SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Projektiv geometri

av

Sofia Killander

2020 - No K35

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Projektiv geometri

Sofia Killander

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2020

Abstract

This report focuses on the basics of projective geometry and the relationship between art and mathematics. We will learn how projective geometry grew into a unique part of mathematics and who the men who introduced, practised and founded it were. The connection between geometry and art is of great importance in this report, but also natural phenomenon such as shadows and reflections of the sun will be mathematically viewed. We will discuss the differences between Euclidean and projective geometry and observe where they differ. The report includes different mathematical techniques practiced by artists and architects, where for instance central projection, vanishing points and line and how to draw a checkered floor are included. Desargues theorem will be formulated and proved in three dimensions. The last chapter focuses on the dual relation between points and lines as well as the duality within geometric figures.

The report is written mainly with knowledge from "*Åtta kapitel om geometri*" written by Anders Tengstrand and *"Centralprojektion och perspektiv"* written by Torbjörn Tambour. All figures are drawn by the author of this report, Sofia Killander, in Google docs.

The report is written in Swedish.

Keywords: Projective geometry, Desargues theorem, art, mathematics

Förord

Detta arbete utgör ett examensarbete vid Stockholms universitet och behandlar grunderna inom projektiv geometri.

Jag vill rikta ett tack till Torbjörn Tambour, som verkat som handledare för det här arbetet.

Innehållsförteckning

1 Inledning

Människan har alltid varit intresserad av att spara upplevelser och berättelser i form av bilder, från forntidens grottmålningar, bläddrandet i gamla fotoalbum eller nutidens instagrammande. Avbildningar har minst sagt spelat en viktig roll för att möjliggöra överförandet av berättelser om människans historia, men även för att skapa historia. Ritningar och anteckningar tillhörande olika byggnader eller uppfinningar är även dem typer av avbildningar. Men hur gör man egentligen en verklighetstrogen avbildning? Hur får vi ritningen att överensstämma med idén? Det är med hjälp av matematiken! Mer specifikt det vi kommer behandla i det här arbetet: Den projektiva geometrin.

1.1 Historia

Trots att den projektiva geometrin har sitt tidigaste skede då människan först försökte avbilda verkligheten på en plan yta, har perspektivläran ingen tydlig grundare eller start utan har vuxit fram över flera hundra år. Läran bottnar alltså i måleriet, men att det blev en egen geometrisk gren inom matematiken blev självklart först på 1800-talet.

Det var framförallt Gaspard Monge (1746-1818) tillsammans med sin elev Jean-Victor Poncelet (1788-1867) samt Charles Julien Brianchon (1783-1864) som utvecklade den projektiva geometrin på allvar runt år 1800. Monge arbetade som både lärare och forskare, och var dessutom administratör vid den franska revolutionen.

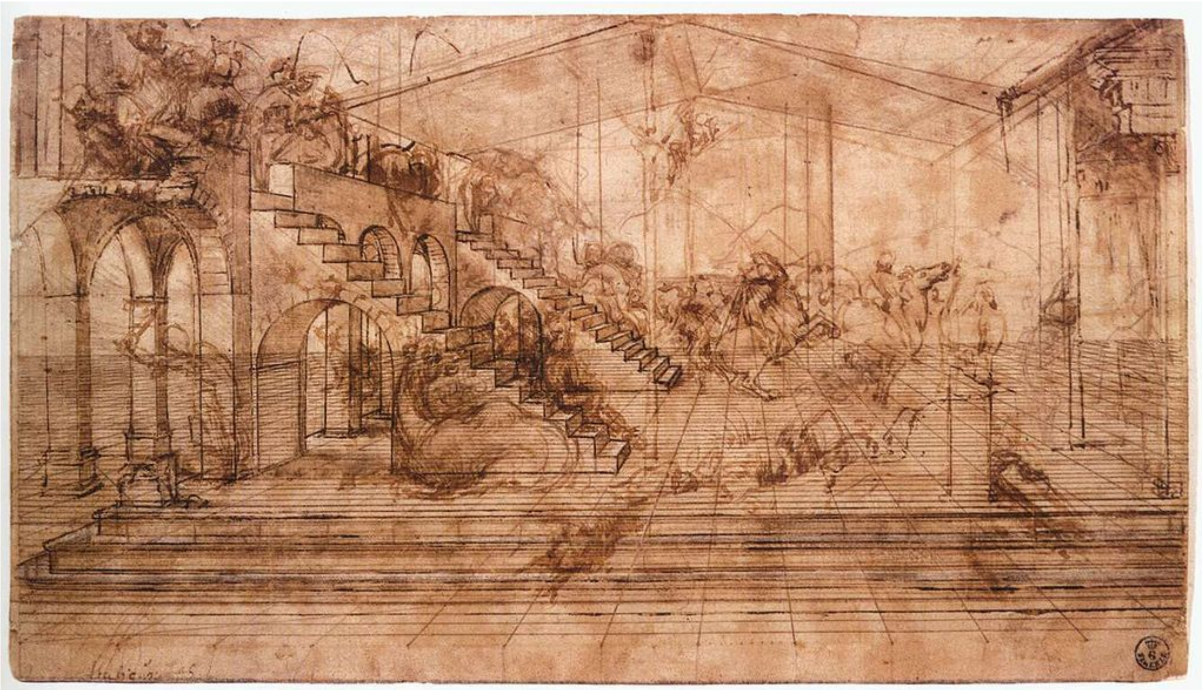
Men dessa män var långt ifrån ensamma. Första gången en geometriskt projektiv term används i tryck är i Leon Battista Albertis (1404-1472) verk *Della pittura* (= Om målarkonsten) utgiven år 1436. Där beskrivs bland annat metoder för *centralperspektivet*, som vi kommer behandla senare i den här uppsatsen. Alberti tar dock inte åt sig äran av upptäckten av centralperspektivet, utan i Della pittura hänvisar han upptäckten till den italienska arkitekten Filippo Brunnelleschi (1377-1446). Alberti själv var likväl många andra stormän under den tiden en mångsysslare och arbetade både som arkitekt, målare, skulptör och musiker.

En annan konstnär som intresserade sig för geometri var Piero Della Francesca (1415-1492). Han skrev boken *De prospectiva pingendi* (= Om centralperspektivet i måleriet), men det kom dock aldrig i tryck först än år 1899. Trots att boken inte kom i tryck först än senare, användes hans teorier långt tidigare, bland annat av den välkända Leonardo Da Vinci (1452-1519). Även han försökte sig på ett matematiskt verk, men likt många av hans verk blev det aldrig färdigställt.

Även Albrecht Dürer (1471-1528) kom i kontakt med bland annat Francescas verk och flera av hans teckningar. Dürer skrev senare själv ett arbete som behandlar geometri inom konsten med hjälp av framförallt passare och linjal. Från studierna av centralperspektivet utvecklades en ny form av geometri - den projektiva geometrin.

Mellan Dürer och då projektiv geometri blev självständig på 1800-talet fortsatte flera fransoser att utveckla den projektiva geometrin. Däribland den kanske mer välkända matematikern Gérard Desargues (1591-1661) som utöver matematiken arbetade som arkitekt och ingenjör inom krigsmakten, samt sin elev Blaise Pascal (1623-1662). Senare i uppsatsen kommer vi behandla Desargues sats som har en betydande roll för den projektiva geometrin.

Projektiv geometri var alltså från början ett redskap inom konsten men utvecklades senare till en egen gren inom geometrin.



