SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Binomialsatsen

av

Liana Ghukasyan

2020 - No K34

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Binomialsatsen

Liana Ghukasyan

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Annemarie Luger

2020

1 Sammanfattning

Den här uppsatsen handlar om binomialsatsen och dess olika bevis. Binomialsatsen var känt av några matematiker redan från 1600- talet.

Man kan direkt härleda kvadrerings- och kuberingregeln, men för att beräkna $(a+b)^n$ blir det svårare så länge man väljer en stor exponent n. För att ändå kunna beräkna högre potenser använder vi binomialsatsen. För att förstå satsen kommer vi att visa hur binomialkoefficienterna är uppbyggda. Vi ska visa olika bevis av binomialsatsen, samt repetera derivatan för potensfunktion med hjälp av binomialsatsen. Vidare kommer vi att definiera Laplacetransformen och diskutera dess egenskaper, några Laplacetransformer och ett exempel på hur man kan lösa ordinära differentialekvationer med hjälp av Laplacetransformen. Sedan introduceras inversen av Laplacetransformen som används när vi bevisar binomialsatsen. Avslutningsvis vill jag kort beskriva hur binomialsatsen i gymnasiekurs 5 tas upp, vilka skillnader finns i jämförelse med högre nivå.

Jag vill rikta ett STORT TACK till min handledare Annemarie Luger, för förslaget på ämnet och för stöd under arbetes gång. Den här uppsatsen gav mig möjligheter att fördjupa och utveckla mina kunskaper inom området.

STORT TACK

Contents

2 Inledning

I den här rapporten kommer vi presentera binomialsatsen och olika bevis av satsen. I kapitel 3 repeterar vi grundläggande begrepp, egenskaper och definitioner inom kombinatorik som används senare i uppsatsen. Vidare kommer vi att formulera binomialsatsen och visa ett exempel på hur binomialsatsen används i matematiken. Vi ska även repetera Pascals triangel och vilken samband som finns mellan elementen i Pascals triangel. Därefter kommer vi att visa hur man kan bevisa deriveringsregeln för potensfunktioner genom tillämpning av binomialsatsen. I kapitel 4 presenterar vi 2 olika bevis av binomialsatsen. I kapitel 5 definierar vi Laplacetransformen diskuterar dess egenskaper och presenterar några Laplacetransformer. Vidare kommer vi att undersöka Laplacetransformen av en derivata. Vi visar även ett exempel där löser vi en ordinär differentialekvation med Laplacetransformen. I kapitel 6 presenterar vi ett alternativt bevis av binomialsatsen genom att använda Laplacetransformen. I kapitel 7 presenterar vi binomialsatsen i gymnasiekurs 5 och tar upp vilka skillnader finns i jämförelse med högre nivå.

3 Grundläggande kring binomialsatsen

3.1 Kombinatorik

I det här kapitel kommer vi göra en genomgång av några grundläggande begrepp i kombinatoriken: permutationer, kombinationer samt multiplikationsprincipen. Vi kommer inte fördjupa oss i dessa begrepp i den här uppsatsen, utom kommer kortfattat formulera och sammanfatta dess innebörd. I detta kapitel använder vi oss av referenser [1], [3] och [4].

Kombinatorik är den gren av matematiken där man intresserar sig för på hur många olika sätt operationer kan utföras. En av de viktigaste principerna som utgör grunden för kombinatoriken är *multiplikationsprincipen*.

Sats 3.1 ***Multiplikationsprincipen.*** *[3, s.180] En följd av k val, där det första beslutet kan träffas på m_1 sätt, det andra på m_2 sätt o.s.v., kan sammantaget ske på $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$ olika sätt, förutsatt att valen är sinsemellan oberoende.*

Exempel 1: På en tipskupong finns 13 matcher. I varje match har men 3 möjligheter: $1, x, 2$. Hur många olika tipsrader finns det?

Vi har 3 valmöjligheter i första matchen, 3 valmöjligheter i andra osv. Antalet möjliga utfall i de första två matcherna är $3 \cdot 3 = 9$. I de tre första matcherna har vi $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ olika utfall osv. Antalet utfall i de 13 matcherna är lika med $3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3 = 3^{13}$.

Vi ska resonera på hur många sätt ett visst antal element kan väljas ur en given mängd. Detta val kan göras på två olika sätt: om ordningen spelar roll eller ej. Antag att vi har en mängd som består av n element. När man väljer första elementet kan valet göras på n sätt, det andra på $n - 1$ sätt, det tredje på $n - 2$ sätt. Enligt multiplikationsprincipen blir då antalet sätt att ordna n

element, dvs antalet permutationer

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1.$$

Detta betecknas $n!$ och utläsas n-fakultet, enligt [4, s. 60].

Definition 3.2 *För naturliga tal $n \geq 1$ definieras n-fakultet genom formeln*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n.$$

Då har vi definierat $n!$ för $n \geq 1$, men även, utifrån vår ovanstående definition, kan det vara bekvämt att ha konventionen $0! = 1$, se [3, s.27]. Enligt definitionen $n! = n(n-1)!$, som kan omskrivas som $(n-1)! = \frac{n!}{n}$. Genom att sätta $n = 1$ tillsammans med $1! = 1$ får vi att $(1-1)! = \frac{1!}{1}$, då följer att $0! = 1$. Detta stämmer överens med vår formel.

Permutationer. En permutation av k element ur n, $P(n,k)$, menas att välja ut k element ur en mängd med n element och räkna upp dem i en viss ordning.

Definition 3.3 *Låt Ω vara en mängd med n element och låt $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. En permutation av k element ur Ω är en uppräkning av k stycken av Ω's element i en viss ordning.*

Vi använder samma princip när vi definierade n-fakultet, se [1, s. 174]. Det första elementet kan väljas på n sätt, det andra på $n-1$ sätt, det tredje på $n-2$ sätt och så vidare, det k-te elementet kan väljas på $n-(k-1)$ sätt, oberoende av varandra, enligt multiplikationsprincipen blir antalet sätt att välja

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

Kombinationer. Kombinationer uppräknas i samma princip som en permutation av k element ur n, men här är viktigt att påpeka i detta fall ordningen spelar ingen roll.

