



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

En upptäcktsresa runt Fibonaccis talföljd

av

Bianca Tvrtkovic

2020 - No K32

En upptäcktsresa runt Fibonaccis talföljd

Bianca Tvrtkovic

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Håkan Granath

2020

Sammanfattning

Den berömda talföljden döpt efter Leonardo Fibonacci förekommer i många intressanta, oväntade och vackra sammanhang, både i naturen och matematiken. Syftet med uppsatsen var att fördjupa kunskapen, och bevisa några kända resultat som finns för talföljden. I inledningen presenteras den historiska bakgrunden om hur Fibonaccis talföljd upptäcktes och exempel på var i naturen den återfinns. Några av de områden där sambandet med talföljden behandlas och bevisas matematiskt är Pascals triangel, en sats med ordnade summor, delbarhetsegenskaper, och en diofantisk ekvation.

Nyckelord: Fibonaccis talföljd, Fibonaccital, gyllene snittet, Lucas talföljd, Binets formel, diofantiska ekvationer.

Abstract

The famous sequence named after Leonardo Fibonacci is found in various interesting, unexpected and beautiful contexts. The aim of the essay was to deepen the knowledge of the sequence, and proof some of the known propositions for the sequence. In the introduction, I include the historical background of how the Fibonacci sequence was discovered, and some illustrating examples of where it can be found in nature. Then followed by some mathematical proofs concerning the Fibonacci sequence in Pascal's triangle, divisibility properties and a diophantine equation, amongst other things.

Key words: Fibonacci sequence, Fibonacci numbers, golden ratio, Lucas sequence, Binet's formula, diophantine equations.

Innehåll

1	Bakgrund	4
1.1	Leonardo Fibonacci	4
1.2	Fibonaccis talföljd	4
1.3	Fibonaccis talföljd i naturen	5
2	Elementära beräkningar	8
2.1	Lucas talföljd	8
2.2	En relation för Lucas och Fibonaccis talföljd	8
2.3	En summationsrelation för Fibonaccital	9
2.4	Fibonaccis talföljd i Pascals triangel	10
2.5	Ordnade summor med termerna ett och två	13
3	Gyllene snittet	14
3.1	En definition av gyllene snittet	14
3.2	Binets formel	14
3.3	Beräkning av ett gränsvärde med Binets formel	17
3.4	Tillämpningar av Binets formel	18
3.5	Binets formel för Lucastal	18
4	Delbarhetsegenskaper hos Fibonaccital	19
4.1	Största gemensamma delare	19
4.2	En delbarhetsrelation för Fibonaccitalen	19
5	En diofantisk ekvation för Fibonaccitalen	22
5.1	Algebraiska strukturer	22
5.2	Algebraiska heltal	25
5.3	Enheter	28
5.4	Diofantiska karakteriseringen av Fibonaccitalen	30
6	Summering och avslut	31

1 Bakgrund

1.1 Leonardo Fibonacci

Vår resa börjar i staden Pisa under 1170-talet, när den italienska matematikern Leonardo Fibonacci (se Figur 1) föds. Under denna tid är Pisa en central handelsplats i världen där allt från kryddor, vin och läder transporterades till och från staden. Byggnationen av det lutande tornet i Pisa pågår också nu, och något som blir mer och mer tydligt under denna tid av handel och tillväxt är att det behövs matematik för att beräkna priser med mera. Det romerska talsystemet som används i Italien består av sju grundsiffror som betecknas med bokstäver, I= 1, V= 5, X= 10, L= 50, C= 100, D= 500 och M= 1000. Om man till exempel vill skriva talet 1968 blir det i romerska siffror MCMLXVIII, och läses som $1000 + 1000 - 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1$. Vidare har det romerska talsystemet ingen symbol för noll, istället lämnas en tom plats. Talsystemet som används i Italien under 1100-talet är alltså relativt ineffektivt och dåligt anpassat för handel och matematiska beräkningar.

Fibonacci är son till en välbärgad handelsman som ibland låter honom följa med på olika handelsresor. Det är framförallt under dessa resor som Fibonacci kommer i kontakt andra numeriska system som han sedan kan jämföra med det romerska som används i Italien. Fibonacci är intresserad av vilket numeriskt system som är bäst lämpat för att utföra aritmetiska operationer bland annat. Senare i sitt liv konstaterar han att den hindu-arabiska numreringen med siffrorna 0-9 och platsvärde, är överlägset det romerska nummersystemet. Det hindu-arabiska systemet är enligt Fibonacci enklare att arbeta med när det kommer till matematiska beräkningar och konvertering av mått och vikter. Detta, och mycket mer skriver han om i sitt mest kända verk, *Liber Abaci*, som publiceras 1202 [7]. Avsikten med boken är att dela upptäckterna gällande det hindu-arabiska systemet med det vanliga folket i Italien, och sedan motivera varför det är bra anpassat för handel. Dock innefattar boken mer än bara numeriska system. I sitt verk skriver Fibonacci även om mer abstrakt matematik så som irrationella tal och primtal, men också kaniner.

Det är delen om kaniner som gör Fibonacci till den första människan i västvärlden att beskriva talföljden senare blir känd som Fibonaccis talföljd. Fibonacci beskriver talföljden genom att presentera ett matematiskt problem som handlar om reproduktionen hos dessa gnagare. Frågan han ställer är hur många kaniner som kan produceras på ett år om det initialt finns två kaniner som varje månad får ett nytt par kaniner, som blir könsmogna en månad senare. Svaret visar sig vara att reproduktionen följer en väldigt specifik talföljd som gör Leonardo Fibonacci världskänd, än i vår tid [6].

1.2 Fibonaccis talföljd

Den talföljd som Leonardo Fibonacci är först med att publicera är en talföljd där varje element är summan av de två föregående elementen, med startvärdena



Figur 1: Porträtt av Leonardo Fibonacci

Källa: Wikipedia, Leonardo Fibonacci

0 och 1. Talföljden kallas för Fibonaccis talföljd efter dess upptäckare, och ser utskrivna ut på följande vis

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

där det n :te Fibonaccitalet ofta betecknas F_n , där $n \in \mathbb{N}$. Rekursionen för Fibonaccis talföljd är

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (1)$$

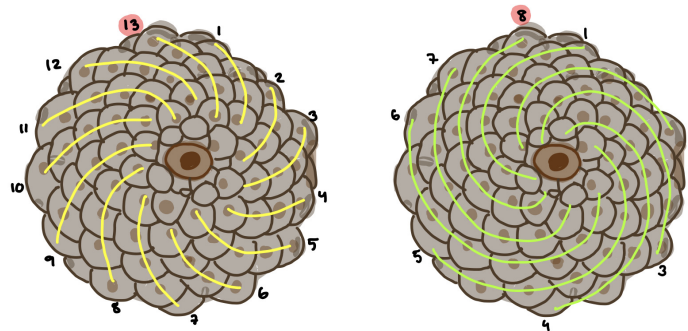
för alla n större än 1.

Värt att notera är att vi vissa fall behandlar Fibonaccis talfölj med startvärdena 1 och 1, men rekursionen blir ändå likadan för $n > 1$.

1.3 Fibonaccis talföljd i naturen

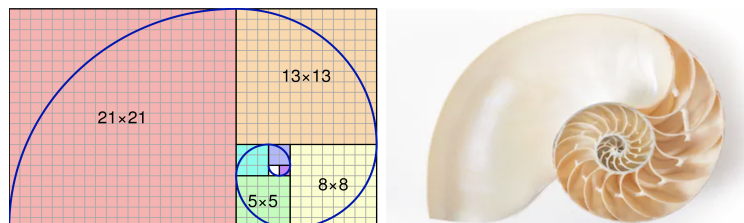
Både Leonardo Fibonacci och modern vetenskap har konstaterat att Fibonaccis talföljd återfinns på många ställen i naturen. Två exempel på detta är i spiralerna i skalet på annanasfrukter och spiralerna i kottar från tall (se Figur 2). Det är i regel 5, 8, 13 eller 21 spiraler i dessa, och samtliga tal är element i Fibonaccis talföljd [9] [1].