Figur 1.1 *Ett av Leonardo Da Vincis ofullständiga verk. Här ser vi flera stödlinjer som hjälper konsten att bli verklighetstrogen.* [1]

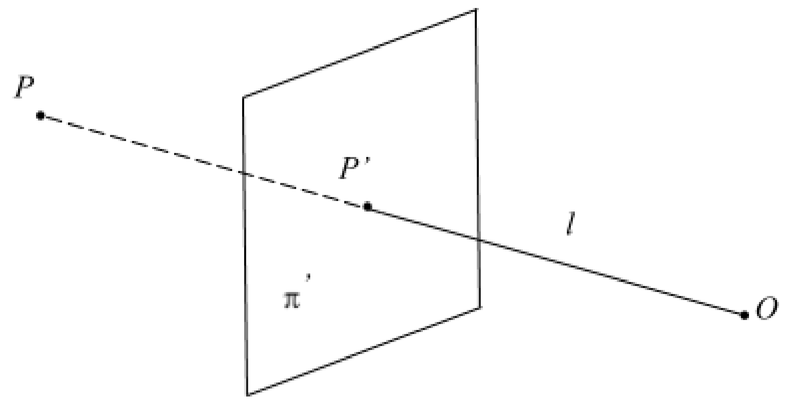
[1] https://sv.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci#/media/Fil:Leonaredo,_studio_per_l'adorazione_dei_magi,_uffizi.jpg

2 Vad är projektion?

Solkatter som klär golvet en solig dag, skuggor eller att måla det vi ser i tre dimensioner till ett papper i två dimensioner är exempel på projektion. Projektion handlar alltså om avbildning och i linjär algebra har vi stött på projektion exempelvis då vi projicerar en vektor på ett plan. Som tidigare nämnt var Brunelleschi först med att utveckla metoder för centralperspektivet och det är just centralperspektivet som är grunden för geometrisk projektion.

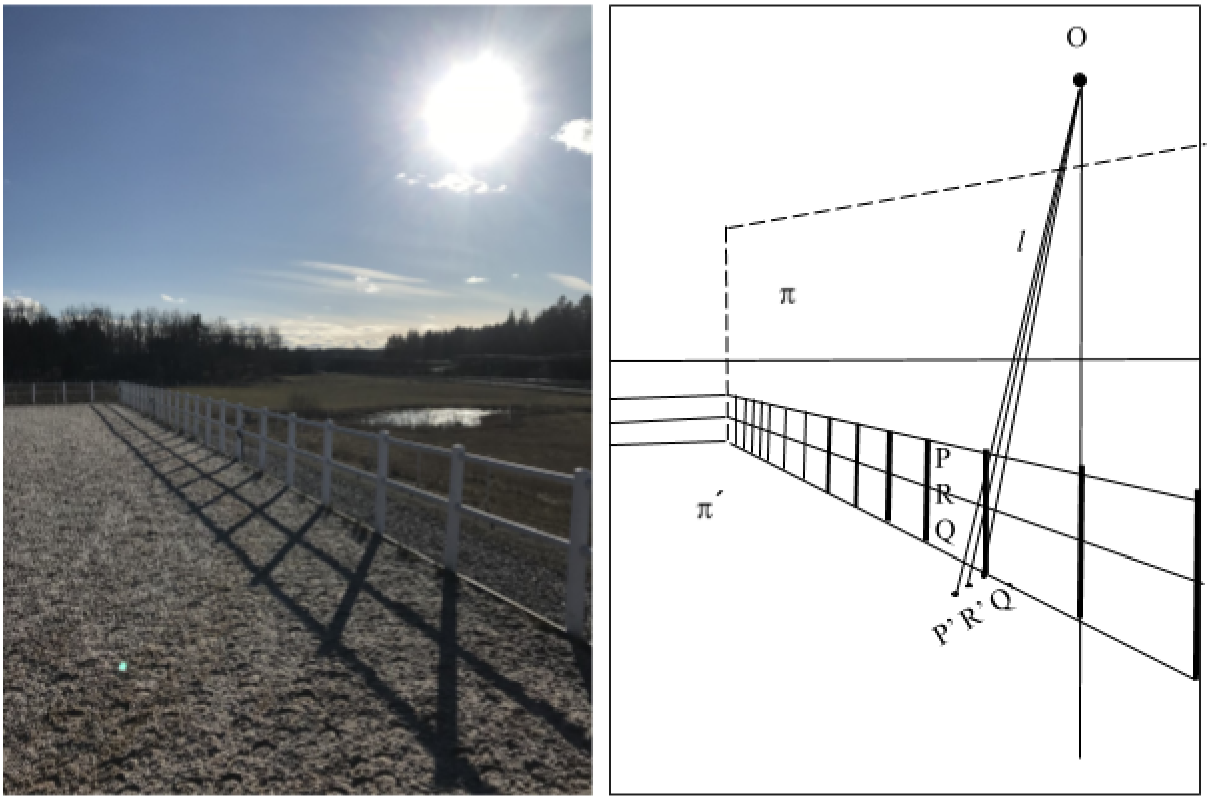
2.1 Centralprojektion

I Figur 2.2 ser vi hur solens strålar träffar ett staket och avbildar skuggan av det på ridbanan. Detta är ett exempel på det vi i matematiken kallar *centralprojektion*.



Figur 2.1 *Centralprojektion av en punkt P på ett plan* π'.

Se Figur 2.1. Vi definierar centralprojektion på ett plan π' med avseende på en punkt *O*. Då en konstnär målar är ögat *O* och målarduken planet π'. (I Figur 2.2 är π' ridbanan och solen *O*.) Låt *P* vara en punkt i rummet och *l* vara linjen som går genom *O* och *P*. Linjen *l* skär då planet π' i en annan punkt *P'*. *P'* kallas centralprojektionen av *P* på π' med avseende på *O*. Punkten *O* kallas *perspektivcentrum* och planet π' kallas *projektionsplan*. Om *l* inte skär planet π' är *l* parallell med π' och det är inte möjligt att projicera *P* på π'. I Figur 2.1 ligger *P* bakom *P´* från *O* sett, men *P* kan även befinna sig mellan *O* och *P´*.



Figur 2.2 *Bilden till höger är en förenklad version av bilden till vänster som illustrerar centralprojektion av ett staket som projicerats till en skugga.*

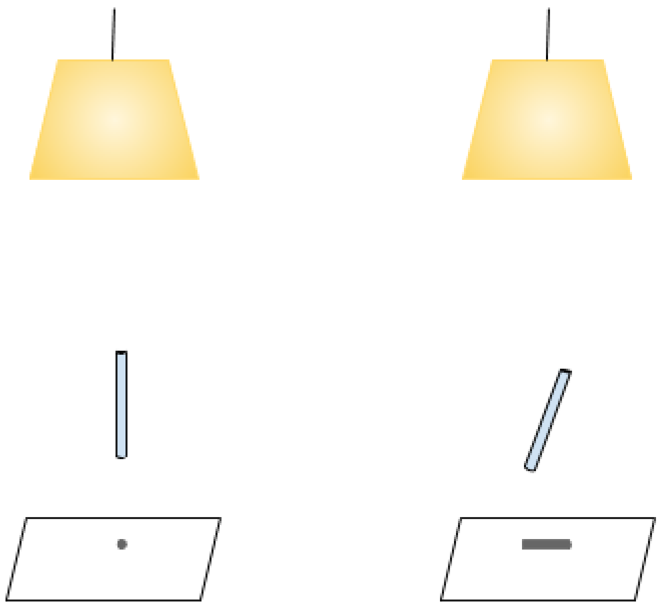
I Figur 2.2 ser vi skuggan på ridbanan utgöra projektionen av staketet från ett plan π till ett annat plan π' utifrån perspektivcentrum *O*, solen. Vi behandlar solstrålarna som räta linjer, vilka skär π och π'. Låt punkterna *P, Q* och *R* ligga på en staketstolpe *s.* Varje punkt i respektive staketstolpe centralprojiceras till π'. Alltså projiceras *P, Q* och *R* till de nya punkterna *P´, Q´* samt *R´* som bildar projektionen av *s,* säg *s´*.

