SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Historisk utveckling av Linjär Algebraoch dess tillämpningar

av

Maia Jenawi

2020 - No K33

Historisk utveckling av Linjär Algebraoch dess tillämpningar

Maia Jenawi

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Boris Shapiro

2020

Innehållsförteckning

Abstract

Linear algebra is a branch of mathematics that studies linear spaces and linear maps. After recalling some basic notions, we present a brief history of the development of linear algebra. Then various applications of linear algebra to chemistry, traffic flows and polynomial interpolation will be given.

Acknowledgements

I am very grateful to my supervisor, Professor Boris Shapiro, for the support and guidance during this work.

1 Inledning

För att presentera den historiska utvecklingen av linjära algebran är det viktigt att vi först fastställer vad linjär algerbra är. Linjär algebra studerar en algebraisk struktur som kallas vektorrum och dess linjära transformationer. Den är ett mycket användbart ämne med ett rikt spektrum av metoder som tillämpas inom många olika områden.

Linjär algebra är ett förutsättningsämne för andra områden som till exempel maskininlärning eller statistik. Programmeringspråk som Python erbjuder effektiva sätt att implementera den linjära algebrans notationer direkt.

Denna uppsats har tre huvuddelar. Den första delen redogör några praktiska tillämpningar . Den tredje delen innehåller några grundläggande begrepp inom linjär algebra ger en kort överblick över historien av linjär algebra.

2 Elementära begrepp inom linjär algebra

2.1 Linjära ekvationssystem

Först definierar vi vad vi menar med ett linjärt ekvationssystym, [2, s.79]. En linjär ekvation är en ekvation på formen:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

där $a_1, ...a_n$, är givna koefficienter medan $x_1, ...x_n$ utgör variabler. Ett linjärt ekvationssystem är en uppsättning av ett ändligt antal linjära ekvationer på formen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n = & b_m. \end{cases}$$

Ett linjärt ekvationssystem kan också tolkas med hjälp av vektorer där de obekanta kan betraktas som vikter till kolonnvektorer

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Å andra ord vill man hitta linjära kombinationer av givna vektorer som är lika med en annan given vektor.

Teorem 1 *För ett godtyckligt linjärt ekvationssystem gäller precis ett av följande alternativ, [3, s.10].*
(1) *Systemet har precis en lösning.*
(2) *Systemet har oändligt många lösningar.*
(3) *Systemet saknar lösningar.*

Ett homogent linjärt ekvationssystem är ett system där de konstanta termerna $b_1, b_2, .., b_n$ är noll. Ett homogent ekvationssystem har alltid minst en lösning nämligen $x_1 = 0, x_2 = 0, ...x_n = 0$, som kallas för den triviala lösningen. Därför är ett homogent system alltid lösbart.

2.2 Matriser

Definition 2.1 *Låt m och n vara godtyckliga positiva heltal. En $m \times n$ matris A_{mn} är en rektangulär tabell bestående av mn tal som är arrangerade i m rader och n kolonner, nämligen*

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Elementära räkneoperationer

Om matriser A och B har samma format, dvs antalet rader och kolonner, kan man definiera dess summa och skillnad elementvis

Exempel 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 0+1 & 2+4 \\ -1+2 & 3+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 0-1 & 2-4 \\ -1-2 & 3-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

För att multiplicera en matris A med en skalär k, multiplicerar man varje element i matrisen med k.

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$kA = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}.$$

Antag att A, B, X är matriser av samma typ och vi letar efter X, som är en lösning till ekvationen $X + A = B$.
Då kan vi hitta $X = B + (-1)A$, precis som om vi hade räknat med tal istället för matriser.
Det följer av att vi lägger till $(-1)A$ till bägge sidor av ekvationen:

$X + A = B \Leftrightarrow (X + A) + (-1)A = B + (-1)A.$

Ty vänsterledet här är $(X + A) + (-1)A = X + (A + (-1)A) = X + 0 = X$, som då är lika med högerledet: $X = B + (-1)A$.

Matrismultiplikation av två matriser$A$ och B av typ $m \times n$ respektive $n \times k$ är en matris av typ $m \times k$.
$AB_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + ... + A_{i,n}B_{n,j}, \quad$ för i=1,...,m, j=1,...,k.

Detta illustreras på detta exempel nedan:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)3 + 1(4) + (-1)3 \\ 4.3 + 1.4 + 2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Enhetsmatrisen I_n är en kvadratisk $n \times n$ matris med ettor på huvuddiagonalen och nollor på alla andra platser i matrisen.

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

För alla kvadratiska $n \times n$ matriser A har vi att $AI = IA = A$.

Teorem 2 *(Räknelagar för matrisprodukt) Förutsatt att produkterna nedan existerar så är*

(a) $AI_n = I_nA = A; \quad A0 = 0; \, 0A = 0,$
(b) $(A+B)C = AC+BC$ *och* $C(A+B) = CA+CB$ *(distributiva lagar),*
(c) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$,
(d) $A(BC) = (AB)C$ *(associativa lagen).*

Definition 2.2 *Inversen* A^{-1} *av en kvadratiska matrisen* A *definieras av kravet att* $AA^{-1} = A^{-1}A = I$*. Om det finns en matris* A^{-1} *som uppfyller dessa ekvationer, så sägs* A *vara inverterbar.*

Definition 2.3 *Om vi låter rader och kolonner i matrisen* A *av typ* $m \times n$ *byta plats får vi en* $n \times m$*-matris som kallas för den transponerade matrisen och betecknas* A^T*.*

2.2.2 Gausselimination

Här beskriver vi kort en klassisk metod att lösa linjära ekvationssystem, se [4]. Metoden heter Gausselimination och är uppkallad efter den tyska matematiken Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Detta är en algoritm som används för att lösa linjära ekvationssystem, beräkna inversen av en matris eller beräkna dess rang.

Betrakta systemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

Vi kan beskriva systemet på ett lämpligt sätt i den rektangulära matrisen som vi kallar för systemets totalmatris T. Den har formen:

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

För att beskriva Gausselimination behöver vi följande definitioner.

Vi definierar nu elementära operationer som inte ändrar lösningsmängden till det ursprungliga systemet, se [2, s.82]. Dessa består av :

i) Radbyten som innebär att vi byter plats på två rader i T.
ii) Radmultiplikation som innebär att vi multiplicerar en rad i T med ett tal som är skilt från noll.
iii) Radaddition som innebär att en rad i T multipliceras med ett tal och adderas till en annan rad.

Lösningen av ekvationssystemet består av 2 huvudssteg:
(1) Med hjälp av elementära operationer reducerar vi totalmatrisen T till en så kallas trappstegsform, se nedan.
(2) Vi löser systemet på trappstegsformen med hjälp av bakåtsubtitution.
Första steg är det som kallas för Gausselimination.

Definition 2.4 *Att ett linjärt system har trappstegsform innebär att den första icke-noll termen i varje ekvation är belägen längre till höger än den första icke-noll termen i föregående ekvation se [2, s.85]. I sådana fall kan vi lösa systemet med hjälp av bakåtsubstitution.*

Ett exempel på en matris A på trappstegsform $\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Symbolen ($\bullet$) betyder att ett tal är skilt från noll samt positioner för de tal kommer att ha stor betydelse för lösningstrukturen i motsvarande ekvationssystem. Vi ger dem därför ett speciellt namn:

Definition 2.5 *När ett system eller motsvarande utvidgade koefficientmatris befinner sig på trappstegsform, kallas den första icke-noll-koefficienten i varje ekvation eller i varje rad för pivotelement.*

Definition 2.6 *Ett matris befinner sig på förenklad trappstegsform om varje pivotelement är lika med ett och pivotelementen är de enda element som är skilda från noll i sina kolonner.*

Gausselimination innebär division med diagonalens element och pivotelementen medan den totala matrisen konverteras till trappstegsform. Sedan fortsätter vi med att forenkla trappstegsformen.

Bakåtsustitution är en metod som används för att lösa systemet på trappstegsform. Den illusteras i exemplet nedan.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \qquad y + z = 3 \\ \qquad\quad 2z = 2. \end{cases}$$

Först löser vi sista ekvationen $2z = 2$ och vi erhåller $z = 1$. Detta utnyttjas sedan i den andra ekvationen, så får vi $y = 2$. Slutligen fås ur första ekvationen $x = 3$.

I matrisens trappstegsform är varje element till vänster och under ledande ettan lika med 0.

Här är ett exempel av Gausselimination av ett systemet

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 9 \\ x + y + 2z = 7. \end{cases}$$

Lösning med hjälp av systemets totalmatris:
Steg 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{rad_2 - rad_1, rad_3 - rad_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

När vi får trappstegsformen skriver vi motsvarande ekvationssystem

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad\;\; y + z = 3 \\ \qquad\quad z = 1. \end{cases}$$

Steg 2
Sedan löser vi det reducerade systemet backåtsustitution och får $z = 1, y = 2, x = 3$.

2.3 Vektorer och vektorrum

Definitioner och grundläggande egenskaper

Definition 2.7 *(Vektor) Mängden av alla riktade sträckor som har en given längd och en given riktning kallas en vektor i rummet.*

Vektorer betecknas i regel med bokstäver som u, v, w. Mängden av alla nollsträckor kallas nollvektorn 0.