Fibonaccis talföljd återfinns även i geometrin hos många snäckskal. Sättet som talföljden är relaterat till snäckornas spiral ges av en geometrisk figur även kallad Fibonaccirektangel (se Figur 3). En Fibonaccirektangel bildas genom att vi placerar två kvadrater med sidan ett bredvid varandra så att de bildar en rektangel med sidorna ett och två. Sedan fortsätter vi genom att lägga till en



Figur 2: Fibonaccital i spiralerna hos tallkottar.

annan kvadrat med sidan två, intill vår bildade rektangel med sidan två. De tre kvadraterna bildar tillsammans en ny rektangel med sidorna tre och två. Mot den längsta sidan adderar vi en ny kvadrat med sidan tre så att ytterligare en rektangel erhålls, denna gång med sidorna tre och fem. Genom att försätta på samma sätt och bygga på med kvadrater som har samma sidlängd som den längsta sidan av den skapade rektangeln, får vi en så kallad Fibonaccirektangel bestående av kvadrater med sidor vars längd som motsvarar element i Fibonaccis talföljd. Därefter ritar vi en båge som motsvarar en kvarts cirkelvarv genom varje kvadrat så att bågarna blir sammanhängande. Vi erhåller då en spiral som återfinns i naturen i skalet hos många molluskararter, t.ex. ammoniter [13].

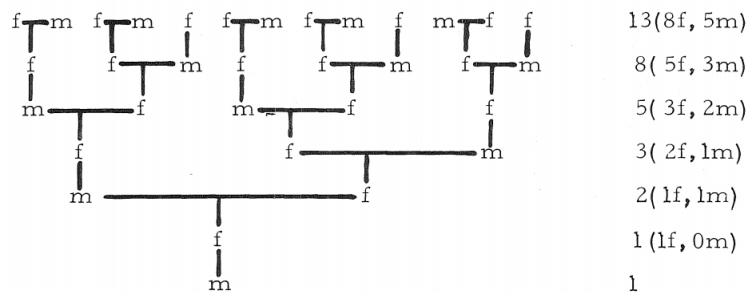


Figur 3: Fibonaccis talserie i spiralen hos en snäcka¹

Ytterligare ett exempel där Fibonaccis talföljd förekommer i naturen, observerar vi i det hanliga biets släkträd, där antalet individer i någon generation är ett Fibonaccital. Anledningen till detta är att bin har en ganska annorlunda genetisk uppsättning än de flesta andra djur. Det hanliga biet, drönaren, kläcks från ett obefruktat ägg och har därför endast en förälder. Det honliga biet, å andra sidan, kläcks från ett befruktat ägg och har två föräldrar. Om vi ritar upp det hanliga biets släkträd (se Figur 4) ser vi att den yngsta hanen har en honlig förälder, två morföräldrar, tre gammelmorföräldrar, och fem gammel-

¹Källor: <http://mevzeforex.com> och <https://www.shutterstock.com>

gammelmorföräldrar och så vidare [12]. Det verkar som att det hanliga biets släktträd följer samma rekursion som Fibonaccis talföljd då det läses bakåt i tiden, där vi kallar den yngsta hanen för generation ett, men vi vill så klart bevisa detta matematiskt.



Figur 4: Det hanliga biets släktträd där (m)=hane, (f)=hona [12]

Sats 1.1. Det hanliga biets släktträd följer samma rekursion som Fibonaccis talföljd, då det läses bakåt i tiden.

Bevis. Till att börja med ansätter vi att f_n är det totala antalet honliga bin i generation n , $f_1 = 0$ och $f_2 = 1$. Vidare ansätter vi att m_n är det totala antalet hanliga bin i generation n , $m_1 = 1$ och $m_2 = 0$. B_n är det adderade antalet honliga och hanliga bin i generation n , det vill säga $B_n = f_n + m_n$. Således är $B_1 = 1$ och $B_2 = 1$.

Vi vet att varje honligt bi har två föräldrar, en hane och en hona. Därför kommer antalet hanliga bin i generation n vara exakt lika många som de honliga bina i generation $n - 1$. Vi vet lika så att varje hanligt bi har en honlig förälder. Därför kommer antalet honliga bin i generation n vara lika många som det totala antalet bin i generation $n - 1$. Algebraiskt uttrycker vi detta som

$$\begin{aligned} m_n &= f_{n-1} \\ f_n &= f_{n-1} + m_{n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sedan skriver om uttrycken från ekvationerna (2) på följande sätt

$$\begin{aligned} m_n &= f_{n-2} + m_{n-2} = m_{n-1} + m_{n-2} \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Till sist vill vi kombinera de två uttrycken (3) och får

$$\begin{aligned} B_n &= m_n + f_n = (m_{n-1} + m_{n-2}) + (f_{n-1} + f_{n-2}) = m_{n-1} + f_{n-1} + m_{n-2} + f_{n-2} = \\ &= B_{n-1} + B_{n-2}. \end{aligned}$$

Antalet bin i generationerna i det hanliga biets släkträd, $B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$, där $B_0 = 1$ och $B_1 = 1$, följer samma rekursion som Fibonacci talserie för alla $n > 1$. \square

2 Elementära beräkningar

2.1 Lucas talföljd

Vår upptäcktsresa fortsätter med en talföljd som är nära besläktad med Fibonacci talföljd, vid namn Lucas talföljd. Skillnaden mellan de två är att Lucas talföljd har andra startvärden än Fibonacci talföljd. Startvärdena för Lucas talföljd är 2 och 1, och följer mönstret att varje element är summan av de två föregående elementen. Utskriven blir Lucas talföljd

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \dots$$

Vidare betecknas Lucas talserie ofta L_n där $L_0 = 2$ och $L_1 = 1$. För alla n större än 1 gäller att

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}. \quad (4)$$

2.2 En relation för Lucas och Fibonacci talföljd

Ett av flera samband som existerar mellan Fibonacci och Lucas talföljd är att två adderade Fibonacci tal med två termers mellanrum, är lika med Lucas talet mellan dem. Vi vill med matematisk induktion visa detta.

Sats 2.1. För alla $n \geq 1$ gäller

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \quad (5)$$

Bevis. Till att börja med visar vi att antagandet uppfyller basfallen för $n = 1$ och $n = 2$. Vi får för $n = 1$ att relationen

$$L_1 = F_0 + F_2$$

blir

$$1 = 0 + 1$$

så att första basfallet stämmer. För basfallet då $n = 2$ får vi att relationen

$$L_2 = F_1 + F_3$$

blir

$$3 = 1 + 2$$

så att andra basfallet stämmer. Sedan gör vi två induktionsantaganden för $n = k$ och $n = k + 1$, så vi antar att

$$L_k = F_{k-1} + F_{k+1},$$

och

$$L_{k+1} = F_k + F_{k+2}.$$

Vi vill med hjälp av induktionsantagandet visa att relationen håller för $n = k+2$. Med definitionen för Lucas talserie (4) får vi

$$\begin{aligned} L_{k+2} &= L_{k+1} + L_k \\ &= F_k + F_{k+2} + F_{k-1} + F_{k+1} \\ &= F_k + F_{k-1} + F_{k+2} + F_{k+1} \\ &= F_{k+1} + F_{k+3}, \end{aligned}$$

och induktionssteget håller för $n = k + 2$. Med induktionsprincipen har vi nu visat att relationen $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ stämmer för alla $n \geq 1$. \square

2.3 En summationsrelation för Fibonaccital

En av många relationer som förekommer med Fibonaccital är att summan av kvadraten av n efterföljande Fibonaccital är lika med produkten av det n :te och det $n + 1$:e Fibonaccitalet.

Sats 2.2. För alla $n \geq 1$ gäller

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}. \quad (6)$$

Vi vill med hjälp av matematisk induktion visa att påståendet stämmer.