Vi säger att punkterna *P* och *P’* är *perspektiviska* med avseende på *O*. På motsvarande sätt är de räta linjerna *s* och *s’* perspektiviska med avseende på *O*.

Om vi studerar skuggan av alla staketstolparna var för sig, ser vi att de bildar olika vinklar mot skärningen av planen π och π'. Dessutom är inte heller projektionen av samma längd. Det här ska vi titta vidare på i nästa avsnitt, där vi ska granska vilka egenskaper som bevaras vid projektion.

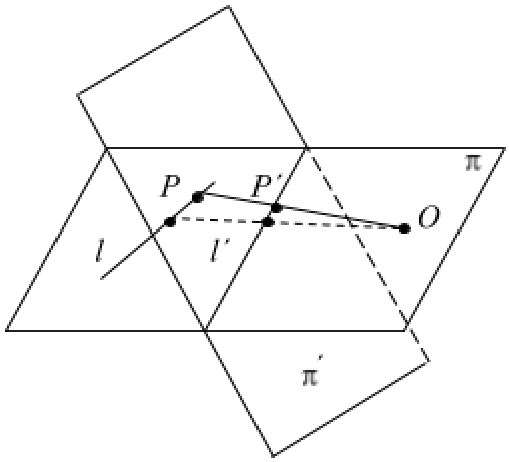
2.2 Projektiva egenskaper

Bilden av en linje vid centralprojektion är en *linje* eller en *punkt*. Fallet då en linje l projiceras på en punkt P' sker då l går genom perspektivcentrum O. Vi använder oss av skuggan av en penna för att förstå egenskapen: Låt en taklampa vara O, pennan vara vår linje l och ett vitt papper på ett bord vara ett plan π'. Då pennan hålls rakt under taklampan, O, samt rakt ovanför pappret, π', kommer skuggan endast bli en punkt på pappret. Då pennan vrids blir projektionen av pennan en linje. Se Figur 2.3



Figur 2.3 *Skuggan av en penna visar hur projektion av en linje blir antingen en linje eller en punkt.*

Med hjälp av Figur 2.4 ska vi visa då projektionen av en linje är en linje. Låt en linje l vara ickeparallell med ett plan π', perspektivcentrum O ligga utanför π' samt antag att l inte går genom O. (Minns att om l går genom O blir projektionen av l en punkt.) Planet som innehåller l och O kallar vi π och låter l' vara skärningslinjen mellan π och π'. Låt vidare P vara en punkt på l samt dra linjen OP. Då skär OP π' i en punkt P', men P' ligger ju även i π eftersom linjen OP ligger i π. P' ligger alltså i skärningen mellan π' och π, alltså ligger P' på l'. På liknande sätt kan vi dra flera linjer (likt den streckade linjen i Figur 2.4), som ger nya punkter på l'. Projektionen av l är alltså l'.

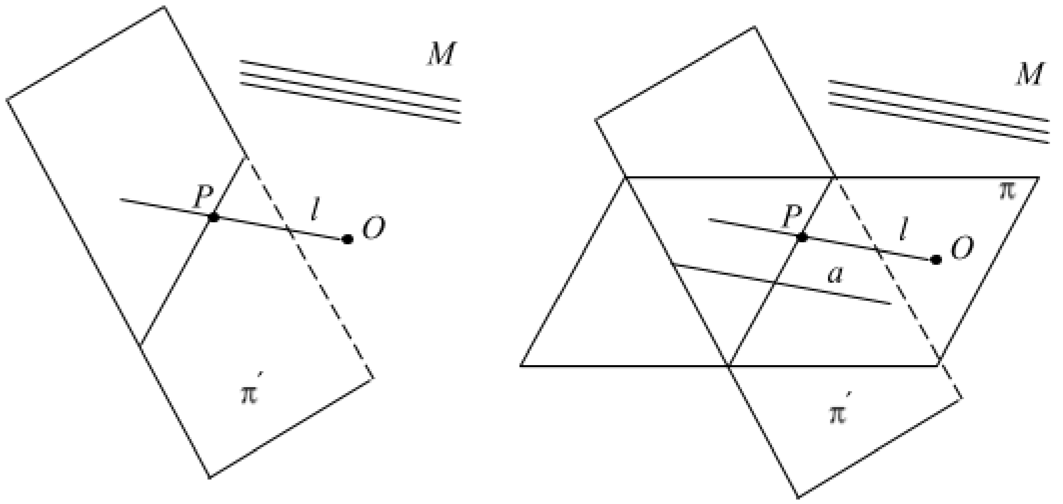


Figur 2.4 *Projektion av en linje till en linje.*

Vi ska nu undersöka vad som händer med parallella linjer under projektion i Figur 2.5. En mängd parallella linjer kallas ett *linjeknippe.* Låt M vara ett linjeknippe som är ickeparallellt med ett projektionsplan π' .Låt vidare en linje l vara parallell med linjerna i M samt gå genom O. Om l skär π' i punkten P kommer också *projektionen av samtliga linjer i M gå genom P.* Se Figur 2.5 till vänster. Med hjälp av figuren till höger ska vi nu visa påståendet.

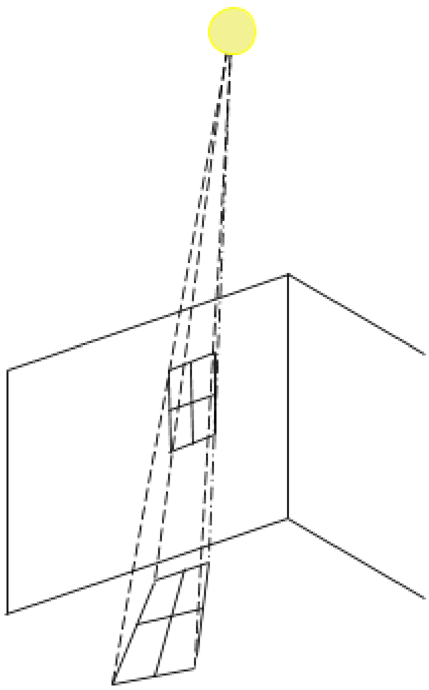
Låt a vara en av linjerna i M som varken sammanfaller med l eller går genom O. Planet som innehåller O och a benämner vi π. Det följer att även l ligger i π eftersom O ligger på l samt att l är parallell med a. Punkten P (centralprojektionen av l på π') ligger alltså i både π och π' och vi vet från Figur 2.4 att projektionen av a på π' är skärningslinjen mellan π och π'. Men på skärningslinjen ligger ju P. Alltså kommer projektionen av a gå genom P. Då vi väljer nya linjer från M ser vi på samma vis hur de alla kommer gå genom P. Parallellitet bevaras alltså inte under projektion, utan projektionerna av parallella linjer går alltid genom en punkt.

Om linjerna i M skulle vara parallella med projektionsplanet är dock projektionen av linjerna också parallella linjer.



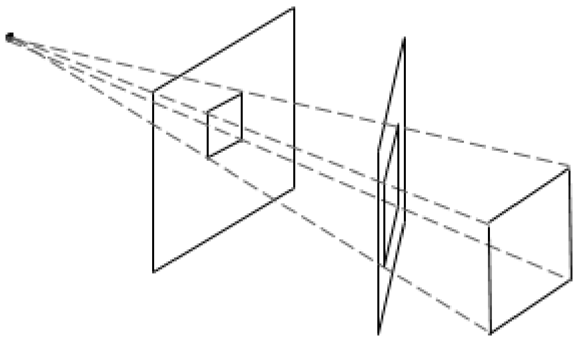
Figur 2.5 *Parallellitet bevaras i regel inte under projektion.*

Då vi jämför Euklidisk och projektiv geometri ser vi fler skillnader än likheter. Då solen skiner in genom ett runt fönster bildas en solkatt som blir mer oval än en rund cirkel samt ett rektangulärt fönster behåller inte de räta vinklarna i hörnen då det projiceras på golvet. Om något av fönsterna har fönsterspröjs kommer skärningen projiceras i solkatten. Se Figur 2.6.



