egenskaper som underförstått kan anknytas till det implicita begreppet (Tambour, 2020b). Begreppet area är ett exempel på en modellering av vardagligt språk till matematiskt språk, där förklaringen “storleken av ett område” inte är tillräckligt för en matematisk definition som annars används i vardagen (ibid).

Denna uppsats syftar inte på att reda ut en korrekt matematisk definition av area-begreppet. Istället använder vi det för att undersöka förhållandet mellan trianglars sidor. Om vi undersöker förhållandet mellan två trianglar som har samma bas eller höjd ger det förhållandet mellan höjdernas respektive basernas längder. Men om två trianglar har samma höjd och bas är deras areor kongruenta. Arean av en triangel betecknas  $a(ABC)$ .

*Bevis.* Antag att  $D$  och  $E$  är två punkter på sidorna  $AB$  respektive  $AC$  sådana att  $DE$  är parallell med  $BC$  samt att  $DE$  är kortare än  $BC$ . Det ger att de likbelägna vinklarna  $\angle ADE$  och  $\angle DBC$  respektive  $\angle AED$  och  $\angle ECB$  är kongruenta. Vilket innebär att triangeln  $\triangle ADE$  och  $\triangle ABC$  motsvarande vinklar är kongruenta.

För att påvisa likformighet behöver vi visa att även triangeln  $\triangle ADE$  och  $\triangle ABC$  motsvarande sidor är proportionella. Detta gör vi genom att dra två linjer, en från punkten  $B$  och vidare genom  $E$  samt den andra från punkten  $C$  genom  $E$  enligt Figur 2.7.



Figur 2.7

Från figuren kan vi utläsa ett flertal trianglar som har samma höjd eller bas. Betrakta de två triangeln  $\triangle ABE$  och  $\triangle ADE$ . De har höjden gemensamt om den dras genom punkten  $E$  mot baslinjen  $AB$ . Förhållandet mellan dess areor ger då förhållandet mellan dess baser:

$$\frac{a(ABE)}{a(ADE)} = \frac{|AB|}{|AD|}.$$

På motsvarande sätt ger det

$$\frac{a(ACD)}{a(ADE)} = \frac{|AC|}{|AE|}.$$

Lägg märke till att triangelarna  $\triangle CBE$  och  $\triangle BCD$  har samma bas och höjd, där basen är  $BC$  och höjden är avståndet mellan de parallella linjerna  $DE$  och  $BC$ . Det medför att  $a(ABE) = a(ACD)$ . Då följer även att

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{a(ABE)}{a(ADE)} = \frac{a(ACD)}{a(ADE)} = \frac{|AC|}{|AE|}. \quad (1)$$

Nu ska vi visa att även  $|BC|/|DE|$  har samma förhållande. För att uttrycka förhållandet mellan dessa sidor betraktar vi de två triangelarna  $\triangle CBE$  och  $\triangle DEC$ . Triangelarna har samma höjd som är avståndet mellan de parallella linjerna  $DE$  och  $BC$ . Det ger att förhållandet mellan dess areor ger förhållandet mellan dess baser:

$$\frac{a(CBE)}{a(DEC)} = \frac{|BC|}{|DE|}. \quad (2)$$

Hädanefter betraktar vi att dessa trianglar har baslinjen  $CE$ . Om man studerar triangeln  $\triangle CBE$  ser man att  $\triangle ABE$  har samma höjd, dragen från punkten  $B$  mot baslinjen  $AC$ . Därav ger förhållandet mellan dess areor

$$\frac{a(CBE)}{a(ABE)} = \frac{|EC|}{|AE|}.$$

På motsvarande sätt ger det

$$\frac{a(DEC)}{a(ADE)} = \frac{|EC|}{|AE|}.$$

Det betyder att

$$\begin{aligned} \frac{a(CBE)}{a(ABE)} &= \frac{a(DEC)}{a(ADE)}, \\ \frac{a(CBE)}{a(DEC)} &= \frac{a(ABE)}{a(ADE)}. \end{aligned}$$

Från (1) och (2) innebär det att

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{a(CBE)}{a(DEC)} = \frac{a(ABE)}{a(ADE)} = \frac{|AB|}{|AD|}.$$

Förhållandet mellan  $|BC|/|DE|$  är lika med  $|AB|/|AD|$  och  $|AC|/|AE|$ . Triangelarna  $\triangle ADE$  och  $\triangle ABC$  är därmed likformiga och beviset är klart.  $\square$

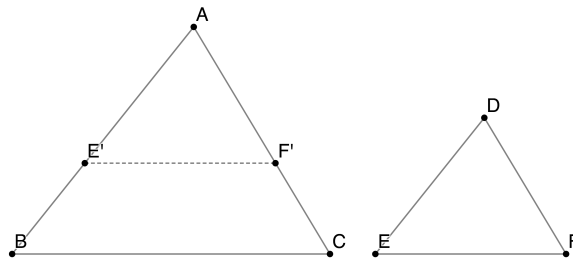
Som tidigare nämnts krävs det inte att visa alla de sex villkoren för likformighet för att påvisa likformighet mellan två trianglar. Om exempelvis två sidor har samma förhållande och dess mellanliggande vinklar är kongruenta är de likformiga trianglar. Utifrån detta kan vi beskriva tre likformighetsfall:

**Sats 2.7** (Första likformighetsfallet). *Antag att det för två trianglar  $\triangle ABC$  och  $\triangle DEF$  gäller att*

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} \quad \text{och} \quad \angle A \cong \angle D.$$

*Då är  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .*

*Bevis.* Antag att  $DE$  är kortare än  $AB$  och låt  $E'$  vara en punkt på linjestycket  $AB$  sådana att  $AE'$  är kongruent med  $DE$ . Låt även  $F'$  vara en punkt på  $AC$  sådana att  $E'F'$  är parallell med  $BC$ , enligt Figur 2.8 nedan.