Definition 2.8 *(Vektorrum) Ett vektorrum är en mängd V tillsammans med en kropp $\mathbb{F}$ där addition (+) och multiplikation (.) är definierade så att axiomen (1), (2) är uppfyllda för alla $u, v, w \in V$ och $a, b \in \mathbb{F}$.*

1) Addition uppfyller:
$" + " : V + V \to V.$
$\alpha)$ $u + v = v + u,$

β) $u + (v + w) = (u + v) + w$,
γ) V innehåller ett nollelement sådant att $u + 0 = u$ för alla u i V,
ρ) För varje $u \in V$ finns ett element (-u) så att $u + (-u) = 0$.
2) Multiplikation med skalär uppfyller:
"." : $\mathbb{F} \times V \to V$.
För $a, b \in \mathbb{F}$ och $u, v \in V$,
(i) $1.u = u$,
(ii) $a(bu) = (ab)u$,
(iii) $(a + b)u = au + bu$,
(iv) $a(u + v) = au + av$.

Exempel.
Låt $V = \mathbb{R}^n$ där $\mathbb{R}^n$ är ett reellt linjärt rum där vektorerna är definierade som n-tuplar av reella tal, dvs,

om $u = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n, v = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ *där* $a_1, a_2, ..., a_n$ och $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$
med addition och skalär multiplikation definierad som vanligt
$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$

$\lambda(a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$ för $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nollvektorer i rummet är $(0, 0, ..., 0)$.

Det är enkelt att alla villkor (axiom) är uppfyllda och $V = \mathbb{R}^n$ är ett vektorrum.

2.3.1 Linjära kombinationer

Vi definierar detta begrepp enligt följande.

Definition 2.9 *Låt $v_1, v_2, ..., v_n$ vara vektorer i V. En linjärkombination av $v_1, v_2, ..., v_n$ är en vektor på formen*
$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$, där $c_1, c_2, ..., c_n$ är reella tal, [2, s.98].

Exempel. Låt vektorerna v_1, v_2 och w vara givna av

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vi vill bestämma om w är en linjär kombination av v_1, v_2.
Lösning:
Vi söker om det finns en lösning till

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \text{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{y} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Denna vektorekvation är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + y = 7 \\ 3x = 6. \end{cases}$$

Systemet har en lösning $x = 2, y = 3$. Därmed kan w skrivas som en linjär kombination av v_1, v_2.

2.3.2 Linjärt oberoende

Definition 2.10 *Vektorerna $v_1, v_2, ..., v_n$ säges vara linjärt oberoende om de enda talen $c_1, c_2, ..., c_n$ som uppfyller ekvationen*

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0,$$

är $c_1 = 0, c_2 = 0, ..., c_n = 0$.

Om en mängd vektorer inte är linjärt oberoende, så är de linjärt beroende.

Teorem 3 *En mängd vektorer $v_1, v_2, ..., v_n$ är linjärt beroende om och endast om minst en av vektorerna kan skrivas som en linjärkombination av de övriga vektorerna, [2, s.104].*

2.3.3 Bas

Definition 2.11 *Låt V vara ett vektorrum . Vektorerna $v_1, v_2, ..., v_n$ utgör en bas i rummet V om följande två villkor är uppfyllda:*
(1) Vektorerna $v_1, v_2, ..., v_n$ är linjärt oberoende.
(2) Varje vektor i V kan skrivas unikt uttryckt som en linjär kombination av $v_1, v_2, ..., v_n$, på formen

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

för unikt skalärer $a_1, a_2, ..., a_n$, [9, s.151].

Dimension
Ett vektorrum kallas ändligtdimensionellt om det har en bas som består av en ändligt mängd av vektorer. Det unika antalet vektorer i varje bas i V kallas dimension av V och skriver i så fall $dimV$. Om ett vektorrum inte har en bas som består av en ändlig mängd av vektorer, så kallas V oändligtdimensionellt. Om V endast innehåller nollvektorn $V = \{0\}$ så är dimV = 0,
och vektorrummet $\mathbb{F}^n$ har dimension n.

Rang
Rangen av $m \times n$ matris är antalet linjärt oberoende rader. Det är också antalet linjärt oberoende kolonner, och antalet pivotelement efter att man gausseliminerat tills matrisen är på trappstegsform.

Exempel
Betrakta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisen har två oberoende kolonnerna och därmed är rangen av matrisen 2. De tre kolonnerna är vektorerna som inte är bas i rummet $\mathbb{R}^3$.

2.3.4 Linjära avbildningar

Definition 2.12 *Låt V och W vara två vektorrum. En funktion T från V till W säges vara en linjär avbildning om följande två villkor är uppfyllda*
Villkor 1 $T(u + v) = T(u) + T(v)$ *för alla* $u, v \in V$.
Villkor 2 $T(ku) = kT(u)$ *för varje skalär* k *och alla* $u, v \in V$, *[2, s.115]*

Låt oss betrakta T(u) = u^2. Om T vore en linjär avbildning måste villkorna vara uppfyllt. Men
T(u+v)=$(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = T(u) + T(V) + 2uv \neq T(u) + T(v)$
Villkor 1 är inte uppfyllt och därmed är T(u) = u^2 inte linjär avbildning.

2.3.5 Underrum

En delmängd W till ett vektorrum V kallas för ett underrum om W är ett vektorrum med den addition och den multiplikation med skalär som gäller i V.

2.4 Determinant

Definition 2.13 *Determinanten är ett tal som associeras med varje kvadratisk matris. Det vill säga är determinanten en funktion fran mängden av kvadratiska* *matriser till mängden av de reella talen. Det finns flera olika sätt att beteckna determinanten för en (kvadratisk) matris*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Man brukar beteckna den som $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$*, eller* $|A|$*, eller bara* $\det A$*.*

Vi börjar med små matriser, där en definition är lite mera hanterbar.
Låt oss nu betrakta 1×1, 2×2 matriser. För matris A=$\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ definieras determinanten som talet a: det A=a.

För en 2×2 matris B=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieras determinanten som talet
detB = ad-cb.

Medan värdet av en 3×3 matris är

$$detA = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = aei + bfh + cdg - agf - bdi - ceh.$$

Vi kan beräkna determinanten för en 3×3 matris med att reducerar sig till beräkningar av tre stycken 2×2 determinanter. Det är ide som senare ligger till grunden för definitionen av determinanter av större matriser.
Efter ändring av termernas följd och ordningen på faktorerna i produkterna får vi

$detA = aei - agf + bfh - bdi + cdg - ceh,$
$detA = a(ei - gf) + b(fh - di) + c(dg - eh),\Rightarrow$

$$detA = a\begin{vmatrix} e & f \\ g & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ h & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ h & g \end{vmatrix}.$$

Det som syns ovan kallas för kofaktorutveckling av determinanten efter rad ett. Man kunde ha valt andra faktoriseringar också och får då utveckling efter en godtyckligt vald rad eller kolonn. När vi kofaktorutvecklar en determinant multiplicerar vi första elementet med determinanten för den matris vi får genom att ta bort rad och kolonn som första elementent står i osv.

Definitionen av determinanter av en godtycklig $n \times n$ matris A. Vi börjar med att definiera determinanten induktivt: det betyder att vi antar att vi redan vet hur man räknar determinanter av matriser av storlek upp till $(n-1) \times (n-1)$ och använder detta i definitionen av determinanten av en $n \times n$ matris.

Antag att A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Låt A_{1k} vara matrisen som vi får från A genom att stryka bort raden 1 och kolonnen k. Då är förstås A_{1k} en mindre matris, $(n-1) \times (n-1)$ matris, och alltså vet vi vad dess determinant är. Definitionen av $n \times n$ determinanten A är:

$detA = (-1)^{1+1}a_{11}detA_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}detA_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}detA_{13} + ... + (-1)^{1+n}a_{1n}detA_{1n}$.

Detta liknar det vi gjorde tidigare med 3×3 matriser som vi utvecklar av determinanten A efter rad ett.

Determinantens viktigaste egenskaper

(1) Om alla elementen i en rad eller en kolonn innehåller en gemensam faktor, kan denna "faktoriseras" ut, [2, s.170].

Bevis: Antag att den gemensamma faktorn λ finns i den andra raden.

$$detA \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Utvecklingen efter denna rad ger

$$detA = (-1)^{2+1}\lambda a_{21} detA_{21} + (-1)^{2+2}\lambda a_{22} detA_{22} + ... + (-1)^{2+n}\lambda a_{2n} detA_{2n}$$

$$= \lambda((-1)^{2+1} a_{21} detA_{21} + (-1)^{2+2} a_{22} detA_{22} + ... + (-1)^{2+n} a_{2n} detA_{2n})$$

$$= \lambda detA.$$

(2) Om talen i en kolonn, eller i en rad, kan skrivas som en summa av två tal så är determinanten lika med summan av tva determinanter, som i exemplet nedan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Beviset genomförs pa liknande sätt som för egenskap 1. Man börjar med utveckling av determinanten efter den rad vars element uttrycks som summan tva tal.

(3) Om en rad eller en kolonn består av enbart nollor så är determinanten lika med 0 eftersom om man utvecklar efter noll-kolonnen eller noll-raden får man noll.

(4) Om två kolonner (eller rader) är lika så är determinanten noll.
Antar att första raden och andra raden är lika i $n \times n$ matris A, dvs

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Om vi subtraherar andra rad från första rad så ändras inte determinanten och får vi att första rad består av enbart nollor, så är determinanten lika med 0 (enligt egensakp 3)

$$detA = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

(5) Om matrisen A är en triangulär $n \times n$ matris, är $detA$ lika med produkten $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ av elementen i A, dvs diagonalelementen.