Figur 2.6 *En solkatt av ett fönster med spröjs.*

Solkatten kommer vandra längs golv och väggar beroende på solens läge, där solen är perspektivcentrum. Hur ett objekt projiceras beror på alltså perspektivcentrum *O* men också på projektionsplanet. I Figur 2.7 illustreras hur en projektion beror på projektionsplanet.



Figur 2.7 *Projektionen från O av ett objekt genom till olika plan.*

2.3 Konst och projektion

"Och eftersom geometri är den rätta grunden för allt måleri, har jag beslutat undervisa i dess grunder och principer för alla ynglingar som förivrar konsten…"

Vi låter citatet av Albrecht Dürer i en artikel från 1965 skrivet av Erwin Panofsky inleda avsnittet där vi nu ska sammanfläta konsten och matematiken.

I Figur 2.2 i kapitel 2.1 om centralprojektion ser vi hur matematiken lever i ett fotografi. Då ett foto tas bakom kameralinsen slipper vi fundera alltför ingående på matematik, men hur gjorde vi innan kameran? Hur framställer vi avbildningar med rätt perspektiv för att få det verklighetstroget med hjälp av papper och färg?

I det gamla Egypten avbildades viktiga personer i större proportion relativt de som ansågs mindre värda, t.ex. slavar. Avbildningarna är alltså inte troget verkligheten, utan har istället ett hierarkiskt syfte. Det har kommit att kallas *värdeperspektiv.* När man senare strävade efter djup började man använda sig av det som kallas *spelkortsperspektivet.* Det kännetecknas av överlappning genom att skymma det som är längre bort med ett annat objekt. Idag ingår en del av perspektivläran i grundskolans bildundervisning, där det enligt skolverket ska läras ut *"redskap för målningar av rumsliga bilder med hjälp av färg och linjer"*. När vi ser kända konstverk som exempelvis *Skolan i Aten* av Rafael och *Nattvarden* av Leonardo Da Vinci ser vi flera linjer målade. (Se Figur 2.8.) Bland annat ett rutigt mönstrat golv respektive tak. Hur man kan gå tillväga för att utforma just rutmönster ska vi studera i kapitel 3.2.

Figur 2.8 *Skolan i Aten av Rafael till höger. Nattvarden av Leonardo Da Vinci till höger.*[2]

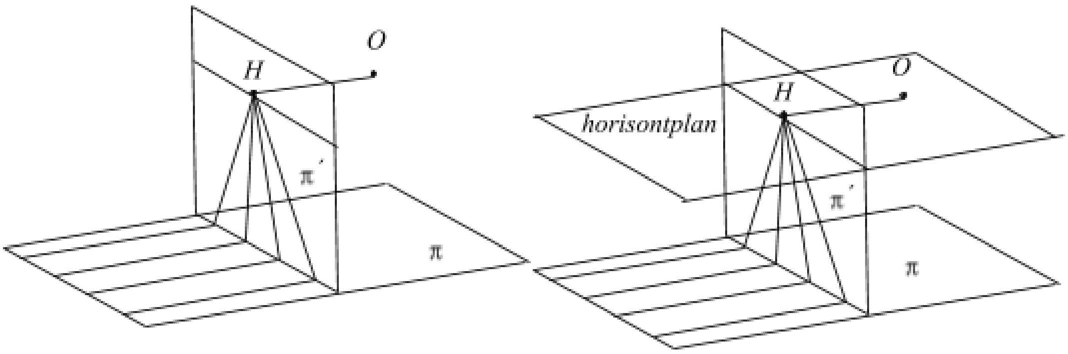
3 Perspektiv

Vi ska nu sätta oss in i perspektiv och bekanta oss med begrepp som horisont, oändlighetspunkter och oändlighetslinjer. Dessutom ska vi se vad ett projektivt plan är.

3.1 Perspektiv och horisont

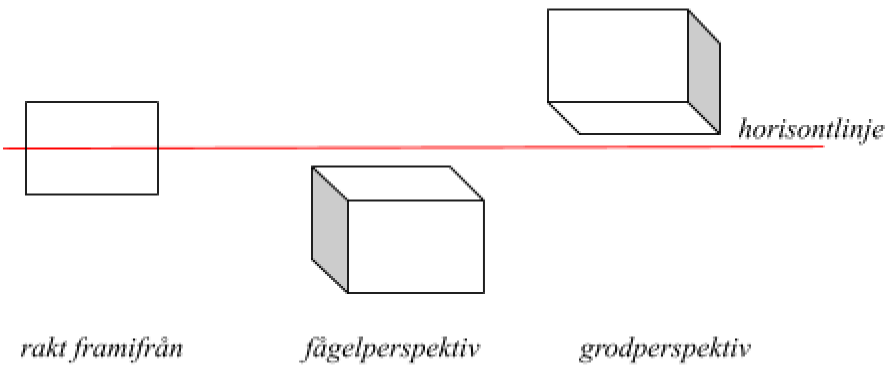
Då linjerna i ett linjeknippe M i ett plan π faller in vinkelrätt mot ett plan π' kommer projektionen av linjerna gå genom en punkt. Punkten kallas *horisontpunkt*, vilken vi betecknar H. O ligger utanför båda planen π samt π'. Linjen OH är parallell med linjerna i M. Planet som innehåller OH och är parallellt med π kallas *horisontplan*. Linjen genom H som är parallell med π kallas *horisonten* eller *horisontlinjen.* Planet π utgör tillsammans med horisontlinjen ett *projektivt plan.*

[2] https://sv.wikipedia.org/wiki/Skolan_i_Aten#/media/Fil:Raffael_058.jpg
https://sv.wikipedia.org/wiki/Nattvarden#/media/Fil:Leonardo_da_Vinci_-_The_Last_Supper_high_res.jpg