Figur 2.8

Enligt topptriangelsatsen är  $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$ . Eftersom det är givet att  $|DE|/|AB| = |DF|/|AC|$ , ger det enligt topptriangelsatsen att

$$\frac{|AF'|}{|AC|} = \frac{|AE'|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|}.$$

Alltså är  $AF' \cong DF$  och utefter givna förutsättningar är  $\angle A \cong \angle D$ . Enligt första kongruensfallet så följer att  $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$ . Slutligen ger då detta att

$$\triangle DEF \cong \triangle AE'F' \sim \triangle ABC$$

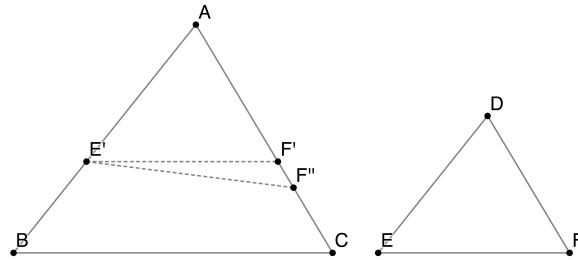
och beviset är klart. □

**Sats 2.8** (Andra likformighetsfallet). *Antag att det för två trianglar  $\triangle ABC$  och  $\triangle DEF$  gäller att*

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} \quad \text{och} \quad \angle A \cong \angle D.$$

*Då är  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .*

*Bevis.* Antag igen att  $DE$  inte är längre än  $AB$ . Låt  $E'$  och  $F'$  vara punkter på linjestycket  $AB$  respektive  $AC$  sådana att  $AE' \cong DE$  och  $AF' \cong DF$ . För att bevisa satsen krävs det att vi visar att  $E'F'$  är parallell med  $BC$ . Låt då  $F''$  vara en punkt på  $AC$  sådan att  $E'F''$  är parallell med  $BC$ , enligt Figur 2.9.



Figur 2.9

Då är  $\triangle ABC \sim \triangle AE'F''$  enligt topptriangelsatsen, vilket ger att

$$\frac{|AF''|}{|AC|} = \frac{|AE'|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|}.$$

Detta ger då att  $AE' \cong DE$  och  $AF'' \cong DF$ , som är analogt med att  $AF'' \cong DF \cong AF'$  enligt tidigare definition. Det visar att  $F'' = F'$  och att  $E'F'$  är parallell med  $BC$ . Det leder till att  $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$  och enligt topptriangelsatsen att

$$\frac{|E'F'|}{|BC|} = \frac{|AE'|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|}.$$

Det ger att  $E'F' \cong EF$ . Enligt andra kongruens fallet får vi då att

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

och beviset är klart. □

**Sats 2.9** (Tredje likformighetsfallet). *Antag att det för två trianglar  $\triangle ABC$  och  $\triangle DEF$  gäller att*

$$\angle A \cong \angle D, \quad \angle B \cong \angle E, \quad \angle C \cong \angle F.$$

*Då är  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .*

*Bevis.* Antag återigen att  $DE$  är kortare än  $AB$  och låt  $E'$  vara en punkt på  $AB$  så att  $AE' \cong DE$ . Låt även  $F'$  vara en punkt på  $AC$  sådana att  $E'F'$  är parallell med  $BC$ , se Figur 2.7 från första likformighetsfallet. Alternativvinkelsatsen ger då att

$$\angle AE'F' \cong \angle B \quad \text{och} \quad \angle AF'E' \cong \angle C.$$

Då gäller även att

$$\angle AE'F' \cong \angle E \quad \text{och} \quad \angle AF'E' \cong \angle F.$$



Tillsammans med ovanstående måste även  $\angle A \cong \angle D$  samt tidigare nämnt  $AE' \cong DE$ , ger det enligt tredje kongruensfallet att

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF.$$

Eftersom att det enligt topptriangelsatsen  $\triangle AE'F' \sim \triangle ABC$ , så gäller även att  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  och beviset är klart.  $\square$

### 3 Geometri efter Euklides tid

Euklides *Elementa* omfattar såklart inte all geometri. Efter hans tid finns det många framstående matematiker som utvecklat geometrin åt olika håll. Två viktiga figurer, som levde i slutet och strax efter Euklides livstid, var Arkimedes och Apollonius (Katz, 1977, s.95). Den grekiska forskaren Arkimedes (ca 287-212 f.Kr.) är främst känd för sina satser Arkimedes princip och Arkimedes skruv inom fysiken (ibid). Inom matematiken undersökte han cirkulära geometriska former och var den första att beräkna samt framställa formler för cirkelns area samt en sfärens volym och mantelarea. Den även grekiska Apollonius från Perga (ca 260-190 f.Kr.) intresserade sig för kägelsnitt och undersökte exempelvis ellipser, parabler och hyperbler (Tambour, 2002, s.72). Euklides sägs även ha skrivit något om detta ämne men det finns inte längre bevarat.

Trigonometrin kom att grundas kort därefter av Hipparchos från Niacea, för att senare utvecklas av Menelaos (ca 100 e.Kr.) och därefter även Ptolemaios (ca 150 e.Kr.) (Tambour, 2002, s.72). Menelaos studerade bland annat sfärisk trigonometri och hans forskning har haft en betydande roll för navigation och sjöfart (ibid). Vi kommer gå igenom en betydelsefull sats kallad Menelaos sats i nästa avsnitt.

Att försöka avbilda en tredimensionell verklighet på en tvådimensionell målarduk, lertavla eller stenvägg är något människan kämpats med sedan långt tillbaka. Det var dock under 1400-talet man började undersöka det så kallade perspektivmåleri med matematiska geometriska verktyg (Tambour, 2002, s.72). Filippo Brunelleschi och Leonardo da Vinci är några kända personer som utforskade perspektivmåleriet (Wikipedia, 2020a). Perspektivmåleri lade grunden för den *projektiva* geometrin som sedan började utvecklas på 1600-talet (ibid.).

Under 1600-talet utvecklade fransmannen René Descartes (1596-1650) en alternativ metod att angripa geometrin, som nu kallas *analytisk* geometri (Tambour, 2002, s.73). Metoden innebär att genom att införa ett koordinatsystem till de geometriska formerna kan omvandla geometrin till algebra. I slutet av 1600-talet återupptäckte matematikern Giovanni Ceva (1647-1734) Menelaos sats och fann en utveckling av den (Roero, 2019). Denna sats kom att kallas Cevas sats, som vi i ett följande avsnitt ska undersöka.