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}.....a_{nn}.$$

Bvis: Om vi kofaktorutvecklar determinanten A länga första kolonnen $detA = (-1)^{1+1}a_{11}detA_{11}$, vi kan försätta på samma sätt med $detA_{11}$, så får vi $detA_{11} = (-1)^{2+2}a_{22}detA_{22}$ tills vi får $detA_{(n-1)(n-1)}$ som är lika med $a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}$.

$detA$ =((-1)$^{1+1}(-1)^{2+2}$...$(-1)^{n+n}$)$a_{11}a_{22}.....a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}$

Följaktligen $detA = a_{11}a_{22}.....a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}$.

Teorem 4 *Låt A vara en $n \times n$ matris, $A = (a_{ij})_{1 \le i < j \le n}$ och låt $1 < k \le n$*

vara ett heltal. Då är utvecklingen efter rad k, $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ki} \mid A_{ki} \mid =$

$(-1)^{k+1}a_{k1}detA_{k1}+(-1)^{k+2}a_{k2}detA_{k2}+(-1)^{k+3}a_{k3}detA_{k3}+.....+(-1)^{k+n}a_{kn}detA_{kn}$

lika med matrisens determinant $detA$.

Bevis: Beviset är induktivt med avseende på matrisens storlek n.

Induktionsbevis är en bevismetod för att bevisa oändligt många påståenden på en gång. Att bevisa någonting med induktion sker i 3 steg.
1) Visa att påståendet är sant för ett startvärde, till exempel n=1.
2) Antag att påståendet är sant för något heltal n.
3) Visa, med hjälp antagandet i steg 2, att påståendet är sant för heltalet $n+1$.

Satsen gäller för 2×2 matriser. Låt oss då antaga att den gäller för alla matriser av typ $(n-1) \times (n-1)$, för något $n \le 3$ och att vår matris A är av typ $n \times n$.

Enligt definationen är $\mid A \mid = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i} \mid A_{ki} \mid$, (utveckling efter den första raden).

Eftersom A_{1i} är en $(n-1)\times(n-1)$ matris,

$$A_{1i} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & a_{2(i-1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k(i-1)} & a_{k(i-1)} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & a_{n(i-1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

så kan vi räkna dess determinant genom att utveckla efter rad k.

$\mid A_{1i} \mid = \sum_{i=1}^{i-1}(-1)^{(k-1)+s}a_{ks} \mid (A_{1i})_{ks} \mid + \sum_{s=i+1}^{n}(-1)^{(k-1)+(s-1)}a_{ks} \mid (A_{1i})_{ks} \mid$,
där symbolen $(A_{1i})_{ks}$ betecknar matrisen som vi får från A genom att strycka bort raderna 1 och k samt kolonnerna i och s. Vi måste vara försiktiga med exponenten vid (-1) och ta hänsyn till att visa rader och/eller kolonner inte finns med i den aktuella, mindre, matrisen. Till exempel är raden k i matrisen A som vi utvecklar efter i själva verket rad $(k-1)$ i den aktuella matrisen A_{1i}.

Insättninngen i formeln för$\mid A \mid$ ger nu $\mid A \mid = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i} \mid A_{1i} \mid =$

$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}(\sum_{i=1}^{i-1}(-1)^{(k-1)+s}a_{ks} \mid (A_{ki})_{ks} \mid + \sum_{s=i+1}^{n}(-1)^{k+s}a_{ks}$

$\mid (A_{1i})_{ks} \mid) =$

$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}(\sum_{i=1}^{i-1}(-1)^{(k-1)+s}a_{ks} \mid (A_{ki})_{ks} \mid) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{1i}(\sum_{s=i+1}^{n}(-1)^{k+s}a_{ks}$

$\mid (A_{1i})_{ks} \mid)) =$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{i-1}(-1)^{i+k+s}a_{1i}a_{ks} \mid (A_{ki})_{ks} \mid + \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=i+1}^{n}(-1)^{1+i+k+s}a_{1i}a_{ks} \mid (A_{ki})_{ks} \mid .(*)$

Låt oss ga tillbaka till matrisenA och studera nu summan
$T = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{k+s}a_{ks} \mid A_{ks} \mid$, vilken svarar mot utveckling efter rad k. Vårt mål är att vissa att $T = detA$.
Vi noterar attA_{ks} är en $(n-1)\times(n-1)$ matrise,

$$A_{ks} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & a_{1(s-1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(k-1)1} & \cdots & a_{(k-1)(s-1)} & a_{(k-1)(s-1)} & \cdots & a_{(k-1)n} \\ a_{(k+1)1} & \cdots & a_{(k+1)(s-1)} & a_{(k+1)(s-1)} & \cdots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(s-1)} & a_{n(s-1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

och vi räknar dess determinant genom att utveckla efter rad 1:

$\mid A_{ks} \mid = \sum_{i=1}^{s-1}(-1)^{1+i}a_{1i} \mid (A_{ks})_{1i} \mid + \sum_{i=s+1}^{n}(-1)^{1+(i-1)}a_{1i} \mid (A_{ks})_{1i} \mid .$

Följaktligen kan vi skriva om talet T som

$T = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{ks}(\sum_{i=1}^{s-1}(-1)^{1+i}a_{1i} \mid (A_{ks})_{1i} \mid + \sum_{i=s+1}^{n}(-1)^{i}a_{1i} \mid (A_{ks})_{1i} \mid =$

$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{ks}(\sum_{i=1}^{s-1}(-1)^{1+i}a_{1i} \mid (A_{ks})_{1i} \mid) + \sum_{s=1}^{n}(-1)^{ks}(\sum_{i=s+1}^{n}(-1)^{i}a_{1i}$

$\mid (A_{ks})_{1i} \mid) =$

$\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{s-1}(-1)^{1+i+k+s}a_{1i}a_{ks} \mid (A_{ks})_{1i} \mid + \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=s+1}^{n}(-1)^{k+i+s}a_{1i}a_{ks}$

$\mid (A_{ks})_{1i} \mid .$ (**)

Om vi jämför uttrycken (*) och (**) finner vi att de ”nästan” ser identiska ut.

Skillnaden ligger i summationen.
Den första termen i (*) är $\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{i-1}(-1)^{i+k+s}a_{1i}a_{ks} \mid (A_{ki})_{ks} \mid$

medan den andra termen i (**) är $\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=s+1}^{n}(-1)^{k+i+s}a_{1i}a_{ks} \mid (A_{ks})_{1i} \mid .$

Uppenbarligen är $(A_{ks})_{1i} = (A_{ki})_{ks}$: båda fås ju ur A genom att strycka bort raderna 1 och k samt kolonnerna i och s. Däremot ser summorna $\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{i-1}$ och $\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=s+1}^{n}$ inte precis identiska ut. Så är de lika och det är lätt att övertyga sig om detta genom att skriva en lämplig tabel:
välj talen i succesivt till $1, 2, 3$, osv, fram till n och ange sedan alla “tillåtna” s enligt den första summationen, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{i-1}$. Tillexempel,för $i = 1$ har vi inga alls s (eftersom s varierar från 1 till $i - 1$ som ju da är 0). För $i = 24$ får vi enbart s = 1 osv. Vi får följande par
(i, s) :
(2,1)
(3,1), (3,2)
(4,1), (4,2), (4,3)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4)

....

(n, 1), (n, 2), (n, 3),.....,(n, n-1)

Om vi sedan tittar på samma tabell kolonnvis så ser vi att för ett fixt s har vi med alla i som är större än s, vilket ju är inget annat än de par (i, s) som dycker upp i summationen $\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=s+1}^{n}$. Detta bevisar att den första termen i (*) är densamma som den andra i (**). På samma sätt kan vi övertyga oss att den andra termen i (*) är densamma som den första i (**). Sammanfattningsvis betyder det att uttrycken (*) och (**) är identiska och därmed är $T = detA$, [14, s.43].

3 De tillämpningarna av linjär algebra tillkom först 3000-4000 år senare

Man kan hitta linjära ekvationssystem i de tidigaste matematiska skrifterna från många forntida civilisationer. I det här avsnittet ger vi några sådana exempel. De tidiga civilisationerna använde linjära system för att lösa problemen som inkluderade mätningar av mark, fördelning av varor och resurser som till exempel vete, skatt och beräkningar av arv och så vidare.[1, s.551].

Här är tre olika exempel som var grunden till denna gren av matematik som nu kallas linjär algebra och utvecklades mest under 1800-talet.

3.1 Babylon (1900-1600 f.Kr)

Det gamla bybyloniska riket blomstrade i Mesoptamien mellan 1900 och 1600 f.kr. Babylons befolkningen visste hur man kunde lösa enkla system av två linjära ekvationer med två obekanta. Många lertavlor innehåller matematiska tabeller och problem som överlevde från den perioden. Ett sådant problem är följande:

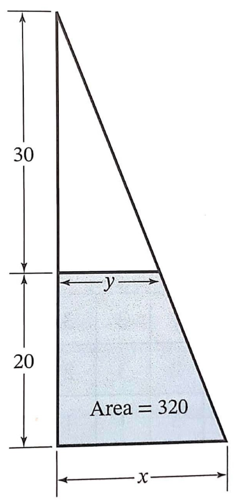

Figure 1: Babylonskt problem

En trapetsoid har area på 320 kvadratiska enheter. Den skärs av från en triangel med en linje parallell med en av dess sidor. Den andra sidan har längd 50 enheter, och trapetsoids höjd är 20 enheter. Vad är trapetsoids övre och nedre bredd?