Figur 3.1 *Illustration av horisontpunkt, horisontlinje samt horisontplan.*

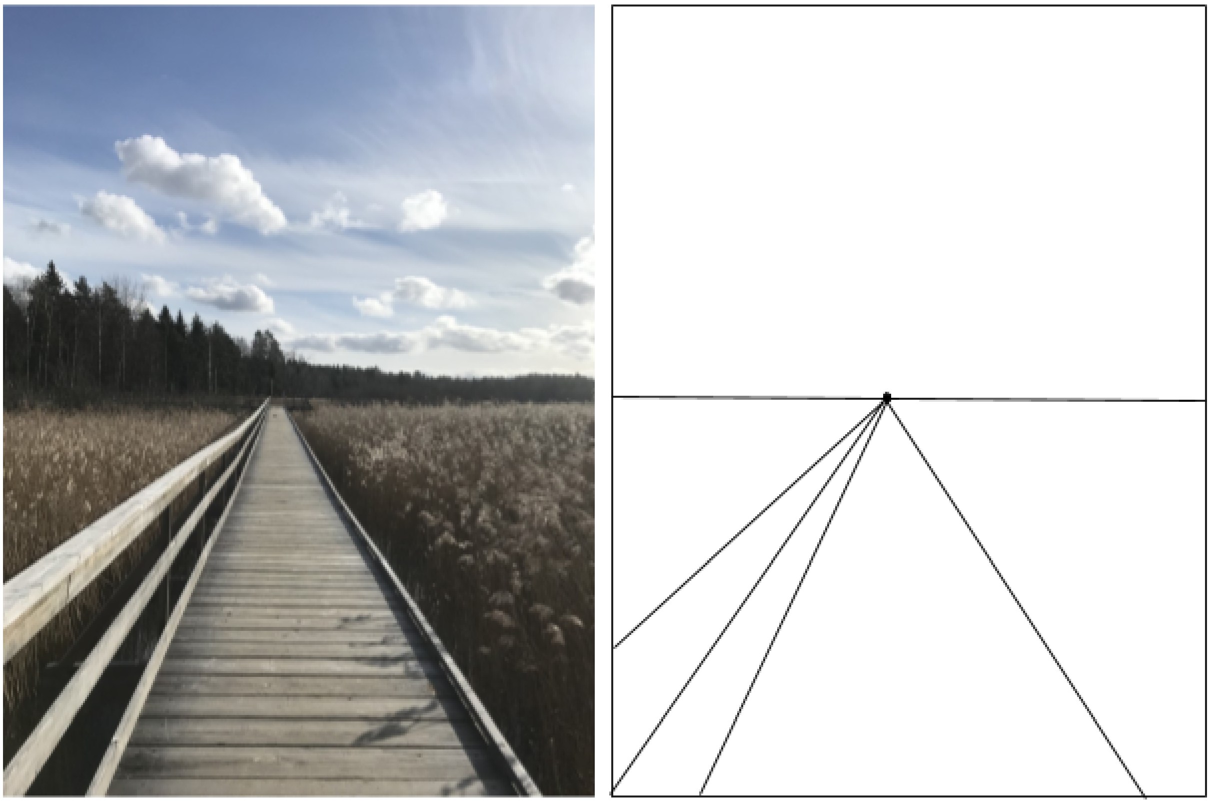
Vi ser hur linjen *OH* är vinkelrät mot horisonten vilket är en viktig detalj när det kommer till avbildningar. När vi vill avbilda ett objekt ur olika perspektiv är förhållandet till horisonten väsentlig. I Figur 3.2 nedan ser vi en låda avbildad på, under samt ovanför horisontlinjen.
Saker vi ser rakt framför oss ligger mitt i horisonten, saker vi ser i grodperspektiv (underifrån) ligger över horisonten, samt saker vi ser i fågelperspektiv (ovanifrån) ligger under horisonten.



Figur 3.2 *En låda sedd ur olika perspektiv.*

Likt exemplet i Figur 2.3 i kapitel 2.2 om projektiva egenskaper, där vi såg hur skuggan av en penna blir en punkt eller en linje, ser vi här hur en låda kan ses som både ett rätblock och en rektangel beroende på perspektivet.

3.2 Oändlighetspunkter



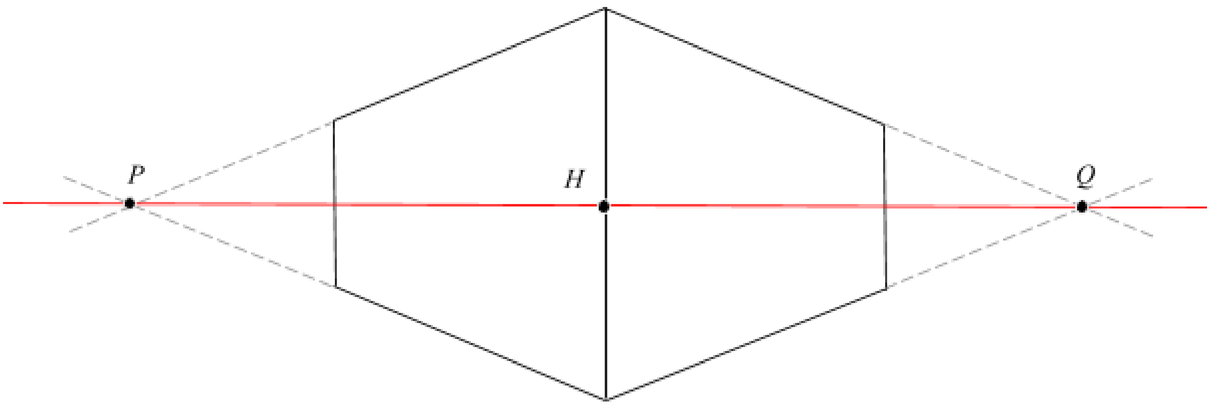
Figur 3.3 *En gångbro där sidorna av bron ser ut att mötas i horisonten. Till höger en förenklad version med parallella linjer som möts i oändlighetspunkten.*

I Figur 3.3 ser vi hur kanterna av en gångbro ser ut att mötas i en punkt i horisonten. Bilden kan jämföras med Figur 3.1, där markplanet är planet π, fotografiet är π' och horisontplanet är parallellt med markplanet i höjd med kameralinsen, perspektivcentrum *O*. Avståndet mellan markplanet och horisontplanet är alltså lika med höjden från markplanet till *O*. Kanterna av gångbron är vårt linjeknippe *M* som går genom horistontpunkten *H*. Horistontpunkter är ett specialfall av det vi ska ta upp nu - *oändlighetspunkter*.

Engelskan har ett kanske mer tydligt och beskrivande namn på oändlighetspunkter, nämligen *vanishing points.* Det menas alltså att ett objekt ser ut att försvinna mot en eller flera punkter. Vi kallar punkter som inte är oändlighetspunkter för *ordinära* punkter.

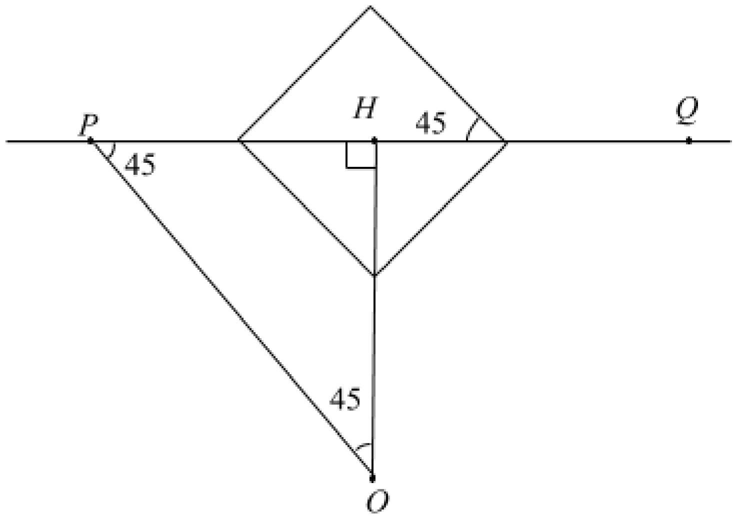
Inom konsten och inte minst inom arkitekturen spelar oändlighetspunkter en stor roll i den skapande processen. I Figur 3.3 har vi en oändlighetspunkt, men det finns avbildningar med fler, exempelvis avbildningen av ett hus sett från ett av hörnen i Figur 3.4 har två oändlighetspunkter. Då en avbildning har en oändlighetspunkt säger vi att avbildningen är i enpunktsperspektiv. När vi har två respektive tre oändlighetspunkter, är avbildningen i två-respektive trepunktsperspektiv.

Vi ska nu gå till Figur 3.4 och se hur vi kan använda oss av två oändlighetspunkter då vi ska avbilda ett rektangulärt hus sett från ena hörnet. Vi vet att markplanet är parallellt med horisontplanet och att avståndet mellan dem är lika med *O´*s höjd över marken. Låt linjerna för väggarnas golv respektive tak ingå i två linjeknippen *L* (vänster sida) och *R* (höger sida). Samtliga linjer i *L* och *R* är parallella med markplanet och vi vet att deras projektioner kommer gå igenom varsin oändlighetspunkt *P* respektive *Q,* vilka ligger på horisontlinjen, men det återstår att veta på vilket avstånd från *H* punkterna *P* och *Q* ligger.