Matematiker i början av 1800-talet insåg att Euklides skrifter hade luckor i sina resonemang och flera felaktigheter. Från detta utvecklades den icke-Euklidiska geometrin som grundar sig på Euklides fyra första axiom och det femte axiom byttes ut. Två matematiker som grundade, främjade och publicerade artiklar om denna struktur var ryssen Nikolaj Lobatjevskij (1829-30) och ungraren Johann Bolyai (1831) (Tambour, 2002, s.73). Nu för tiden är det få som forskar med den elementära eller Euklidiska geometrin, men geometriämnet är mycket populärt.

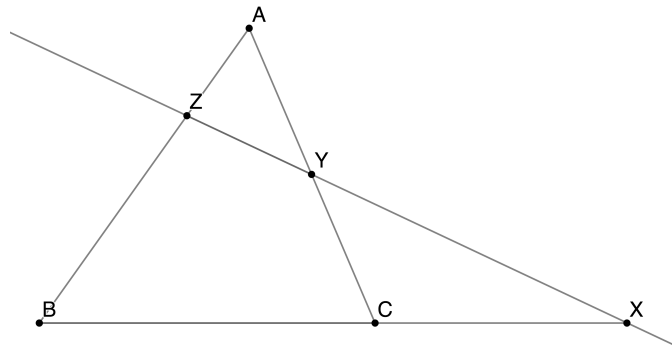
I följande kapitel ska vi presentera två kända matematiker som var verksamma efter Euklides livstid. Dessa två matematiker är Menelaos och Giovanni Ceva som formade varsin sats inom Euklidiska triangelgeometrin. I följande kapitel presenteras dessa satser och tillhörande bevis.

### 3.1 Menelaos

Trots sitt stora avtryck vet vi väldigt lite om Menelaos av Alexandria. Matematikern och astronomen levde mellan cirka 70-140 e Kr. och fick sitt namn då han säges vara född och uppvuxen i Alexandria i Egypten (Britannica, 2017). Resten av sitt liv tror man att han bosatte sig i Rom i Italien för att bedriva sin forskning. Menelaos sägs ha skrivit ett flertal böcker men det är endast boken *Sphaerica* i en arabisk översättning som har återfunnits (ibid). Boken, som består av tre böcker, behandlar sfärisk geometri och dess tillämpningar på astronomiska mått. I den tredje boken introduceras sfäriska trianglar och en sats, som sedan kom att kallas Menelaos sats.

**Sats 3.1** (Menelaos). *Låt  $\triangle ABC$  vara en triangel med en transversal som skär sidorna  $AB$  och  $AC$  i punkterna  $Z$  respektive  $Y$ . Låt även  $X$  vara skärningspunkten mellan transversal och en förlängning av sidan  $BC$ , då gäller att*

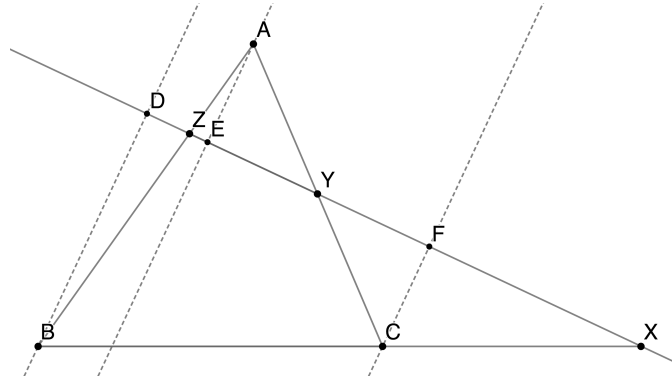
$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1$$



Figur 3.1

*Bevis.* För att bevisa satsen dras tre stycken linjer genom hörnen  $A$ ,  $B$  och  $C$  som alla är vinkelräta mot transversalen och parallella med varandra (Tambour, 2015). Skärningspunkterna mellan linjerna och transversalen benämns  $D$ ,  $E$  och  $F$ .

Om vi betraktar Figur 3.2, kan ett flertal likformiga trianglar urskiljas. Observera de två rätvinkliga trianglarna  $\triangle DZB$  och  $\triangle EZA$ . Då vinklarna  $\angle DZB$  och  $\angle EZA$  är



Figur 3.2

kongruenta så innebär det att  $\angle ZBD \cong \angle ZAE$  gäller. Enligt tredje likformighetsfallet är  $\triangle DZB \sim \triangle EZA$  och förhållandet mellan dess sidor kan uttryckas

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{|AE|}{|BD|}. \quad (3)$$

Se nu triangeln  $\triangle DBX$ . Då linjerna  $BD$  och  $CF$  är parallella får vi enligt topptriangelnsatsen att  $\triangle DBX \sim \triangle FCX$  samt att

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|BD|}{|CF|}. \quad (4)$$

Analogt fås att  $\triangle EAY \sim \triangle FCY$ , vilket ger att

$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{|CF|}{|AE|}. \quad (5)$$

Genom att multiplicera de tre förhållandena (1), (2) och (3) får vi att

$$\begin{aligned} \frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|EY|} &= \frac{|AE|}{|BD|} \cdot \frac{|BD|}{|CF|} \cdot \frac{|CF|}{|AE|} \\ &= \frac{|AE| \cdot |BD| \cdot |CF|}{|BD| \cdot |CF| \cdot |AE|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

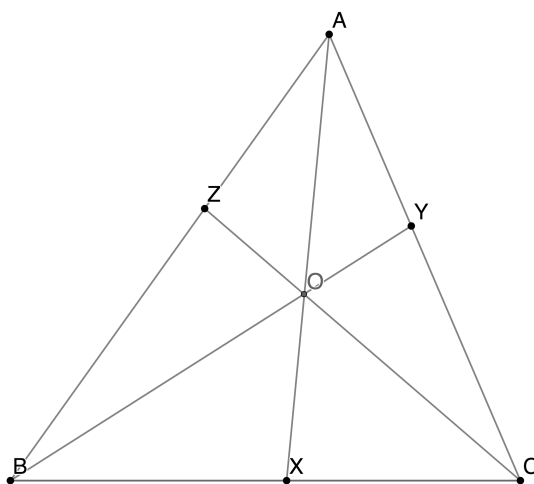
Eftersom detta är detsamma som gäller i satsen ovan är beviset klart.  $\square$