Bevis. Inledningsvis undersöker vi om basfallet $n = 1$ är sant. Vi får att

$$F_1^2 = F_1 F_2$$

blir

$$1^2 = 1 \cdot 1,$$

och basfallet håller. Därefter gör vi ett induktionsantagande för $n = k$ och får relationen

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_k^2 = F_k F_{k+1}. \quad (7)$$

Därefter vill vi visa att relationen håller för $n = k + 1$. Vi skriver om relationen för $n = k + 1$ med induktionsantagandet (7), vilket ger

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1} (F_k + F_{k+1}) = F_{k+1} F_{k+2},$$

och induktionssteget håller. Vi har alltså med hjälp av induktionsprincipen visat att

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

för alla $n \geq 1$. \square

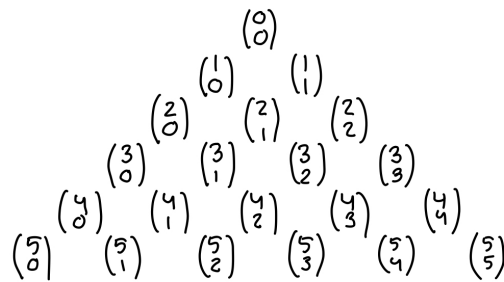
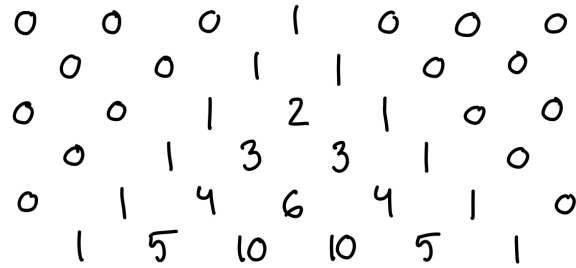
2.4 Fibonaccis talföljd i Pascals triangel

En annan upptäckare vid namn Grimaldi [11] har tipsat om att det finns ett samband mellan Fibonaccis talföljd och Pascals triangel. Vi vill undersöka om detta stämmer. Titta på Figur 5 som är en avbildning av Pascals triangel. Denna triangel har egenskapen att varje element är summan av de två elementen i raden direkt över. Det går att översätta alla element i Pascals triangel binomialkoefficienter (se Figur 5 igen), där

Definition 2.1. För alla $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ definieras

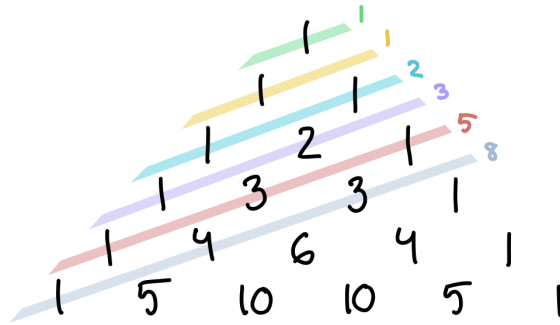
$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} & \text{om } k \geq 0 \\ 0 & \text{om } k < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Eftersom k i definition 2.1 är ett heltal, utökas Pascals triangel till binomialkoefficienter för negativa k . Dessa binomialkoefficienter får värdet noll och det är det vi ser i Figur 5. Vi ser även att när $k \geq n$ blir värdet på binomialkoefficienten noll, detta visas också i samma figur.



Figur 5: Pascals triangel

Fortsättningsvis observerar vi att om elementen i de sneda diagonalerna (se Figur 6) i Pascals triangel adderas, får vi att de första diagonalernas summor är 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, Vi kallar summan av den n :te sneda diagonalen för a_n . Om



Figur 6: Summan av de första sneda diagonalerna i Pascals triangel.

vi använder oss av Pascal triangel översatt i binomialkoefficienter, får vi att den n :te diagonalens summa är

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-k}{k}.$$

Där $k = \frac{n}{2}$ om n är jämnt, och $k = \frac{n-1}{2}$ om n är udda. Vi har alltså hittat ett mönster och kommit fram till att den m :te diagonalen kan skrivas som

$$a_m = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m-k}{k}. \quad (9)$$

Det finns en välkänd identitet gällande binomialkoefficienter med namnet Pascals identitet.

Sats 2.3 ([10]). För alla $k, n \in \mathbb{Z}$, gäller

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Normalt formuleras identiteten för $0 < k < n$, men vi ser enkelt att den gäller även om $k \leq 0$ eller $k \geq n$.

Vi vill med hjälp av Pascals identitet visa

Sats 2.4. Summan av elementen i de sneda diagonalerna i Pascals triangel har samma rekursion och startvärden som Fibonaccis talföljd, dvs. $a_n = F_n$ för $n \geq 1$.

Bevis. För jämna n får vi

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \left(\binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n-k-1}{k} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Den vänstra summans övre gräns ändrades i sista steget eftersom den sista binomialkoefficienten då $k = \frac{n}{2}$ definieras som noll. Vi konstaterar även att då det sista elementet i summan är noll, och det näst sista elementet i summan är av udda n , hör hela summan till udda n . Vi skriver därför om denna summa med ekvation (9). Vidare ändrades också den högra summans undre gräns i sista steget. Detta beror på att då $k = 0$ blir det undre talet i binomialkoefficienten negativt och hela uttrycket definieras som noll. Vi inför ett variabelbyte för den högra summan där $k = s + 1$, för att sedan även skriva om denna. Vi får

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{(n-1)-k}{k} + \sum_{s=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{(n-2)-s}{s} = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

För udda n får vi istället följande uttryck

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(\binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k-1}{k} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k-1}{k-1}. \end{aligned}$$

där den högra summans lägre gräns i sista steget har ändrats. Detta eftersom binomialkoefficienten då k antar värdet noll, definieras som noll. För den högra summan i det sista steget, inför vi ett variabelbyte där $k = j + 1$. Vi får

$$a_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{(n-1)-k}{k} + \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{(n-2)-j}{j} = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Slutligen, eftersom den första och andra sneda diagonalens element i Pascals triangel har summan 1, har vi visat att diagonalernas summor följer rekursionen $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ för $n > 2$, vilket är samma rekursion som Fibonaccis talföljd med startvärdena $a_1 = 1$ och $a_2 = 1$.

□

2.5 Ordnade summor med termerna ett och två

Under vår upptäcktsresa stöter vi på en folkmassa som är mitt uppe i en hetlevrad diskussion. Vi lyckas höra vad de bråkar om, och det visar sig vara lösningen till ett kombinatoriskt problem. Någon har ställt frågan hur många ordnade summor bestående av termerna 1 och 2, som finns av talet $n \in \mathbb{N}$. Vi vill självklart komma på lösningen till problemet och börjar med att skiva upp några exempel.

Exempel 2.1. Då $n = 2$ är de ordnade summorna $\{1 + 1, 2\}$. Det finns alltså två ordnade summor av talet 2.

För $n = 3$ är de ordnade summorna $\{1 + 1 + 1, 1 + 2, 2 + 1\}$, och det finns tre ordnade summor.

Då $n = 4$ är de ordnade summorna $\{1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1, 2 + 2\}$, vilket totalt ger fem ordnade summor.

Sats 2.5 ([11]). Antalet ordnade summor av talet $n \in \mathbb{N}$ vi kan skriva med termerna 1 och 2 följer Fibonaccis talföljd.

Bevis. Till att börja med kallar vi antalet följder med termerna 1 och 2 med summan n , för A_n . Speciellt är $A_0 = 0$ och ser att $A_1 = 1$.

Sedan observerar vi att A_n antingen kan börja med termen 1 eller 2. Antalet ordnade summor som startar med 1 är A_{n-1} för alla $n > 0$ och antalet ordnade summor som startar med 2 är A_{n-2} för alla $n > 1$. Vill vi sedan beskriva det totala antalet följder med termerna 1 och 2 med summan n får vi att de kan beskrivas som antalet summor som börjar med 1 adderat med antalet summor som börjar med 2, dvs.

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$

för alla $n > 1$. Tillsammans med att $A_0 = 0$ och $A_1 = 1$ får vi därmed Fibonaccis talföljd. \square

Ett alternativt bevis för sats (2.5) som jag upptäcker medans vi löser problemet, går att koppla till beviset vi gjorde för sats (2.4) som handlade om de sneda diagonalerna i Pascals triangel.

Vi kan se på problemet, hur många ordnade summor vi kan bilda av talet n med termerna 1 och 2, på ett lite annorlunda sätt.

Om antalet tvåor vi använder för att bilda summan n är k , är antalet ettor vi använder för att bilda summan n således $n - 2k$. Det totala antalet ettor och tvåor vi använder för att bilda summan n är $k + (n - 2k) = n - k$. Vi kan skriva antalet ordnade summor med termerna 1 och 2, med k stycken 2:or

$$A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k},$$

vilket vi bevisade i sats (2.4) följer samma rekursion som Fibonaccis talföljd, då $A_0 = 1$ och $A_1 = 1$. Alltså är sättet att skriva antalet ordnade summor av talet n bestående av termerna ett och två, samma som summan av elementen i den n :te sneda diagonalen i Pascals triangel. Människorna i folkmassan blir otroligt lättade över att vi lyckats lösa problemet, så att de kan sluta bråka och återgå till sina vanliga liv.

