



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Dynamisk system i diskret tid

av

Andreas Ma

2020 - No K24

Dynamisk system i diskret tid

Andreas Ma

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Annemarie Luger

2020

Abstract

In this thesis, I give an introduction to the dynamic systems in discrete time and difference equations. Dynamic systems are systems that change overtime and these changes are governed by rules and laws. We use difference equations to describe the dynamic systems. The periodic points and cycles, and the equilibrium points with its stability are discussed in the thesis. The work concludes with the logistic equation and bifurcation which are used to describe the population growth.

Innehåll

1 Inledning	4
2 Dynamiska system och differensekvationer	5
2.1 Dynamiskt system	5
2.2 Differensekvationen	5
3 Fixpunkt	7
4 Stabilitetsteori	9
4.1 Stabil och instabil fixpunkt	10
4.2 Repellerande fixpunkt	13
4.3 Asymptotisk stabil fixpunkt	14
5 Kriterier för att avgöra stabilitet hos en fixpunkt	15
5.1 Grafisk Analys	16
6 Periodisk punkt och cykel	27
7 Logistiska Ekvationen	31
7.1 Fixpunkter till logistiska ekvationen	33
7.2 2-Cykel	36
7.3 Bifurkationsdiagram	39
7.4 Resultat	40
8 Avslutning	44
9 Referens	45

1 Inledning

Det här arbetet handlar om dynamiska system i diskret tid. Dynamiska system är system som förändras över tid. Det finns regler som styr förändringar inom systemet, och om vi känner till de reglerna och startvärden så finns det möjligheter för oss att förutsäga hur det ser ut härnäst. För att betrakta dynamiska system kommer vi att använda differensekvationer. Differensekvationer är motsvarigheten till differentialekvationer i diskret tid.

I början av denna rapport kommer vi att ge en introduktion till dynamiska system och differensekvationer i Kapitel 2. Dynamiska system kan hamna i ett läge där tillstånd inte ändras längre. Så kallade fixpunkter till differensekvationen. I Kapitel 3 och 4 ska vi undersöka fixpunkter och ge en definition på stabilitet hos en fixpunkt. Sedan kommer vi att presentera metoder och satser för att avgöra stabilitet i praktiken, vilket tas upp i Kapitel 5. I vissa fall förändras systemets tillstånd periodiskt vi förklarar vad det menas i Kapitel 6. Vi kommer att presentera en användning av ett dynamiskt system i biologi i Kapitel 7, där studerar vi den logistiska ekvationen som beskriver populationstillväxt. Avslutningsvis kommer vi att sammanställa vad vi har kommit fram till i Kapitel 8.

2 Dynamiska system och differensekvationer

2.1 Dynamiskt system

Vad är ett dynamiskt system? Vi definierar detta på följande sätt:

Definition 2.1 [3, s.1 – 3] *Ett dynamiskt system är en tripplett (X, t, Φ_t) , där X är ett tillståndsrum, t är tid och Φ_t är en familj evolutionsoperatorer på X .*

Tillståndsrum

De möjliga tillstånden för ett dynamiskt system utgörs av punkter i någon mängd X . Ett tillståndsrum för ett dynamiskt system är alla x som ligger i mängden X , och motsvarar alla tillåtna tillstånd för systemet, tillstånd vid tidpunkt t benämns x_t . Tillståndsrummet X är ofta utrustad med en topologi .

Tid

Evolution av ett dynamiskt system i diskret tid innebär att det ändrar sitt tillstånd med en tid $t \in \mathbb{N}$.

Evolutionsoperatör

Evolutionsoperator i ett dynamiskt system är de regler som bestämmer systemets tillstånd x_t vid en tidpunkt t utifrån ett initialtillstånd x_0 .

2.2 Differensekvationen

Enligt Persson och Böiers [1, s.42, s.126 – 127], kallas en funktion vars definitionsmängd består av de naturliga talen, eller eventuella en del av dessa, och en talföljd betecknas som $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. En talföljd kan definieras rekursivt: man ger en formel för värdet x_{n+1} i en punkt $n+1$ uttryckt i ett eller flera tidigare värden $x_n, x_{n-1}, x_{n-2} \dots x_0$. I det enklast fallet beror x_{n+1} endast på det föregående värdet x_n :

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

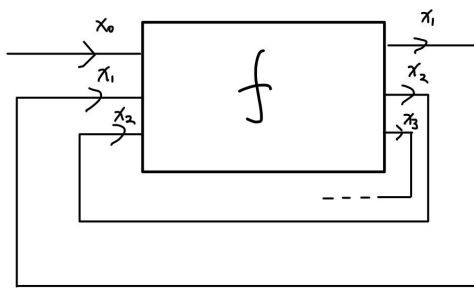
och $f(x)$ är ett givet uttryck. Detta kallas även för differensekvation. Tillsammans med ett ingångsvärde x_0 bestämmer Differensekvation (1) en talföljd,

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)), x_3 = f(f(f(x_0))), \dots, x_n = f^n(x_0),$$

med s.k iteration. Här definierar vi $f^n(x_0)$ som funktionen f sammansatt med sig själv n gånger

$$f^n(x_0) = \underbrace{f(f \dots (f(x_0)))}_{n \text{ st}}$$

Definition 2.2 Talföljden $(f^n(x_0))_{n \geq 0}$ kallas positiv bana till det dynamiska systemet som startar i x_0 och betecknas med $O^+(x_0)$.



Figur 1: funktion f itererar

Vi betraktar två exempel

Exemple 2.1 Bestäm x_4 till differensekvationen

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \\ x_0 = 1 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

Här är $f(x) = \frac{1}{1+x}$, vi får successivt

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{1+x_0} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{1+x_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{1+x_2} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}, \quad x_4 = \frac{1}{1+x_3} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$$

Här får vi $x_4 = \frac{5}{8}$.

Exemple 2.2 Differensekvation

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,7x_n \\ x_0 = 30 \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

beskriver prisförändringen av färsk potatis över tid, där x_n är kilopris dag n . Hur mycket kommer potatis att kosta dag 4?

Här är $f(x) = 0,7x$. Vi får

$$\begin{aligned}x_0 &= 30, & x_1 &= f(x_0) = 0,7 * 30 = 21, & x_2 &= f(x_1) = 0,7 * 21 = 14,7, \\x_3 &= f(x_2) = 0,7 * 14,7 = 10,29, & x_4 &= f(x_3) = 0,7 * 30 = 7,203.\end{aligned}$$

Svar: Färsk potatis kommer att kosta 7,203 kr/kg dag 4.

Detta är ett dynamiskt system, där x_n är ett tillstånd för det dynamiska systemet. Tolkning av x_n är priset på färsk potatis dag n . Mängden $\{f^n(x_0); x_0 \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N}\}_{n=0}^\infty$ är tillståndsrummet för systemet, dvs. alla möjliga pris på färsk potatis. Pris dag n bestäms av funktion $f(x)$, funktionen är då evolutionsoperator för systemet. Tillståndet ändras med en tid $T \in \mathbb{N}$, vilket gör att prisförändring sker i diskret tid, alltså en gång per dag i vårt exempel.

3 Fixpunkt

Exempel 2.2 visar att potatispris är strikt avtagande över tid och verkar gå mot 0 då $n \rightarrow \infty$. Om vi antar att $x_k = 0$ för något k , så blir

$$x_{k+1} = 0,7x_k = 0, \quad x_{k+2} = 0,7x_{k+1} = 0, \quad x_{k+3} = 0,7x_{k+2} = 0 \dots$$

Alltså kommer det inte finnas någon prisförändring för alla $n \geq k$.

Vi ser att systemets tillstånd inte alltid förändras över tid, det kan hända att tillståndet kommer i ett jämviktsläge, vilket gör att tillståndet förbli detta i framtiden. En sådan punkt kallas fixpunkt till dynamiska systemet. I det här avsnittet ska vi definiera och hitta fixpunkter till dynamiska system.

Definition 3.1 [2, s.9] Punkten x^* kallas fixpunkt till differensekvation $x_{n+1} = f(x_n)$ om $f(x^*) = x^*$.

Vi kan tolka definitionen på så sätt: om punkten x^* är en fixpunkt, så är $\{x^*\}_{n=0}^\infty$ en konstant lösning till Differensekvation (1). Detta medför att om vi startar med startvärdet $x_0 = x^*$, så blir

$$x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^*$$

$$x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^*$$

$$x_3 = f(x_2) = f(x^*) = x^*$$

...

$$x_n = f(x_{n-1}) = f(x^*) = x^*.$$

Exemplet nedan visar hur man hittar fixpunkten till en differensekvation.

Exemple 3.1 *Hitta fixpunkten till differensekvation*

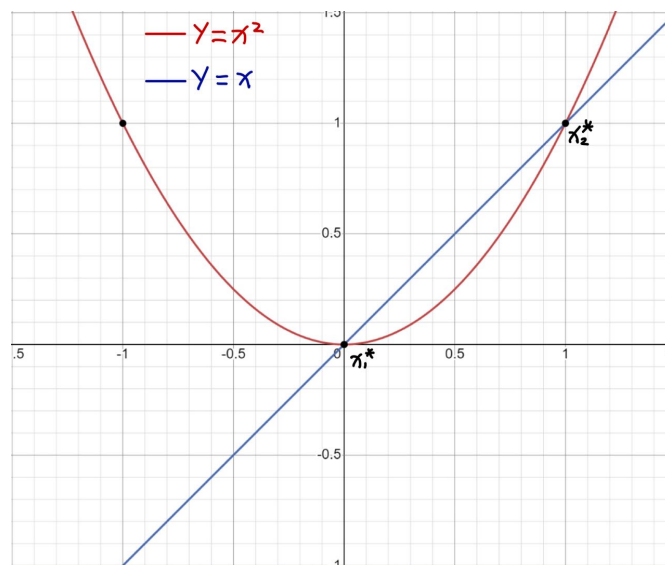
$$x_{n+1} = x_n^2. \quad (2)$$

Enligt Definition 3.1 är x^* en fixpunkt till Differensekvation (2) om $f(x^*) = x^*$ där $f(x) = x^2$. Då gäller

$$x^2 = x. \quad (3)$$

Vi ser att Ekvation (3) har två lösningar, 0 och 1, som är alltså fixpunkterna till $x_{n+1} = x_n^2$. De betecknas med $x_1^* = 0$ och $x_2^* = 1$.

Vi kan även visa en grafisk bild av differensekvationen och fixpunkterna. Vi illustrerar detta genom uppritning av grafen $y = f(x)$ samt linjen $y = x$ i samma plan. Skärningspunkter av grafen och linjen är fixpunkter till differensekvationen.



Figur 2: fixpunkter till $x_{n+1} = x_n^2$.

4 Stabilitetsteori

Syfte med att studera dynamiska system är att kunna förutsäga systems dynamiska beteende. Exempelvis räcker det inte för meteorologen att veta vilket väder det är just nu, utan de måste med hjälp av naturvetenskapliga lagar och beräkningar ta reda på vad som kommer att hända. Däremot vet vi att det är väldigt svårt att göra väderprognosen i praktiken. Vi kommer att studera stabilitetsteori i det här kapitlet, genom att undersöka banor till dynamiska system som startar i olika initialvärden x_0 som ligger i närheten till en fixpunkt.