### 3.2 Ceva

Matematikern, ingenjören och fysikern Giovanni Benedetto Ceva levde mellan år 1647-1734 och föddes samt påbörjade sina studier i Milano, Italien (Roero, 2019). Han fortsatte sina studier på universitetet i Pisa, där han även kom att arbeta. Geometri var ett ämne Ceva var mycket intresserad av och forskade om i nästan hela sitt liv. År 1678 publicerade Ceva sitt första verk som hette *De lineis rectis*, som översatt till engelska blir "Concerning straight lines" (ibid). I detta verk fanns bevis för flertal geometriska satser varpå en idag känd sats som kallas Cevas sats.

**Sats 3.2 (Ceva).** *Antag att tre linjer  $AX$ ,  $BY$  och  $CZ$  i en given triangel  $ABC$  skär varandra i samma punkt  $O$  om och endast om*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1 \quad (6)$$

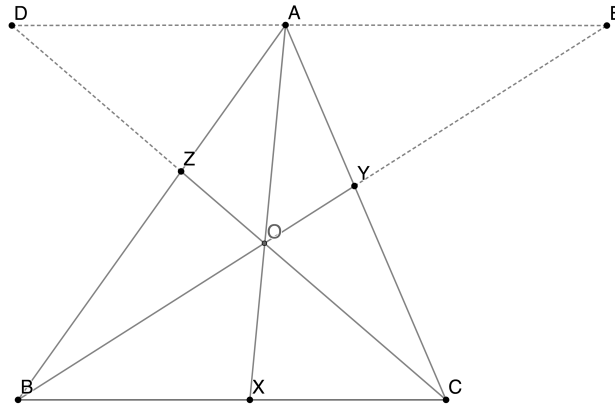


Figur 3.3

*Bevis.* För att bevisa satsen krävs det att visa att

1. Om linjerna  $AX$ ,  $BY$  och  $CZ$  skär varandra i samma punkt så gäller (6).
2. Om (6) gäller så skär linjerna varandra i samma punkt.

För att visa att den första delen stämmer drar vi en linje genom punkt  $A$  som är parallell med  $BC$ . Punkterna  $D$  och  $E$  är skärningspunkter med denna linje och en förlängning av linjerna  $BY$  och  $CZ$ , se Figur 3.4.



Figur 3.4

Enligt alternatvinkelsatsen ger det att likbelägna vinklar och dess alternatvinklar är lika stora. Från Figur 3.4 kan vi nu utläsa några likformiga trianglar. Då vinklarna  $\angle AZD$  och  $\angle BZO$  är vertikalkvinklar,  $\angle ADZ$  och  $\angle XCO$  samt  $\angle DAZ$  och  $\angle ZBX$  är alternatvinklar ger det enligt tredje likformighetsfallet att  $\triangle AZD \sim \triangle BCZ$ . På motsvarande sätt får vi att

$$\triangle AYE \sim \triangle BYC, \quad \triangle AOE \sim \triangle BOX \quad \text{och} \quad \triangle AOD \sim \triangle XOC.$$

Enligt definitionen för likformighet, se definition 2.2, gäller följande:

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{|AD|}{|BC|}, \quad \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{|BC|}{|AE|}, \quad (7)$$

$$\frac{|AE|}{|BX|} = \frac{|AO|}{|XO|}, \quad \frac{|AD|}{|XC|} = \frac{|AO|}{|XO|}. \quad (8)$$

Från (8) fås det att  $|AE|/|BX| = |AD|/|XC|$ , vilket ger att

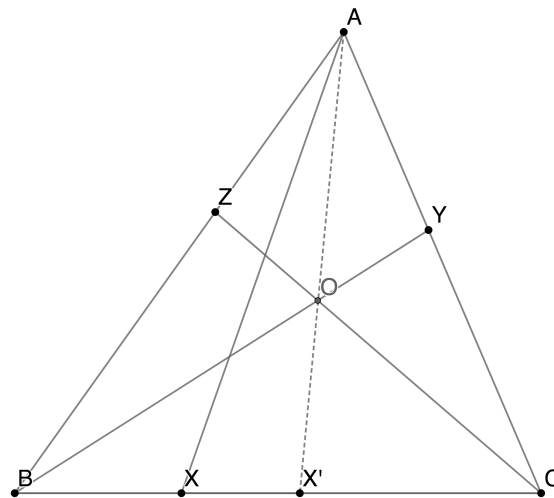
$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|AE|}{|AD|}. \quad (9)$$

Om man därefter multiplicerar högerleden i (7) med högerledet i (9) får vi

$$\begin{aligned} \frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} &= \frac{|AD|}{|BC|} \cdot \frac{|BC|}{|AE|} \cdot \frac{|AE|}{|AD|} \\ &= \frac{|AD| \cdot |BC| \cdot |AE|}{|BC| \cdot |AE| \cdot |AD|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Om linjerna  $AX$ ,  $BY$  och  $CZ$  skär varandra i en och samma punkt  $O$  så uppfyller detta (6). Vi har nu bevisat punkt 1 som påpekades i början av beviset.

För att bevisa punkt 2 så antar vi att (6) gäller och att de tre linjerna inte skär i en och samma punkt. Antag istället att  $O$  är skärningspunkten för de två linjerna  $BY$  och  $CZ$ . Drag en linje  $AO$  och fortsätt till den skär linjestycket  $BC$  i punkten  $X'$  som Figur 3.5 nedan.