Definition 3.4 *Låt Ω vara en mängd med n element och låt $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. En kombination av k element ur Ω är en delmängd av Ω med k element.*

Om man väljer en delmängd bestående av k element ur Ω, utan hänsyn till ordningen, då varje sådana delmängd kan ordnas på $k!$ olika sätt. Eftersom antalet permutationer av k element ur Ω är $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$, så måste vi dividera bort alla $k!$ upprepningar, då får vi antalet delmängder bestående av k element.

$$\frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot n(n-k+1)}{k!}.$$

Talet ovan betecknas$\binom{n}{k}$, utläsas "n över k". Alltså antalet kombinationer av k element ur en mängd Ω med n element, utan hänsyn till ordningen, kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt. Ett annat namn för $\binom{n}{k}$ är *binomialkoefficient*, se [4, s.62] (vi återkommer till binomialkoefficienter senare i rapporten).

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot n(n-k+1)}{k!}. \tag{1}$$

Genom att förlänga högerledet i (1) med $(n-k)!$ får vi

$$\binom{n}{k} = \frac{(n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)) \cdot ((n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1)}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2}$$

Vi vill visa ett exempel där ordningen spelar ingen roll.

Exempel 2: I en femteklass bestående av 12 flickor och 17 pojkar ska det väljas ett lag bestående av två pojkar och två flickor. Hur många tänktbara lag finns det?

Antalet sätt att välja ut två flickor är $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ och antalet sätt att välja ut två pojkar är $\binom{17}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136$. Enligt multiplikationsprincipen är antalet tänkbara lag $66 \cdot 136 = 8976$.

3.2 Binomialsats

I detta kapitel presenterar vi arbetets viktigaste sats: Binomialsatsen. Vi kommer att presentera olika bevis av satsen som är det centrala innehållet av uppsatsen. I detta kapitel kommer vi använda oss av referens [4] sida 63,64 och [3] sida 25-27.

Ett binom är ett polynom med två termer, det vill säga ett binom är summan av två monom. Antag att vi har två termer a och b. Då är $(a + b)$ ett binom. För att kunna genomföra algebraiska räkningar, använder vi oss av några räknelagar för addition och multiplikation. Som utgångspunkt vill vi repetera den distributiva lagen och de kommutativa lagarna i [3, s. 19-21], vilka kommer att användas som grundläggande begrepp. Vi kommer att ta några av dessa lagar till axiom.

Axiom 1. Addition och multiplikation av reella tal lyder under följande räknelagar.

Associativa lagen för addition: (a+b)+c=a+(b+c).

Associativa lagen för multiplikation: (ab)c=a(bc).

Kommutativa lagen för addition: a+b=b+a.

Kommutativa lagen för multiplikation: ab=ba.

Distributiva lagen: (a+b)c=ac+bc.

Låt oss multiplicera $a + b$ med sig själv $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$. Då har vi den välbekanta *kvadreringsregeln.*

Sats 3.5 *För alla reella tal a och b gäller att*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Även om kvadreringsregeln är välbekant, så vill vi ge ett bevis utifrån våra ovanstående axiom.

Bevis Vi använder oss av *axiom 1* och enligt den distributiva lagen beteckna $(a+b)$ som c dvs $c = a + b$. Då får vi

$$(a+b)(a+b) = (a+b)c =$$

$$ac + bc = a(a+b) + b(a+b) = (a+b)a + (a+b)b =$$

$$aa + ba + ab + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Vilket skulle visas.

Om vi multiplicerar resultatet igen med $(a+b)$, då får vi

$$(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^3.$$

Då har vi den välbekanta kuberingsregeln.

Sats 3.6 *För alla reella tal a och b gäller att*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Bevis. Även här används *axiom 1* tillsammans med Sats 3.5,

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$$

$$(a^2 + 2ab + b^2)a + (a^2 + 2ab + b^2)b =$$

$$a^3 + 2aba + b^2a + a^2b + 2abb + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Vilket skulle visas.

Vi kan fortsätta multiplicera $(a+b)$ med sig själv om och om.

Vi tittar nu på fallet där $(a+b)$ multipliceras med sig själv n gånger:

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)...(a+b) = (a+b)^n, \qquad (3)$$

där n är ett positivt heltal.

Vi har redan bevisat kvadrerings- och kuberingdregeln, dvs hur $(a+b)^n$ ser ut då $n=2,3$. Vi skall vidare undersöka hur det ser ut om $n=1,2,3,4,5,....$

Vi börjar med att utveckla $(a+b)^n$ som en produkt av n faktorer, då får vi

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot ... \cdot(a+b)}_{n}.$$

Anmärkning. Elementen i varje parentes multipliceras med vart och ett av elementen i de övriga parenteser och dessa termer adderas ihop. Dessa produkter blir av formen $a^{n-k}b^k$ med alla möjliga kombinationer. Dvs b väljas från k av n parenteser och a från de övriga $n-k$ parenteserna. Vi ska ta reda på hur många gånger termen $a^{n-k}b^k$ förekommer. Jo, det kan ske så många gånger som kan väljas k parenteser bland n. Detta kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt. Alltså förekommer termen $a^{n-k}b^k$ precis $\binom{n}{k}$ gånger, dvs $(a+b)^n$ kan skrivas som en summa av $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. Denna generalisering kallas för binomialsats.

Sats 3.7 ***Binomialsats***. *Låt a och b vara två reella tal, och låt n vara ett naturligt tal. Då gäller att*

$$\begin{aligned}(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \\ \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.\end{aligned} \tag{4}$$

Observera att i den "allmänna termen" $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ är antalet faktorer a och b alltid n. Vänsterledet i utvecklingen (4) börjar med a^n och slutar med b^n. Vi har redan nämnt att $\binom{n}{k}$ kallas för binomialkoefficient, se [4, s.63.]

Innan vi går vidare till egenskaper hos binomialkoefficienterna vill vi ge ett exempel på hur binomialsatsen används i matematiken.

Exempel 3: Betrakta $(2x^2 - \frac{1}{x})^{11}$. Hitta koefficienten framför x^{10} termen!