Vi fortsätter med Exempel 3.1. Där hittade vi två fixpunkter $x_1^* = 0$ och $x_2^* = 1$ till differensekvation

$$x_{n+1} = x_n^2.$$

Banan till $x_0 = 0,99$ blir

$$\begin{aligned}x_0 &= 0,99 \\x_1 &= x_0^2 = 0,99^2 = 0,9801 \\x_2 &= x_1^2 = 0,9801^2 \approx 0,9606 \\x_3 &= x_2^2 = 0,9606^2 \approx 0,9227 \\x_4 &= x_3^2 = 0,9227^2 \approx 0,8514. \\&\dots \\x_{15} &= 3,06922 * 10^{-72} \dots\end{aligned}$$

Ett mönster framkommer, där banan med startvärde $x_0 = 0,99$ verkar närma sig fixpunkt $x_1^* = 0$ då $n \rightarrow \infty$. Vi provar med ett annat initialvärde $x_0 = 1,01$, och då blir banan

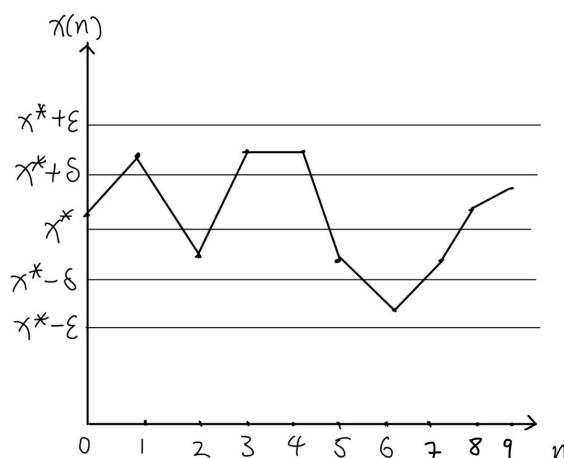
$$\begin{aligned}x_0 &= 1,01 \\x_1 &= x_0^2 = 1,01^2 = 1,0201 \\x_2 &= x_1^2 = 1,0201^2 \approx 1,0406 \\x_3 &= x_2^2 = 1,0406^2 \approx 1,0828 \\x_4 &= x_3^2 = 1,0828^2 \approx 1,1726. \\&\dots \\x_{15} &= 6,32977 * 10^{70} \dots\end{aligned}$$

Den här gången är banan med startvärde $x_0 = 1,01$, och den verkar gå över alla gränser då $n \rightarrow \infty$. Således avlägsnar sig banan från den andra fixpunkten $x_2^* = 1$. Avståndet mellan de två initialvärdena 0,99 och 1,01 är endast 0,02, men banorna är helt annorlunda. Det är tusentals initialvärden som beräknas när meteorologen göra väderprognoser. Varje litet mätfel på initialvärdet kan då leda till stora avvikelser i slutresultat.

Varför verkar ena banan konvergera mot en fixpunkt medan den andra banan verkar avlägsna sig från fixpunkten? Det kan vi förklara med stabilitetsteori.

4.1 Stabil och instabil fixpunkt

Definition 4.1 [2, s.11] En fixpunkt x^* till differensekvation $x_{n+1} = f(x_n)$ är stabil om det till varje $\epsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådan att $|x_0 - x^*| < \delta$ medför att $|f^n(x_0) - x^*| < \epsilon$ för alla $n \geq 0$. En fixpunkt som inte är stabil är instabil.



Figur 3: Stabil fixpunkt

När punkten x_0 ligger inom δ korridoren kommer x_n hamna inom ϵ korridoren för alla $n \geq 0$.

Exemple 4.1 Betrakta differensekvationen

$$x_{n+1} = 1 - x_n. \quad (4)$$

Enligt Definition 3.1 är x^* en fixpunkt till Differensekvation (4) om $f(x^*) = x^*$ där $f(x) = 1 - x$. Då gäller:

$$1 - x = x.$$

Ekvationen har endast en lösning, $x^* = 0,5$, vilket är en fixpunkt till Differensekvation (4). För varje x_0 vi har följande bana

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 - x_0 \\x_2 &= 1 - x_1 = 1 - (1 - x_0) = x_0 \\x_3 &= 1 - x_2 = 1 - x_0 \\x_4 &= 1 - x_3 = 1 - (1 - x_0) = x_0.\end{aligned}$$

Värden av x_n verkar hoppa mellan x_0 och $1 - x_0$. Vi vill visa att

$$|x_n - 0,5| = |x_0 - 0,5|, \forall n \geq 0. \quad (5)$$

Induktionsbevis: Vi inför förkortningen VL för det vänstra ledet och HL för det högra ledet i Ekvation (5). Då gäller

(a) När $n=1$ är $VL = |x_1 - 0,5| = |1 - x_0 - 0,5| = |0,5 - x_0| = |x_0 - 0,5|$, då gäller $VL=HL$.

(b) Antag att Ekvation (5) gäller för $n = k - 1$. Vi påstår alltså att

$$|x_{k-1} - 0,5| = |x_0 - 0,5|$$

gäller för ett fixt tal k .

(c) Då blir

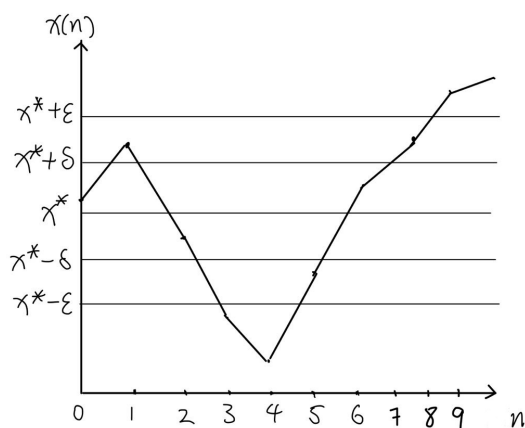
$$|x_k - 0,5| = |1 - x_{k-1} - 0,5| = |x_{k-1} - 0,5|$$

Då har vi visat att Ekvation (5) gäller för $n = k$. Då gäller $|x_n - 0,5| = |x_0 - 0,5|$ för alla $n \geq 0$ enligt induktionsaxiomet.

Vi väljer $\delta = \epsilon$ och får

$$|x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x_n - x^*| < \epsilon, \forall n \geq 0.$$

Så vi har visat att x^* är en stabil fixpunkt enligt Definitionen 4.1.



Figur 4: Instabil fixpunkt

Om fixpunkten x^* är instabil, kommer det finnas något $\epsilon_0 > 0$ sådant att för alla $\delta > 0$ finns en punkt x_0 med $|x_0 - x^*| < \delta$ och $|f^n(x_0) - x^*| > \epsilon_0$ för något $n > 0$.

Exemple 4.2 Betrakta differensekvationen

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

där

$$T(x) = \begin{cases} 0,6x & \text{om } x \leq 0 \\ 1,8x & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

Enligt Definition 3.1 är x^* en fixpunkt till differensekvation $x_{n+1} = T(x_n)$ om $T(x^*) = x^*$. Vi ser att $x^* = 0$ är den enda fixpunkt till differensekvationen.

För varje $x_0 \leq 0$ så har vi banan

$$\begin{aligned} x_0, \quad x_1 = T(x_0) = 0,6x_0, \quad x_2 = T(x_1) = 0,6x_1 = 0,6^2x_0 \\ x_3 = T(x_2) = 0,6x_2 = 0,6^3x_0, \quad x_4 = T(x_3) = 0,6x_3 = 0,6^4x_0 \dots \end{aligned}$$

Vi vill visa att

$$x_n = 0,6^n x_0 \tag{6}$$

gäller för alla $n \geq 0$ då $x_0 \leq 0$.

Induktionsbevis:

- (a) $x_1 = 0,6x_0$ medför att Ekvation (6) gäller för $n = 1$.
 (b) Antag att Ekvation (6) gäller för $n = k - 1$. Vi påstår alltså att

$$x_{k-1} = 0,6^{k-1}x_0$$

gäller ett fixt tal k .

- (c) Då blir

$$x_k = T(x_{k-1}) = 0,6x_{k-1} = 0,6^k x_0.$$

Då har vi visat att Ekvation (6) gäller för $n = k$. Då gäller att $x_n = 0,6^n x_0$ för alla $n \geq 0$ enligt induktionsaxiomet.

I det andra fallet för varje $x_0 > 0$ så har vi banan

$$\begin{aligned} x_0, \quad x_1 = T(x_0) = 1,8x_0, \quad x_2 = T(x_1) = 1,8x_1 = 1,8^2x_0 \\ x_3 = T(x_2) = 1,8x_2 = 1,8^3x_0, \quad x_4 = T(x_3) = 1,8x_3 = 1,8^4x_0 \dots \end{aligned}$$

Vi kan visa

$$x_n = 1,8^n x_0$$

gäller för alla $n \geq 0$ då $x_0 > 0$ med analogt induktionsbevis.

Eftersom x_0 är en konstant så gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0,6^n x_0 = 0$$

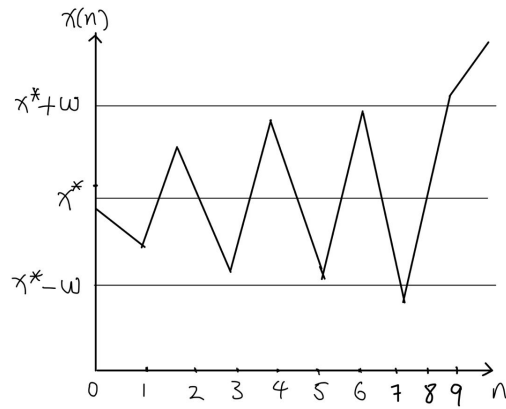
och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1,8^n x_0 = \infty.$$

Vi ser att om $x_0 < 0$ så konvergerar $f^n(x_0) \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$, men för $x_0 > 0$ har vi $f^n(x_0) \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$. Alltså det finns något $\epsilon_0 > 0$ sådant att för alla $\delta > 0$ finns en punkt x_0 med $|x_0 - x^*| < \delta$ och $|f^n(x_0) - x^*| > \epsilon_0$ för något $n > 0$. Så x^* är en instabil fixpunkt enligt definition (4.1).

4.2 Repellerande fixpunkt

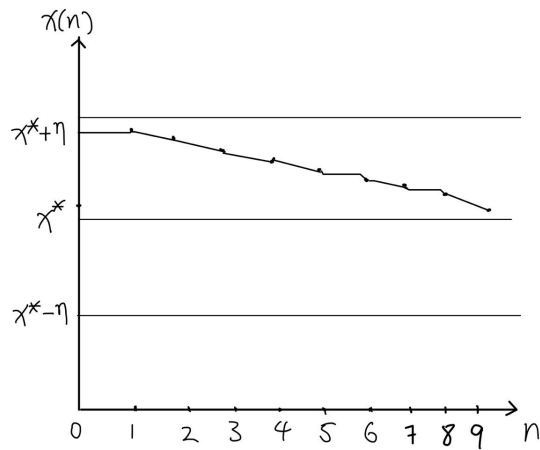
Definition 4.2 [2, s.11] En fixpunkt x^* till differensekvation $x_{n+1} = f(x_n)$ kallas repellerande fixpunkt om det finns något $\omega > 0$ sådant att: $0 < |x_0 - x^*| < \omega$ medför att $|f(x_0) - x^*| > |x_0 - x^*|$.