Figur 3.5

Från den första delen av beviset ovan fås då att

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX'|}{|X'C|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

Å andra sidan så ger det enligt antagandet

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

Om de två kombineras ger det att

$$\begin{aligned} \frac{|BX'|}{|X'C|} &= \frac{|BX|}{|XC|} \\ |XC| \cdot |BX'| &= |BX| \cdot |X'C| \end{aligned} \tag{10}$$

Men eftersom  $|BX| < |BX'|$  och  $|X'C| < |XC|$  så är (10) en omöjlighet. Situationen att (6) stämmer trots att de tre linjerna inte skär varandra i en och samma punkt är en motsägelse. Därav kan  $X$  och  $X'$  inte vara två olika punkter utan måste sammanfalla.

Därav stämmer (6) endast om de tre linjerna skär varandra i en punkt och andra delen av satsen är klar samt därmed hela satsen bevisad.

□



## 4 Rouths sats och bakgrund

I följande kapitel ska vi lära oss mer om personen i fråga som skrivit Rouths sats och sedan bevisa satsen med hjälp av den Euklidiska geometri som har redovisats i tidigare kapitel. Därefter tillämpas Rouths sats för att bevisa Menelaos och Cevas satser.

### 4.1 Edward John Routh

Edward John Routh föddes år 1831 i Kanada men kom som 11-åring att flytta till England, där han senare började studera matematik (Fuller, 1977). Han inledde sina studier i London för att därefter ta sin examen i Cambridge. På examensprovet fick han det högsta resultatet för sin årskull, där man på Cambridge universitet får titeln "Senior Wrangler" för en sådan prestation (ibid). Efter sin examen började Routh år 1855 att jobba som privat studiecoach i matematik på Cambridge, vilket han kom att arbeta med i 33 år (Wikipedia, 2020b). Under sin tid som coach hjälpte han mer än 600 studenter varpå 27 av de, likt han, fick titeln "Senior Wrangler" (Fuller, 1977).

Förutom sitt pedagogiska arbete fann Routh tid till att skriva ett flertal böcker och artiklar samt att varje dag ta en två timmars promenad (Fuller, 1977). När Routh år 1888 avslutade sin anställning som studiecoach fortsatte han att forska och producera texter om allt från geometri och astronomi till vågor och vibrationer. Satsen som senare kom att namnges Rouths sats uppenbarade sig i för första gången i boken *Treatise on Analytical Statics with Numerous Examples* upplaga 1 år 1891 (Wikipedia, 2020b). Till den efterföljande andra upplagan hade en fotnot under satsen tillkommit:

*"The author has not met with these expressions for the areas of two triangles that often occur. He has therefore placed them here in order that the argument in the text may be more easily understood."*- Fuller (1977)

Enligt vissa uppkommer satsen i ett tidigare verk och detta är Rouths sätt att rentvå sig att han inte tidigare sett en sådan sats innan. Satsen sägs dock ha varit material till examensprov på Cambridge vilket gör situationen och sanningen något oklar (Wikipedia, 2020b). Routh somnade in i Juni år 1907 i Cambridge och blev 76 år gammal. Ett porträtt som några av hans elever finansierade ska sitta i matsalen i "The Petershouse" på Cambridge campus (Fuller, 1977).

Namnet E. J. Routh är känt hos ingenjörer som hanterar mekaniska kontrollsystem från den användbara algoritmen Routh-Hurwitz stabiliseringskriterium (Fuller, 1977). Med hjälp av tillämpningar av den tyska matematikern Adolf Hurwitz fungerar algoritmen som ett test för att kontrollera om ett linjärt dynamiskt system är stabilt (ibid). Utöver detta är matematikerns många verk och insatser sorgligt nog okända.

## 4.2 Rouths sats

I följande avsnitt presenteras Rouths sats som följs av ett tillhörande bevis. Formulering av satsen och bevismetod är utarbetad av Paul Vaderlind och har formulerats om av författaren.

**Sats 4.1** (Routh). *Låt  $X$ ,  $Y$  och  $Z$  vara tre godtyckliga punkter på vardera sida i triangeln  $\triangle ABC$  (Figur 5.1), som med linjer dragna mellan dessa bildar en triangel  $\triangle XYZ$ . Antag även att  $AX$ ,  $BY$  och  $CZ$  är tre linjer i triangeln  $\triangle ABC$  samt att*

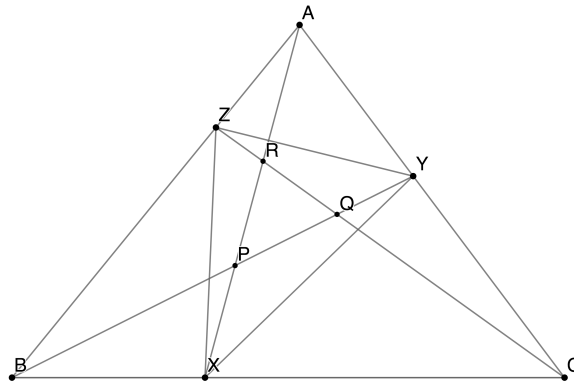
$$\frac{|BX|}{|XC|} = k, \quad \frac{|CY|}{|YA|} = l \quad \text{och} \quad \frac{|AZ|}{|ZB|} = m.$$

Om  $a(ABC)$  och  $a(DEF)$  är areorna för de givna trianglarna så är

$$\frac{a(XYZ)}{a(ABC)} = \frac{klm + 1}{(k+1)(l+1)(m+1)}.$$

Vidare, antag att de tre linjer  $AX$ ,  $BY$  och  $CZ$  skär varandra i punkterna  $P$ ,  $Q$  och  $R$ . Om  $a(ABC)$  och  $a(PQR)$  är areorna för de givna trianglarna så är

$$\frac{a(PQR)}{a(ABC)} = \frac{(klm - 1)^2}{(kl + k + 1)(lm + l + 1)(km + m + 1)}.$$



Figur 4.1

I de få publikationer där Rouths sats tas upp formuleras satsen på ett flertal olika sätt, där den vanligaste är att satsen syftar till att beräkna  $a(XYZ)$  respektive  $a(PQR)$ . Satsen uttrycks då istället genom att  $a(ABC)$  multipliceras i både högerled och vänsterled och därav beräknas areorna för  $\triangle XYZ$  respektive  $\triangle PQR$ .