Lösning:

Trapetsoids area är produkten av dess höjd med dess genomsnittliga bredd. Alltså

$$
\begin{aligned}
20\left(\frac{x+y}{2}\right) &= 320 \iff \\
\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \frac{320}{20} \iff \\
\frac{1}{2}(x+y) &= 16.
\end{aligned}
$$

Likformiga trianglar ger att

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{50} &= \frac{y}{30} \iff \\
30x &= 50y \iff \\
3x &= 5y \iff \\
3x - 5y &= 0.
\end{aligned}
$$

Vi får två ekvationer

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}(x+y) = 16 \\
3x - 5y = 0.
\end{cases}
$$

Om vi subtraherar ekvationerna med lämpliga koefficienter får vi

$$\frac{1}{2}(x-y) = 4.$$

På lerplattan användes dessa relationer för att generera det linjära systemet

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}(x+y) = 16 \\
\frac{1}{2}(x-y) = 4.
\end{cases}
$$

Vi får lösningen x=20 och y=12.

3.2 Kina (263 e.Kr)

"De nio kapitlen om matematisk konst "är den viktigaste texten i kinesisk matematisk historia. Denna text är en samling av 246 problem och deras lösningar som sammanställdes i sin slutliga form 263 E.Kr.

I det åttonde av nio kapitel finns det ett avsnitt "Sättet att beräkna med uppställning". Det innehåller flera problem som leder till linjära ekvationssystem. Lösningen är nästan identisk med Gausselimination som vi presenterade ovan och som utvecklades under 1800-talet i Europa. Det första problemet är följande.

Det finns tre klasser av korn, i varav tre buntar av den första klassen, två av den andra och en av den tredje totalt 39 mått. Två av den första, tre av den andra, en av den tredje gör 34 mått. En av den första, två av den andra, tre av den tredje gör 26 mått. Hur många mått av spannmål finns det i ett bunt av varje klass?

Låt x, y och z vara måtten för respektive den första, andra och tredje klassen av majs. Enligt villkoren i problemet får man följande linjära system:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26. \end{cases}$$

I texten beskrivs det en räkningstabell som representerar de koefficienter av varje ekvation med ett lämpligt antal stavar placerade i rutorna. Man använde svarta stavar för positiva koefficienter, röda stavar för negativa och rutorna lämnades tomma för noll koefficienter. I tabellen skrevs koefficienterna för första ekvation i den högsta kolumnen.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Därefter justerades antalet stavar i rutorna i två steg :
Steg 1
Två gånger siffrorna i den tredje kolonnen subtraherades från tre gånger siffrorna i den andra kolonnen, $(3kolonn_2 - 2kolonn_3)$.
Steg 2 Siffrorna i den tredje kolonnen subtraherades från tre gånger siffrorna i den första kolonnen, $(3kolonn_1 - kolonn_3)$.

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Sedan subtraherades fyra gånger siffrorna i den andra kolonnen från fem gånger siffrorna i den första kolonnen, vilket gav

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

Sista tabellen är ekvivalent med det linjära systemet

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ \quad\quad 5y + z = 24 \\ \quad\quad\quad 36z = 99. \end{cases}$$

Lösningen av systemet blir : x=37/4, y=17/4 och z=11/4.

3.3 Indien (Fjärde århundradet e.Kr)

Bakhshali-manuskriptet är en forntida indisk matematisk text som hittades i byn Bakhshali under fjärde århundradet E.kr. Den består av cirka 70 blad som innehåller matematiska problem och deras lösningar,[1, s.556]. Här är ett exempel.

En köpman har sju asava hästar, den andra har nio haya hästar och den tredje har tio kameler. Varje köpman får samma värde på sina djur om var och en ger två djur till var och en av de andra. Hitta priset för varje djur och det totala värdet på djuren som besitter av varje person.

Lösningen översatt till vår moderna notation, blir följande. Låt x vara priset på en asava häst, låt y vara priset på en haya häst och låt z vara priset på en kamel och låt k vara det totala värdet på de djur som varje köpman besitter. Då leder villkoren för problemet till följande ekvationssytem:

$$\begin{cases} 5x + y + z = k \\ x + 7y + z = k \\ x + y + 8z = k. \end{cases}$$

Lösningsmetoden som beskrivs i manuskriptet börjar med att subtrahera mängden $(x + y + z)$ från båda sidorna av de tre ekvationerna och det följer att
$4x = 6y = 7z = k - (x + y + z)$.
Detta visar att om priserna x, y, z vara ett heltal, måste mängden $k-(x+y+z)$ vara heltal som kan delas med $4, 6, 7$. Sedan tar de produkten 168 av dessa tre siffror för värdet av $k - (x + y + z)$

$$\begin{cases} \frac{4x}{168} = \frac{k-(x+y+z)}{168} \\ \frac{6y}{168} = \frac{k-(x+y+z)}{168} \\ \frac{7z}{168} = \frac{k-(x+y+z)}{168}, \end{cases}$$

vilket ger $x = 42, y = 28, ochz = 24$ för priserna och k=262 för det totala värdet.

4 Historisk utveckling av linjär algebra i modern tid

Vi kommer ge ett kort överblick över vissa aspekter av utveckling av linjär algebra inklusive: linjära ekvationer; determinanter; matriser och linjär transformationer samt vektorrum.

Många av de grundläggande resultaten inom linjär algebra fastställdes runt 1880. Men det grundläggande begreppet vektorrum introducerades senare av Peano, [5, s.79].

4.1 Linjära ekvationer

År 1750 presenterades lösningen av $n \times n$ linjära system av Cramer i hans verk " Introduktion till analys av algebraiska kurvor", men den saknade bevis.

Euler har observerat att ett linjärt system av n ekvation med n obekanta kan sakna lösningar.

4.2 Determinanter

Determinanter beräknades även innan begreppet matris fanns och de är nära relaterade till linjära ekvationsystem. Runt 1693 uppfann Leibniz determinanten. Han använde den för att lösa linjära ekvationer och i eliminationsteori, men hans forskning kring detta glömdes,[5, s.81].

Runt 1729 skrev Maclaurin sin ”Avhandling i algebra” som innehöll de första publicerade resultaten om determinanter av 2×2 och 3×3 matriser. Senare gav Cramer den allmänna regeln för determinanter av $n \times n$ matriser.

År 1772 gav Vandermonde en redogörelse för teorin av determinanter oberoende an deras relation till linjära ekvationer i ” Memoir on eliminationsteori” . Laplace utvidgade en del av Vandermondes arbete senare. År 1801 introducerades ordet ”determinant” av Gauss för första gången.

Cauchy var den första matematiker som gav en systematisk redogörelse av determinanter 1815 och grundade teorin om determinanter som vi känner till idag. Dessutom bevisade han den viktiga produktregeln: $det(AB) = (detA)(detB)$.

1843 utvecklade Cayley analytisk geometri i n dimensioner med hjälp av determinanter.

En axiomatisk definition av determinant infördes av Weierstrass och Kronecker i deras föreläsningar på 1860-talet. Detta arbete blev känt 1903 när deras föreläsningar om determinantteorin publicerades. Efter dessa två viktiga publikationer var den moderna teorin om determinanter färdig.

4.3 Matriser och linjära transformationer

Matriser är ett viktigt matematisk begrepp. Man kan använda matriser för linjära transformation och i samband med lösning av linjära ekvationssystem. Det finns viktiga tillämpningar av matriser både inom matematiken och andra vetenskaper. Omkring 200 f.kr dök matriser upp som enkla rektangulära uppsättningar av tal i kinesisk matematik. När de grundläggande räknesätten av matriser introducerades blev matriser mer användbara och viktiga, [5, s 82].

Gauss skrev en lärobok i talteori ”Aritmetiska undersökningar” som innehåller linjära transformationer. Även om Gauss inte använde termen ”matris”, de linjära transformationerna representerades som rektangulära uppsättningar med tal. Han beskrev även matrismultiplikation. Därefter dök linjära transformationer upp i analytisk geometri under 1800-talet.

Eisenstein och Hermite försökte utvidga Gauss arbete och konstruerade en allmän teori av former av en given grad i ett valfritt antal variabler. De definierade också linjära transformationer och studerade dem.

Den första matematiker som använde termen ”matris” var Sylvester (1850), men det var Cayley som insåg betydelsen av matriskonceptet och publicerade två artiklar om matriser 1850 och 1858. Han definierade summa och produkt av matriser för lämpliga par av rektangulära matriser, identitetsmatrisen samt inversen. 1858 bevisade Cayley Cayley-Hamilton sats som säger att en kvadratisk matris uppfyller sin egen karakteristiska ekvation. Cayley gjorde mycket för att främja symbolisk algebra. Men tyvärr blev hans ansträngningar okända utanför England fram till 1880-talet.

Den berömda spektralsatsen upptäcktes av flera matematiker mellan 1820 och 1870 talet. Bland de fanns Cauchy, Jordan och Weierstrass. Spektralsatsen är egentligen en samling satser inom linjär algebra som handlar om symmetriska, ortogonala och andra typer av matriser. Den viktigaste är Jordanmatrisen som introducerades av Weierstrass som visade att två matriser framställer samma linjär transformation om och endast om de har samma Jordan kanonisk form.

Frobenius skrev 1878 en viktig artikel om matriser "Om linjära substitutioner och bilinjära former" men han verkade vara omedveten om Cayleys arbete. Hans text innehåller också definitionen av rangen för en matris som han använde i samband med kanoniska former och definitionen av ortogonala matriser. Han inspirerades också av sin lärare Weierstrass och citerar Kroneckers och Weierstrass arbete som han betraktar som speciella fall av sina resultat.

4.4 Vektorrum

Begreppet vektorrum introducerades av Peano 1888, men många av de grundläggande resultaten inom linjär algebra har redan varit etablerade kring 1880, [5].