Figur 5: Repellerande fixpunkt

4.3 Asymptotisk stabil fixpunkt

Definition 4.3 [2, s.11] En fixpunkt x^* till differensekvation $x_{n+1} = f(x_n)$ kallas lokalt asymptotiskt stabil fixpunkt om det finns något $\eta > 0$ sådant att $|x_0 - x^*| < \eta$, vilket medför att $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Om $\eta = \infty$ så är x^* globalt asymptotiskt stabil.



Figur 6 : Asymptotiskt fixpunkt

I början av detta kapitel visade vi att $x_1^* = 0$ och $x_2^* = 1$ är två fixpunkter till

differensekvation $x_{n+1} = x_n^2$. För varje x_0 så har vi banan

$$\begin{aligned} x_0, \quad x_1 = x_0^2, \quad x_2 = x_1^2 = (x_0^2)^2 = x_0^4 \\ x_3 = x_2^2 = (x_0^4)^2 = x_0^8, \quad x_4 = x_3^2 = (x_0^8)^2 = x_0^{16} \dots \end{aligned}$$

Vi vill visa att

$$x_n = x_0^{2^n} \tag{7}$$

gäller för alla x_0 .

Induktionsbevis

- (a) $n = 1$ medför att $x_1 = x_0^2$ och Ekvation (7) gäller då $n = 1$.
(b) Antag att Ekvation (7) gäller för $n = k - 1$. Vi påstår att

$$x_{k-1} = x_0^{2^{k-1}},$$

gäller ett fixt tal k .

(c) Då blir

$$x_k = x_{k-1}^2 = (x_0^{2^{k-1}})^2 = x_0^{2^k},$$

vilket visar att Ekvation(7) i så fall gäller även för $n = k$. Det följer nu induktionsaxiomet att Ekvation (7) gäller för alla $n \geq 0$.

Stabilitet för punkt $x_1^* = 0$:

Låt $\eta < 1$, och $|x_0| < \eta$. Det medför att

$$|x_n| = |x_0|^{2^n} < \eta^{2^n}.$$

Detta ger oss $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = x_1^*$ då $|x_0| < \eta < 1$, vilket medför att x_1^* är en lokalt asymptotiskt stabil fixpunkt enligt Definitionen 4.3.

Stabilitet för punkt $x_2^* = 1$:

Låt $0 < \omega < 1$ och $|x_0 - 1| < \omega$. Då är $|x_1 - 1| = |x_0^2 - 1| = |x_0 + 1| \cdot |x_0 - 1| > |x_0 - 1|$ då $x_0 > 0$. Detta visar att $x_2^* = 1$ är repellerande enligt Definitionen 4.2.

5 Kriterier för att avgöra stabilitet hos en fixpunkt

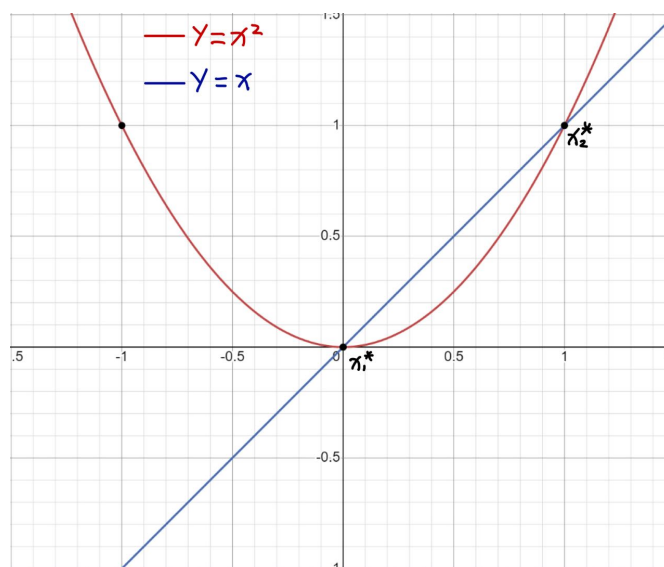
I det här avsnittet ska vi presentera några kraftfulla kriterier för att avgöra stabilitet hos fixpunkter, samt visa några exempel.

5.1 Grafisk Analys

Saber [2, s.15] beskriver ett sätt för att illustrera fixpunkters stabilitet grafiskt. Genom att ställa upp en grafisk analys kan man snabbt och enkelt skaffa sig en uppfattning om punkters stabilitet. Nedanstående exempel visar hur metoden fungerar.

Exemple 5.1 Undersök stabilitet hos fixpunkterna $x_1^* = 0$ och $x_2^* = 1$ till differensekvation $x_{n+1} = x_n^2$ med hjälp av Grafisk Iteration.

Steg(1) Rita $y = f(x) = x^2$ och $y = x$ i samma plan:

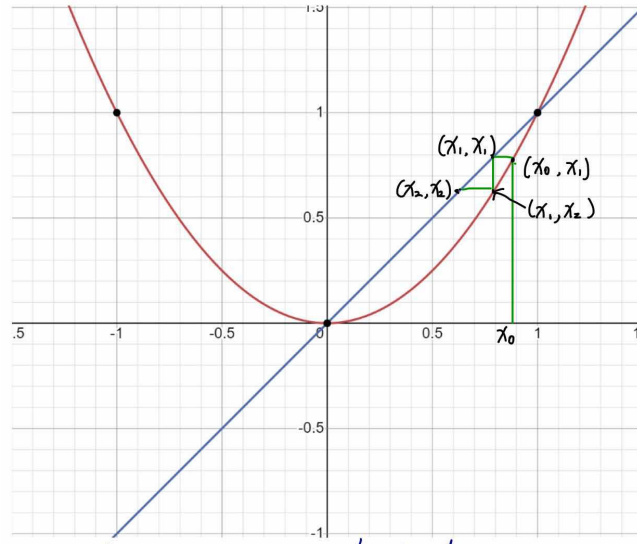


Figur 7: Steg(1)

Steg(2) Välj ett startvärde x_0 på x -axeln och dra en lodrättlinje från punkt $(x_0, 0)$ till graf $y = f(x)$. Linjen skär grafen i punkt (x_0, x_1) .

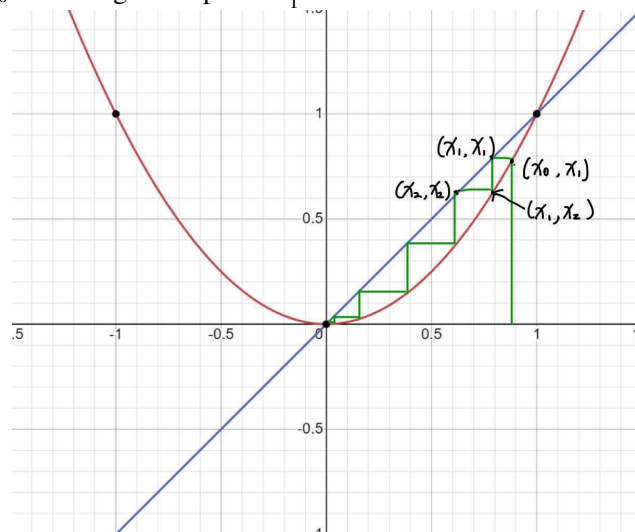
Steg(3) Dra en horisontell linje från punkt (x_0, x_1) till graf $y = x$. Linjen skär grafen i punkt (x_1, x_1) .

Steg(4) Starta från (x_1, x_1) och dra en lodrätt linje till graf $y = f(x)$. Linjen skär $y = f(x)$ i punkt (x_1, x_2) . Dra en horisontell linje från (x_1, x_2) till graf $y = x$. Linjen skär $y = x$ i punkt (x_2, x_2) .



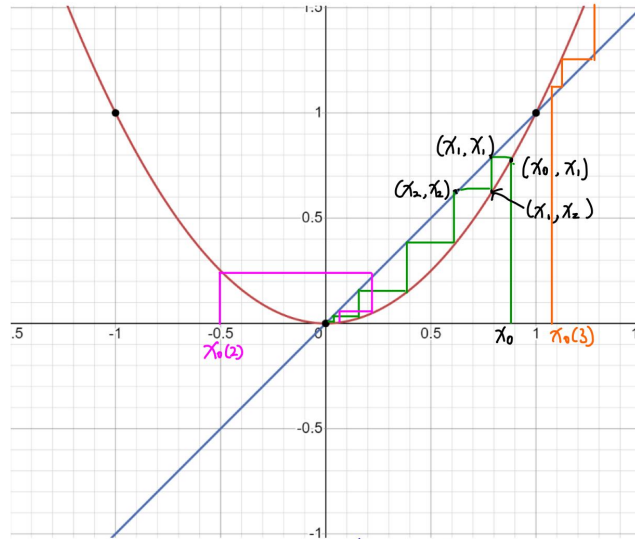
Figur 8: Steg(2)-(4)

Steg(5) Vi upprepar de steg några gånger till. Ett mönster framträder; banan till startvärde x_0 närma sig till fixpunkt $x_1^* = 0$.



Figur 9: Steg(5)

Steg(6) Vi väljer två andra startvärden $x_0(2)$ och $x_0(3)$ samt ritar banor till dem enligt metoden ovan.



Figur 10: Steg(6)

Tolkning av figuren 10: Banor till startvärde x_0 och $x_0(2)$ närma sig till fixpunkten $x_1^* = 0$. Detta visar att $x_1^* = 0$ är en lokalt asymptotiskt stabil fixpunkt. Banor till startvärde x_0 och $x_0(3)$ avlägsnar från $x_2^* = 1$, vilket visar att $x_1^* = 0$ är en instabil och repellerande fixpunkten.

Att undersöka stabilitet hos fixpunkter med grafisk iteration är bara en hjälpmetod. Vi kan inte dra slutsatser enbart med diagram. Vi behöver satser för att säkerställa resultat.

Sats 5.1 [2, s.27] Låt x^* vara en fixpunkt till differensekvation $x_{n+1} = f(x_n)$ där funktionen f är kontinuerligt deriverbar i punkten x^* , Då gäller:

(i) Om $|f'(x^*)| < 1$ så är x^* en lokalt asymptotiskt stabil fixpunkt.

(ii) Om $|f'(x^*)| > 1$ så är x^* instabil.

Bevis:

(i) Antag att $|f'(x^*)| < M < 1$ för något $M > 0$. Eftersom f' är en kontinuerlig funktion så finns ett intervall $I = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$, för något $\gamma > 0$ sådant att $|f'(x)| \leq M < 1$ för alla $x \in I$. För $x_0 \in I$ vi har

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)|.$$

Enligt differentialkalkyl medelvärdesats existera ett ξ som ligger mellan x_0 och x^* så att

$$|f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\xi)||x_0 - x^*|,$$

vilket medför

$$|f(x_0) - x^*| \leq M|x_0 - x^*| \Rightarrow |x_1 - x^*| \leq M|x_0 - x^*|.$$

Eftersom $M < 1$, visar olikheten ovan att x_1 ligger närmare x^* än x_0 .
Vi vill visa att

$$|x_n - x^*| \leq M^n |x_0 - x^*| \quad (8)$$

gäller $\forall n \geq 0$.