För att bevisa satsen kan flertal olika sätt användas som antingen med vektorkalkyl, geometriska transformationer eller barycentriska koordinater. Dessa metoder sträcker sig utöver den elementära Euklidiska geometrin och gör det mer komplicerat än vad det måste vara. Satsen bevisas även i många fall som en tillämpning av Menelaos sats, där vi ska göra tvärt om. Beviset som presenteras här använder sig endast av grundläggande Euklidiska geometrikunskaper som har redovisats i tidigare avsnitt.

*Bevis.* Antag att

$$\frac{|BX|}{|XC|} = k, \quad \frac{|CY|}{|YA|} = l \quad \text{och} \quad \frac{|AZ|}{|ZB|} = m.$$

För att tydligt redovisa uträkningarna i beviset används nollskillda reella tal  $a$ ,  $b$  och  $c$  för att forma uttryck för triangelnas olika sidor. Då det är antaget att  $|BX|/|XC| = k$ , ansätter vi sidorna till

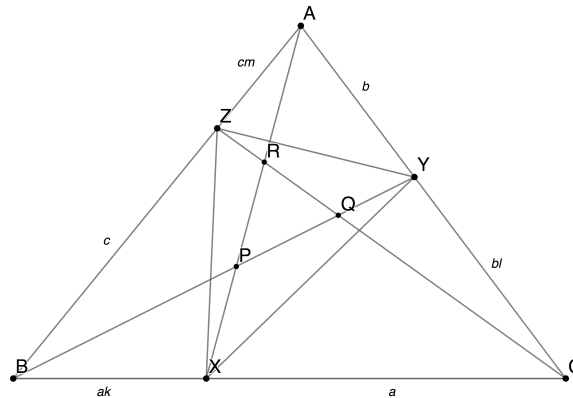
$$|BX| = ak \quad \text{och} \quad |XC| = a.$$

På samma sätt ansätter vi sidorna, som Figur 4.2 visar, till

$$|CY| = bl \quad \text{och} \quad |YA| = b$$

samt

$$|AZ| = cm \quad \text{och} \quad |ZB| = c.$$



Figur 4.2

Låt  $T_1 = a(XYZ)/a(ABC)$ . Då kan  $a(XYZ)$  uttryckas som  $a(ABC)$  subtraherat med arean för allt som inte tillhör  $\triangle XYZ$ . Det ger att

$$T_1 = \frac{a(ABC) - a(AYZ) - a(BZX) - a(CXY)}{a(ABC)},$$

som blir

$$T_1 = 1 - \frac{a(AYZ)}{a(ABC)} - \frac{a(BZX)}{a(ABC)} - \frac{a(CXY)}{a(ABC)}. \quad (11)$$

Vi studerar nu ett av segmentet från (9) som  $a(AYZ)/a(ABC)$ . För att uttrycka segmentet med hjälp av givna  $k$ ,  $l$  och  $m$  utför vi en division med  $a(ABY)$  som ger

$$\frac{a(AYZ)}{a(ABC)} = \frac{a(AYZ)/a(ABY)}{a(ABC)/a(ABY)} = \frac{|AZ|/|AB|}{|CA|/|YA|}.$$

Här används faktumet att de två trianglarna har samma höjd dragen från punkten  $Y$  mot baslinjen  $AB$  respektive från  $B$  mot basen  $CA$ . Förhållandet mellan trianglarnas areor ger därmed förhållandet mellan dess baser. Fortsatt ger det att

$$\frac{|AZ|/|AB|}{|CA|/|YA|} = \frac{cm/(cm+c)}{(bl+b)/b} = \frac{m/(m+1)}{l+1} = \frac{m}{(l+1)(m+1)}. \quad (12)$$

På motsvarande sätt beräknar vi att

$$\frac{a(BZX)}{a(ABC)} = \frac{k}{(m+1)(k+1)} \quad (13)$$

och

$$\frac{a(CXY)}{a(ABC)} = \frac{l}{(k+1)(l+1)}. \quad (14)$$

Vi sätter nu in (12), (13) och (14) i formel (11). Efter en uträkning ger det slutligen

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 - \frac{m}{(l+1)(m+1)} - \frac{k}{(m+1)(k+1)} - \frac{l}{(k+1)(l+1)} \\ &= \frac{(k+1)(l+1)(m+1) - m(k+1) - k(l+1) - l(m+1)}{(k+1)(l+1)(m+1)} \\ &= \frac{klm+1}{(k+1)(l+1)(m+1)}. \end{aligned}$$

Således är den första delen av satsen bevisad.

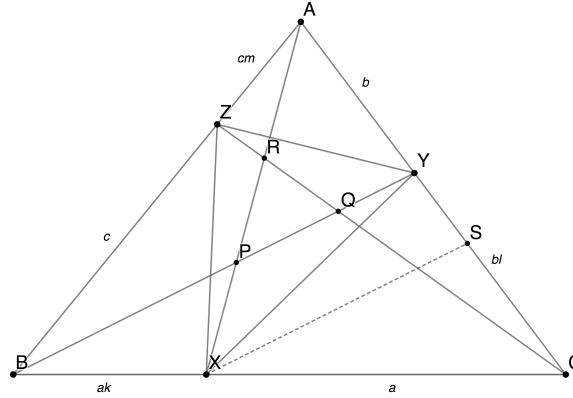
För att bevisa andra delen av satsen observerar vi först att

$$\frac{|XA|}{|PA|} = \frac{kl+k+1}{k+1} \quad (15)$$

gäller. För att inse detta drar vi en linje från punkten  $X$  parallellt med  $BY$  och skär sedan sidan  $AC$  i punkten  $S$ , se Figur 4.3.