Vektorer dyker upp först vid slutet av sjuttonhundratalet och tillämpas till exempel i fysiken för att beskriva krafter och hastigheter. En vektor tolkas som ett objekt som har både storlek och riktning. För att addera 2 vektorer bildar man ett parallellogram och tar dess diagonal.
Flera författare sådana som Wessel 1797 och Gauss 1831 introducerade det matematiska begreppet av vektor som har sitt ursprung i den geometriska representationen av komplexa tal.

1835 definierade Hamilton komplexa tal algebraiskt som ordnade par av reella tal. Han noterade att två operationer på komplexa tal uppfyller de kommutativa och associativa lagar, har ett enhetselement och har additiva och multiplikativa inverser.

Utveckling av rymdteori som var en utvidgning av idéer om ett 3-dimensionellt rum till högre dimension gjordes på 1840-talet av Cayley, Hamilton och Grassmann. Hamilton kallade den utvidgningen från tre dimensioner av till fyra " ett språng av fantasin ". Han tillbringade tjugo år i dessa studier. I Cayleys artikel om dimensionalitet dök upp rum av n-dimensioner".

Grassmann förklarade i sin "Läran om linjär förlängning" från 1844 de banbrytande idéerna. Målet för hans arbete var att konstruera en koordinatfri algebra av ett n-dimensionellt rum. Det innehöll många viktiga begrepp sådana som underrum, dimension, linjär transformation, linjärt oberoende och skalär produkt.

Han bevisade även olika resultat om vektorrum inklusive den grundläggande relationen
$dimV + dimW = dim(V + W) + dim(V \cap W)$

Grassmanns arbete ignorerades av dåtida matematiker eftersom det var svårt att förstå.

Peano gav en abstrakt formulering av några av Grassmanns idéer i hans "Geometrisk kalkyl" från 1888. Dessutom gav han en axiomatisk definition av ett vektorrum över reella tal i sista kapitlet i detta arbete, som heter "Transformationer av linjär system " och kallade det " ett linjärt system ".

Peano definierade även andra begrepp inom linjär algebra och bevisade ett antal satser. Till exempel definierade han dimension av ett vektorrum som det maximala antalet linjärt oberoende vektorer men utan bevis.

Av olika anledningar ignorerades även Peanos skrift. 1918 definierade Weyl axiomatiskt ändligt-dimensionella vektorrum igen utan att han kände till Peanos arbete.

Normerade vektorrum över reella tal definierades av Banach 1920 i hans doktorsavhandling.

Emmy Noether introducerade moduler 1921 och behandlade vektorrum som specialfall. Vi kan konstatera att vektorrum dök upp i åtminstone 3 olika sammanhang: i geometri, analys och algebra. Till slut 1930 skrev van der Waerden ett kapitel med titeln "Linear Algebra" och det var första gången denna termen användes.

5 Tillämpningar av linjära ekvationssystem

I detta avsnitt diskuterar vi några av väldigt många tillämpningar av linjär algebra. Våra exempel är tagna från [1].

5.1 Nätverksanalys

Inom många områden används konceptet "nätverk" . Ett nätverk är en uppsättning grenar genom vilka något "transporteras". Det kan till exempel vara elektriska nätverk, trafikbanor, eller nätverk av ekonomisk kontakter.

Vi kallar de platser där grenarna möts för noder. Till exempel i ett trafiknätverk är noder gatukorsningar och i ett finansiellt nätverk är de banker där pengar delas ut till individer och andra institutioner. Varje gren har också ett flöde uttryckt med hjälp av ett visst numeriskt mått. Till exempel mäts strömstyrkan i amper, flödet av vatten i liter per minut och trafik i forden per timme.

Vi antar att varje nod är flödesbevarande, det vill säga att inflödet till vilken nod som helst är lika med utflödet ur denna nod.

5.2 Elektriska nätverk

Elektriska nätverk ger en av de mest klassiska användningarna av linjär algebra .

Elektriska kretsar består ofta av elektomekaniska komponenter som till exempel ström- och spänningskällor, strömbrytare och transistorer som man kopplar med elektriska ledningar så att en elektrisk ström kan passera genom den. Ett vanligt problem i elektricitetsläran är att bestämma strömstyrkorna i en given elektriskt krets.

Summan av strömstyrkorna i varje nod är 0. Om vi låter strömstyrkorna i olika grenar vara obekanter får vi ett linjärt homogent ekvationsystem där varje nod ger en ekvation. Sedan kan vi bestämma strömmarna genom olika grenar av elektriska nätverk.

De tre grundläggande lagar som styr strömflödet i en elektrisk krets är följande:

A **Ohms lag**

Den beskriver förhållandet mellan elektrisk spänning, elektrisk resistans och elektrisk ström i en linjär resistor, [7]. Lagen säger att den elektriska spänningen U över en resistans är proportionell mot den elektriska strömmen I det vill säga:

$U = R.I$ där U = spänning i volt (v), I= strömstyrka i ampere (A), R= resistans i ohm (Ω).

B **Kirchhoffs strömlag**

Den säger att summan av alla elektriska strömmar till en nod är lika med summan av alla strömmar ur noden, [8], det vill säga:

$I_1 = I_2 + I_3$

C **Kirchhoffs spänningslag**

Den säger att summan av samtliga spänningar som ingår i en sluten krets är lika med summan av potentialfallen, det vill säga
$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0$, där betecknar U_k en potentialändring.

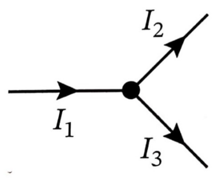

Figure 2: En nod

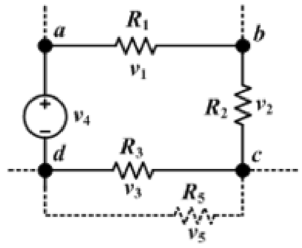

Figure 3: En sluten krets

Exempel 2.2.1

Beräkna strömmarna I_1, I_2, I_3 i figuren nedan med hjälp av Ohms och Kirchhoffs lagar, [1, s.102].

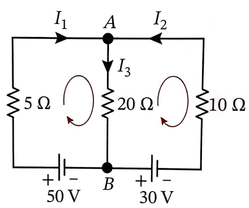

Figure 4: Ett elektriskt nätverk

Vi ska skiva ner ett linjärt ekvationssystemet. Det finns två noder i kretsen A,B och det finns tre slutna kretsar: vänstra inre krets som innehåller 50v batteri, högra inre krets som innehåller 30v batteri och den yttre krets som innehåller båda två batterierna. Från de två noder får vi sambanden

$A : I_1 + I_2 = I_3$

$B : I_3 = I_1 + I_2.$

Notera att dessa två ekvationer är beroende

Från kretsar får vi följande :

Vänstra inre krets ger $50 = 5I_1 + 20I_3$

Högra inre krets ger $30 + 50 + 10I_2 = 5I_1$

Den yttre kretsens ekvation är skillnaden mellan de två tidigare ekvationerna.

Vi får följande linjärt system av tre ekvationer

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 5I_1 + 20I_3 = 50 \\ 10I_2 + 20I_3 = -30. \end{cases}$$

.

Vi tillämpar Gausselimination på dess totalmatris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 20 & 50 \\ 0 & 10 & 20 & -30 \end{pmatrix} R_2 + (-5)R_1 \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 25 & 50 \\ 0 & 10 & 20 & -30 \end{pmatrix} \text{-1/5R}_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 10 & 20 & -30 \end{pmatrix} R_3 + (-10)R_2 \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 70 & 70 \end{pmatrix} 1/70R_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 70 & 70 \end{pmatrix}.$$

Lösningen av systemet blir: $I_1 = 6, I_2 = -5$ och $I_3 = 1$.

5.3 Trafiknätverk

Trafikljussystem används för att optimera trafikflöden i städer eller områden. Trafikingenjörer använder linjära ekvationssystem för att studera trafikflödet. Analysen av trafikflödet bygger på principen att antalet bilar som kommer in och lämnar varje korsningen måste vara lika. Linjär algebra tillåter att studera trafikflöden med hjälp av matriser och att bestämma vilka parametrar har bestämda värden och vilka som man kan välja, [9, s.101]

Antag att vi har information om antalet bilar som passerar olika korsningar under en timme som på bilden nedan:

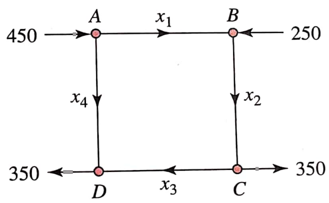

Figure 5: Ett exempel av ett vägnät

Bilden presenterar ett nätverk av enkelriktade vägar med pilar som anger riktningar av trafikflödet. Antalet fordon som kommer in eller lämnar nätverket per timme vid noder A, B, C, D visas på bilden 4.

Låt x_1, x_2, x_3, x_4 vara antalet fordon som passerar genom grenarna AB, BC, CD respektiv AD. I trafik nätverket är antalet inkomna bilar och utgående i varje nod lika.

Alltså får man följande linjärt system:

$$\begin{array}{llcl} \text{Nod} & \text{Ingång} & & \text{utgång} \end{array}$$
$$\begin{cases} \text{A} & 450 & = & x_1 + x_4 \\ \text{B} & x_1 + 250 & = & x_2 \\ \text{C} & x_2 & = & x_3 + 350 \\ \text{D} & x_3 + x_4 & = & 350. \end{cases}$$

Linjära ekvationer blir:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad + x_4 = 450 \\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad = 250 \\ \qquad\quad + x_2 - x_3 \qquad = 350 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + x_4 = 350 \end{cases}$$

Gausselimination av totalmatrisen ger följande:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 450 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 350 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 450 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 = t$, är en reell parameter.