Induktionsbevis

- (a) Vi har visat ovan att $|x_1 - x^*| \leq M|x_0 - x^*|$, alltså gäller Olikheten (8) då $n=1$.
(b) Antag att Olikheten (8) gäller för $n = k - 1$. Dvs. att

$$|x_{k-1} - x^*| \leq M^{k-1} |x_0 - x^*|$$

gäller för ett fixt tal k .

(c) Då blir

$$|x_k - x^*| = |f(x_{k-1}) - f(x^*)| \leq M|x_{k-1} - x^*| \leq M^k |x_0 - x^*|$$

vilket visar att Olikheten (8) i så fall gäller även för $n = k$. Det följer nu av induktionsaxiomet att Olikheten (8) gäller för alla $n \geq 0$ är då bevisat.

För $\epsilon > 0$ sätter vi $\delta = \epsilon$. Om $|x_0 - x^*| < \delta$, så medför Olikheten (8) att $|x_n - x^*| < \epsilon$ för alla $n \geq 0$, vilket visar att x^* är stabil enligt Definition 4.1. Dessutom gäller

$$|x_n - x^*| \leq M^n |x_0 - x^*| \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty, \quad \text{ty } M < 1$$

vilket medför att $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Därför är x^* lokalt asymptotiskt stabil enligt Definition 4.3.

(ii) Antag att $|f'(x^*)| > N > 1$. Eftersom f' är en kontinuerlig funktion så finns ett intervall $I = (x^* + \gamma, x^* - \gamma)$ för något $\gamma > 0$ sådan att $|f'(x)| \geq N > 1$ för alla $x \in I$. För $x_0 \in I$ har vi

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)|.$$

Enligt differentialkalkyl medelvärdesatsen existera ett ξ som ligger mellan x_0 och x^* . Då gäller

$$|f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\xi)| |x_0 - x^*|,$$

således

$$|f(x_0) - x^*| \geq N |x_0 - x^*|.$$

Eftersom $N > 1$, visar olikheten ovan att avståndet mellan x_1 och x^* är större än x_0 och x^* .

Vi vill visa att

$$|x_n - x^*| \geq N^n |x_0 - x^*| \tag{9}$$

gäller för alla $n \geq 0$.

Induktionsbevis

(a) Vi hade visat ovan att $|x_1 - x^*| \geq N|x_0 - x^*|$, alltså gäller Olikheten (9) när $n=1$.

(b) Antag att Olikheten (9) gäller för $n = k - 1$. Dvs. att

$$|x_{k-1} - x^*| \geq N^{k-1} |x_0 - x^*|$$

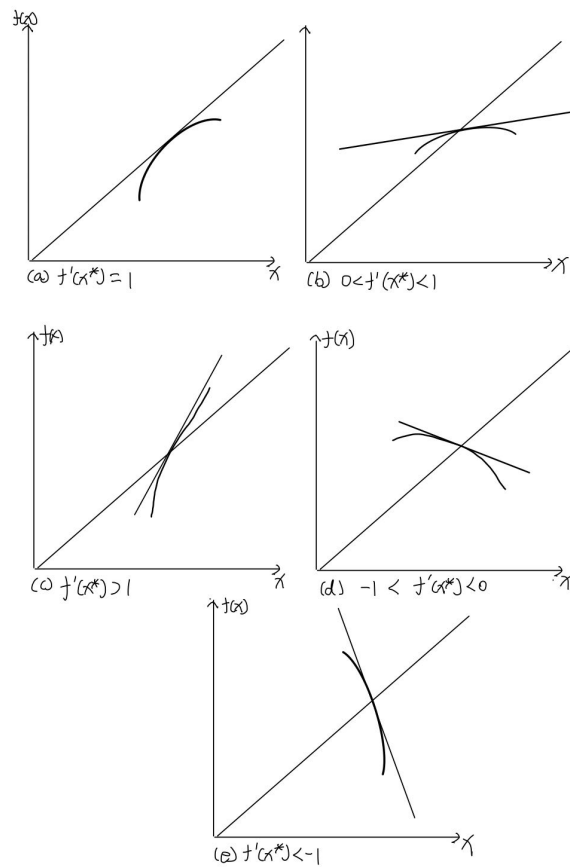
gäller för ett fixt tal k .

(c) Då blir

$$|x_k - x^*| = |f(x_{k-1}) - f(x^*)| \geq N |x_{k-1} - x^*| \geq N^k |x_0 - x^*|$$

vilket visar att Olikheten (9) i så fall gäller även för $n = k$. Det följer nu av induktionsaxiomet att Olikheten (9) gäller för alla $n \geq 0$ är då bevisade.

Dessutom $|x_n - x^*| \geq N^n |x_0 - x^*|$ går mot ∞ då n går mot ∞ ty $N > 1$, vilket visar att x^* är instabil enligt Definition 4.1.



Figur 11: Grafisk bild av olika $f'(x^*)$

Exemple 5.2 Undersök fixpunkters stabilitet till differensekvationen

$$x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}. \quad (10)$$

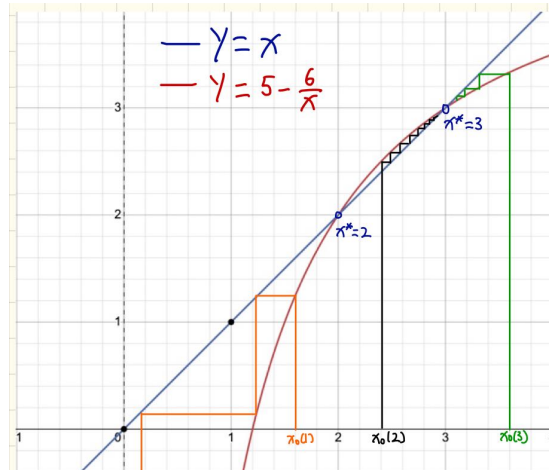
Enligt Definition 3.1 är x^* en fixpunkt till Differensekvation (10) om $f(x^*) = x^*$, där $f(x) = 5 - \frac{6}{x}$.

$$5 - \frac{6}{x} = x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 3. \end{cases}$$

Vi får att $x_1^* = 2$ och $x_2^* = 3$ är två fixpunkter till Differensekvationen (10).

Derivatan till $f(x) = 5 - \frac{6}{x}$ är $f'(x) = \frac{6}{x^2}$. Eftersom $|f'(x_1^*)| = \frac{6}{4} > 1$, så är x_1^* instabil

enligt Sats 5.1(ii) och då $|f'(x_2^*)| = \frac{6}{9} < 1$, så är x_2^* lokalt asymptotisk stabil enligt Sats 5.1(i).



Figur 12: Exempel 5.2

Sats 5.1 visar endast de fall när $|f'(x^*)| < 1$ och $|f'(x^*)| > 1$. Vi kommer att undersöka de fall där $f'(x^*) = 1$ och $f'(x^*) = -1$ i försättningen.

Sats 5.2 [2, s.29] Låt x^* vara fixpunkt till differensekvation $x_{n+1} = f(x)$, sådant att $f'(x^*) = 1$. Om f' , f'' och f''' är kontinuerliga i punkten x^* så gäller:

- (i) Om $f''(x^*) \neq 0$, så är x^* instabil.
- (ii) Om $f''(x^*) = 0$ och $f'''(x^*) > 0$, så är x^* instabil.
- (iii) Om $f''(x^*) = 0$ och $f'''(x^*) < 0$, så är x^* lokalt asymptotiskt stabil.

Bevis:

(i) I fall $f''(x^*) > 0$ får vi $f''(x) > 0$ i ett intervall $I = (x^*, x^* + \gamma)$ för något $\gamma > 0$. Då gäller att f' är växande i detta intervall, och $f'(x) > 1$ för alla $x > x^*$ i intervallet. Låt $x_0 \in I$ enligt differentialkalkylens medelvärdesats existera ett ξ som ligger mellan x_0 och x^* då gäller

$$x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*) = f'(\xi)(x_0 - x^*) > x_0 - x^*.$$

Därmed har vi $x_1 > x_0$. Eftersom f' är strikt växande i I gäller $f'(x) > B = f'(x_1) > 1$ för $x_1 < x < x^* + \gamma$. Då får vi igen med hjälp av medelvärdesatsen

$$x_2 - x^* = f'(\xi)(x_1 - x^*) > B(x_0 - x^*).$$

Med hjälp av induktion ser vi på liknade sätt som i bevis Sats 5.1 att x^* är instabil.

I det andra fallet $f''(x^*) < 0$ får vi $f''(x) < 0$ i ett intervall $J = (x^* - \gamma, x^*)$ för någon $\gamma > 0$. Då gäller att f' är avtagande i detta intervall, så är $f'(x) > 1$ för alla $x < x^*$ i intervallet. Vi kan visa att x^* är instabil på ett analogt sätt.

(ii) Vi vill visa att om $f''(x^*) = 0$ och $f'''(x^*) > 0$, så är x^* instabil. Eftersom $f'''(x^*) > A > 0$ och f''' är kontinuerlig i punkt x^* medför det att finns ett intervall $I = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ sådant att $f'''(x) > A$ för alla $x \in I$.

För $x_0 \in I$ gäller då att

$$x_1 = f(x_0) = f(x^*) + f'(x^*)(x_0 - x^*) + \frac{f''(x^*)(x_0 - x^*)^2}{2} + \frac{f'''(\xi)(x_0 - x^*)^3}{3!}$$

enligt Maclaurinutveckling av ordning 3 av funktion f kring fixpunkten x^* med någon ξ mellan x_0 och x^* .

Eftersom $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ och $x_0 \neq x^*$ så gäller

$$\begin{aligned} |x_1 - x^*| &= |f(x^*) + f'(x^*)(x_0 - x^*) + \frac{f''(x^*)(x_0 - x^*)^2}{2} + \frac{f'''(\xi)(x_0 - x^*)^3}{3!} - f(x^*)| \\ &= |(x_0 - x^*) + \frac{f'''(\xi)(x_0 - x^*)^3}{3!}| = |x_0 - x^*| \cdot \left| 1 + \frac{f'''(\xi)(x_0 - x^*)^2}{3!} \right| \end{aligned}$$

Eftersom $f'''(\xi) > A > 0$ och $\frac{(x_0 - x^*)^2}{3!} \geq 0$, så får vi att

$$|x_0 - x^*| \cdot \left| 1 + \frac{f'''(\xi)(x_0 - x^*)^2}{3!} \right| > N|x_0 - x^*|$$

för något $N = 1 + A \frac{(x_0 - x^*)^2}{3!} > 1$.

Då gäller

$$|x_n - x^*| > N|x_{n-1} - x^*| > N^2|x_{n-2} - x^*| > \dots > N^n|x_0 - x^*|.$$

Eftersom $|x_n - x^*| > N^n|x_0 - x^*|$ går mot ∞ då n går mot ∞ ty $N > 1$, vilket visar att x^* är instabil enligt Definition 4.1.

(iii) Vi vill visa att om $f''(x^*) = 0$ och $f'''(x^*) < 0$, så är x^* en lokalt asymptotisk fixpunkt. Eftersom $f'''(x^*) < B < 0$ och f''' är kontinuerlig i punkt x^* så finns det ett intervall $I = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ sådan att $f'''(x) < B$ för alla $x \in I$.