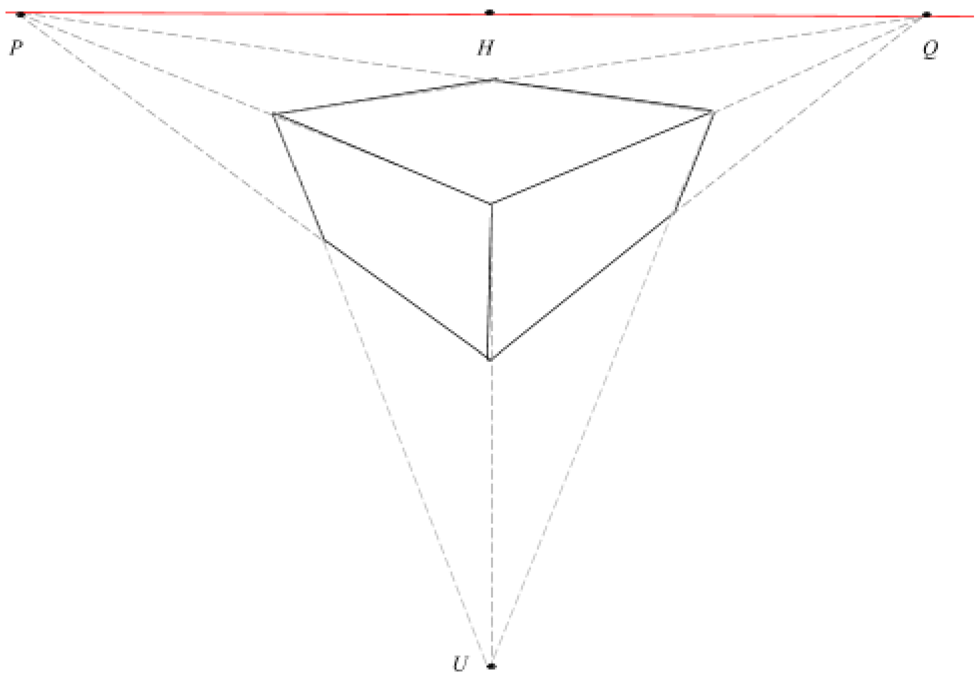
Figur 3.4 *Bilden illustrerar ett hus sett från ena hörnet, med den röda horisontlinjen som skär förlängningarna av huskanterna. Figuren har alltså en oändlighetspunkt i respektive skärning.*

Vi går vidare till Figur 3.5 för att se hur vi bestämmer avståndet från oändlighetspunkterna till *H.* Det visar sig att avståndet beror på placeringen av *O.* Om *O* är placerat så att husväggarna bildar vinkeln 45° med projektionsplanet så är vinkeln $\wedge OPH$ 45°. Eftersom $\wedge$ *OHP* är rät så är triangeln *OHP* rätvinklig och likbent. Om vi vet avståndet från *O* till *H* vet vi alltså även avståndet från *H* till *P* eftersom kateternas längd är densamma.. Motsvarande gäller för avståndet mellan *H* och *Q*.



Figur 3.5 *Ett hus sett ovanifrån med oändlighetspunkter P och Q. Projektionsplanet går genom linjen PQ, här sedd ovanifrån.*

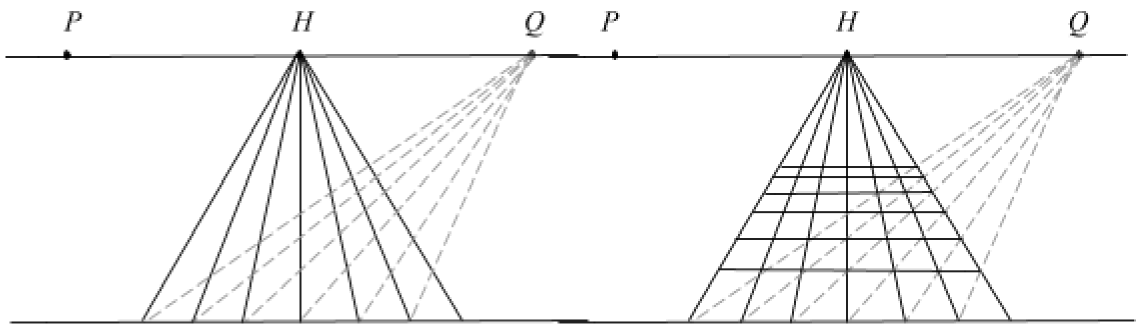
Om vi nu vill lägga till ytterligare en oändlighetspunkt *U* kan vi utgå från exempelvis fågelperspektiv och avbilda ett hus ovanifrån. Vi får nu de vertikala linjerna i linjeknippet *S* som går genom *U.* Se Figur 3.6 nedan. Här är den nedersta oändlighetspunkten inte på horisontlinjen.



Figur 3.6 *Ett hus sett ovanifrån (fågelperspektiv) med 3 oändlighetspunkter i de streckade linjernas skärning.*

Vi erinrar oss om Rafaels samt Leonardos konstverk med rutmönster i kapitel 2.3 och går nu igenom tillvägagångssättet för ett rutigt golv med hjälp av Figur 3.7.

Vi vill avbilda rutor med ena sidan parallell mot ett projektionsplan *A*, samt med rutornas andra sidan vertikal mot *A*. Vi väljer en horisontlinje och en horisontpunkt *H.* Vi vet från exemplet med gångbron att de vertikala sidorna av varje ruta går genom *H*, men vi stöter på problem med de sidorna som är parallella mot A. Lyckligtvis finns ett knep. Vi låter *P* och *Q* vara oändlighetspunkter på varsin sida om *H.* Varje rutas respektive diagonal dras mot antingen *P* eller *Q*. Dessa diagonaler bildar en 45-gradig vinkel mot planet *A.* Vi behöver dock endast rita ut stödlinjer för en av diagonalerna. I Figur 3.7 nedan, väljer vi diagonalen som utgår från *Q*, men vi kan alltså lika gärna välja diagonalerna som utgår från *P*. Nu kan vi rita in de återstående linjerna, vilka är parallella mot *A.* De dras som horisontella linjer genom varje skärning av diagonalerna samt de vertikala linjerna. Se Figur 3.7.



Figur 3.7 *Avbildning av ett rutigt golv med hjälp av stödlinjer.*

3.3 Oändlighetslinjen

På samma vis som vi definierade ett linjeknippe som en mängd parallella linjer, definierar vi nu ett *planknippe* som en mängd parallella plan. Likt hur projektionen av samtliga linjer i ett linjeknippe går genom en oändlighetspunkt, skär projektionen av samtliga plan i ett planknippe varandra i en given rät linje. Denna linje kallas *oändlighetslinjen* och ligger alltså på varje plan i planknippet. Dessutom ligger samtliga oändlighetspunkter på oändlighetslinjen. Alltså är horisontlinjen är ett exempel på en oändlighetslinje. En linje som inte är en oändlighetslinje kallar vi en *ordinär* linje.

Ett plan med sina oändlighetspunkter och oändlighetslinjer är vad vi kallar ett *projektivt plan.* Det projektiva planet består av en mängd punkter och linjer, där relationen mellan punkter och linjer kallas incidens och har följande egenskaper:

1. Två distinkta punkter är incidenta med exakt en linje.

2. Två distinkta linjer är incidenta med exakt en punkt.

Beviset för 1. delas in i tre fall:

I. Då båda punkterna är ordinära, vilket är ekvivalent med det första postulatet i *Elementa*[3].

II. Då den ena punkten är ordinär och den andra en oändlighetspunkt. Vi vet att det finns precis en rät linje parallell med given rät linje genom den ordinära punkten. Detta är nu ekvivalent med Elementas femte postulat.