Vi börjar med att utveckla binomen med hjälp av binomialsatsen:

$$(2x^2 - \frac{1}{x})^{11} = (2x^2 + (-\frac{1}{x}))^{11} =$$

$$\binom{11}{0}(2x^2)^{11} + \binom{11}{1}(2x^2)^{10}(-\frac{1}{x}) + \binom{11}{2}(2x^2)^9(-\frac{1}{x})^2 + ...$$

$$+\binom{11}{k}(2x^2)^{11-k}(-\frac{1}{x})^k + ... + \binom{11}{10}(2x^2)^1(-\frac{1}{x})^{10} + \binom{11}{11}(-\frac{1}{x})^{11}.$$

För att hitta x^{10} termen tittar vi på ”den allmänna termen” som innehåller exponenten k.

$$\binom{11}{k}(2x^2)^{11-k}(-\frac{1}{x})^k = \binom{11}{k}2^{11-k}x^{22-2k}(-1)^k x^{-k} =$$

$$\binom{11}{k}2^{11-k}x^{22-3k}(-1)^k.$$

Vi ska hitta k när x^{22-3k} blir x^{10}. Genom att lösa ekvationen $22 - 3k = 10$ hittar vi k värdet, vilket betyder att när $k = 4$ då blir x^{10}. Nu ska vi hitta koefficienten framför x^{10}.

$$\binom{11}{4}2^{11-4}(-1)^4x^{10} = \binom{11}{4}2^7x^{10} =$$

$$\frac{11!}{(11-4)!4!}2^7x^{10} = 42240x^{10}.$$

Alltså koefficienten för termen x^{10} är 42240.

3.3 Egenskaper hos binomialkoefficienterna

Binomialkoefficienterna har några egenskaper som är användbara vid beräkning av antalet kombinationer. Vi ska formulera tre av dessa som en sats.

Sats 3.8 *Binomialkoefficienterna har följande egenskaper för alla* $n \geq 0$ *och* $0 \leq k \leq n$.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{5}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{6}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \tag{7}$$

Bevis. För att bevisa dessa egenskaper använder vi (2).

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1.$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Insättning av (2) i vänsterledet av (7) ger

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} =$$

$$\frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} =$$

$$n!\left(\frac{1}{(n+1-k)!(k-1)!} + \frac{1}{(n-k)!k!}\right) =$$

$$n!\left(\frac{k}{(n+1-k)!(k-1)!k}+\frac{n+1-k}{(n+1-k)!k!}\right)=$$

$$\frac{n!}{(n+1-k)!k!}(k+n+1-k)=\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}=\binom{n+1}{k}.$$

Därmed beviset är klart.

Alternativt kan (7) *skrivas som* $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$, se [4, s. 65].

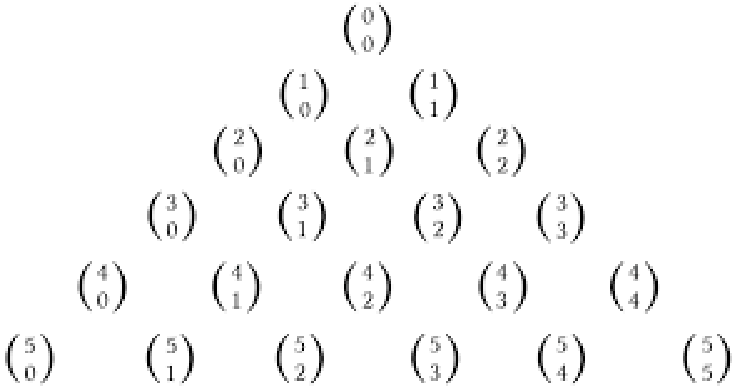
Anmärkning. I (5) finns det ett sätt att välja 0 element bland n, och ett sätt att välja n element bland n. Vänsterledet i (6) anger antalet möjligheter att välja ut k element bland de givna n. Då har vi $n-k$ element kvar. I högerledet väljas $n-k$ element bland n, vilket kan ses som den inte ska ingå i första delmängden. Det är uppenbart att dessa två är lika med varandra. Detta kallas för "symmetriegenskapen" av binomialkoefficienten.

3.4 Pascals triangel

På grund av (7) kan binomialkoefficienterna också beräknas rekursivt. Det kan illustreras med en triangulär tabell där man ställer upp talen $\binom{n}{k}$ i ordningen $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$,...,$\binom{n}{n}$. Tabellen är känd med namnet Pascals triangel.

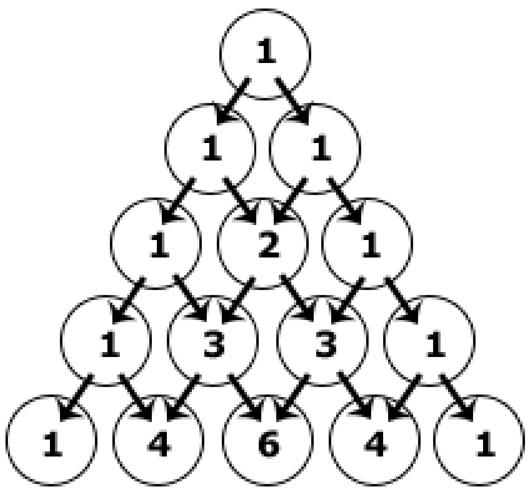
Blaise Pascal levde 1600-talet. Han var en fransk filosof och matematiker. Han tillverkade den första räcknemaskinen och har skrivit ett antal matematikböcker. År 1653 skrev han en avhandling om den aritmetiska triangeln. Därför har den fått namnet Pascals triangel, se [2].

Triangeln ser ut som följande:



(bilden är hämtat från https://en.wikipedia.org/wiki/File:PascalsTriangleCoefficient.jpg)

Om vi beräknar talen $\binom{n}{k}$, då börjar triangeln med en 1 på toppen, varje rad börjar och slutar med 1, enligt (5), varje tal, utom det första och sista i varje rad, ges av summan av de två talen i raden ovanför, enligt (7). Vi får följande bild:



(bilden är hämtat från webbmatte.se)

På toppen i bilden står etta som svarar mot rad noll. I den andra och tredje raden känner vi igen koefficienterna i kvadreringsregeln respektive kuberingsregeln. Den sista raden i bilden innehåller precis koefficienterna i binomialutvecklingen av $(a+b)^4$.