För $x_0 \in I$ gäller att

$$x_1 = f(x_0) = f(x^*) + f'(x^*)(x_0 - x^*) + \frac{f''(x^*)(x_0 - x^*)^2}{2} + \frac{f'''(\xi)(x_0 - x^*)^3}{3!}$$

enligt Maclaurinutveckling av ordning 3 av funktion f kring fixpunkten x^* med någon ξ mellan x_0 och x^* . Eftersom $f'(x^*) = 1$ och $f''(x^*) = 0$ så gäller

$$\begin{aligned} |x_1 - x^*| &= |f(x^*) + f'(x^*)(x_0 - x^*) + \frac{f''(x^*)(x_0 - x^*)^2}{2} + \frac{f'''(\xi)(x_0 - x^*)^3}{3!} - f(x^*)| \\ &= |(x_0 - x^*) + \frac{f'''(\xi)(x_0 - x^*)^3}{3!}| = |x_0 - x^*| \cdot \left| 1 + \frac{f'''(\xi)(x_0 - x^*)^2}{3!} \right|. \end{aligned}$$

Eftersom $f'''(\xi) < f'''(x^*) < B < 0$ och $\frac{(x_0 - x^*)^2}{3!} \geq 0$, så får vi att

$$|x_0 - x^*| \cdot \left| 1 + \frac{f'''(\xi)(x_0 - x^*)^2}{3!} \right| < M|x_0 - x^*|.$$

för något $M = 1 + B\frac{(x_0 - x^*)^2}{3!} < 1$. Således

$$|x_1 - x^*| < M|x_0 - x^*|.$$

Olilkeheten ovan visar att x_1 ligger närmare x^* än x_0 ty $M < 1$.

$$|x_n - x^*| < M|x_{n-1} - x^*| < M^2|x_{n-2} - x^*| < \dots < M^n|x_0 - x^*|$$

För $\epsilon > 0$ sätter vi $\delta = \epsilon$. Om $|x_0 - x^*| < \delta$, så medför olikheten $|x_n - x^*| < M^n|x_0 - x^*|$ att $|x_n - x^*| < \epsilon$ för alla $n \geq 0$, vilket visar att x^* är stabil enligt Definition 4.1. Dessutom gäller

$$|x_n - x^*| \leq M^n|x_0 - x^*| \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{ty} \quad M < 1$$

vilket medför att $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Därför är x^* lokalt asymptotiskt stabil enligt Definition 4.3.

Exemple 5.3 Undersök fixpunkters stabilitet till differensekvationen

$$x_{n+1} = x_n^3 + x_n. \tag{11}$$

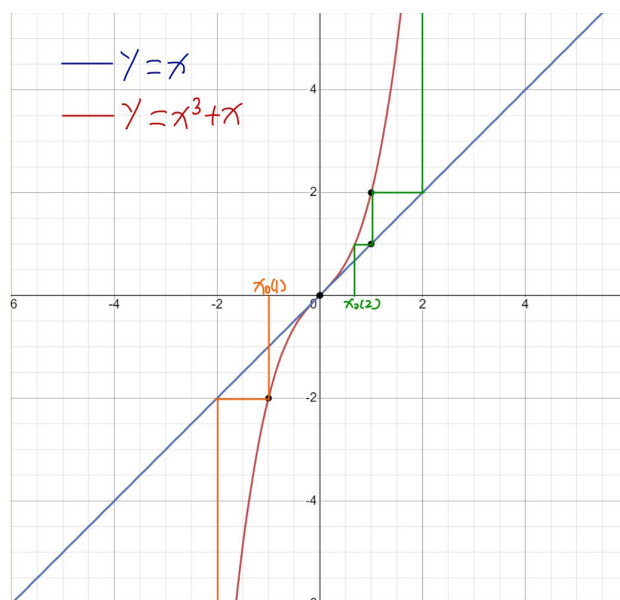
Enligt Definition 3.1 är x^* en fixpunkt till Differensekvation (11) om $f(x^*) = x^*$, där $f(x) = x^3 + x$.

$$x^3 + x = x \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Lösningen till ekvationen ger oss att $x^* = 0$ är den enda fixpunkten till differensekvationen (11).

Första, andra och tredje derivatan till $f(x)$ är $f'(x) = 3x^2 + 1$, $f''(x) = 6x$ och $f'''(x) = 6$. vilket medför att $f'(x^*) = f'(0) = 1$, $f''(x^*) = f''(0) = 0$ och

$f'''(x^*) = f'''(0) = 6 > 0$, vilket visar att x^* är instabil enligt Sats 5.2 (ii).



Figur 13: Exempel 5.3

Sats 5.3 [2, s.32] Låt x^* vara fixpunkt till differensekvation $x_{n+1} = f(x)$, sådant att $f'(x^*) = -1$. Om f', f'' och f''' är kontinuerliga i punkten x^* så gäller:

(i) Om $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 < 0$, så är x^* lokalt asymptotiskt stabil.

(ii) Om $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 > 0$, så är x^* instabil.

Bevis:

Betrakta differensekvationen

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad g(y) = f^2(y). \quad (12)$$

Vi observerar att fixpunkt x^* till Differensekvation (1) också är fixpunkt till Differensekvation (12), dvs

$$g(x^*) = f^2(x^*) = x^*.$$

Funktionen $g(y)$ har derivatan

$$\frac{d}{dy}g(y) = \frac{d}{dy}f(f(y)) = f'(f(y))f'(y).$$

Eftersom $f'(x^*) = -1$ så gäller $[f'(x^*)]^2 = \frac{d}{dy}g(x^*) = 1$. För att vi skulle kunna vi använda resultatet från Sats 5.2, behöver vi undersöka andra och tredjederivatan av $g(y)$. Kedjeregeln ger att andraderivatan av funktion $g(y)$ blir

$$\frac{d^2}{dy^2}g(y) = \frac{d^2}{dy^2}f(f(y)) = (f'(f(y))f'(y))' = (f'(y))^2 f''(f(y)) + f'(f(y))f''(y).$$

I punkten x^* har vi

$$\frac{d^2}{dy^2}g(x^*) = (f'(x^*))^2 f''(f(x^*)) + f'(f(x^*))f''(x^*).$$

Eftersom $f'(x^*) = -1$ så gäller $\frac{d^2}{dy^2}g(x^*)$

$$\begin{aligned} &= (-1)^2 f''(x^*) + (-1)f''(x^*) \\ &= f''(x^*) - f''(x^*) = 0. \end{aligned}$$

Kedjeregeln ger att tredjederivatan av funktion $g(y)$ blir

$$\frac{d^3}{dy^3}g(y) = ([f'(y)]^2 f''(y) + f'(f(y))f''(y))'$$

$$= 2(f'(y))(f''(f(y)))^2 + (f'(y))^2 f'''(y)f'(y) + f''(f(y))^2 f'(y) + f'(y)f'''(y)$$

I punkten x^* få vi

$$= 2(f'(x^*))(f''(f(x^*)))^2 + (f'(x^*))^2 f'''(x^*)f'(x^*) + f''(f(x^*))^2 f'(x^*) + f'(x^*)f'''(x^*)$$

Eftersom $f'(x^*) = -1$ så gäller

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dy^3}g(x^*) &= 2(-1)(f''(x^*))^2 + (-1)^2 f'''(x^*)(-1) + f''(x^*)^2(-1) + (-1)f'''(x^*) \\ &= -3(f''(x^*))^2 - 2f'''(x^*) \end{aligned}$$

Vi ser att $g'(x^*) = 1$ och $g''(x^*) = 0$. Med resultatet av Sats 5.2 så gäller att x^* är asymptotiskt stabil om $g'''(x^*) < 0$ och att x^* är instabil om $g'''(x^*) > 0$.

Exemple 5.4 Undersök fixpunkters stabilitet till differensekvation

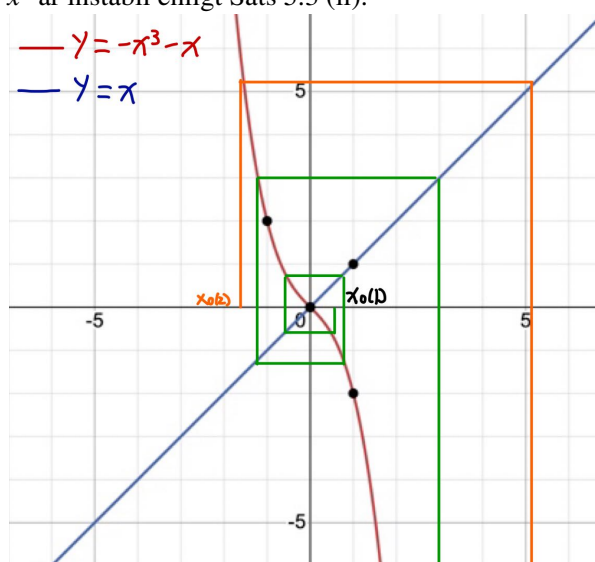
$$x_{n+1} = -x_n^3 - x_n. \quad (13)$$

Enligt Definition 3.1 är x^* en fixpunkt till Differensekvation (13) om $f(x^*) = x^*$, där $f(x) = -x^3 - x$.

$$-x^3 - x = x \Rightarrow x = 0.$$

Lösningen till ekvationen ger oss att $x^* = 0$ är den enda fixpunkt till differensekvationen (13).

Första, andra och tredje derivatan till $f(x)$ är $f'(x) = -3x^2 - 1$, $f''(x) = -6x$ och $f'''(x) = -6$. Detta medför att $f'(x^*) = f'(0) = -1$, $f''(x^*) = f''(0) = 0$ och $f'''(x^*) = f'''(0) = -6$. Detta ger oss $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 = 12 - 3 = 9 > 0$. Detta visar att x^* är instabil enligt Sats 5.3 (ii).



Figur 14: Exempel 5.4

6 Periodisk punkt och cykel

Vi definierade fixpunkt x^* till differensekvation $x_{n+1} = f(x_n)$ i Kapitel 3, vilket används att illustrera när dynamiska systemets tillstånd inte längre förändras över tiden. Systems tillstånd kan även förändras periodiskt. Vi kallar de punkter för periodiska punkter till differensekvationen och definierar dessa som följande.

Definition 6.1 [2, s.35] En punkt b kallas k periodisk punkt till differensekvation $x_{n+1} = f(x_n)$ med period $k \in \mathbb{Z}^+$ om $f^k(b) = b$ gäller och k är minimala med denna egenskap. Dvs, att

$$b \xrightarrow{f} f(b) \xrightarrow{f} f^2(b) \dots \xrightarrow{f} f^{k-1}(b) \xrightarrow{f} f^k(b) = b,$$

och $f^j(b) \neq b$ för $j < k$.

Mängden av $\{b, f(b), f^2(b) \dots f^{k-1}(b)\}$ kallas periodisk bana/cykel.

Definition 6.2 [2, s.39] Låt punkt b vara en k -periodisk punkt för funktionen f . Cykeln av b kallas

(i) stabil om b är en stabil fixpunkten för f^k .

(ii) attraherande om b är en lokalt asymptotiskt fixpunkt för f^k .

(iii) repellerande om b är en repellerande fixpunkt för f^k .

För att avgöra om en cykel är attraherande eller repellerande har vi en sats nedan.