Man får $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (450 - t, 700 - t, 350 - t, t)$ Problemet har många möjliga lösningar.

5.4 Balansering av kemiska ekvationer

Linjär algebra används också i kemi. Till exempel, kan den användas för att balansera kemiska ekvationer.
En kemisk ekvation är ett uttryck för en kemisk förändring och används för att grafiskt illustrera kemiska reaktioner. Ämnen som deltar i en kemisk reaktion representeras av deras molekylformler. Dessutom visar en kemisk ekvation vilka typer och antal molekyler som kommer in i reaktionen och vilka typer och antal produktmolekyler bildas som ett resultat av reaktionen, [9, s.103].

Kemiska ämnens molekyler representeras av kemiska formler som beskriver vilka atomer en molekyl är uppbyggd av. Till exempel består vatten av två väteatomer och en syreatom. När kemiska ämnen kombineras under de rätta förhållandena omorganiseras atomerna i deras molekyler för att bilda nya föreningar.

Exempel:

$CH_4 + O_2 \to CO_2 + H_2O$

De molekyler på vänstra sida av pilen kallas reaktanter och de som står på högra sidan kallas produkter. En reaktionsformel är balanserad först när det finns lika mycket av varje ämne på varje sidor om reaktionspilen.

Det finns olika metoder som kan användas för att hitta alla möjliga sätt att balansera en kemisk ekvation .

För att illustrera metoden, måste vi hitta positiva heltal x_1, x_2, x_3, x_4 så att

$x_1(CH_4) + x_2(O_2) \to x_3(CO_2) + x_4(H_2O)$

$$\begin{cases} \quad\quad VL & HL \\ Kol \quad x_1 & = \quad x_3 \\ v\ddot{a}te \quad 4x_1 & = \quad 2x_4 \\ Syre \quad 2x_2 & = \quad 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

Vi får ett homogent linjärt system: $\begin{cases} x_1 \quad - x_3 \quad = 0 \\ 4x_1 \quad\quad - 2x_4 = 0 \\ \quad 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Totalmatrisen kan med radoperationer reduceras till

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Om vi sätter $x_2 = t$ blir lösningsmängden
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t/2, t, t/2, t)$, där t är godtyckligt
När t=2 får vi en balanserad ekvation med positiva heltals koefficienter.

$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$

5.5 Interpolation med ett polynom

Polynom är algebraiska uttryck som är summor av monom i några variabler och konstanttermer. Polynomets grad är den största exponenten på ett monom, [10].

Ett reellt polynom i en variabel kan skrivas på formen

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} \quad x \in \mathbb{R}$$

Polynomets reella nollställen är de x-värden där grafen skär x-axeln, det vill säga lösningar till ekvationen $p(x) = 0$.
Utseendet på en polynomfunktions graf beror på polynomets grad. Exempelvis kallas grafen till en andragradspolynom andragradskurva och har formen av en parabel. Grafer till polynomfunktioner av högre grad sådan som tredjegradspolynom och fjärdegradspolynom, kan ha mer komplicerade utseenden.

Inom ingenjörskonst och andra vetenskap försöker man konstruera en funktion som beskriver en mängd datapunkter, detta kallas för kurvanpassning. Interpolation är ett specialfall av detta.

Interpolation av punkter i $\mathbb{R}^2$ med polynom är en metod att hitta ett polynom vars graf passerar genom en viss uppsättning av punkter i planet. Det enklaste exemplet är ett linjär polynom p(x)=ax+b vars graf passerar genom två distinkta punkter.

Teorem 5 *Givet n olika punkter $x_1, x_2, ..., x_n$ och godtyckliga värden $y_1, y_2, ..., y_n$, finns det bara ett polynom p av grad mindre eller lika med $n-1$, [1, s.106], så att*

$$p(x_i) = y_i, \ i=1,2,...,n$$

Bevis. Låt oss nu hitta ett polynom som vars graf passerar genom $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_n)$ med distinkta x-koordinater. Man får n villkor att uppfylla. Vi börjar leta efter ett polynom på formen

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{n-1} x^{n-1}$$

Funktionen p(x) innehåller några okända konstanter och p(x) går genom samtliga punkter, dvs. $y_1 = p(x_1), ..., y_n = p(x_n)$

Ställer vi upp en ekvation för varje datapunkt detta resulterar i följande linjärt ekvationsystem för koefficienterna $c_0, c_1, ..., c_n$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + ... + c_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + ... + c_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + ... + c_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases} .$$

Med andra ord, får man

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Beteckna

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Matrisen V kallas en Vandermondematris, [12].

Detta system av linjära ekvationer är lösbart om determinanten för Vandermondematrisen är skild från noll. Vi ska visa varför determinanten av en Vandermodematris är icke-noll. Vandermonde-systemet är på formen $Vc = y$, där y är vektorn för y-värden, är c vektorn för koefficienter

Genom att ta determinanten för Vandermondematriserna i storlek 1×1, 2×2 och 3×3, får vi de tre polynomen $1, (x_2 - x_1)$ och $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_3)$. Exempelvis 2×2 determinanten

$$detV_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1).$$

$detV_2 = (x_2 - x_1)detV_1$, då $detV_1 = 1$.

För 3×3 determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{rad_2 - rad_1, rad_3 - rad_1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix},$$

förenkla vi den med kofaktorutveckling längs första kolonnen, får vi

$detV_2 = (x_2 - x_1)(x_3^2 - x_1^2) - (x_2^2 - x_1^2)(x_3 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \Rightarrow$
$\mathrm{detV}_3 = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)detV_2$

För 4×4 determinanten som vi har n=4

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix},$$

$kolonn_4 - x_1 kolonn_3, kolonn_3 - x_1 kolonn_2, kolonn_2 - x_1.kolonn_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2.x_1 & x_2^3 - x_2^2.x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3.x_1 & x_3^3 - x_3^2.x_1 \\ 1 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_4.x_1 & x_4^3 - x_4^2.x_1 \end{vmatrix},$$

genom kofaktorutveckling längs första rad

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & x_2(x_2^2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & x_3(x_3^2 - x_1) \\ x_4 - x_1 & x_4(x_4 - x_1) & x_4(x_4^2 - x_1) \end{vmatrix},$$

och faktorisering en faktor från varje rad får vi

$$(x_2 - x_1)x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)x_3 - x_1)(x_4 - x_1)detV_3.$$

Genom att upprepa proceduren för $n > 4$ finner man till sist att utrycket för determinanten av Vandermonde matrisen av en godtycklig n ges av

$detV_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$. Som är

$(x_n - x_1)(x_n - x_2)......(x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_1)(x_{n-1} - x_2).....(x_{n-1} - x_{n-2})$
$(x_2 - x_1)$.

Man kan bevisa detta med induktionsmetod när punkterna x_i är distinkta. Låt Vandermonde determinant presenteras i formen som

$$detV_n = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

Låt $P(n)$ vara ett påstående, för alla heltal n,
$detV_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

$P_1(x)$ är sant, som det här säger $\mid 1 \mid = 1$

Bassteg för induktion:
$P_2(x) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} = a_1 - a_2.$

Induktionssteg:

Nu måste vi visa det, om $P_k(x)$ är sant, för något $k > 2$, då följer det logiskt $P_{k+1}(x)$ är sant.

Antag att formeln $detV_k = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (a_j - a_i)$ är sant.

Vi behöver att visa formeln $detV_{k+1} = \prod_{1 \leq i < j \leq k+1} (a_j - a_i)$ är sant.

Antag determinanten

$$detV_{k+1} = \begin{vmatrix} x^k & x^{k-1} & \cdots & x & 1 \\ a_2^k & a_2^{k-1} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k+1}^k & a_{k+1}^{k-1} & \cdots & a_{k+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Första raden innehåller x-variabel. Genom kofaktorutveckling längs rad 1 får vi ett polynom $P(x)$ som har graden mindre än k. Låt något a_i, vilken som helst, sättas istället variabel x, då kommer två av dess rader att vara detsamma.

Enligt egenskaper för determinanter är värdet på en sådan determinant är noll. En sådan substitution i determinanten motsvarar substitution a_i för x i $P(x)$.

Följaktligen följer det att

$P(a_2) = P(a_3) = ... = P(a_{k+1}) = 0,$

så är $P(x)$ delbar med var och en av faktorerna $x - a_2, x - a_3, ..., x - a_{k+1}$. Alla dessa faktorer är distinkta, annars är den ursprungliga determinanten noll, så

$P(x) = C(x - a_2)(x - a_3).....(x - a_k)(x - a_{k+1}),$

som graden av $P(x)$ är mindre än k följer det att C är oberoende av x.

Determinanten av koefficienterna för $x_k, ...$ är

$$\begin{vmatrix} a_2^{k-1} & \cdots & a_2^2 & a_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k+1}^{k-1} & \cdots & a_{k+1}^2 & a_{k+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Detta är lika med $\prod_{2 \le i < j \le k+1} (a_j - a_i)$, och måste vara vårt värde av C.

Så har vi

$P(x) = (x - a_2)(x - a_3).....(x - a_k)(x - a_{k+1}) \prod_{2 \le i < j \le k+1} (a_j - a_i).$

Substitution a_1 för x , hämtar vi tillbaka till P(K+1).

Så $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, enligt induktionsmetod.
Därför

$detV_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$

Det som syns ovan är slutsatser av induktionen i matematik som betyder att vi antar att vi redan vet hur man räknar determinanter av Vandermondematriser av storlek upp till $(n-1) \times (n-1)$ Vandermondematris och använder detta för att hitta determinanter av $n \times n$ Vandermondematriser.