3 Gyllene snittet

3.1 En definition av gyllene snittet

Lite senare samma dag hittar vi en bok [7] med titeln *The golden ratio: the story of phi, the world's most astonishing number* (2002) som bland annat handlar om Fibonaccis talföljd. I boken står det att det finns ett förhållande som för första gången definierades runt år 300 f.Kr. av Euklides. Detta förhållande kom att kallas det gyllene snittet och definieras i boken med hjälp av en rak linje som snittas i två mindre bitar (se Figur 7). Den längre biten har längd x och den kortare biten har längd 1. Således är den totala längden på linjen $x+1$. Dessutom gäller att $x > 1$. Det finns ett värde för x som leder till att förhållandet mellan totala längden av linjen och den längsta biten är det samma som förhållandet mellan med längsta biten och den minsta biten. Detta förhållande är det gyllene snittet. Om vi utvecklar ekvationen

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

får vi

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

så värdet på x kan beräknas till $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Men eftersom $x > 1$, är vi inte intresserade av $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, utan den enda lösningen vi bryr oss om är $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Gyllene snittet motsvarar detta värde på x och betecknas konventionellt

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033\dots$$

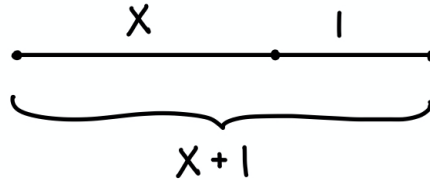
Även $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ har fått en egen symbol och betecknas

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.618033\dots$$

Dessa två symboler kommer vi ha stor användning för senare i upptäcktsresan.

3.2 Binets formel

Vi befinner oss nu i tidigt 1800-tal där vi träffat en annan matematiker vid namn Jacques Philippe Binet som påstår att han hittat en explicit formel för Fibonaccitalen [11]. Vi vill bevisa hans formel genom ett bevis med matriser.



Figur 7: Gyllene snittet representerat i en linje.

Sats 3.1. Det n :te Fibonacci-talet, F_n , kan skrivas som

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}.$$

Bevis. Till att börja med definierar vi kolonnmatrisen $V_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ för alla $n \geq 0$. Dessutom sätter vi att $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Fibonacci's rekursionsformel i matrisform, där multiplikation av matrisen A och någon vektor V_n ger oss nästkommande Fibonaccivektor V_{n+1} , kan skrivas som

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= AV_n \\ \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

för alla $n \geq 0$.

Avbildningsmatrisen A kan beskrivas med sambandet

$$A = QDQ^{-1}$$

där Q har A 's egenvektorer som kolonnvektorer och D har egenvärdena till A i diagonalen (och Q^{-1} är inversmatrisen till Q). Det följer direkt att följande samband är sant

$$A^n = QD^nQ^{-1}$$

för alla $n \geq 1$. Vi hittar Q genom att beräkna egenvektorerna till A . För att göra det börjar vi med att beräkna egenvärdena till A med hjälp av karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

där I är identitetsmatrisen och λ är egenvärdena. Vi får

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

och lösningarna till ekvationen $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ är egenvärdena $\lambda_1 = \varphi$, $\lambda_2 = \psi$. Vidare vill vi med hjälp av egenvärdena beräkna egenvektorerna $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, till A genom att lösa ekvationssystemet

$$(A - \lambda_1 I)u_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \varphi & 1 \\ 1 & -\varphi \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Med Gauss-Jordan elimination där vi multiplicerar andra raden med $\frac{1}{\varphi}$ och adderar till första raden, får vi

$$\begin{pmatrix} -(\frac{\varphi^2 - \varphi - 1}{\varphi}) & 0 \\ 1 & -\varphi \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där vi sedan observerar att elementet i första kolumnen och första raden blir lika med noll eftersom $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Vi får alltså att

$$x_1 - \varphi y_1 = 0$$

så en första egenvektor är $u_1 = \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$. En andra egenvektor, u_2 , för egenvärdet $\lambda_2 = \psi$, beräknar vi på liknande sätt och får att

$$\begin{pmatrix} 1 - \psi & 1 \\ 1 & -\psi \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x - \psi y = 0,$$

och $u_2 = \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}$. Matrisen Q blir således

$$Q = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nu vill vi beräkna matrisen Q^{-1} med en känd formel för matrisinverser. Formeln ger att

$$Q^{-1} = \frac{1}{\psi - \varphi} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix},$$

Sedan vill vi uttrycka vektorerna V_n som en linjärkombination av egenvektorerna u_1, u_2 vi beräknade tidigare. För den första vektorn i Fibonaccis talföljd, V_0 , då $n = 0$ får vi att

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 u_1 + c_2 u_2 = Q \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Fortsättningsvis vill vi lösa ut $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ och får

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Går vi sedan tillbaka till den första Fibonaccivektorn V_0 , kan vi nu uttrycka den som

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}u_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}u_2.$$

Eftersom u_1, u_2 är egenvektorer med egenvärdena φ och ψ och

$$V_n = A^n V_0$$

kan vi uttrycka den n :te Fibonaccivektorn V_n som

$$\begin{aligned} V_n &= A^n \left(\frac{1}{\sqrt{5}}u_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}u_2 \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n u_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^n u_2 \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Det följer sedan att det n :te Fibonaccitalet F_n kan erhållas från $V_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$, och på slutet form skrivs som

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}, \quad (11)$$

vilket är Binets formel. \square

3.3 Beräkning av ett gränsvärde med Binets formel

Tidigare visade vi att Binets formel ger oss det n :te Fibonaccitalet. Vi vill med hjälp av denna formel undersöka gränsvärdet av kvoten av två efterföljande Fibonaccital då n går mot oändligheten, dvs undersöka om gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}. \quad (12)$$

existerar, och i så fall bestämma dess värde. Vi använder oss av Binets formel, där $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ och $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ för att skriva om gränsvärdet och får

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}.$$

Vi vill sedan faktorisera ut gränsvärdets dominerande termer, φ^n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^n}{\varphi^n} \left(\frac{\varphi - \psi \left(\frac{\psi}{\varphi} \right)^n}{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi} \right)^n} \right)$$

och observerar att $-1 < \frac{\psi}{\varphi} < 0$, vilket ger oss att $\left(\frac{\psi}{\varphi} \right)^n$ går mot noll då n går mot oändligheten. Vi får

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi,$$

så gränsvärdet (12) för kvoten av två efterföljande Fibonaccital, F_{n+1} och F_n , då n går mot oändligheten är gyllene snittet.

3.4 Tillämpningar av Binets formel

Nu ska vi visa en sats vi kommer ha användning för i kapitel 5, där vi kommer upptäcka något väldigt intressant för Fibonaccitalen. Det finns en relation för Fibonaccis talföljd som säger att

Sats 3.2. För alla $r \geq 1$ gäller

$$(-1)^r + F_r^2 = F_{r+1} \cdot F_{r-1} \quad (13)$$

där F_r är det r :te Fibonaccitalet.

Bevis. Vi vill bevisa sats (13) med hjälp av Binets formel från sats (3.1) där $\psi = \frac{-1}{\varphi}$. Vi flyttar över termen F_r^2 till höger led och beräknar sedan höger led till

$$\begin{aligned} \text{HL} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\varphi^{r+1} - \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^{r+1} \right) \cdot \left(\varphi^{r-1} - \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^{r-1} \right) - \left(\varphi^r - \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^r \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(2(-1)^r - \left(\left(\frac{1}{\varphi} \right)^2 (-1)^{r+1} \right) - \left(\varphi^2 (-1)^{r-1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(2(-1)^r + (-1)^r \left(\varphi^2 + \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^2 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(2(-1)^r + 3(-1)^r \right) = (-1)^r = \text{VL}. \end{aligned}$$

Därmed har vi visat att relationen $(-1)^r + F_r^2 = F_{r+1} \cdot F_{r-1}$ gäller för alla $r \geq 1$. \square

3.5 Binets formel för Lucastal

Vi ska nu använda oss av Binets formel och en relation vi tidigare bevisat, för att erhålla ett uttryck för det n :te Lucastalet, L_n .

Sats 3.3. För alla $n \geq 1$ är

$$L_n = \varphi^n + \psi^n. \quad (14)$$

Bevis. Vi använder oss av ekvation (5) och skriver om med Binets formel från sats (3.1)

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n \left(\frac{1}{\varphi} + \varphi \right) + \psi^n \left(\frac{-1}{\psi} - \psi \right)}{\varphi - \psi},$$

och ser att $\frac{1}{\varphi} + \varphi = \varphi - \psi$ och $\frac{-1}{\psi} - \psi = \varphi - \psi$. Alltså får vi att

$$L_n = \varphi^n + \psi^n$$

vilket skulle visas. \square

4 Delbarhetsegenskaper hos Fibonaccital

Upptäckaren Grimaldi som tidigare tipsade om sambandet mellan Fibonaccis talfölj och Pascals triangel har återigen gjort sig hörd. Denna gång vill han att vi ska läsa igenom ett bevis han har utfört gällande delbarhetsegenskaper för Fibonaccitalen i boken *Fibonacci and Catalan Numbers* (2011) [11]. Vi läser igenom hans bevis och finner det så pass intressant att vi vill göra en egen version av beviset. Vi kommer utföra beviset med färre steg och gå en annan väg i vår bevisföring.