III. Då båda är en oändlighetslinje/punkt, vilket följer direkt från att vi vet att samtliga oändlighetspunkter ligger på oändlighetslinjen.

För beviset av 2. gör vi indelningen:

I. Då båda linjerna är ordinära och inte parallella har vi ekvivalens av Elementas första postulat.

II. Då båda linjerna är ordinära och parallella följer det att de svarar mot en och endast en gemensam oändlighetspunkt.

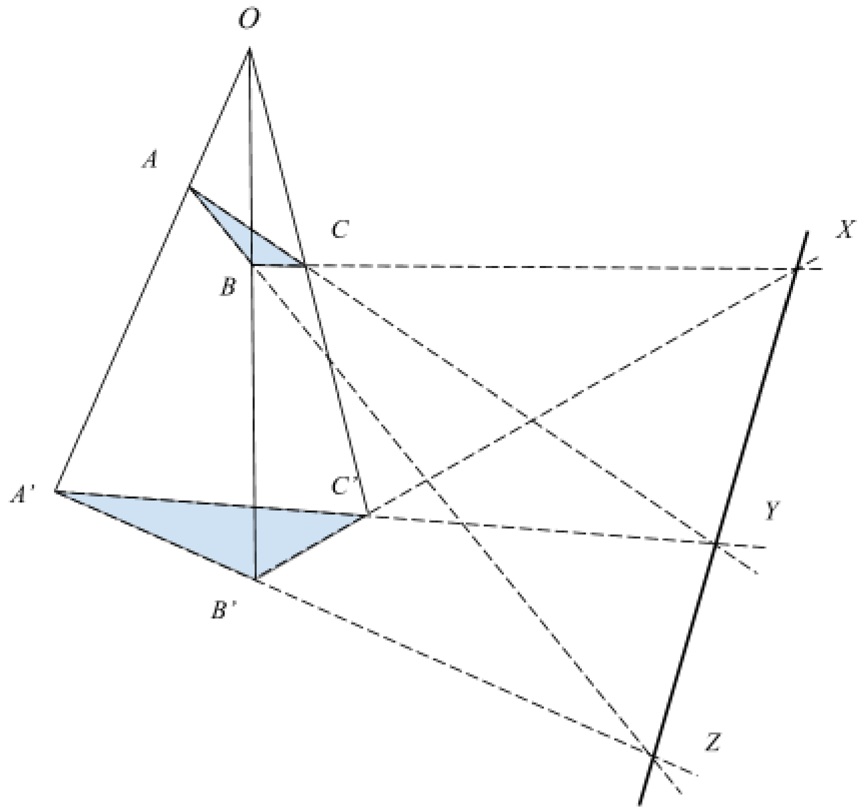
III. Då den ena linjen är ordinär och den andra är oändlighetslinjen har de en gemensam punkt, vilken är den oändlighetspunkt som svarar mot den ordinära linjen.

[3] En av de första kända läroböckerna skriven av matematikern Euklides från år ca 300 f.Kr.

3.4 Desargues sats

Vi erinrar oss om när vi i inledningen nämnde den franske ingenjören och arkitekten Gérard Desargues och kommer nu formulera och bevisa Desargues sats. Se Figur 3.8.

Sats 3.1 (Desargues sats) *Två trianglar ABC och A'B'C' är perspektiviska med avseende på ett perspektivcentrum O. Antag att de räta linjerna BC och B'C' skär varandra i en punkt X, CA och C'A' skär varandra i en punkt Y samt AB och A'B' i en punkt Z. Då ligger punkterna X, Y och Z på en rät linje.*



Figur 3.8 *Desargues sats*

Bevis i fallet då π och π' är distinkta: Antag att ABC, samt $A'B'C'$ ligger i ett plan π respektive π'. Låt de räta linjerna AA', BB' samt CC' skära varandra i perspektivcentrum O. Då måste de räta linjerna BC och $B'C'$ ligga i samma plan samt skära varandra i någon punkt X. På samma sätt skär AC $A'C'$ i en punkt Y samt AB $A'B'$ i en punkt Z. Eftersom trianglarna ligger i olika plan måste punkterna X, Y och Z var för sig ligga i båda trianglarnas plan. Alltså skär π samt π' varandra i mer än en punkt och det följer att deras skärning är en linje innehållande alla punkter X, Y och Z.

□

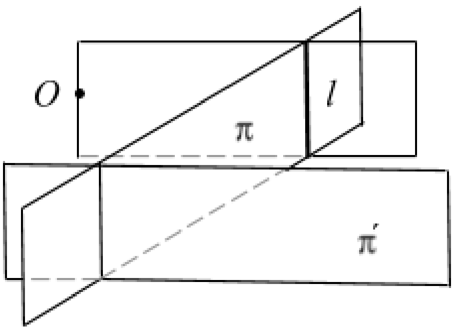
Vi kan betrakta planen π och π' som projektiva plan och det följer att något eller några av triangelns hörn eller *O* är oändlighetspunkter. Vidare kan antingen linjen som skär *X, Y* och *Z* eller någon av triangelns sidor vara oändlighetslinjen.

I beviset ovan antog vi att trianglarna låg i olika plan. Vi ska nu bevisa fallet då de ligger i samma plan, men ska först formulera och bevisa Sats 3.2 som vi kommer använda i beviset.

Sats 3.2. *Antag att l är en ordinär rät linje i ett projektivt plan* π. *Då finns ett perspektivcentrum O och ett plan* π' *sådana att l och oändlighetslinjen i* π' *är perspektiviska med avseende på O.*

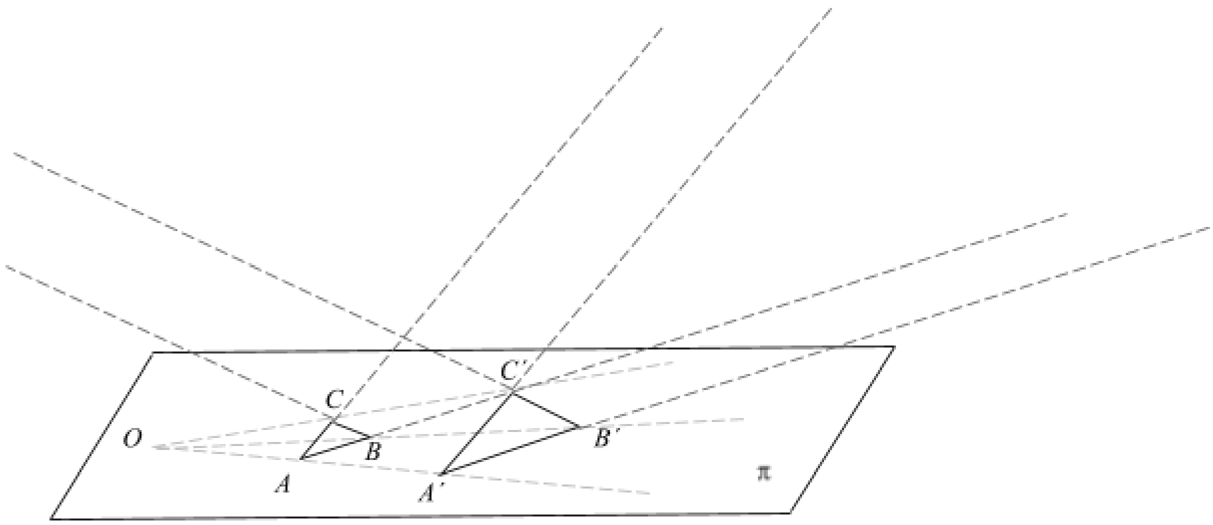
Bevis: Vi kan välja en godtycklig punkt *O* utanför π. Vi låter sedan π' vara ett plan som inte går genom *O*, men som är parallellt med det plan som innehåller *O* och *l.* Se Figur 3.9. Eftersom planen är parallella vet vi att de skär varandra i oändlighetslinjen och det följer att *l* och oändlighetslinjen är perspektiviska med avseende på *O*.