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Eftersom binomialkoefficienterna uppfyller *Sats 3.8*, så följer det att på rad $n+1$ och plats k i Pascals triangel står elementen $\binom{n}{k}$.

Vi vill visa ett exempel som visar egenskapen mellan varje rad i Pascals triangel.

Exempel 4: Visa att summan av elementen i den n-te raden i Pascals triangel är 2^n.

I rad noll står talet 1, summan i rad ett är $1+1 = 2$, i rad två blir $1+2+1 = 4$, i rad tre har vi $1+3+3+1 = 8$ och så vidare. Vi ser att dessa resultat är summor som kan skrivas i potenser av 2, se [4, s. 66,67]. Allmänt ger binomialsatsen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

3.5 Deriveringsregeln för potensfunktioner

Derivatan är ett grundläggande begrepp inom matematisk analys som används för att studera och beräkna funktioners förändring. Derivatan är en funktion som beskriver hur mycket och i vilken riktning funktionens värde förändras i en specifik punkt som tillhör funktionens definitionmängd. Den har många tillämpningar inom matematik, fysik och andra områden. Vi kommer inte fördjupa oss om derivatan i denna uppsats, men vi vill repetera grundläggande begrepp för att härleda derivatan för polynom med hjälp av binomialsatsen.

Vi börjar med att repetera derivatans definition, se [4, s. 187].

Definition 3.9 *Antag att funktionen f är definierad i en omgivning av punkten x_0. Om gränsvärdet*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

*existerar så säges f vara **deriverbar i punkten** x_0 och gränsvärdet kallas för **derivatan**, som betecknas med $D(f(x_0))$.*

Betrakta ett specialfall $f(x)=x^n$, för $n \in \mathbf{N}$. Då är det välbekant att för derivatan gäller att

$$D(x^n)=nx^{n-1}.$$

Funktionens definitionmängd innehåller godtyckligt reella tal.

Vi sätter in funktionen $f(x)=x^n$ i derivatans definition och får

$$D(x_0^n)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}. \tag{8}$$

Utvecklingen av termen $(x_0+h)^n$ med binomialsatsen ger oss

$$(x_0+h)^n = \binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}h + ... + \binom{n}{n-1}x_0h^{n-1} + \binom{n}{n}h^n \quad (9)$$

genom att sätta in (9) i (8) får vi

$$D(x_0^n) = \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}h + ... + \binom{n}{n-1}x_0h^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x_0^n}{h}.$$

Vi kan utnyttja $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ och får

$$D(x_0^n) = \lim_{h\to 0} \frac{h(\binom{n}{1}x_0^{n-1} + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h + \binom{n}{3}x_0^{n-3}h^2 + ... + \binom{n}{n}h^{n-1})}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{1}x_0^{n-1} + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h + \binom{n}{3}x_0^{n-3}h^2 + ... + \binom{n}{n}h^{n-1}\right).$$

Vi ser att alla termer, förutom den första termen, innehåller h, då försvinner alla dessa termer när $h \to 0$. Alltså det som blir kvar är

$$D(x_0^n) = nx_0^{n-1}.$$

Därmed har vi visat med hjälp av binomialsatsen att

$$D(x^n) = nx^{n-1}.$$

Kommentar. Vi har visat derivatan för potensfunktioner med hjälp av binomialsatsen. Det är viktigt att notera att detta kan även visas på helt annat sätt utom binomialsatsen.

Vi sätter in funktionen $f(x) = x^n$ i derivatans definition och får

$$D(x_0^n) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \quad (10)$$

$x^n - x_0^n$ termen kan utvecklas med konjugatregeln, se [5, s. 170] och får

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + ... + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \tag{11}$$

Insättning av (11) i (10) ger oss

$$D(x_0^n) = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + ... + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + ... + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) =$$

$$x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + ... + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}.$$

Då gäller att:

$$D(x_0^n) = nx_0^{n-1}.$$

Därmed har vi visat att derivatan för potensfunktioner kan visas helt oberoende av binomialsatsen.

4 Två bevis av binomialsatsen

I detta avsnitt ska vi visa två bevis av binomialsatsen. Vi har visat att deriveringsregeln kan visas med binomialsatsen och även helt oberoende av binomialsatsen. Vi vill visa att binomialsatsen kan visas utom deriveringsregeln och även med deriveringsregeln. För det första bevisar vi satsen med hjälp av induktion, därefter presenterar vi ett bevis där kvotregeln för derivatan används.

4.1 Induktionsbevis

I de flesta läroböckerna bevisas binomialsatsen med hjälp av induktion. Formellt kan vi bevisa satsen med induktion, jämför med [1, s.178.]

Bevis. Steg 1: *Induktionens bas*

Vi ska kolla om $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ är sann för $n = 1$.

$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = (a+b)$.

Därmed är beviset för basfallet klart.

Steg 2: *Induktionssteget*

Antagande: Antag att likheten (4) gäller för $n = p \geq 1$, dvs $(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k$. Vi ska visa att satsen gäller även för $n = p+1$.

Induktionsantagandet ger

$$(a+b)^{p+1} = (a+b)(a+b)^p = (a+b) \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k =$$

$$a \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k + b \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k =$$

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} b^{k+1}.$$

Vi vill slå ihop summationstecken till en och samma summation, men eftersom vi har olika potenser, inför vi $j = k$ i den första termen ovan och $j = k + 1$ i den andra termen. Vi gör det och får vi följandet:

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} a^{p+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{p+1} \binom{p}{j-1} a^{p+1-j} b^j =$$

$$\binom{p}{0} a^{p+1} + \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j} a^{p+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j-1} a^{p+1-j} b^j + \binom{p}{p} b^{p+1} =$$

$$a^{p+1} + \sum_{j=1}^{p} \left(\binom{p}{j} + \binom{p}{j-1} \right) a^{p+1-j} b^j + b^{p+1}$$

genom tillämpning av sambandet (7) får vi

$$a^{p+1} + \sum_{j=1}^{p} \binom{p+1}{j} a^{p+1-j} b^j + b^{p+1} =$$

$$\sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} a^{p+1-j} b^j.$$

Insättning av $j = k$ ger

$$(a+b)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} a^{p+1-k} b^k.$$

Därmed är induktionssteget visat.