Genom att utnyttja detta resultat kan man säga att determinanten är parvisa skillnader mellan olika x-värden (distinkta punkterna). Om två x-värden är lika är determinanten noll; annars måste determinanten vara icke-noll.

Vi ska visa att systemets lösning är unik, så finns bara ett polynom av grad mindre eller lika med $n - 1$.

Anta att det finns två polynomer $p_1(x_i), p_2(x_i)$ i grad mindre eller lika med n-1. Då gäller att $p_1(x_i) = p_2(x_i) = y_i$ för $i = 1, 2, ..., n$ och polynomet $q(x) = p_1(x) - p_2(x)$ av grad $n-1$ (Summan av två polynomer av grad n måste vara av grad n eller mindre) och har n nollställen ty $q(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., n$. Enligt algebrans huvudsats är antalet rötter av ett icke-noll polynom lika med dess grad.
Alltså kan ett polynom av grad $n-1$ inte ha n rötter om det inte är nollpolynomet. Därför är $q(x) = 0$ och därför $p_1(x) = p_2(x)$.

Teorem 6 *(Algebrans huvudsats) Varje polynom med grad $n \geq 1$ som inte är identiskt noll har exakt n rötter, om man räknar med multiplicitet. Dessa rötter kan vara reella och komplexa.*

Ett problem med denna metod är att elementen i Vandermondematrisen kan bli väldigt stora om vi har många punkter, dvs stort n. Vi kan använada andra metod som är Newtons interpolationsformel.

Newtons interpolationsformel

Ett polynom $P_{n-1}(x)$ kan med Newtons ansats skrivas på formen

$P_{n-1}(x)$=c$_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + c_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + ... + c_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)....(x - x_{n-1})$

$P(x_i) = y_i, i = 1, 2, \ldots, n$ måste gälla insättning av (x_i, y_i).
Om till exempel n=3 och $x = x_1$ får vi

$$c_0 + c_1(x_1 - x_1) + c_2(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) + c_3(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = y_1$$

Det gäller att $c_0 = y_1$, sedan försätter vi till att få ett linjärt ekvationssystem på formen

$$\begin{cases} x_1 : c_0 = y_1 \\ x_2 : c_0 + c_1(x_2 - x_1) = y_2 \\ x_3 : c_0 + c_1(x_3 - x_1) + c_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = y_3 \end{cases}$$

.
Newtons interpolationsformel ger en triangulär matris, så att den här ansatsen ger problemet bättre egenskaper beräkningsmässigt.

Exempel 2.6.1
Vi ska finna ett polynom vars graf passerar genom punkterna
$(3, 1.9), (4, 3.6), (6, 14.2)$.
Vi har $n = 3$ och ett polynom av grad $n - 1 = 2$, det vill säga
$p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

Vandermondematrisen av det linjära systemet med våra 3 punkter blir:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1.9 \\ 1 & 4 & 16 & 3.6 \\ 1 & 6 & 36 & 14.2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1.9 \\ 1 & 4 & 16 & 3,6 \\ 1 & 6 & 36 & 14.2 \end{pmatrix} \xrightarrow{rad_2 - rad_1, rad_3 - rad_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1.9 \\ 0 & 1 & 7 & 5.5 \\ 0 & 3 & 27 & 16.1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1.9 \\ 0 & 1 & 7 & 5.5 \\ 0 & 3 & 27 & 16.1 \end{pmatrix} \xrightarrow{rad_3 - 3rad_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -1.9 \\ 0 & 1 & 7 & 5.5 \\ 0 & 0 & 6 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

Vi får ett ekvationssystem

$$\begin{cases} c_0 + 3c_1 + 9c_2 = -1.9 \\ c_1 + 7c_2 = 5.5 \\ 6c_2 = -0.4 \end{cases}$$

Vi får $c_0 = -19.3, c_1 = 6, c_2 = -0.0667$ och det interpolerande polynom blir:

$p(x) = 19.3 + 6x - 0.0667x^2$

Vi använder Newtons ansats som är ett enkelt metod

$P_2(x)$=$\mathrm{c}_0 + c_1(x-3) + c_2(x-3)(x-4)$

$$\begin{cases} x_1 : c_0 = 1.9 \\ x_2 : c_0 + c_1(x_2 - x1) = 3.6 \\ x_3 : c_0 + c_1(x_3 - x_1) + c_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 14.2 \end{cases}.$$

Vi räknar de koefficienterna och , då får vi den triangulära matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9 \\ 3.6 \\ 14.2 \end{pmatrix}.$$

Backåtsubstitution ger

$$\begin{cases} c_0 = -1.9 \\ c_0 + c_1 = 3.6 \\ c_0 + 3c_1 + 6c_2 = 0.4. \end{cases}$$

$c_0 = -1.9, c_1 = 5.5, c_2 = -0.0667,$

polynomet är $p_2(x) = -1,9 + 5.5(x-3) - 0.0667(x-3)(x-4)$
$p_2(x) = -19.2 + 5.97x - 0.0667x^2$, [13].

5.6 Konstruera kurvor och ytor genom specificerade punkter

Definition 5.1 *En andragradskurva är mängden av alla lösningar (x, y) till en ekvation*
$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0$, *[2, s.192].*

Teorem 7 *Ett homogent linjärt system av ekvationer med n ekvationer och n obekanta har en icke-trivial lösning om och endast om determinanten för detta system är lika med noll, [1, s.546].*

5.6.1 En cirkel genom tre givna punkter

Vi har punkter $(x1, y1), (x2, y2)$ och $(x3, y3)$ och vill hitta cirkeln som innehåller dessa punkter. Varje cirkel i planet kan beskrivas med en ekvation av formen
$c_1(x^2 + y^2) + c_2x + c_3y + c_4 = 0. \qquad (1)$
Vi stoppar in koordinater av de tre punkterna, så får vi dessa ekvationer

$$\begin{cases} \mathrm{c}_1(x_1^2 + y_1^2) + c_2x_1 + c_3y_1 + c_4 = 0 & (2) \\ \mathrm{c}_1(x_2^2 + y_2^2) + c_2x_2 + c_3y_2 + c_4 = 0 & (3) \\ \mathrm{c}_1(x_3^2 + y_3^2) + c_2x_3 + c_3y_3 + c_4 = 0 & (4) \end{cases}.$$

Vi vet att ett homogent ekvationssystem har alltid minst en lösning nämligen $c_1 = 0, c_2 = 0..., c_n = 0$, som kallas för den triviala lösningen. Det linjära ekvationssystemet har mer än den triviala lösningen.

Ekvationerna (1), (2), (3) och (4) är ett homogent linjärt systemet som har fyra ekvationer och fyra obekanta. Det är på formen $AC = 0$ (där C är $(c_1, ..., c_4)^t$). Eftersom de fyra obekanta inte är alla lika med noll så har det systemet en icke-trivial lösning, så är den determinanten för detta system lika med noll, enligt teorem 6.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Å andra sidan är viktigaste egenskap av determinanter att determinanten är 0 om och endast om raderna (och då samtidigt kolonnerna) är linjärt beroende. Determinanters raderna (eller kolonnerna) är linjärt beroende om det finns två av de raderna är lika.

Vi ska visa att determinante är lika med noll. Om vi stoppar in något punkt (x_i, y_i) från dessa punkter i första raden. Låt (x_1, y_1) vara den punkten, får vi en determinant som har två lika rader

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Så är determinanten lika med noll för alla punkter ligger på den cirkeln (eller kurvan).

Det finns två sätt att lösa systemet:
(1) Man kan använda den allmänna ekvationen med de ekvationerna som vi har stoppat in koordinaterna av de punkterna på systemet , så blir antalet ekvation lika med antalet variabler $(c_1, c_2....., c_n)$ och slutligen får vi ekvationen direkt när vi lösa determinanten sådan som på de exemplaren om en cirkel och en allmän konisk genom fem givna punkter .

(2) Det andra sättet är att dividera den allmäna ekvationen av kurvan med en av koefficienterna, så får vi att antalet variablerna är lika med antalet ekvationerna; exempelvis när vi har tre punkter och vill en cirkel som passerar genom de punkterna

$c_1(x^2 + y^2) + c_2x + c_3y + c_4 = 0$

Vi dividerar de koefficienterna med C_1, får vi ekvationen med nya koefficienterna
$(x^2 + y^2) + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$

Vi stoppar in koordinater av de tre punkterna, så får vi dessa ekvationer

$$\begin{cases} (x_1^2 + y_1^2) + a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 = 0 & (1) \\ (x_2^2 + y_2^2) + a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 = 0 & (2) \\ (x_3^2 + y_3^2) + a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 = 0 & (3) \end{cases}.$$

Detta system är ett linjärt ekvationssystemet som har uppenbarligen tre olika ekvationer och tre variabler (a_1, a_2, a_3).