4.1 Största gemensamma delare

När det kommer till delbarhetsegenskaper brukar man tala om största gemensamma delare (SGD) för två tal.

Definition 4.1 ([10]). Låt a, b vara två heltal (a och b får inte båda vara noll). Det största heltal som delar både a och b är största gemensamma delaren, $\text{SGD}(a, b)$.

Exempel 4.1. För talen 8 och 12 är största gemensamma delaren 4, eftersom 4 är det största heltalet som delar både 8 och 12. Vi skriver $\text{SGD}(8, 12) = 4$.

4.2 En delbarhetsrelation för Fibonaccitalen

Vad gäller Fibonaccitalen kan vi observera några förundrande delbarhetsegenskaper.

$$\text{SGD}(F_4, F_{12}) = \text{SGD}(3, 144) = \text{SGD}(3, 2^4 \cdot 3^2) = 3 = F_4 = F_{\text{SGD}(4,12)},$$

och

$$\text{SGD}(F_6, F_9) = \text{SGD}(8, 34) = \text{SGD}(2^3, 17 \cdot 2) = 2 = F_3 = F_{\text{SGD}(6,9)}.$$

Den sats som Grimaldi inspirerade oss till att bevisa lyder:

Sats 4.1. För alla $a, b \in \mathbb{N}$ gäller

$$\text{SGD}(F_a, F_b) = F_{\text{SGD}(a,b)}. \quad (15)$$

För att bevisa sats 4.1, behöver vi först bevisa några andra satser.

Vi använder oss av matrisformen för Fibonaccitalen och vill med induktionsmetoden visa att

Sats 4.2. Antag att

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

För alla $n \geq 1$ gäller att

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Bevis. Basfallet då $n = 1$ verifieras enkelt. Induktionsantagandet är att

$$A^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Följaktligen bygger induktionssteget till $n = k + 1$, på att vi använder oss av identiteten $A^{k+1} = A^k A$, vilket ger att

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix},$$

och formeln håller för $n = k + 1$. Med induktionsprincipen har vi visat att för alla $n \geq 1$ gäller att

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

□

Vi tillämpar ekvation (16) på $A^{a+b} = A^a A^b$ där $a, b \geq 1$. Vi får matrisekvationerna

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{a+b+1} & F_{a+b} \\ F_{a+b} & F_{a+b-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{a+1} & F_a \\ F_a & F_{a-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{b+1} & F_b \\ F_b & F_{b-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F_{a+1}F_{b+1} + F_a F_b & F_{a+1}F_b + F_a F_{b-1} \\ F_a F_{b+1} + F_{a-1} F_b & F_a F_b + F_{a-1} F_{b-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Om vi tittar på första elementet i andra raden (17) ser vi att

$$F_{a+b} = F_a F_{b+1} + F_{a-1} F_b. \quad (18)$$

Detta kommer vi ha användning för i senare bevis. Vidare finns det en sats som säger att

Sats 4.3 ([10]). För alla $c, d, e \in \mathbb{Z}$ gäller att om $e \mid c$ och $e \mid d$, kommer även $e \mid (cx + dy)$ för två godtyckliga heltal x, y .

Från (18) får vi där med att

$$\text{SGD}(F_{a+b}, F_b) = \text{SGD}(F_a F_{b+1} + F_{a-1} F_b, F_b) = \text{SGD}(F_a F_{b+1}, F_b) \quad (19)$$

eftersom $F_b \mid F_{a-1} F_b$. Vidare finns en sats som säger att

Sats 4.4. Om n är ett heltal gäller att $\text{SGD}(F_n, F_{n+1}) = 1$.

Bevis. Vi vill bevisa satsen med hjälp av induktion och får att basfallet

$$\text{SGD}(F_0, F_1) = \text{SGD}(0, 1) = 1$$

håller. Vi inför därefter induktionsantagandet att för $n = k$ gäller

$$\text{SGD}(F_k, F_{k+1}) = 1.$$

För induktionssteget då $n = k + 1$ ser vi att

$$\text{SGD}(F_{k+1}, F_{k+2}) = \text{SGD}(F_{k+1}, F_k + F_{k+1}) = \text{SGD}(F_{k+1}, F_k) = 1,$$

och påståendet är sant för alla $n \geq 0$ enligt induktionsprincipen. \square

För vårt tidigare resultat (19) får vi nu att

$$\text{SGD}(F_{a+b}, F_b) = \text{SGD}(F_a F_{b+1}, F_b) = \text{SGD}(F_a, F_b). \quad (20)$$

Det följer genom upprepade användningar (20) att vi kan lägga till en godtycklig multipel av b och vi får då att

$$\text{SGD}(F_{a+qb}, F_b) = \text{SGD}(F_a, F_b) \quad (21)$$

för $q \in \mathbb{N}$. Vi vill nu visa att

Sats 4.5. För $b, q \in \mathbb{N}$ gäller att $F_b \mid F_{qb}$.

Bevis. Vi betraktar ekvation (21) då $a = 0$ och får att

$$\text{SGD}(F_{qb}, F_b) = \text{SGD}(F_0, F_b) = \text{SGD}(0, F_b) = F_b \quad (22)$$

så $F_b \mid F_{qb}$ för alla $b, q \in \mathbb{N}$. \square

Vi har nu tillräckligt med information för att bevisa sats 4.1. Vi tar en titt på Euklides algoritm och utvecklar denna för $\text{SGD}(a, b)$

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1 & 0 \leq r_1 &\leq b \\ b &= q_2 r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 &\leq r_1 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 & 0 \leq r_3 &\leq r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n &\leq r_{n-1} \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n. \end{aligned} \quad (23)$$

Vi får från (23) att $\text{SGD}(a, b) = r_n$. Sedan vill vi skriva om ekvation (20) på följande sätt med hjälp av översta raden i Euklides algoritm (23).

$$\text{SGD}(F_a, F_b) = \text{SGD}(F_{q_1 b + r_1}, F_b).$$

Med hjälp av ekvation (21) får vi att

$$\text{SGD}(F_a, F_b) = \text{SGD}(F_{q_1 b + r_1}, F_b) = \text{SGD}(F_{r_1}, F_b).$$

Upprepas detta resonemang ser vi med Euklides algoritm (23) att vi kan skriva om uttrycket ytterligare

$$\begin{aligned}
 \text{SGD}(F_a, F_b) &= \text{SGD}(F_{r_1}, F_b) \\
 &= \text{SGD}(F_{r_1}, F_{r_2}) \\
 &\quad \vdots \\
 &= \text{SGD}(F_{r_{n-1}}, F_{r_n}) = [\text{följer av ekvation (22)}] = \\
 &= F_{r_n} \\
 &= F_{\text{SGD}(a,b)}.
 \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis ser vi alltså att $\text{SGD}(F_a, F_b) = F_{\text{SGD}(a,b)}$, vilket bevisar sats 4.1.

Ett exempel på tillämpning till sats 4.1, som vi precis bevisade, är att $F_n \mid F_m$ om och endast om $n \mid m$.

Så om vi till exempel vill ta reda på vilka Fibonaccital som delas av talet $55 = F_{10}$ så behöver vi endast undersöka vilka tal som delas av 10. Då är Fibonaccitalen med index motsvarande de tal som delas av 10, de Fibonaccital som delas av talet 55.

5 En diofantisk ekvation för Fibonaccitalen

På väg hem från vår resa sammanstrålar vi med annan upptäckare som också är intresserad av Fibonaccis talföljd. Upptäckaren heter Gessel och han berättar att han gjort en stor upptäckt som han precis har publicerat i *Advanced problems and solutions* (2012) [3]. Vi får läsa Gessels verk och blir väldigt inspirerade av det han kommit fram till. Vi bestämmer oss för att försöka oss på eget bevis, som går in mer på den bakomliggande algebran. Dock inser vi snabbt att för att kunna göra det, behövs en del definitioner från den abstrakta algebran.

5.1 Algebraiska strukturer

När det kommer till abstrakt algebra finns olika strukturer som beskriver elementen i en mängd som satisfierar olika villkor. Ett exempel på en sådan struktur är en ring.