4.2 Ett alternativt bevis av binomialsatsen

Vi vill presentera ett alternativt bevis av binomialsatsen där kvotregeln för derivatan tillämpas, se [8]. (Mer om deriveringsregler se [4, s. 194]).

Bevis. Vi visar först en identitet som leder till (4).

Låt $t \neq -1$ vara ett reellt tal och $k \in \mathbf{N}$. Kvotregeln för derivatan ger

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{(1+t)^n}\right) = \frac{kt^{k-1}(1+t)^n - t^k n(1+t)^{n-1}}{(1+t)^{2n}} =$$

$$\frac{kt^{k-1}}{(1+t)^n} - \frac{nt^k}{(1+t)^{n+1}} =$$

$$\frac{kt^{k-1} - (n-k)t^k}{(1+t)^{n+1}}. \tag{12}$$

Multiplicerar vi (12) med $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ och summerar vi över $k = 0, 1, 2, 3, ..., n$, då får vi

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{t^k}{(1+t)^n}\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{kt^{k-1} - (n-k)t^k}{(1+t)^{n+1}}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)n!}{k!(n-k)!}\frac{t^k}{(1+t)^{n+1}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\frac{t^k}{(1+t)^{n+1}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+1}} = 0.$$

Vi har kommit fram till att derivatan är lika med 0. I [4, s.214] finns en sats som säger

Sats 4.1 *Om funktionen f är deriverbar i intervallet $a < x < b$ och om $f'(x) = 0$ för alla x i detta intervall så är f en konstant funktion.*

(Se beviset [4, s.214])

I detta fall har vi inte ett intervall, eftersom funktionen är inte definierad i -1. Vi kan inte använda satsen direkt, utan måste dela upp intervallet i två intervall, ett intervall där $t > -1$ och ett intervall där $t < -1$. Båda intervallen är obegränsade intervall och derivatan är lika med noll, dvs båda intervallen $t > -1$ och $t < -1$ måste vara konstant. Vi ska ta reda på om det är samma konstant eller inte.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{t^k}{(1+t)^n} \right) = c, \tag{13}$$

för något reellt tal c.

Vi kan bestämma konstanten c på olika sätt. För intervallet $t > -1$ är enklaste att stoppa in $t = 0$.

Om vi tittar på summan, då kan vi se att alla termerna har t som ökar i exponenten. Alla dessa termer där exponenten är större än 0 blir det 0 då $t = 0$, men undantaget för $t^0 = 1$. Då får vi ut att konstanten c är lika med 1.

Insättning av $c = 1$ i (13) ger

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{t^k}{(1+t)^n} \right) = 1,$$

för alla reella tal $t > -1$.

För det andra intervallet då $t < -1$ fungerar inte på samma sätt. Den har inte egen punkt som man kan stoppa in i (13) och bestämma konstanten c. Däremot kan vi titta på gränsvärdet för $t \to -\infty$.

$$\lim_{t\to-\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{t^k}{(1+t)^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lim_{t\to-\infty}\frac{t^k}{(1+t)^n}.$$

Vi har en summa som har ändligt många termer och då har vi t^k i täljaren och även i nämnaren har vi t. Nästan alla termer i täljaren har exponenten mindre än exponenten i nämnaren, då nämnare växer snabbare. Om nämnaren växer snabbare och blir mycket större än täljaren, då kan vi dela med största potens. Då alla dessa termer i täljaren som har exponenten mindre, går mot noll. Det finns bara en term där de är lika i exponenten, då blir gränsvärdet inte noll. När $k = n$ då exponenten är samma, då får vi gränsvärdet lika med 1.

Alltså vi får konstanten

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lim_{t\to-\infty}\frac{t^k}{(1+t)^n}=1,$$

när $t \to -\infty$.

Således är

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k=(1+t)^n \tag{14}$$

för alla reella tal $t \neq -1$.

Vi har visat att (14) gäller för alla reella tal $t \neq -1$. Vad händer om $t = -1$?

Om vi sätter in $t = -1$ i (14), då får vi högerledet $(1 + (-1))^n = 0$.

Vänsterledet blir

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k} + \binom{n}{n}$$

genom tillämpning av sambandet (5) och (7) får vi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] + 1,$$

där

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \binom{n-1}{k} - \sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j \binom{n-1}{j} = -1 + (-1) = -2$$

därmed

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Resultatet blir att vi får noll på båda sidor av (14) när $t = -1$.

Beviset är klart om vi sätter in $t = \frac{a}{b}$ i (14), för $b \neq 0$.

Notera att om vi stoppar in $b = 0$ i binomialsatsen, då ena sidan står det a^n och på andra sidan alla dessa termer som har en faktor b blir det 0. Det finns bara en term det inte finns en faktor b. Det är den allra första termen a^n. Då får vi båda sidor samma sak, dvs $a^n = a^n$.

$$(1 + \frac{a}{b})^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{a}{b})^k$$

$$(a + b)^n = b^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{a}{b})^k$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}.$$

Vilket skulle visas.

5 Laplacetransform och grundläggande egenskaper

I detta kapitel definierar vi Laplacetransformen och diskuterar dess egenskaper. Vi kommer att visa några exempel där vi använder Laplacetransformen samt visa hur man löser linjära ordinära differentialekvationer med Laplacetransformen. Vidare kommer vi att tillämpa Laplacetransformen för att bevisa binomialsatsen på ännu ett annat sätt. Detta kapitel hänvisas till referenser [6] och [9].

Laplacetransformen används för att lösa differentialekvationer och integralekvationer. I Laplacetransformen stoppar man in en funktion $f(t)$ för att få en ny funktion $\mathcal{L}[f](s)$, se [9.]

Definition 5.1 *Om $f(t)$ är en funktion, så definieras Laplacetransformen $\mathcal{L}[f](s)$ genom*

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

för alla komplexa tal s där integralen konvergerar.