Sats 6.1 [2, s.39] Låt banan $O^+(b) = \{b = x_0, x_1, x_2 \dots x_{k-1}\}$ vara en k periodisk cykel till en kontinuerligt deriverbar funktion f så gäller:

(i) $O^+(b)$ är attraherande om

$$|f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{k-1})| < 1.$$

(ii) $O^+(b)$ är repellerande om

$$|f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{k-1})| > 1.$$

Bevis Kedjeregeln ger oss att

$$(f^k(b))' = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{k-1})$$

Enligt Sats 5.1 gäller att k cykel $O^+(b)$ är

(i) attraherande då $|(f^k(b))'| < 1$.

(ii) repellerande då $|(f^k(b))'| > 1$.

Exemple 6.1 Sök 2-periodiska punkter till

$$Q(x) = 1 - x^2 \tag{14}$$

och avgör om de är attraherande eller repellerande.

Enligt Definition 6.1 punkt är x en 2-periodisk punkt till Differensekvation (14) om $Q^2(x) = x$, där $Q(x) = 1 - x^2$, vilket medför $Q^2(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4$. Då blir

$$2x^2 - x^4 = x \Rightarrow 2x^2 - x^4 - x = 0 \quad (15)$$

Med polynomfaktorisering få vi att

$$2x^2 - x^4 - x = x(-x^3 + 2x - 1) = x(x-1)(1-x^2-x) = x(x-1)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Vi ser att Ekvation (15) har fyra rötter $x(1) = 0$, $x(2) = 0$, $x(3) = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ och $x(4) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Två av de är rötter till $Q(x) = x$, vilka är 1-periodiska punkter enligt Definition 6.1.

$$1 - x^2 = x \Rightarrow 1 - x^2 - x = 0 \quad (16)$$

Eftersom rötterna till $Q(x) = x$ också är rötterna till $Q^2(x) = x$, så kan vi dividera vänster led av Ekvation (15) med vänster led av Ekvation (16) för att ta bort de två gemensamma lösningarna. Då blir

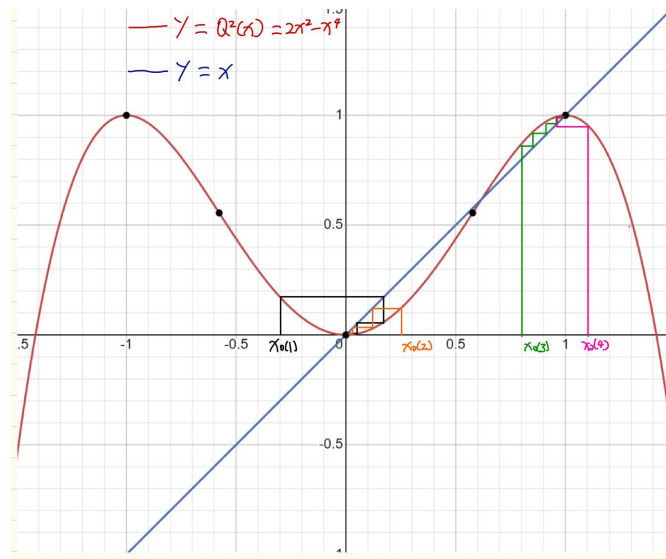
$$\frac{2x^2 - x^4 - x}{1 - x^2 - x} = x^2 - x$$

Ekvation $x^2 - x = 0$ har två rötter $x(1) = 0$ och $x(2) = 1$, vilka är 2-periodiska punkter. Vi kan tillämpa Sats 6.1 för att avgöra stabilitet till cykel $[x(1), x(2)]$.

$$Q(x) = 1 - x^2 \Rightarrow Q'(x) = -2x$$

$$|Q'(x(1))Q'(x(2))| = |Q'(0)Q'(1)| = 0$$

Eftersom $|Q'(x(1))Q'(x(2))| < 1$ så är den attraherande-2 cykel .



Figur 15: Exempel 5.5

7 Logistiska Ekvationen

I det här avsnittet ska vi studera hur storleken på en population förändras över tid. Vi låter y_n vara antal individer i tidpunkt n , och μ vara tillväxthastighetskonstanten. Då kan vi ställa upp en differensekvation [2, s.13]

$$y_{n+1} = \mu y_n, \quad \mu > 0 \quad (17)$$

Med något y_0 som ingångsvärde kan vi beräkna y_n över iterationer, detta ger oss

$$y_0, y_1 = \mu y_0, y_2 = \mu y_1 = \mu y_0 \mu = \mu^2 y_0, y_3 = \mu^3 y_0 \dots$$

Ett mönster framträder, vi vill visa att

$$y_n = \mu^n y_0 \quad (18)$$

gäller för alla $n \geq 0$.

Induktionsbevis

(a) $y_1 = \mu y_0$, (18) gäller då $n = 1$.

(b) Vi antar att Ekvation (18) gäller för $n = k - 1$, dvs

$$y_{k-1} = \mu^{k-1} y_0$$

gäller för ett fixt tal k .

(c) Då blir

$$y_k = \mu y_{k-1} = \mu^k y_0$$

vilket visar att Ekvation (18) gäller även för $n = k$. Det följer av induktionsaxiomet att Ekvation (18) gäller för alla $n \geq 0$.

I nästa steg ska vi undersöka hur antal individer förändras då $n \rightarrow \infty$ i tre olika fall där $\mu > 1$, $\mu < 1$ och $\mu = 1$. Ingångsvärde y_0 är antal individer i tidpunkten 0. Då gäller

Fall (1): När $\mu > 1$ och $y_0 > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n y_0 = \infty$$

Tolkning av resultatet: om tillväxthastighetskonstant är större än 1 så kommer populationsstorleken växa över alla gränser då $n \rightarrow \infty$.

Fall (2): När $\mu < 1$,

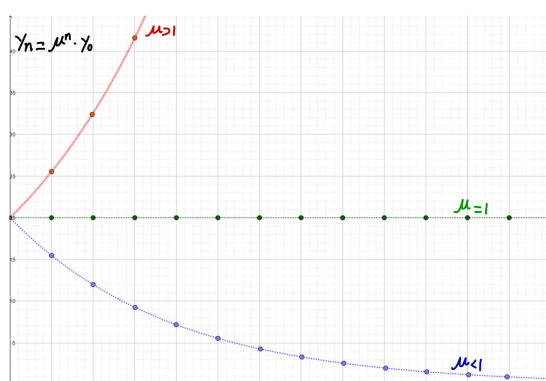
$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n y_0 = 0$$

Tolkning av resultatet: om tillväxthastighetskonstant är mindre än 1 så kommer populationsstorlek att gå mot 0 då $n \rightarrow \infty$.

Fall(3): När $\mu = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n y_0 = y_0$$

Tolkning av resultatet: om tillväxthastighetskonstant är exakt 1 så kommer populationsstorlek vara konstant för alla n .



Figur 16: Fall (1),(2) och (3)

Modellen som beskrivs av Differensekvation (17) stämmer inte med verkligheten. Den största bristen med modellen är att den inte tar hänsyn till de externa faktorer som leder till minskning av populationens storlek. Exempelvis naturkatastrofer, sjukdomar, brist på resurser etc. Vi behöver komplettera modellen med $-by_n^2$, för att ta hänsyn till dessa begränsningar, och då har vi

$$y_{n+1} = \mu y_n - by_n^2. \quad (19)$$

I nästa steg definierar vi en ny konstant $K = \frac{\mu}{b}$ som betyder den maximala tillåtna storleken på populationen i en begränsade omgivning. Då blir

$$y_{n+1} = \mu y_n - \frac{\mu}{K} y_n^2.$$

Vi sätter $x_n = \frac{y_n}{K}$, vilket visar hur stor andel av den maximala populationen motsvarar i tidpunkt n. Detta medför att

$$y_{n+1} = \mu y_n - \frac{\mu}{K} y_n^2 = K(x_{n+1}) = \mu x_n K - \frac{\mu}{K} (x_n K)^2$$

och därmed

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n). \quad (20)$$

Denna ekvation är den så kallade logistiska ekvationen som beskriver befolkningsutveckling över tid. Det blir intressant för oss att undersöka fixpunkter samt ge en tolkning till ekvationen.

7.1 Fixpunkter till logistiska ekvationen

Betrakta differensekvation[2, s.43 – 45]

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n),$$

Eftersom x anger andel av den maximala populationens storlek, så anges x med ett tal mellan 0 och 1, alltså funktionen F_μ avbildar på sig själv i intervallet $[0,1]$, vilket gör att vi betrakta bara $\mu \in [0, 4]$. Enligt Definition 3.1 är x^* en fixpunkt till Differensekvation (20) om $F_\mu(x^*) = x^*$, där

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$$

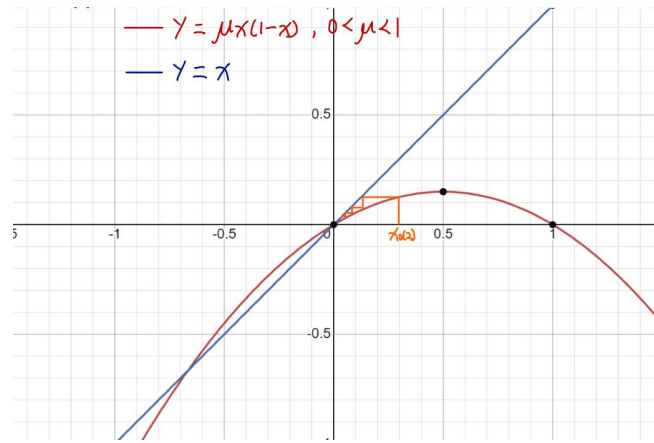
Då blir

$$\mu x(1 - x) = x \Rightarrow \mu x - \mu^2 x - x = 0 \Rightarrow x(\mu - \mu x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = \frac{\mu-1}{\mu} \end{cases}$$

Ekvationen har två rötter $x_1^* = 0$ och $x_2^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ som är två möjliga fixpunkter till Differensekvation (20). Vi kommer att undersöka stabilitet hos de i nästa steg.

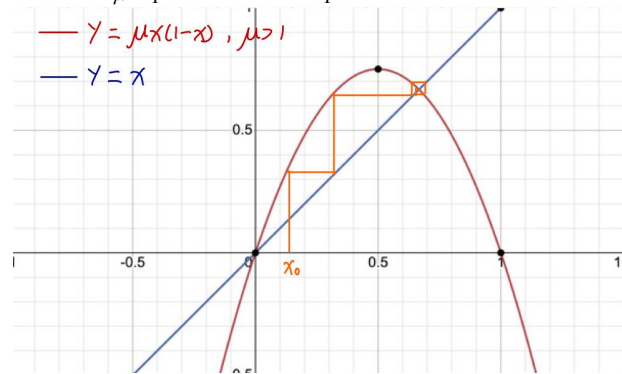
Derivatan till $F_\mu(x)$ är $F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$. Detta medför att $F'_\mu(x_1^*) = \mu$ och vi behöver dela in i tre fall.

(a) När $0 < \mu < 1$ är $|F'_\mu(x_1^*)| < 1$. Då är $x_1^* = 0$ asymptotiskt stabil enligt Sats 5.1 (i).