Definition 5.1 ([8]). En ring med en etta är en mängd, T , med två definierade operationer, addition och subtraktion, som satisfierar följande villkor

- 1) T är associativ under addition och multiplikation,
- 2) T är kommutativ med avseende på addition,
- 3) lagen om distributivitet gäller,
- 4) det finns en additiv enhet, 0,

- 5) alla element i T har en additiv invers,
- 6) det finns en multiplikativ enhet, 1.

Två exempel på ringar med en etta är heltalen \mathbb{Z} , och ringen av rationella polynom $\mathbb{Q}[x]$. Ytterligare ett exempel på en struktur som förekommer inom algebran är en kropp.

Definition 5.2 ([8]). En kropp består av en mängd, B , som kan definieras som en ring med en etta som dessutom satisfierar villkoren

- 7) B är kommutativ med avseende på multiplikation,
- 8) alla element, utom noll, har en multiplikativ invers.

Alla kroppar är således också ringar med en etta.

Vi definierar nu en mängd där d är ett kvadratfritt heltal (det vill säga ett heltal som inte är delbart med ett annat primtal i kvadrat) skilt från ett,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}. \quad (24)$$

Sats 5.1. $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ är en kvadratisk kropp (eftersom \mathbb{Q} har utvidgats med talet \sqrt{d} som är lösning till en kvadratisk ekvation) med vanlig addition och multiplikation.

Bevis. Det visas enkelt att $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ är en kommutativ ring med etta då $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ är en delmängd, som är sluten under addition och multiplikation, till de komplexa talen där villkoren 1) till 7) satisfieras. Kvar återstår endast att visa att villkor 8) är satisfierat, att alla nollskilda element i $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ har en multiplikativ invers.

För $a + b\sqrt{d} \neq 0$ är den multiplikativa inversen

$$\frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - db^2} = \frac{a}{a^2 - db^2} - \frac{b}{a^2 - db^2}\sqrt{d},$$

också är ett element i $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ eftersom både $\frac{a}{a^2 - db^2} \in \mathbb{Q}$ och $\frac{-b}{a^2 - db^2} \in \mathbb{Q}$. \square

Definition 5.3. En isomorfism är en avbildning mellan två algebraiska strukturer som bevarar den algebraiska strukturen. En isomorfism mellan två ringar är en bijektion som är additiv och multiplikativ.

Vi sätter $F = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ och definierar den bijektiva funktionen

$$\theta : F \rightarrow F$$

där θ tar ett element i mängden F och ger oss dess konjugat

$$\theta(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}.$$

Vi vill visa att θ är en additiv och multiplikativ funktion. För $x = a + b\sqrt{d}$ och $y = e + f\sqrt{d}$ får vi

$$\begin{aligned}\theta(x + y) &= \theta(a + b\sqrt{d} + e + f\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d} + e - f\sqrt{d} = \\ &= \theta(a + b\sqrt{d}) + \theta(e + f\sqrt{d}) = \theta(x) + \theta(y),\end{aligned}\tag{25}$$

och

$$\begin{aligned}\theta(x \cdot y) &= \theta((a + b\sqrt{d})(e + f\sqrt{d})) = \theta(ae + be\sqrt{d} + af\sqrt{d} + bdf) = \\ &= ae - be\sqrt{d} - af\sqrt{d} + bdf = (a - b\sqrt{d})(e - f\sqrt{d}) = \\ &= \theta(a + b\sqrt{d})\theta(e + f\sqrt{d}) = \theta(x) \cdot \theta(y).\end{aligned}\tag{26}$$

Eftersom att funktionen θ är bijektiv och vi har visat att den även är additiv och multiplikativ, kan vi fastställa att funktionen uppfyller kraven för en isomorfism.

Definition 5.4. Spåret $\text{tr}(x)$ för ett godtyckligt element $x \in F$ definieras som

$$\text{tr}(x) = x + \theta(x).$$

För $x = a + b\sqrt{d}$ är spåret

$$\text{tr}(a + b\sqrt{d}) = a + b\sqrt{d} + a - b\sqrt{d} = 2a,$$

så $\text{tr}(\alpha) \in \mathbb{Q}$ för alla $x \in F$.

Vi vill nu visa att spåret är additivt för alla element i en kvadratisk kropp F .

Sats 5.2. Spåret är additivt, dvs. för $x, y \in F$ är

$$\text{tr}(x + y) = \text{tr}(x) + \text{tr}(y).$$

Bevis. Med hjälp av ekvation (25) får vi

$$\text{tr}(x + y) = (x + y) + \theta(x + y) = x + y + \theta(x) + \theta(y) = \text{tr}(x) + \text{tr}(y),$$

så spåret är additivt. □

Definition 5.5. Normen $\text{nr}(x)$ för ett godtyckligt element $x \in F$ definieras som

$$\text{nr}(x) = x \cdot \theta(x).$$

För $x = a + b\sqrt{d}$ är normen

$$\text{nr}(a + b\sqrt{d}) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - b^2d,$$

så $\text{nr}(\alpha) \in \mathbb{Q}$ för alla $x \in F$.

Vi vill visa att normen är multiplikativ för alla element i en kvadratisk kropp F .

Sats 5.3. Normen är multiplikativ, dvs. för $x, y \in F$ är

$$\text{nr}(x \cdot y) = \text{nr}(x) \cdot \text{nr}(y).$$

Bevis. Med hjälp av ekvation (26) får vi

$$\text{nr}(x \cdot y) = (x \cdot y)(\theta(x \cdot y)) = xy\theta(x)\theta(y) = \text{nr}(x) \cdot \text{nr}(y),$$

så normen är multiplikativ. \square

5.2 Algebraiska heltal

Heltalen spelar en speciell roll inom de rationella talen. Det finns en generalisering av heltalsbegreppet som kallas för algebraiskt heltal. Men för att definiera ett algebraiskt heltal behöver vi först lite kunskap om vad ett minimalpolynom är.

Definition 5.6. Ett minimalpolynom $p_\alpha(x) \in F$ för ett element α i en kropp, är ett moniskt polynom (med högstgradskoefficient 1) $p_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[x]$ av minimal grad, så att $p_\alpha(\alpha) = 0$.

Sats 5.4. Minimalpolynomet för ett element $a \in \mathbb{Q}$ är

$$p_a(x) = x - a.$$

Minimalpolynomet för elementet $\alpha \in F$ men $\alpha \notin \mathbb{Q}$ är

$$p_\alpha(x) = x^2 - \text{tr}(\alpha)x + \text{nr}(\alpha). \quad (27)$$

Bevis. Vi betraktar fallet då $a \in \mathbb{Q}$ och polynomet $p(x) = x - a$. Eftersom att a är ett rationellt tal är $p(x)$ ett rationellt polynom. Vi ser att $p(x)$ har a som nollställe och är av minimal grad. Alltså är $p_a(x) = x - a$ minimalpolynomet för ett element $a \in \mathbb{Q}$.

Omvänt är lösningen till ett förstgradspolynom med rationella koefficienter, alltid ett rationellt tal, så generellt kan vi alltså säga att minimalpolynomet $p_a(x)$ är av grad 1.

Nu observerar fallet då $\alpha \in F \setminus \mathbb{Q}$ och betraktar polynomet

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \theta(\alpha)) = x^2 - \alpha x - \theta(\alpha)x + \alpha \cdot \theta(\alpha).$$

Vi ser att polynomet kan skrivas som en ekvation av spåret och normen av α så att

$$p(x) = x^2 - \text{tr}(\alpha)x + \text{nr}(\alpha).$$

Eftersom $\alpha \in F$ måste $\text{tr}(\alpha), \text{nr}(\alpha) \in \mathbb{Q}$. Alltså har polynomet rationella koefficienter. Vi ser direkt att α är ett nollställe. Dessutom vet vi att $p(x)$ är av lägsta grad, för om minimalpolynomet var av grad 1, skulle det betyda att $\alpha \in \mathbb{Q}$. Alltså är $p_\alpha(x) = x^2 - \text{tr}(\alpha)x + \text{nr}(\alpha)$ minimalpolynomet för ett element $\alpha \in F$ men $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Generellt är alltså minimalpolynomet för $\alpha \in F \setminus \mathbb{Q}$ av grad 2. \square

Exempel 5.1. För talet $\varphi \in F$ är minimalpolynomet $p_\varphi(x) = x^2 - x - 1$.

Nu går vi in på definitionen för ett algebraiskt heltal.