Laplace transformen avbildar funktioner i $\mathbf{R}^+$ till funktioner i delmängder av det komplexa talplanet. Laplace transformen existerar inte alltid. För att Laplace transformen ska existera måste f vara integrerbar på ändliga intervall samt får inte växa för snabbt då $t \to \infty$ (då blir integralen divergent). $\mathcal{L}f(t)$ existerar om t. ex. f är kontinuerlig och växer exponentiellt.

Vi anger två av egenskaperna av Laplace transformen.

Lemma 1. Laplacetransformen är linjär, dvs för godtyckliga tal a och b och funktioner f och g gäller

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)],$$

om alla Laplacetransformer antingen integrerbar eller existerar.

Bevis.

$$\int_0^\infty (af(t)+bg(t))e^{-st}dt = a\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = a\mathcal{L}[f(t)]+b\mathcal{L}[g(t)].$$

Lemma 2. Laplace transformen är inverterbar, dvs om vi känner Laplace transformen för någon funktion $f(t), t \geq 0$, då kan vi återskapa funktionen.

$$f = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}[f]).$$

Eftersom f är en kontinuerlig på $t \geq 0$, så kan vi beräkna f av Laplacetransformen.

Vissa funktioner saknar Laplacetransform. Till exempel $f(t) = e^{t^2}$ är en funktion som saknar Laplacetrasform, se [9]. Kvadratkompletering, se [4, s.17], i exponenten ger

$$\int_0^\infty e^{t^2}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{t^2}e^{-st}e^{\frac{s}{2}}e^{\frac{-s}{2}}dt = e^{\frac{-s^2}{4}}\int_0^\infty e^{(t-\frac{s}{2})^2}dt.$$

Eftersom $e^{(t-\frac{s}{2})^2} \to \infty$ när $t \to \infty$, kommer integralen att vara divergent för alla s.

5.1 Några Laplacetransformer

Vi vill visa några exempel på Laplacetransformen för en funktion, jämför med [6].

Exempel 5: Betrakta funktionen $f(t) = 1$.

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\cdot 1\cdot dt = \left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_{t=0}^\infty =$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}\frac{1}{-s} - \left(\frac{1}{-s}e^{-s\cdot 0}\right) = \frac{1}{s}$$

för alla komplexa tal $s \neq 0$ med konvergensområdet $Re(s) > 0$. Eftersom funktionen är kontinuerlig, då konvergerar den generaliserade integralen, som är väldefinierad och har ett gränsvärde då $t \to \infty$, enligt *definition 4* i [4, s.311].

Exempel 6: Betrakta funktionen $f(t) = t$. Antag att s är ett komplex tal.

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty te^{-st}dt =$$

$$\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt =$$

$$\left[-\frac{1}{s}te^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_{t=0}^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{s^2}, s > 0 \\ \text{existerar inte}, \quad \text{annars.} \end{cases}$$

Om $Re(s) \leq 0$, då $e^{-st} \to \infty$ när $t \to \infty$, då blir integralen odefinierad. Laplacetransformen för $f(t) = t$ existerar i det högra halvplanet $Re(s) > 0$, för sådana s är $\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^2}$.

Exempel 7: Betrakta funktionen $f(t) = t^k$, där k är ett heltal. Antag att $Re(s) > 0$.

$$\mathcal{L}[f^k](s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty t^k \cdot e^{-st}dt.$$

Vi kan använda partiell integration $\int fg' = fg - \int f'g$, genom att sätta in $f = t^k, f' = kt^{k-1}$ samt $g' = e^{-st}, g = \frac{-e^{-st}}{s}$.

$$\mathcal{L}[f^k](s) = \left[\frac{-t^k e^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty kt^{k-1}\frac{-e^{-st}}{s}dt = 0 + \frac{k}{s}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-st}dt.$$

För integralen $\int_0^\infty t^{k-1}e^{-st}dt$ kan användas definitionen av Laplacetransformen, där funktionen $f(t) = t^{k-1}$ i detta fall. Sätter vi in i definitionen så får vi

$$\mathcal{L}[t](s) = \frac{k}{s}\mathcal{L}[t^{k-1}].$$

Vi tittar nu på $\mathcal{L}[t](s)$ för olika värden på k, för $Re(s) > 0$.

$k = 1$

$$\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[t^0] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$k = 2$

$$\mathcal{L}[t^2](s) = \frac{2}{s}\mathcal{L}[t^1] = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

$k = 3$

$$\mathcal{L}[t^3](s) = \frac{3}{s}\mathcal{L}[t^2] = \frac{3}{s} \cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{3!}{s^4}$$

$k = 4$

$$\mathcal{L}[t^4](s) = \frac{4}{s}\mathcal{L}[t^3] = \frac{4}{s} \cdot \frac{3!}{s^4} = \frac{4!}{s^5}$$

$$\mathcal{L}[t^k](s) = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

Exempel 8: Betrakta funktionen $f(t) = e^{\alpha t}$, där $\alpha \in \mathbf{C}$.

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-st} dt =$$

$$\int_0^\infty e^{(\alpha - s)t} dt =$$

$$\left[\frac{1}{\alpha - s} e^{(\alpha-s)t}\right]_{t=0}^\infty = \begin{cases} \frac{1}{s-\alpha}, & Re(s) > Re(\alpha) \\ \text{existerar inte}, & \text{annars}. \end{cases}.$$

Exempel 9: Betrakta funktionen $f(t) = \cos(at)$, där $a \in \mathbf{R}$.

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \int_0^\infty \cos(at) e^{-st} dt =$$

$$[PI] = \left[\int f'g = fg - \int fg', f' = \cos(at), f = \frac{\sin(at)}{a}, g = e^{-st}, g' = -se^{-st}\right] =$$

$$\left[\frac{\sin(at)}{a} e^{-st}\right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty \frac{se^{-st}\sin(at)}{a} dt =$$

$$[PI] = \left[f' = \sin(at), f = \frac{-\cos(at)}{a}, g = e^{-st}, g' = -se^{-st} \right] =$$
$$\frac{s}{a}\left(\frac{-1}{a} \left[\cos(at)e^{-st}\right]_{t=o}^{\infty} - \frac{s}{a}\int_0^{\infty} \cos(at)e^{-st}dt \right) =$$
$$\frac{s}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{a}\int_0^{\infty} \cos(at)e^{-st}dt \right) = \frac{s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2}\mathcal{L}[\cos(at)](s).$$

Vi har fått

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2}\mathcal{L}[\cos(at)](s)$$
$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) + \frac{s^2}{a^2}\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{s}{a^2}.$$

Vilket ger

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{s}{s^2 + a^2},$$

$Re(s) > 0$.