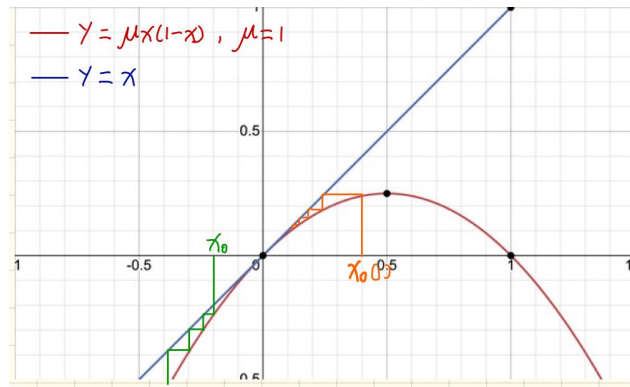
Figur 17: x_1^* är asymptotiskt stabil när $0 < \mu < 1$.

(b) När $\mu > 1$ är $|F'_\mu(x_1^*)| > 1$. Då är $x_1^* = 0$ instabil enligt Sats 5.1 (ii).



Figur 18: x_1^* är instabil och repellerande när $\mu > 1$.

(c) När $\mu = 1$ behöver vi undersöka den andra derivatan till $F_\mu(x)$. $F''_\mu(x) = -2\mu$ medför att $F''_\mu(x_1^*) = -2\mu = -2$. Eftersom $F'_\mu(x_1^*) = 1$ och $F''_\mu(x_1^*) \neq 0$ så är x_1^* instabil enligt Sats 5.2(i).



Figur 19: x_1^* är instabil när $\mu = 1$

Figuren 19 visar att banan för de positiva initialvärde x_0 närmar sig fixpunkten x_1^* medan banan för de negativa initialvärde x_0 avlägsnar sig från fixpunkten x_1^* , vilket visar att x_1^* är en instabil fixpunkten som vi visade ovan. Eftersom vi är endast intresserade av $x_0 \in [0, 1]$ är x_1^* en asymptotiskt fixpunkten då $\mu = 1$.

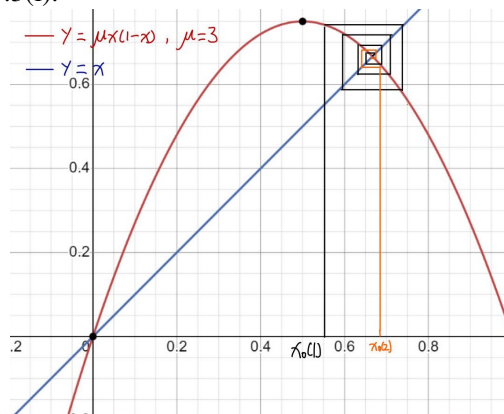
För att den andra fixpunkten $x_2^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ ligger inom intervallet $[0, 1]$ så krävs $\mu > 1$. Då gäller att $F'_\mu(x_2^*) = 2 - \mu$ så vi behöver betrakta två fall.

(a) När $|2 - \mu| < 1$ är $1 < \mu < 3$, och då blir x_2^* asymptotiskt stabil enligt Sats 5.1(i). När $\mu = 3$ så är $F'_\mu(x_2^*) = 2 - \mu = -1$, och då behöver vi den andra och tredje derivatan för att avgöra stabilitet.

$$F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x \Rightarrow F''_\mu(x) = -2\mu \Rightarrow F''_\mu(x_2^*) = -2\mu$$

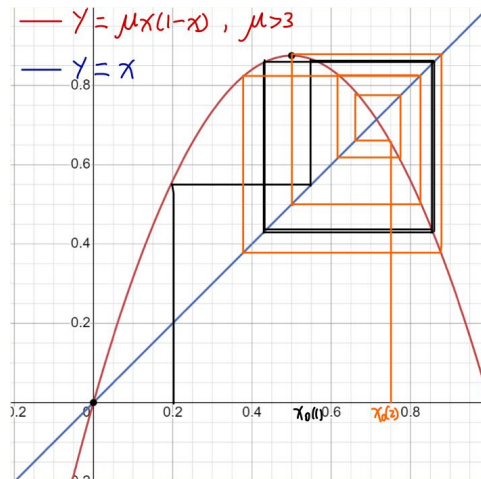
$$F''_\mu(x) = -2\mu \Rightarrow F'''_\mu(x) = 0 \Rightarrow F'''_\mu(x_2^*) = 0$$

Eftersom $-2F'''_\mu(x_2^*) - 3[F''_\mu(x_2^*)]^2 = -108$ är mindre än 0, så är x_2^* asymptotiskt stabil enligt Sats 5.3(i).



Figur 20: x_2^* är asymptotiskt stabil när $1 < \mu \leq 3$

(b) När $|2 - \mu| > 1$ är $\mu > 3$. Då är x_2^* instabil enligt Sats 5.1(ii).



Figur 21: x_2^* är instabil när $\mu > 3$

7.2 2-Cykel

Vad händer när $\mu > 3$? Vi kommer att undersöka det med hjälp av 2-periodisk cykel [2, s.45]. Enligt Definition (6.1) är en punkt x en 2-periodisk punkt till differensekvation $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ om $F_\mu^2(x) = x$, där $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, vilket medför $F_\mu^2(x) = \mu(\mu x(1 - x))(1 - \mu x(1 - x))$. Då blir

$$\begin{aligned} \mu(\mu x(1 - x))(1 - \mu x(1 - x)) &= x \\ \mu^2 x(1 - x)(1 - \mu x(1 - x)) - x &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

De gemensamma rötterna till ekvationer $F_\mu(x) = x$ och $F_\mu^2(x) = x$ är 1-periodiska punkter,

$$\begin{aligned} \mu x(1 - x) &= x \\ \mu x(1 - x) - x &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Vi dividera vänster led av Ekvation (21) med vänster led av Ekvation (22) för att eliminera de två gemensamma rötterna. Detta ger oss

$$\frac{F_\mu^2(x) - x}{F_\mu(x) - x} = \mu^2 x^2 - \mu^2 x - \mu x + \mu + 1 = 0 \quad (23)$$

Lösningar till Ekvation (23) är:

$$x(1) = \frac{(1 + \mu) - \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu}$$

$$x(2) = \frac{(1 + \mu) + \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu}$$

I nästa steg ska vi undersöka stabilitet av 2-cykeln $[x(1), x(2)]$.

Derivatan till $F_\mu(x)$ är $F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$. Då blir

$$F'_\mu(x(1)) = \mu - 2\mu \left(\frac{(1 + \mu) - \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu} \right) = -1 + \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}$$

$$F'_\mu(x(2)) = \mu - 2\mu \left(\frac{(1 + \mu) + \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu} \right) = -1 - \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}$$

$$\begin{aligned} |F'_\mu(x(1))F'_\mu(x(2))| &= |(-1 + \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)})(-1 - \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)})| \\ &= |1 - (\mu - 3)(\mu + 1)| = |-\mu^2 + 2\mu + 4| \end{aligned}$$

Vi behöver betrakta två fall.

(a) När $|-\mu^2 + 2\mu + 4| < 1$ så är $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$. Då blir 2 cykeln $[x(1), x(2)]$ attraherande enligt Sats 6.1(i).

(b) När $|-\mu^2 + 2\mu + 4| > 1$ så är $\mu > 1 + \sqrt{6}$. Då blir 2 cykeln $[x(1), x(2)]$ repellerande enligt Sats 6.1(ii).

Vad händer när $\mu = 1 + \sqrt{6}$?

Den första, andra och tredje derivatan till $F_\mu^2(x)$ är

$$F'_\mu(x(1))F'_\mu(x(2)) = 1 - (\mu - 3)(\mu + 1)$$

$$F''_\mu(x(1))F''_\mu(x(2)) = -2\mu + 2$$

$$F'''_\mu(x(1))F'''_\mu(x(2)) = -2$$

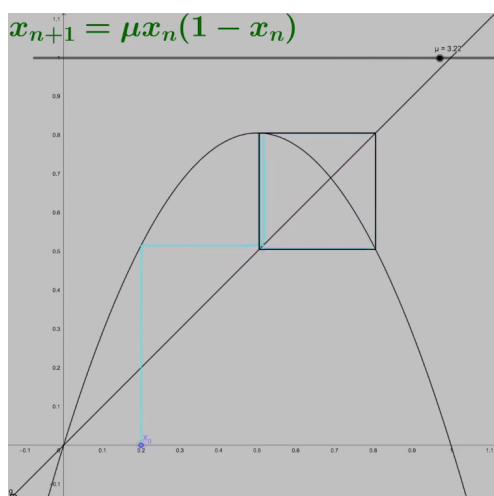
Detta ger oss

$$(F_\mu^2)'(1 + \sqrt{6}) = 1 - ((1 + \sqrt{6})^2 - 2(1 + \sqrt{6}) + 4) = -1$$

$$(F_\mu^2)''(1 + \sqrt{6}) = -2(1 + \sqrt{6} - 2) = -2\sqrt{6}$$

$$(F_\mu^2)'''(1 + \sqrt{6}) = -2.$$

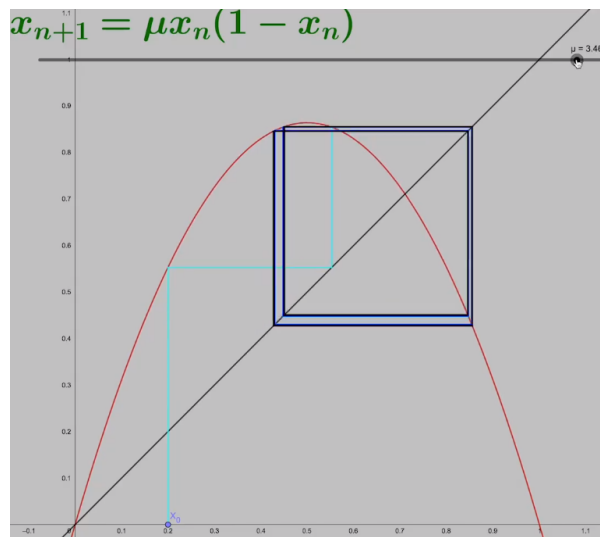
Vi ser att $(F_\mu^2(1 + \sqrt{6}))' = -1$ och $-2(F_\mu^2(1 + \sqrt{6}))'' - 3((F_\mu^2(1 + \sqrt{6}))''')^2 = 4 - 3(-2\sqrt{6})^2 = -68 < 0$, vilket visar att punkter $x(1)$ och $x(2)$ är asymptotiskt stabila enligt Sats 5.3(i) och i sin tur medför det att 2-cykel är attraherande.



Figur 22: 2-cykeln $[x(1), x(2)]$ är attraherande då $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$. Vidare kan vi att hitta 4-cykel genom att lösa

$$\frac{F_\mu^4 - x}{F_\mu^2 - x} = 0$$

med hjälp av en dator. Rötterna till ekvationen är då 4-periodiska punkter.

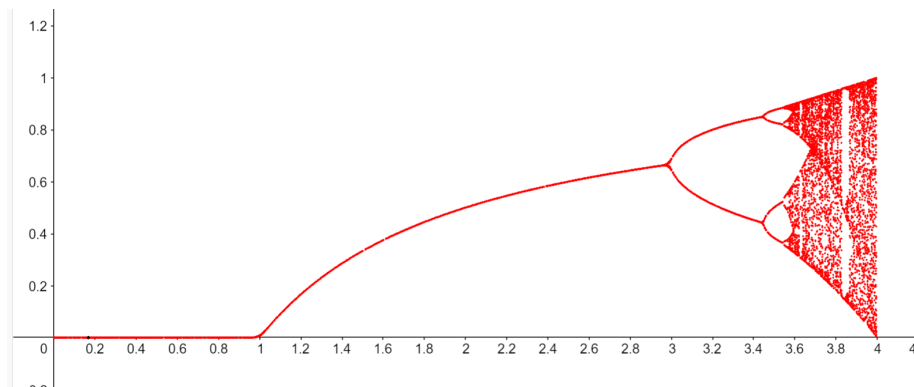


Figur 23: Attraherande 4 cykel

På samma sätt kan man hitta 8, 16, 32... 2^n -cykel [2, s.46]. Låt oss titta på ett annat diagram.