Definition 5.7 ([4]). Ett algebraiskt heltal i F är ett element α vars minimalpolynom $p_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Exempel 5.2. Minimalpolynomet för φ är

$$p_\varphi(x) = x^2 - x - 1,$$

så φ är ett algebraiskt heltal.

Exempel 5.3. Minimalpolynomet för $h = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ är

$$p_h(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{6},$$

så h är inte algebraiskt heltal.

Från och med nu tittar vi på specialfallet då $d = 5$. Vi vill bestämma de algebraiska heltalen i F , och sätter att $R = \{\alpha \in F \mid \alpha \text{ algebraiskt heltal}\}$.

Sats 5.5. Mängden av algebraiska heltal är

$$R = \left\{ \frac{a+b\sqrt{5}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \equiv b \pmod{2} \right\} \quad (28)$$

Bevis. Vi sätter att

$$\alpha = \frac{x + y\sqrt{5}}{z}$$

där $x, y, z \in \mathbb{Z}, z > 0$ och vi antar att inget primtal delar x, y och z .

Från ekvation (27) får vi att minimalpolynomet $p_\alpha(x)$ för $\alpha \notin \mathbb{Q}$ är

$$p(x) = x^2 - \text{tr}(\alpha)x + \text{nr}(\alpha).$$

Så $\alpha \in R$ om och endast om $\text{tr}(\alpha), \text{nr}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Vi beräknar spåret och normen för α

$$\text{nr}(\alpha) = \frac{x^2 - 5y^2}{z^2} \in \mathbb{Z} \quad (29)$$

$$\text{tr}(\alpha) = \frac{2x}{z} \in \mathbb{Z}. \quad (30)$$

Om x och z har en gemensam primtalsfaktor p , följer det av ekvation (29) att p delar y . Detta är dock en motsägelse till vårt antagande att inga primtal delar x, y, z , alltså har x och z inte en gemensam primtalsfaktor. Då får vi med ekvation (30) att $z = 1$ eller $z = 2$.

Om $z = 1$ är $\text{tr}(\alpha), \text{nr}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ och α är ett algebraiskt heltal.

Om $z = 2$ måste x och y vara udda tal. Detta eftersom $\frac{x^2 - 5y^2}{2^2} \in \mathbb{Z}$ kan skrivas om som

$$x^2 - 5y^2 \equiv 0 \pmod{4}. \quad (31)$$

Kvadraten av ett udda tal $2k + 1$ skrivs som $4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod{4}$. Om både x och y är udda ser vi att $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{4}$, och $\text{nr}(\alpha) \in \mathbb{Z}$, dvs. α är ett algebraiskt heltal.

Om vi förlänger α med 2 i fallet då $z = 1$ får vi ett ekvationssystem där

$$\frac{2x + 2y\sqrt{5}}{2} = \frac{a + b\sqrt{5}}{2},$$

och $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$. Från ekvationssystemet utläser vi att $2x = a$, $2y = b$ och a, b är således jämna för $z = 1$.

Vi kan nu formulera om de algebraiska heltalen i R , till

$$\alpha = \frac{a + b\sqrt{5}}{2}$$

där $a, b \in \mathbb{Z}$ och $a \equiv b \pmod{2}$, det vill säga a, b är antingen båda udda eller båda jämna. \square

Sats 5.6. Mängden av algebraiska heltal R i kroppen $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ är $\mathbb{Z}[\varphi]$.

Bevis. För $d, e \in \mathbb{Q}$ och $a, b \in \mathbb{Q}$ ställer vi upp följande ekvation där

$$d + e\varphi = \frac{a + b\sqrt{5}}{2}$$

vilken skrivs om till

$$\left(d + \frac{e}{2}\right) + \frac{e}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5}$$

som vi härleder följande ekvationssystem från

$$\begin{cases} \frac{b}{2}\sqrt{5} = \frac{e}{2}\sqrt{5} \\ \frac{a}{2} = d + \frac{e}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} e = b \\ 2d + b = a \end{cases} \iff \begin{cases} e = b \\ d = \frac{a-b}{2} \end{cases}.$$

Om vi istället sätter att $a, b \in \mathbb{Z}$ och $a \equiv b \pmod{2}$, får vi att $d, e \in \mathbb{Z}$. Omvänt, om $d, e \in \mathbb{Z}$ blir även $a, b \in \mathbb{Z}$ $a \equiv b \pmod{2}$.

Vi ser att om vi byter ut e mot b och d mot $\frac{a-b}{2}$, kan vi gå från ena sättet till det andra för att uttrycka $\alpha \in R$. \square

Som en följd av sats 5.6 ser vi att de algebraiska heltalen R i F bildar en ring, eftersom $\mathbb{Z}[\varphi]$ är en ring.

5.3 Enheter

Varje element (utom noll) i en kropp har en multiplikativ invers. För en ring är detta dock inte fallet. Därför har element som har en multiplikativ invers i en ring fått ett eget namn.

Definition 5.8. En enhet α i ringen R är ett element med multiplikativ invers, så

$$\alpha \cdot \beta = 1 \tag{32}$$

för något $\beta \in R$.

Vi vill visa att

Sats 5.7. Ett element $\alpha \in R$ är en enhet om och endast om $\text{nr}(\alpha) = \pm 1$.

Bevis. Normen är multiplikativ, så vi får med ekvation (32) att

$$\text{nr}(\alpha) \cdot \text{nr}(\beta) = \text{nr}(\alpha \cdot \beta) = \text{nr}(1) = 1. \tag{33}$$

Vidare vet vi att eftersom $\alpha, \beta \in R$, måste $\text{nr}(\alpha), \text{nr}(\beta) \in \mathbb{Z}$. Vi vet även att de enda heltalen med multiplikativ invers i \mathbb{Z} är 1 och -1 , alltså måste $\text{nr}(\alpha) = \pm 1$.

Omvänt får vi att om

$$\text{nr}(\alpha) = \pm 1$$

så är även

$$\alpha \cdot \theta(\alpha) = \pm 1.$$

Vi kan skriva om uttrycket som

$$\alpha \cdot (\pm\theta(\alpha)) = 1$$

och på så sätt komma fram till att inversen $\pm\theta(\alpha)$ tillhör R . □

Vi betecknar mängden av enheterna i R med R^* .

Exempel 5.4. För $\gamma = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ser vi att $\text{nr}(\gamma) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$, alltså är $\gamma \in R^*$.

Sedan vill vi visa att

Sats 5.8. Mängden av enheterna i R är

$$R^* = \{\pm\varphi^r \mid r \in \mathbb{Z}\}. \tag{34}$$

Bevis. Vi börjar med att anta att $\alpha > 0$. Då finns det ett heltal r så att

$$\varphi^r \leq \alpha < \varphi^{r+1}$$

vilket ger att

$$1 \leq \alpha\varphi^{-r} < \varphi$$

Vi definierar $\alpha_1 = \alpha\varphi^{-r}$. Vi noterar att α_1 också är en enhet eftersom

$$\text{nr}(\alpha_1) = \text{nr}(\alpha)\text{nr}(\varphi^{-r}) = \text{nr}(\alpha)\text{nr}(\varphi)^{-r} = \text{nr}(\alpha)(-1)^{-r} \in \{\pm 1\}.$$

Sedan undrar vi om det finns någon enhet $\alpha_1 = \frac{a+b\sqrt{5}}{2}$, strikt mellan 1 och φ , dvs. så att

$$1 < \frac{a+b\sqrt{5}}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad (35)$$

Eftersom α_1 är en enhet är $\text{nr}(\alpha_1) = \pm 1$ enligt sats 5.7. Vi behandlar först fallet då $\text{nr}(\alpha_1) = 1$

$$\text{nr}(\alpha_1) = \frac{a+b\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a-b\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2-5b^2}{4} = 1. \quad (36)$$

Olikhet (35) och (36) ger tillsammans gränser för $\theta(\alpha_1) = \frac{a-b\sqrt{5}}{2}$,

$$1 < \frac{a-b\sqrt{5}}{2} < \frac{2}{1+\sqrt{5}}. \quad (37)$$

Sedan adderar vi olikhet (35) med (37), vilket ger oss

$$2 < a < \frac{10+2\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}}.$$

Vi observerar att gränserna som a ligger mellan medför att a inte är ett heltal då $\frac{10+2\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}} < 3$. Enligt sats 5.5 måste både a och b vara heltal. Alltså är α_1 inte en enhet i R .