Dessa resultat kan skrivas som en tabell.

Tabel 1

$f(t)$	1	t^k	e^{at}	$\sin(at)$	$\cos(at)$
$\mathcal{L}[f](s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{a^2+s^2}$	$\frac{s}{a^2+s^2}$

Vi vill visa att det är möjligt att utgående från Laplacetranformer bestämma funktionen $f(t)$. Antag att vi känner Laplacetransformen $\mathcal{L}[f](s-a)$ av $f(t)$ för något konstant a, se [9].

$$\mathcal{L}[f](s-a) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = \int_0^{\infty} e^{at}f(t)e^{-st}dt,$$

$$e^{at}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}[f](s-a).$$

Detta kallas för ”första förskjutningslagen”.

Exempel 10: Betrakta

$$\sin(bt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{b}{s^2 + b^2}.$$

Första förskjutningslagen ger

$$e^{at}\sin(bt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}.$$

5.2 Laplacetransformen av en derivata

Nu vill vi undersöka Laplacetransformen av derivatan för någon funktion $f(t)$, se [6]. Dessa egenskaper används för att lösa ordinära differentialekvationer.

Sats 5.2 *Låt $f(t)$ vara en kontinuerlig funktion när $t \geq 0$, och har en derivata $f'(t)$ som är styckvis kontinuerlig och av exponentiell ordning när $t \geq 0$, då gäller att*

$$f'(t) \overset{\mathcal{L}}{\to} s\mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

Bevis. Partiell integration (PI) ger

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt =$$

$$[PI] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \begin{bmatrix} f'(t) = f'(t) & g(t) = e^{-st} \\ F(t) = f(t) & g'(t) = -se^{-st} \end{bmatrix} =$$

$$\left[F(t)g(t) - \int_0^\infty F(t)g'(t)dt\right] =$$

$$\left[e^{-st}f(t)\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty f(t)se^{-st}dt =$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) - (e^{-s\cdot 0})f(0) + \int_0^\infty f(t)se^{-st}dt = -f(0) + s\mathcal{L}[f](s),$$

för $Re(s) > 0$.

Därmed har vi visat att

$$f'(t) \overset{\mathcal{L}}{\to} s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$$

och beviset är klart.

Allmänt gäller (utan bevis)

$$\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt = s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=1}^{n} s^{n-j}f^{(j-1)}(0).$$

Exempel 11: Vi vill visa ett exempel där vi löser en ordinära differentialekvation (ODE) med Laplacetransformen. ODE för en obekant funktion f kan man skriva om med Laplacetransformen till en ekvation för $\mathcal{L}[f]$ och sedan lösa ut $\mathcal{L}[f]$. Därefter kan vi använda *Tabell 1* för Laplacetransformer för att bestämma f.

Betrakta ODE med begynnelsevillkoret:

$$f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = t$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, t \geq 0.$$

Vi använder Laplacetransformen för denna ekvation och får (för säkerhets skull för att inte blanda ihop skriver vi ner varje term separat):

$$\mathcal{L}[f''](t) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)$$

(där används $s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=1}^{n} s^{n-j} f^{(j-1)}(0)$, då $n = 2, j = 1, 2$)

$$3\mathcal{L}[f'](t) = 3(s\mathcal{L}[f](s) - f(0))$$

$$\mathcal{L}[f](t) = 2\mathcal{L}[f](s).$$

Nu kan vi skriva hela ekvationen med termer av Laplacetransformer:

$$(s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)) - 3(s\mathcal{L}[f](s) - f(0)) + 2\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^2}.$$

Nu använder vi villkoren och får

$$s^2\mathcal{L}[f](s) - 1 - 3s\mathcal{L}[f](s) + 2\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[f](s)(s^2 - 3s + 2) = 1 + \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2-3s+2)} = \frac{s^2+1}{s^2(s-1)(s-2)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{5}{4(s-2)}.$$

Vi använder *Tabel 1* för några Laplacetransformer och får vi den sökta funktionen

$$f(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t - 2e^t + \frac{5}{4}e^{2t}$$

för $t \geq 0$.

6 Bevis av binomialsatsen med Laplacetransformen

Vi vill bevisa binomialsatsen nu även genom att använda Laplacetransformen.

Bevis. Vi börjar med att visa en formel för Laplacetransformen av $(1+t)^n$ för $Re(s) > 0$, därefter bevisar vi satsen med induktion,

$$\mathcal{L}[(1+t)^n](s) = \int_0^\infty (1+t)^n e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{s^{k+1}}. \tag{15}$$

Steg 1: *Induktionens bas*

Vi skall kolla om (15) är sann för $n = 1$.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{1!}{(1-0)!} \frac{1}{s^{0+1}} + \frac{1!}{(1-1)!} \frac{1}{s^{1+1}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

Därmed beviset är klart.

Steg 2: *Induktionssteget*

Antagande: Antag att (15) gäller för $n = p \geq 1$, dvs

$$\mathcal{L}[(1+t)^p](s) = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{(p-k)!} \frac{1}{s^{k+1}}. \tag{16}$$

Vi ska visa att (15) gäller även för $n = p + 1$.

$$\mathcal{L}[(1+t)^{p+1}](s) = \int_0^\infty (1+t)^{p+1} e^{-st} dt = [PI] =$$
$$\left[-\frac{1}{s}(1+t)^{p+1} e^{-st} \right]_{t=0}^{\infty} + \frac{p+1}{s} \int_0^\infty (1+t)^p e^{-st} dt =$$
$$\frac{1}{s} + \frac{p+1}{s} \mathcal{L}[(1+t)^p](s). \tag{17}$$

Insättning av (16) i (17) ger

$$\mathcal{L}[(1+t)^{p+1}](s) = \frac{1}{s} + \frac{p+1}{s}\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{(p-k)!}\frac{1}{s^{k+1}}.$$

Multiplicerar vi in $\frac{p+1}{s}$ och byter ut k mot $k-1$.

$$\mathcal{L}[(1+t)^{p+1}](s) = \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^{p+1}\frac{(p+1)!}{(p+1-k)!}\frac{1}{s^{k+1}} =$$

$$\sum_{k=0}^{p+1}\frac{(p+1)!}{(p+1-k)!}\frac{1}{s^{k+1}}.$$

Därmed är induktionssteget visat.