Enligt topptriangelnsatsen ger detta att  $\triangle APY \sim \triangle AXS$  och följande förhållande

$$\frac{|XP|}{|PA|} = \frac{|SY|}{|YA|}$$



Figur 4.3

gäller. För att uttrycka segmentet med hjälp av givna  $k$ ,  $l$  och  $m$  utför vi en division med  $|CY|$  som ger

$$\frac{|SY|/|CY|}{|YA|/|CY|} = \frac{|BX|/|BC|}{|YA|/|CY|}.$$

Omskrivningen  $|SY|/|CY| = |BX|/|BC|$  är även trivalt enligt topptriangelnsatsen. Fortsatt ger det att

$$\frac{|BX|/|BC|}{|YA|/|CY|} = \frac{akl(ak+a)}{b/bl} = \frac{kl(k+1)}{1/l} = \frac{kl}{k+1}$$

Nu erhåller vi från (15) att

$$\frac{|XA|}{|PA|} = \frac{|XP|+|PA|}{|PA|} = \frac{|XP|}{|PA|} + \frac{|PA|}{|PA|} = \frac{kl}{k+1} + 1 = \frac{kl+k+1}{k+1},$$

vilket skulle visas och vi kan nu börja beviset för den andra delen av satsen.

Låt  $T_2 = a(PQR)/a(ABC)$ . Då kan  $a(PQR)$  uttryckas, likt första delen av beviset, på följande sätt

$$T_2 = \frac{a(ABC) - a(ABP) - a(BCQ) - a(CAR)}{a(ABC)}$$

som blir

$$T_2 = 1 - \frac{a(ABP)}{a(ABC)} - \frac{a(BCQ)}{a(ABC)} - \frac{a(CAR)}{a(ABC)}. \quad (16)$$

För att sedan fortsätta beviset studeras ett av dessa segment från (16) som  $a(ABP)/a(ABC)$ . Likt tidigare undersöker förhållandet mellan triangelarnas areor vilket ger oss vid division med  $a(ABX)$

$$\frac{a(ABP)}{a(ABC)} = \frac{a(ABP)/a(ABX)}{a(ABC)/a(ABX)} = \frac{|PA|/|XA|}{|BC|/|BX|}.$$

Med hänsyn till (15) samt att

$$\frac{|BC|}{|BX|} = \frac{ak+a}{ak} = \frac{k+1}{k},$$

ger det att

$$\frac{|PA|/|XA|}{|BC|/|BX|} = \frac{(k+1)/(kl+k+1)}{(k+1)/k} = \frac{(k+1)k}{(kl+k+1)(k+1)} = \frac{k}{kl+k+1}. \quad (17)$$

På motsvarande sätt beräknar vi att

$$\frac{a(BCQ)}{a(ABC)} = \frac{l}{lm+l+1} \quad (18)$$

och

$$\frac{a(CAR)}{a(ABC)} = \frac{m}{km+m+1}. \quad (19)$$

Vi sätter nu in (17), (18) och (19) i formel (16). Efter en elementär uträkning ger det slutgiltigen att

$$\begin{aligned} T_2 &= 1 - \frac{k}{kl+k+1} - \frac{l}{lm+l+1} - \frac{m}{km+m+1} \\ &= \frac{(klm-1)^2}{(kl+k+1)(lm+l+1)(km+m+1)}. \end{aligned}$$

Således är andra delen av satsen bevisad och därmed hela satsen.  $\square$

### 4.3 Tillämpningar till Rouths sats

I detta avsnitt ska vi ge exempel på hur Rouths sats kan tillämpas för att bevisa Menelaos och Cevas sats. Vi inleder med att återigen titta på Menelaos sats.

**Sats 4.2** (Menelaos). *Låt  $\triangle ABC$  vara en triangel med en transversal som skär sidorna  $AB$  och  $AC$  i punkterna  $Z$  respektive  $Y$ . Låt även  $X$  vara skärningspunkten mellan transversalen och en förlängning av sidan  $BC$ , så gäller att*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

*Bevis 2.* Menelaos sats följer ur första delen av Rouths sats, men där punkten  $X$  istället befinner sig på en förlängning av  $BC$ . För att formeln ska kunna tillämpas då  $X$  befinner sig utanför triangeln krävs det att vi uttrycker kvoten efter det. För uttrycka detta drar vi tre nya linjer: en linje från  $A$  vidare genom  $X$ , en linje från hörnet

$B$  genom punkten  $Y$  och en från  $C$  till  $Z$ . I detta första steg formulerar vi alltså om Rouths sats så att punkten  $X$  befinner sig utanför triangeln  $\triangle ABC$ .

Låt  $T_3 = a(XYZ)/a(ABC)$ . Vi kan då uttrycka  $a(XYZ)$  som  $a(ABX)$  subtraherat med de resterande areorna, vilket ger

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{a(ABX) - a(BXZ) - a(AYZ) - a(AXY)}{a(ABC)} \\ &= \frac{a(ABX)}{a(ABC)} - \frac{a(BXZ)}{a(ABC)} - \frac{a(AYZ)}{a(ABC)} - \frac{a(AXY)}{a(ABC)} \end{aligned} \quad (20)$$

Vi studerar nu närmare på segmentet  $a(ABX)/a(ABC)$  från (20). Då triangelarna har samma höjd från  $A$  mot baslinjen  $|BC|$  och  $|BX|$  ger divisionen mellan dess areor

$$\frac{a(ABX)}{a(ABC)} = \frac{|BX|}{|BC|} = \frac{ak}{ak-a} = \frac{k}{k-1}, \quad (21)$$

det vill säga förhållandet mellan dess baser.

Vi studerar nu närmare på segmentet  $a(BXZ)/a(ABC)$  från (20). För att uttrycka segmentet med hjälp av givna  $k$ ,  $l$  och  $m$  från Rouths sats utför vi en division med  $a(BCZ)$  som ger

$$\frac{a(BXZ)}{a(ABC)} = \frac{a(BXZ)/a(BCZ)}{a(ABC)/a(BCZ)} = \frac{|BX|/|BC|}{|AB|/|ZB|}.$$

Här används återigen att förhållandet mellan dess areor ger förhållandet mellan dess baslinjer om de har samma höjd. Fortsatt ger det att

$$\frac{|BX|/|BC|}{|AB|/|ZB|} = \frac{ak/(ak-a)}{(cm+c)/c} = \frac{k/(k-1)}{m+1} = \frac{k}{(k-1)(m+1)}. \quad (22)$$