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 + (x_1^2 + y_1^2) = 0 \\ a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 + (x_2^2 + y_2^2) = 0 \\ a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 + (x_3^2 + y_3^2) = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 = -(x_1^2 + y_1^2) \\ a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 = -(x_2^2 + y_2^2) \\ a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 = -(x_3^2 + y_3^2) \end{cases}.$$

Systemet är på formen $Aa = b$, kan vi lösa matrisen A med hjälp av Gauss-Elimination

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_1^2 + y_1^2) \\ -(x_2^2 + y_2^2) \\ -(x_3^2 + y_3^2) \end{pmatrix}.$$

Vi kan tillämpa detta sätt på den exemplen nedan. Vi har tre punkter $(1, 7)$, $(6, 2)$ och $(4, 6)$, ska vi få en total matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & -50 \\ 6 & 2 & 1 & -40 \\ 4 & 6 & 1 & -52 \end{pmatrix} \xrightarrow{rad_2 - rad_1, rad_3 - rad_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & -50 \\ -5 & 5 & 0 & -10 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5} rad_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & -50 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{rad_2 + rad_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & -50 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vi får en trappstegsmatrisen efter att vi delar rad_3 med 2 och byter rad_3 med rad_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -50 \end{pmatrix}.$$

I bakåtsubstitution startar vi på första raden, vilken direkt ger att $a_1 = -2$, vi arbetar oss sedan bakåt rad för rad och får $a_2 = -4$, $a_3 = -20$, får vi ekvationen av cirkel

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0.$
Exempel
Vi har tre punkter (1,7), (6,2) och (4,6) och vi ska finna ekvationen till cirkeln som passerar genom de punkterna. Vi skriver determinanten av koefficienterna (första sättet)

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vi ska lösa den determinanten genom förenkling med Gauss-Elimination. Vi subtraherar rad_2 från rad_3 och rad_4, sedan subtrahera vi $5rad_4$ från rad_3, får vi determinanten

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 20 & -10 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{rad_2 - 25rad_3} \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 0 & -74 & 32 & 1 \\ 0 & 20 & -10 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vi kan beräkna den determinanten nu genom att förenkla den med kofaktorutveckling längs fjärde kolonnen, får vi

$$-\begin{vmatrix} 0 & -74 & 32 \\ 0 & 20 & -10 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ 0 & 20 & -10 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -74 & 32 \\ 20 & -10 \end{vmatrix} + (x^2+y^2) \begin{vmatrix} 20 & -10 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$-200 + 20(x^2 + y^2) - 20x - 40y = 0.$
Vi multiplicerar båda sidorna av ekvationen med $(-\frac{1}{2})$ ger en ekvationen av cirkel som passerar genom de tre punkterna
$10(x^2 + y^2) - 20x - 40y - 220 = 0.$
I standardformulär är den
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25.$ Den cirkeln har medelpunkt (1,2) och radien 5.

5.6.2 Ett allmänt Konisk snitt genom fem givna punkter

Inom astronomi uppstår ofta problemet att hitta en andragradskurva som passerar genom 5 givna punkter i planet, [1, s.548]. Vi kan lösa det algebraiskt. Den allmänna ekvationen av ett koniskt snitt ges av:

$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0$ (*)

De fem distinkta punkterna i planet är tillräckliga för att bestämma ekvationenssystemet för det koniska snittet.

Antag vi har punkterna $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_4), (x_5, y_5)$ i planet.

Vi stoppar in koordinaterna av de fem punkterna, så får vi denna ekvationer

$$\begin{cases} c_1x_1^2 + c_2x_1y_1 + c_3y_1^2 + c_4x_1 + c_5y_1 + c_6 = 0 \\ c_1x_2^2 + c_2x_2y_2 + c_3y_2^2 + c_4x_2 + c_5y_2 + c_6 = 0 \\ c_1x_3^2 + c_2x_3y_3 + c_3y_3^2 + c_4x_3 + c_5y_3 + c_6 = 0 \\ c_1x_4^2 + c_2x_4y_4 + c_3y_4^2 + c_4x_4 + c_5y_4 + c_6 = 0 \\ c_1x_5^2 + c_2x_5y_5 + c_3y_5^2 + c_4x_5 + c_5y_5 + c_6 = 0 \end{cases}$$

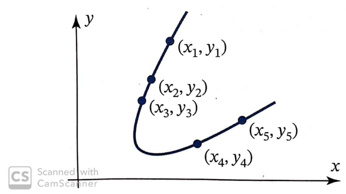

Figure 6: Koniskt snitt

Detta systemet med ekvationen (*) kan uttryckas som följande determinant och kan beräkna den med triangulering eller med kofaktorutveckling.

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Låt oss förklara det tydligare genom följande exempel
Vi har fem punkter $(0,0), (0,-1), (2,0), (2,-5)$ och $(4,-1)$ och vi ska finna ekvationen till cirkeln som passerar genom de punkterna.

Linjärt ekvationssystemet är

$$\begin{cases} c_1 0 + c_2 0 + c_3 0 + c_4 0 + c_5 0 + c_6 = 0 \\ c_1 0 + c_2 1 + c_3 0 + c_4 0 - c_5 1 + c_6 = 0 \\ c_1 4 + c_2 0 + c_3 0 + c_4 2 + c_5 0 + c_6 = 0 \\ c_1 4 + c_2 25 - c_3 10 + c_4 2 - c_5 5 + c_6 = 0 \\ c_1 16 + c_2 1 - c_3 4 + c_4 4 - c_5 1 + c_6 = 0 \end{cases}$$

Det homogena systemet är på form $AC = 0$ (där C är $(c_1, ..., c_4)^t$), så är matrisen A på formen

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 25 & -10 & 2 & -5 & 1 \\ 16 & 1 & -4 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Med kofaktorutveckling längs rad 2 får vi determinanten

$$-\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 25 & -10 & 2 & -5 & 1 \\ 16 & 1 & -4 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sedan använder vi Gauss-Elimination (rad$_3 - rad_2, rad - 3 - rad - 2, rad_4 - rad_2$)

$$-\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 24 & -10 & 2 & -4 & 0 \\ 16 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Vi försätter med kofaktorutveckling längs den sjätte kolonnen och får ekvationen av ellipsen

$-160x^2 - 160y^2 - 320xy + 320x - 160y = 0 \implies$

$-x^2 - y^2 - xy + x - y = 0$

Exempel: **Ekvationen for en omloppsbana**
Problemet ovan kommer från astronomi. Här är en konkret situation. En astronom vill bestämma en asteroids omloppsbana kring solen, [1, s.549].

Enligt Keplers första lag, "Planeternas banor är ellipser med solen i ena brännpunkten måste banan vara en ellips."[11]. Astronomen gör fem observationer av asteroiden vid fem olika tidspunkter och finner fem punkter

(8.025, 8.310), (10.170, 6.355), (11.202, 3.212), (10.736, 0.375), (9.092, -2.267) längs banan.

Vi bestämmer det linjära ekvationssystemet genom att stoppa in koordinaterna av de fem punkterna. Detta linjär ekvationssystem har mer än den triviala lösningen samt är ett homogent linjärt systemet av formen $AC = 0$ (där C är $(c_1, ..., c_6)^t$). Detta system har sex ekvationer och sex obekanta . Eftersom de sex okända inte är alla lika med noll och har en icketrivial lösning, så är den determinanten för detta system lika med noll, enligt teorem 6.

Nu kan vi bestämma ekvationen för omloppsbanan med hjälp av determinant ekvationen ovan:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 64.401 & 66.688 & 69.056 & 8.025 & 8.310 & 1 \\ 103.429 & 64.630 & 40.386 & 10.170 & 6.355 & 1 \\ 125.485 & 35.981 & 10.317 & 11.202 & 3.212 & 1 \\ 115.292 & 4.026 & 0.141 & 10.736 & 0.375 & 1 \\ 82.664 & -20.612 & 5.139 & 9.092 & -2.267 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Banans ekvation efter utveckling av determinanten blir:

$$386.802x^2 - 102.895xy + 446.029y^2 - 2476.443x - 1427.998y - 17109.375 = 0$$

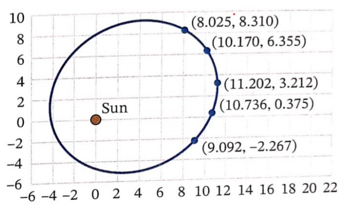

Figure 7: Banas graf

References

[1] H. Anton, *Elementary Linjear Algebra,* Wiley (2018).

[2] T. Lindström, *Med fokus på linjear algebra,* Tredje upplagan. Studentlitteratur AB (2017).

[3] A. Tengstrand, *Linjear algebra med vektorgeometri,* Studentlitteratur (2005).

[4] Wikipedia, *Gausselimination,* (2019).
`https://sv.wikipedia.org/wiki/Gausselimination`

[5] I. Kleiner, *A History of Abstract Algebra,* Springer Science Business Media (2017).

[6] Wikipedia, Vektor space. 25/3/2020
`https://en.wikipedia.org/wiki/Vectorspace`

[7] Wikipedia, *Ohmslag,* (2020).
`https://sv.wikipedia.org/wiki/Ohmslag`

[8] Wikipedia, *Kirchhoffslag,* (2019).
`https://sv.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffslagar`

[9] K. Hardy, *Linjear Algebra For Engineers And Scientists*, Person International Edition (2005).

[10] *polynomfunktioner,* Mathleaks AB (2018).
`https://mathleaks.se/utbildning/polynomfunktioner`

[11] *Keplers tre lagar*, (2012).
`http://www.learnify.se/learnifyer/ObjectResources/12552f7e-8184-4bbb-8a8b-c96ed5cf0593/index.html`

[12] D. Leykekhman, *Polynomial Interpolation,*, MATH 3795, Lecture 14 (2008).
`https://www2.math.uconn.edu/~leykekhman/courses/MATH3795/Lectures/Lecture_14_poly_interp.pdf`

[13] *Kurvanpassning: Interpolation,* föreläsningen, Studentportalen.

[14] R. Bogvad, P. Vaderlind, *Lineär algebra grundkurs,* Matematiska institutionen Stockholms Universitet (2014).