Tillämpning av *Lemma* 2 ger

$$(1+t)^n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{s^{k+1}}\right\}(t) =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{k+1}}\right\}(t).$$

Således

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k, \tag{18}$$

för $t > 0$. Beviset är klar om vi ersätter $t = \frac{a}{b}$ i (14) (se sida 25).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^k b^{n-k}.$$

Vilket skulle visas.

7 Binomialsatsen i gymnasiekurs

Avslutningsvis skall vi granska hur det ser ut med binomialsatsen i gymnasiekurs 5. Vi skall utifrån vad vi har lärt oss om binomialsatsen jämföra med kurslitteraturen för gymnasiekurs 5.

Syftet med gymnasiekurs är att kunna lösa matematiska problem och kunna lösa uppgifter utan och med verktyg. Enligt det centrala innehållet för matematik 5 ($Lgr11$) ska i kursen ingå (här tas upp bara de punkter som är kopplade till temat i denna rapport)

- begreppen permutation och kombination
- metoder för beräkning av antalet kombinationer och permutationer, såväl med som utan digitala verktyg, samt motivering av metodernas giltighet.

(se Skolverket.se Läroplan gymnasieskolan matematik)

Vi ska ta reda på vad som lärs ut i gymnasiekurs 5 i olika litteratur.(I denna rapport använder vi referenser 11 och 12.)

Enligt det centrala innehållet finns binomialsatsen inte med i läroplanen, men det finns med i skolböckerna. De flesta skolböckerna börjar med kombinatorik och några generella begrepp som används för att lösa kombinatoriska problem, bland annat additions- och multiplikationsprincipen.

Om vi börjar med att kolla hur kurslitteraturen förklarar begreppen $permutationer$, $kombinationer$ och $fakultet$, då ser vi att de har samma innehåll som vi definierat i början av den här rapporten, dock något förenklad sätt. Det är värt att notera att i boken [12, s. 11-12] formuleras additions- och multiplikationsprincipen, vilket gör att läsaren förstår hur man skall komma fram till permutationer. I [12, s. 13] finns det ett antal uppgifter som handlar om just additions- och multiplikationsprincipen.

I en genomgång av kurslitteraturen för gymnasiekurs 5 får vi läsa om hur man kan lösa problem med hjälp av binomialsatsen. I de flesta kurslitteraturerna börjar man med att repetera kvadrerings- och kuberingsreglerna, se [11, s.75] och [12, s.30]. Därefter ges en förklaring på hur bör man tänka om man multiplicerar till ex. $(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$, hur kan bestämmas koefficienterna framför varje term och hur många termer som kommer att få, vilket stämmer även med vad vi har skrivit i denna rapport.

I gymnasieboken [12, s. 31] formuleras satsen i utvecklad formen $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n}b^n$, jämförelse med boken [11, s. 76], där visas hur man kan skriva sasten på ett kortare sätt med summationstecken, vilket stämmer ju även bra på högre nivå. Efter formulering av satsen visas hur man kan uppställa binomialkoefficienterna i en tabell som kallas för Pascals triangel. Det finns även uppgifter som handlar om just hur man kan använda Pascals triangeln för de enklaste binomialkoefficienterna.

Uppgiften ser ur som följande:

Utveckla med hjälp av Pascals triangel

$(a + b)^3$.

Fortsättningsvis förklaras det vilken samband det finns mellan termerna i Pascals triangel, vilket stämmer även bra på högre nivå. Gymnasieboken [12, s.31] ger en tydligt förklaring och bevis om Pascals termer och dess samband, medan boken [11, s. 76] formulerar inte dess samband, utan visar med exempel om hur kan man välja k stycken element bland n. I [12, s.22] och [11, s. 69] finns det uppgifter som handlar om just kombinationer som mest handlar om att på hur många sätt kan man välja k stycken objekt bland de giva n stycken.

Uppgiften ser ut som följande:

I en skål ligger fyra kulor med olika färger. På hur många sätt kan man dra två kulor ur skålen

a) om ingen hänsyn tas till ordningen

b) om hänsyn tas till ordningen?

Det beskrivs genom exempel om hur ordningen spelar roll för att få fram en lösning.

I [12, s.34] och [11, s.77] beskrivs det även att vissa uppgifter kan lösas utan verktyg. Uppgiften ser ut som följande:

Visa att

$$\binom{n}{3} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}.$$

Slutligen har gymnasieboken inte bevisat binomialsatsen, eller påpekat hur binomialsatsen kan bevisas. I denna rapport beskrivs det hur man kan bevisa satsen med olika metoder.

References

[1] Johan Johansson, Stefan Lemurell *Algebra och diskret matematik*

[2] https://byjus.com/maths/pascals-triangle/history

[3] Rikard Bogvad, Qimh Xantcha 2016, *Algebra 1*

[4] Arne Persson, Lars-Christer Böiers, *Analys i en variabel*

[5] Paul Vaderlind, 2015 *Matematiska utmaningar*

[6] http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve100/1617/Laplacetransformen.pdf

[7] Jitender Singh, 2016 *An alternate proof of the binomial theorem. The American Mathematical Monthly.* 123:9, 940.

[8] Jitender Singh, 2017 *Another proof of the binomial theorem. The American Mathematical Monthly.* 124:7, 658.

[9] http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve015/0506/laplaceTransf.pdf

[10] https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731

[11] Atilla Szabo, Niclas Larson, Gunilla Viklund, Daniel Dufaker, Mikael Marklund, 2013 *Matematik origo 5*

[12] Lena Alfredsson, Kajsa Bråting, Patrik Erixon, Hans Heikne, 2013 *Matematik 5000*