På motsvarande sätt beräknar vi att

$$\frac{a(AYZ)}{a(ABC)} = \frac{m}{(l+1)(m+1)} \quad (23)$$

och

$$\frac{a(AXY)}{a(ABC)} = \frac{1}{(k-1)(l+1)}. \quad (24)$$

Vi sätter nu in (21), (22), (23) och (24) i (20) som ger

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{k}{k-1} - \frac{k}{(k-1)(m+1)} - \frac{m}{(l+1)(m+1)} - \frac{1}{(k-1)(l+1)} \\ &= \frac{k(l+1)(m+1) - k(l+1) - m(k-1) - (m+1)}{(k-1)(l+1)(m+1)} \\ &= \frac{klm-1}{(k-1)(l+1)(m+1)}. \end{aligned}$$

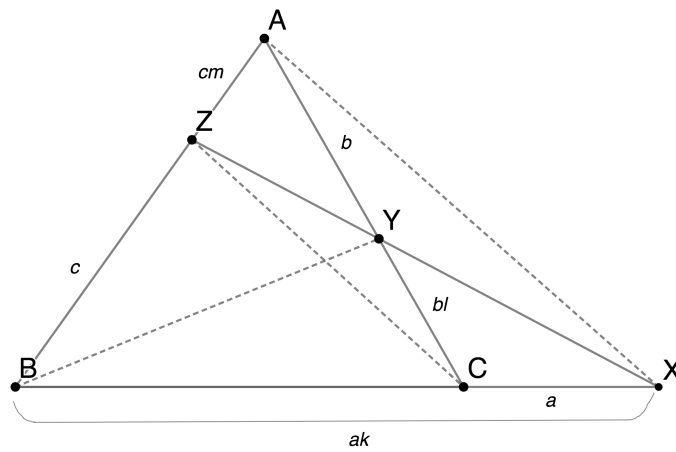
Det resulterar till att

$$\frac{a(XYZ)}{a(ABC)} = \frac{klm - 1}{(k-1)(l+1)(m+1)}.$$

Vi har nu uttryckt första delen av Rouths sats för när  $X$  befinner sig på en förlängning av  $BC$ . De tre punkterna  $X$ ,  $Y$  och  $Z$  ligger på en linje om och endast om

$$a(XYZ) = 0,$$

som i Figur 4.4.



Figur 4.4

Det vill säga om och endast om

$$\begin{aligned} klm - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} &= 1 \end{aligned}$$

Vilket är Menelaos sats och beviset är klart. □

Vi har nu tillämpat Rouths sats för att bevisa Menelaos sats. Vi tittar nu på Cevas sats, vars bevis är något kortare.

**Sats 4.3 (Ceva).** *Antag att tre linjer  $AX$ ,  $BY$  och  $CZ$  i en given triangel  $ABC$  skär varandra i samma punkt  $O$  om och endast om*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1 \tag{25}$$



*Bevis 2.* Cevas sats följer direkt från den andra delen av Rouths sats. Punkterna  $P$ ,  $Q$  och  $R$  sammanfaller i en punkt om och endast om

$$a(PQR) = 0.$$

Det vill säga om och endast om  $(klm - 1)^2 = 0$ . Vi får då att

$$\begin{aligned} & klm - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1 \end{aligned}$$

Vilket är Cevas sats och beviset är klart. □

## 5 Avslutande ord

Det finns ett flertal fascinerande geometriska satser som inte lyfts upp i ämnesomfattande litteratur, där Rouths sats är en av de. Jag hoppas denna uppsats har gett en insikt till geometrins breda omfattning och rika historia. Matematikens historia får tyvärr inte så stort utrymme i grundskolan och gymnasieskolans utbildning. Som blivande gymnasielärare i matematik är detta ett område att utforska. För trots den Euklidiska geometrins ålder lär man ut de grundläggande satserna i skolan än idag. Varför berättas det inte om alla de som utvecklat geometrin eller funnit tillämpningar på kända satser? Jag hoppas att denna uppsats väckt ett intresse att uppmärksamma matematikens grunder och att ni kanske likt Giovanni Ceva med Menelaos sats utvecklar det till något nytt.

## 6 Referenslista

- Britannica. (2017-01-20). Menelaus of Alexandria. Encyclopædia Britannica, inc. <https://www.britannica.com/biography/Menelaus-of-Alexandria>. Hämtad: 2020-04-29
- Fuller, A. T. (1977). Edward John Routh. *International Journal of Control*. Volym 26, andra upplagan. s. 169-173.
- Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: an introduction*. New York. Harper Collins. Tredje upplagan. s. 976.
- Roero, C. S. (2019-08-28). Giovanni Ceva. Encyclopædia Britannica, inc. <https://www.britannica.com/biography/Menelaus-of-Alexandria>. Hämtad: 2020-04-29
- Tambour, T. (2002). Euklidisk geometri. Matematiska institutionen. Stockholms universitet. Första upplagan. s. 47-48.
- Tambour, T. (2015). Menelaos sats. Matematiska institutionen. Stockholms universitet. [https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/20079/mod\\_resource/content/1/Menelaos.pdf](https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/20079/mod_resource/content/1/Menelaos.pdf). Hämtad: 2020-01-27
- Tambour, T. (2020a) Geometri föreläsning 2. Matematiska institutionen. Stockholms universitet. [https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/86668/mod\\_resource/content/0/GeometriNy2.pdf](https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/86668/mod_resource/content/0/GeometriNy2.pdf). Hämtad: 2020-02-07
- Tambour, T. (2020b) Geometri föreläsning 3. Matematiska institutionen. Stockholms universitet. [https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/86668/mod\\_resource/content/0/GeometriNy2.pdf](https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/86668/mod_resource/content/0/GeometriNy2.pdf). Hämtad: 2020-02-07
- Wikipedia. (2020a). Euclidean geometry. Wikipedia, The Free Encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euclidean\\_geometry&oldid=954697288](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euclidean_geometry&oldid=954697288). Hämtad: 2020-04-29
- Wikipedia. (2020b). Edward Routh. Wikipedia, The Free Encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euclidean\\_geometry&oldid=954697288](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euclidean_geometry&oldid=954697288). Hämtad: 2020-04-29