7.3 Bifurkationsdiagram

Låter horisontella axeln representera $\mu \in [0, 4]$ och vertikala axeln representera $F_\mu^n(x_0)$ med något startvärde $x_0 \in [0, 1]$. Sedan sätter man $x_0 = 0, 2$ och låter $F_\mu^n(0, 2)$ itererar n gånger där $200 \leq n \leq 500$. Sedan plottar man punkter $(\mu, F_\mu^n(x_0))$ där μ ökar med $\frac{1}{500}$ för varje iteration. Så får man ett diagram som kallas för bifurkationsdiagram [2, s.47].



Figur 24: Bifurkationsdiagram Källan: Sparks[4]

Diagram visar att:

- (a) Banan med startvärde $x_0 \in [0, 1]$ konvergerar mot fixpunkten $x_1^* = 0$ då $0 < \mu < 1$.
- (b) Banan med startvärde $x_0 \in [0, 1]$ konvergerar mot fixpunkten $x_2^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ då $1 < \mu < 3$ och x_2^* förlorar sin stabilitet när $\mu > 3$.
- (c) När $3 < \mu < 3,4494$ visar diagrammet en attraherande 2 cykel. 2 cykel förlorar sin stabilitet när $\mu > 3,4494$ och en attraherande och där en 4-cykel växer fram. Sådan fördubblade bifurkation fortsätter och 8, 16, 32... 2^n -cykel bildas.

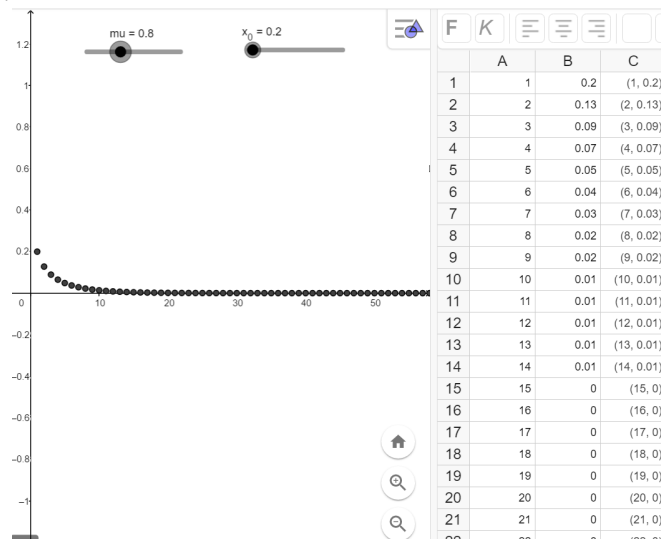
7.4 Resultat

Syftet med dynamiska system är att kunna förutsäga systemens tillstånd i framtiden. Detta gäller även logistiska ekvationen, där vi vill ta reda på vad som kommer hända med populationens storlek i framtiden. Vi kommer att ge en tolkning till ekvationen med ett exempel.

I en sluten omgivning finns resurser som räcker till maximala 10 000 invånare, $K = 10000$. Antal invånare som finns vid tiden 0 är 20% av den maximala, dvs $x_0 = 0,2$, vilket medför att det finns $10000 * 0,2 = 2000$ invånare vid tiden 0. Vad kommer att hända med antal invånare när $n \rightarrow \infty$ för olika μ värdet?

Med hjälp av Geogebra får vi följande resultat:

(a) $\mu = 0,8$:

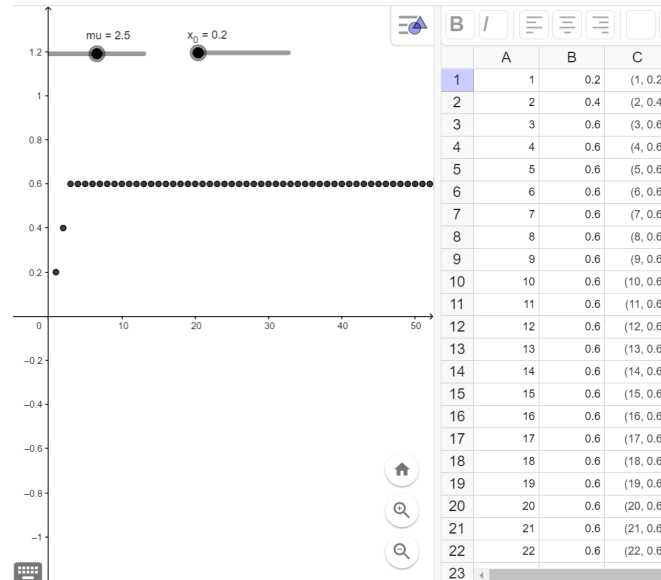


Figur 23: $\mu = 0,8$

Vi kan läsa från figuren att banan med startvärde $x_0 = 0,2$ blir 0 då $n \rightarrow \infty$. Detta

på grund av fixpunkt $x_1^* = 0$ är asymptotiskt stabil då $0 < \mu < 1$. Således kommer populationsstorleken att gå mot 0 i den här fall.

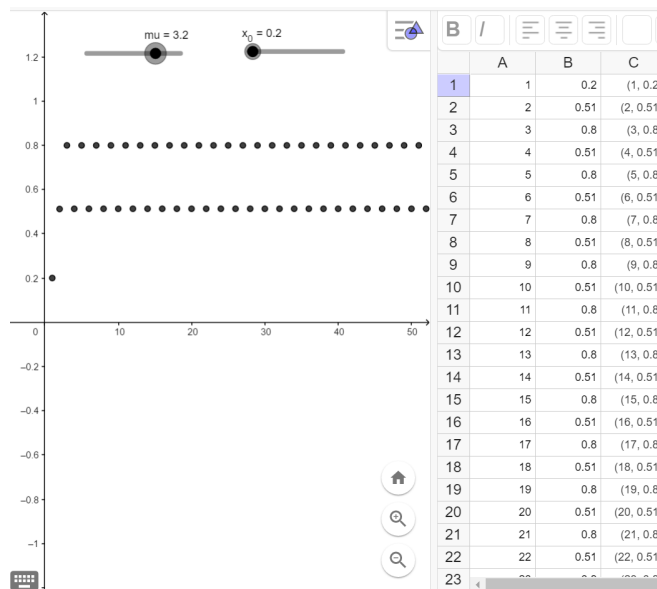
(b) $\mu = 2,5$:



Figur 24: $\mu = 2,5$

Vi ser att efter några iterationer hamnade banan till x_0 i den andra fixpunkten $x_2^* = \frac{\mu-1}{\mu} = 0,6$. populationsstorleken kommer att bli 6000 då $n \rightarrow \infty$.

(c) $\mu = 3,2$:



Figur 25: $\mu = 3, 2$

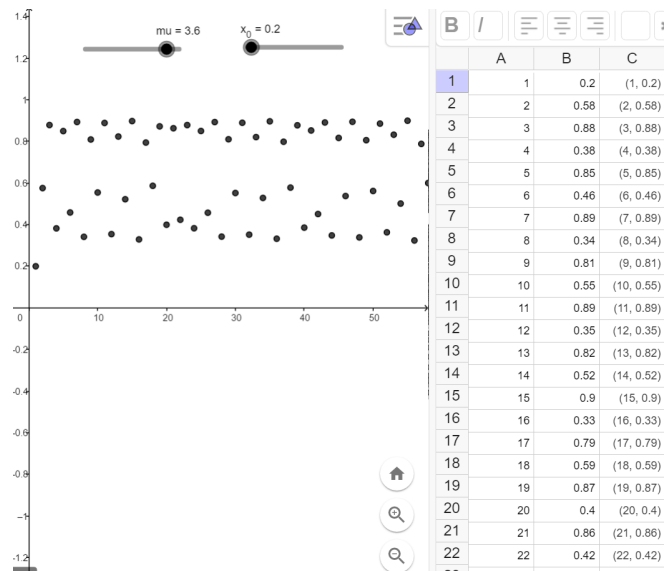
Det framgår av figuren där $F_{3,2}(x) = 3, 2x(1 - x)$ har en attraktiv 2-cykel. Vi ser att banan med startvärde $x_0 = 0, 2$ svänger mellan

$$x(1) = \frac{(1 + \mu) - \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu} = \frac{(1 + 3, 2) - \sqrt{(3, 2 - 3)(3, 2 + 1)}}{2 * 3, 2} \approx 0, 51$$

$$x(2) = \frac{(1 + \mu) + \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu} = \frac{(1 + 3, 2) + \sqrt{(3, 2 - 3)(3, 2 + 1)}}{2 * 3, 2} \approx 0, 8.$$

Populationsstorleken kommer att bli $K * x(1) = 5100$ för de jämna generationerna och $K * x(2) = 8000$ för de udda generationerna ($n > 1$).

(d) $\mu = 3, 6$:



Figur 26: $\mu = 3,6$

Den här gången finns inte någon asymptotiska fixpunkter eller attraherande periodiska punkter för att hjälpa oss dra slutsatsen, och vi kan då inte bestämma populationenstorleken då $n \rightarrow \infty$.

8 Avslutning

I det här avslutande kapitlet ska vi sammanfatta vad vi har kommit fram till i det här arbetet. I början av rapporten gav vi en definition av dynamiska system och visade hur man kan använda differensekvationen för att betrakta dynamiska system i diskret tid. Syfte med dynamiska system är att kunna förutsäga systemens tillstånd i framtiden. Själva beräkningen av differensekvation är inte svårt, det går snabbt att räkna fram ett tillstånd för systemet i ett specifik tidpunkten. Den största osäkerheten ligger på noggrannhet av initialvärdet och parameter som ingår i evolutionsoperator. Ett litet mätfel kan leda till stora avvikelser i resultatet. I vårt exempel visade vi att en sådan avvikelse gjorde att väderprognoser inte alltid stämmer. Samma effekt visade också den logistiska ekvationen, där små skillnader av μ värdet leder till helt annorlunda resultat i slutet.

9 Referens

Referenser

- [1] Persson, Arne och Böiers, Lars-Christer (2010). *Analys i en variabel*. Upp-
laga 2:8. Lund:Studentlitteratur.
- [2] Elaydi, Saber.N , (2013). *An Introduction to Difference Equations*.Third Edi-
tion. Springer New York.
- [3] Källén, Anders (2013). *Dynamiska system – dess syfte och begrepp*.
[http://www.ctr.maths.lu.se/matematiklth/personal/andersk/webbok/
DynamiskaSystem/dynsysintro.pdf](http://www.ctr.maths.lu.se/matematiklth/personal/andersk/webbok/DynamiskaSystem/dynsysintro.pdf)
(Hämtades 2020-05-03)
- [4] Ben Sparks, *Bifurcation Diagram (Logistic Map)*.
<https://www.geogebra.org/m/wQbHRgye>
(Hämtades 2020-05-28)