Nu undersöker vi fallet då $\text{nr}(\alpha_1) = -1$

$$\text{nr}(\alpha_1) = \frac{a+b\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a-b\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2-5b^2}{4} = -1. \quad (38)$$

och får (38) att $\theta(\alpha_1)$ har gränserna

$$-1 < \frac{a-b\sqrt{5}}{2} < \frac{-2}{1+\sqrt{5}}. \quad (39)$$

Därefter adderar vi (35) och (39) och får följande olikheter för a

$$0 < a < 1.$$

Vi kan direkt säga att eftersom a inte är ett heltal kan vi förkasta att det finns en enhet α_1 som uppfyller ekvation (35). Så $\alpha_1 = 1$ och därmed är $\alpha = \varphi^r$ där r är ett heltal. För positiva α gäller alltså sats 5.8.

För negativa α räcker det att visa att $-\alpha = \varphi^r$, vilket följer analogt ur beviset. Slutligen kan vi konstatera att alla enheter i R är på formen $\pm\varphi^r$, $r \in \mathbb{Z}$ [2][11]. \square

5.4 Diofantiska karakteriseringen av Fibonaccitalen

En diofantisk ekvation är en ekvation där endast heltalslösningar sökes. Gessel bevisade i sin publikation *Advanced problems and solutions* [3] att Fibonaccitalen är nära kopplade till de två diofantiska ekvationerna $5n^2 \pm 4 = m^2$. Vi kommer utföra beviset i mer detalj än Gessel och med mer precisering gällande den bakomliggande algebran.

De första lösningarna till Gessels två diofantiska ekvationer är

$$\begin{aligned}5 \cdot 0^2 + 4 &= 2^2 \\5 \cdot 1^2 - 4 &= 1^2 \\5 \cdot 1^2 + 4 &= 3^2 \\5 \cdot 2^2 - 4 &= 4^2 \\5 \cdot 3^2 + 4 &= 7^2 \\5 \cdot 5^2 - 4 &= 11^2,\end{aligned}$$

och det verkar som att vi får lösningar på formen

$$5 \cdot F_k^2 \pm 4 = L_k^2. \quad (40)$$

Nu ska vi visa att alla lösningar är på den formen (40) och att det är de enda lösningarna som finns.

Sats 5.9. För $n \geq 0$ är uttrycket $5n^2 + 4$ en kvadrat om och endast om n är ett Fibonaccital med jämnt index, och $5n^2 - 4$ är en kvadrat om och endast om n är ett Fibonaccital med udda index. Vidare är kvadraten i fråga motsvarande Lucastal i kvadrat.

Bevis. Nu ska jag visa att Fibonacci- och Lucastalen är lösningar till de diofantiska ekvationerna.

Det är känt från sats 3.2 och sats 2.1 att relationerna

$$(-1)^r + F_r^2 = F_{r+1} \cdot F_{r-1} \quad (41)$$

och

$$L_r = F_{r+1} + F_{r-1} \quad (42)$$

är sanna för alla $r \geq 1$. Genom att multiplicera ekvation (41) med 4 och subtrahera från kvadraten av ekvation (42) får vi

$$L_r^2 - 4(-1)^r - 4F_r^2 = (F_{r+1} + F_{r-1})^2 - 4(F_{r+1} \cdot F_{r-1}) = (F_{r+1} - F_{r-1})^2 = F_r^2,$$

och uttrycket kan skrivas om som

$$L_r^2 = 5F_r^2 + 4(-1)^r. \quad (43)$$

Därefter observerar vi (43) att om n är ett Fibonaccital med jämnt index är $5n^2 + 4$ en kvadrat, och om n är ett Fibonaccital med udda index är $5n^2 - 4$ en kvadrat.

Nu ska jag visa att de lösningar vi funnit är alla lösningar till de diofantiska ekvationerna. Antag att $5n^2 \pm 4 = m^2$, det vill säga $m^2 - 5n^2 = \pm 4$. Vi antar även att $n, m \geq 0$ och ser att

$$\frac{m + \sqrt{5}n}{2} \cdot \frac{m - \sqrt{5}n}{2} = \pm 1. \quad (44)$$

Vi ser också att $\frac{m + \sqrt{5}n}{2}$ och $\frac{m - \sqrt{5}n}{2}$ är varandras konjugat och även på formen för ett algebraiskt heltal i $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. Vi vet att $5n^2 \pm 4 = m^2$, vilket ger att $m^2 \equiv n^2 \pmod{4}$ och $m \equiv n \pmod{2}$. Vidare observerar vi att

$$\text{nr} \left(\frac{m + \sqrt{5}n}{2} \right) = \pm 1$$

vilket med hjälp av sats 5.7 medför att $\frac{m + \sqrt{5}n}{2}$ är en enhet i $\mathbb{Z}[\varphi]$. Detta i sin tur medför med hjälp av sats 5.8 att $\frac{m + \sqrt{5}n}{2} = \pm \varphi^r$ för något $r \in \mathbb{Z}$. Eftersom $n, m \geq 0$ har vi $\frac{m + \sqrt{5}n}{2} = \varphi^r$ för $r \in \mathbb{N}$. Vi får

$$\frac{m + \sqrt{5}n}{2} = \varphi^r = \frac{1}{2} \left((\varphi^r + \psi^r) + \frac{\varphi^r - \psi^r}{\sqrt{5}} \sqrt{5} \right),$$

och noterar att uttrycket står precis på formen som vi skriver Fibonaccitalet, F_r , och Lucastalet, L_r , med Binets formel. Med en substitution där $\varphi^r + \psi^r = L_r$ (14) och $\frac{\varphi^r - \psi^r}{\sqrt{5}} = F_r$ (11) får vi

$$\frac{m + \sqrt{5}n}{2} = \frac{L_r + \sqrt{5}F_r}{2}. \quad (45)$$

Om vi sedan beräknar normen på $\frac{m + \sqrt{5}n}{2} = \varphi^r$ får vi att

$$\frac{m^2 - 5n^2}{4} = (-1)^r.$$

Alltså är

$$m^2 = 5n^2 + 4(-1)^r,$$

så om r är ett jämnt tal är $5n^2 + 4$ en kvadrat och $n = F_r$ (45), och om r är ett udda tal är $5n^2 - 4$ en kvadrat och $n = F_r$, vilket skulle visas [3][2]. \square

6 Summering och avslut

Som några avslutande ord kan vi nog konstatera att upptäcktsresan har klargjort för oss att Fibonaccis talföljd har en otrolig spridning inom matematiken

och i naturen. I uppsatsen illustrerades detta med några exempel, som knappast täcker alla områden. Det är inte konstigt att det publiceras en samlad mängd artiklar varje kvartal vid namn *The Fibonacci Quarterly* av The Fibonacci Association, med nya problem, bevis och resultat relaterade till Fibonaccis talföljd. För den som vill fortsätta upptäcktsfärden och är intresserad av att bredda sin kunskap om talföljden ytterligare, rekommenderar jag att läsa några av dessa artiklar.

Referenser

- [1] A. Brousseau, *On the Trail of the California Pine*, The Fibonacci Quarterly (vol 6), 1968. (s. 69-76)
- [2] G.F Hardy & E.M. Wright, *An Introduction to The Theory of numbers*, Oxford university press, Oxford, 2008. (s. 148, 221)
- [3] I. Gessel, *Advanced Problems and Solutions*, The Fibonacci Quarterly (vol. 10), 2012. (s. 417-419)
- [4] I. Stewart, D. Tall, *Algebraic Number Theory and Fermats Last Theorem*, Taylor & Francis Group, NW, United States, 2016.
- [5] J. Ivie, *A General Q-Matrix*, The Fibonacci Quarterly (vol. 10) 1972. (s. 255)
- [6] John Steele Gordon, *The Man Behind Modern Math*, Barron's, 2015.
- [7] Mario Livio, *The golden ratio: the story of phi, the world's most astonishing number*, Broadway Books, 2002. (s. 92-93)
- [8] Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford, Storbritannien, 2002.
- [9] P.B. Onderdonk, *Pineapples and Fibonacci Numbers*, The Fibonacci Quarterly (vol 8), 1970. (s. 507, 508)
- [10] R. Bøgvad, Q. Xantcha, *Algebra 1*, Matematiska institutionen, Stockholms universitet, 2016.
- [11] R. Grimaldi, *Fibonacci and Catalan Numbers*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2011. (kap. 15)
- [12] S.L Basin, *The Fibonacci Sequence As It Appears in Nature*, The Fibonacci Quarterly (vol 1), 1963.
- [13] Theodore A. Cook, *The Curves of Life*, Dover Books, 1979.