□



Figur 3.9 *Planet som innehåller O och l är parallellt med* π' *och skär därför varandra i oändlighetslinjen.*

Nu går vi vidare med att bevisa Desargues sats i fallet då trianglarna ligger i samma plan. Se Figur 3.10. Enligt Sats 3.2 finns ett perspektivcentrum och ett plan π' sådana att den räta linjen genom *X* och *Y* och oändlighetslinjen i π' är perspektiviska. Vi visar först att påståendet gäller för de trianglarna i π' som svarar mot *ABC* respektive *A′B′C′* och kan sedan gå tillbaka till π för att se att det gäller även där. Om tre punkter i π' ligger på en rät linje så ligger också motsvarande punkter i π på en rät linje. Vi visar alltså att om X och Y ligger på samma linje, gör även Z det i fallet då X och Y är oändlighetspunkter.



Figur 3.10 *Desargues sats då trianglarna ligger i samma plan.*

Bevis i fallet då π och π' sammanfaller: Låt perspektivcentrum O samt trianglarna ABC och $A'B'C'$ ligga i ett plan π. Låt vidare X och Y vara oändlighetspunkter. Vi vet då att BC och B′C′ är parallella eftersom de skär varandra i X. Detsamma gäller för CA och $C'A'$. Perspektivcentrum O är en ordinär punkt och trianglarna OBC och $OB'C'$ likformiga - så även trianglarna OCA och $OC'A'$. Vi har då sambandet:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OB'}{OC'} \text{ och } \frac{OC}{OA} = \frac{OC'}{OA'} \quad \text{vilket ger: } \frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$$

Enligt parallelltransversalsatsen är AB och $A'B'$ parallella och alltså är deras skärningspunkt Z en oändlighetspunkt som ligger på oändlighetslinjen. När vi projicerar tillbaka punkterna X, Y och Z till π ligger projektionerna av dem på en ändlig rät linje och satsen är bevisad då trianglarna ligger i samma plan.

□

4 Dualitet

Vi ska nu behandla *dualitet*, vilket ytligt kan förklaras som ett slags symmetriskt samband som råder i projektiv geometri. Vi minns egenskaperna för ett projektivt plan:

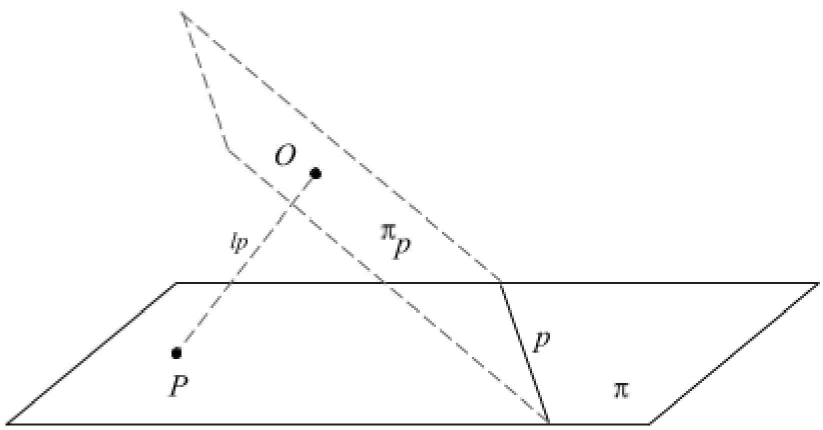
1. Två distinkta punkter är incidenta med exakt en linje.

2. Två distinkta linjer är incidenta med exakt en punkt.

Observera att om vi byter ut "punkt" mot "linje" i påståendena 1. och 2. får vi det ena påståendet av det andra. Det är ett exempel på att det mellan punkter och räta linjer finns en *dualitet.* Det visar sig att det råder dualitet i flera geometriska sammanhang, exempelvis har en del satser en dual motsvarighet i en annan sats.

4.1 Dualitet mellan punkter och räta linjer

De finns mängder av exempel likt ovan, där vi utför liknande byten och se hur dualiteten fungerar, men vi ska nu illustrera dualiteten mellan punkter och räta linjer mer konkret i Figur 4.1.



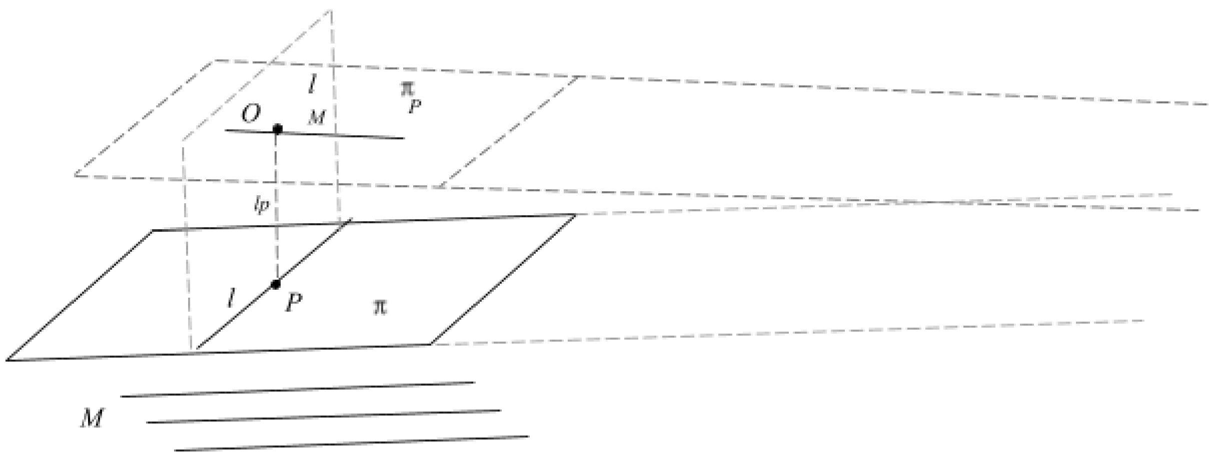
Figur 4.1 *Punkten P har sin duala motsvarighet i linjen p.*

Till varje punkt i planet svarar en rät linje genom perspektivcentrum *O,* utanför planet, och omvänt. Låt *P* vara en punkt i ett plan π, och l_P vara den räta linjen från *P* genom *O*, som inte ligger i π. Låt sedan π_P vara det plan som är ortogonalt mot l_P. l_P är alltså normal till

π_P . Då skär planen π och π_P varandra längs en rät linje, säg p. Punkten P har sin *duala motsvarighet* i den räta linjen p.

På motsvarande vis kan vi från den räta linjen p, i ett plan π, konstruera ett plan π_P innehållande den räta linjen p samt perspektivcentrum O. Vi låter l_P vara normalen till π_P som går genom O. Slutligen får vi punkten P i skärningen av l_P samt π. Vi har nu att punkten P är den duala motsvarigheten till den räta linjen p.

Ovan beskrivna påståenden gäller dock inte för alla ordinära punkter och linjer. Om P ligger rakt under O kommer l_P vara vinkelrät mot π, men också mot π_P . Se Figur 4.2. Alltså är π och π_P parallella och de skär varandra i oändlighetslinjen istället för i en ordinär linje. Vi har nu bestämt den duala motsvarigheten till samtliga ordinära punkter, men vi har kvar att visa den duala motsvarigheten till en oändlighetspunkt.



Figur 4.2 *Fallet då P ligger rakt under O och planen är parallella. De skär då varandra i oändlighetslinjen vilken föreställs ligga ut till höger i bild. Föreställ även oändlighetspunkten L ligga på den tänkta oändlighetslinjen.*

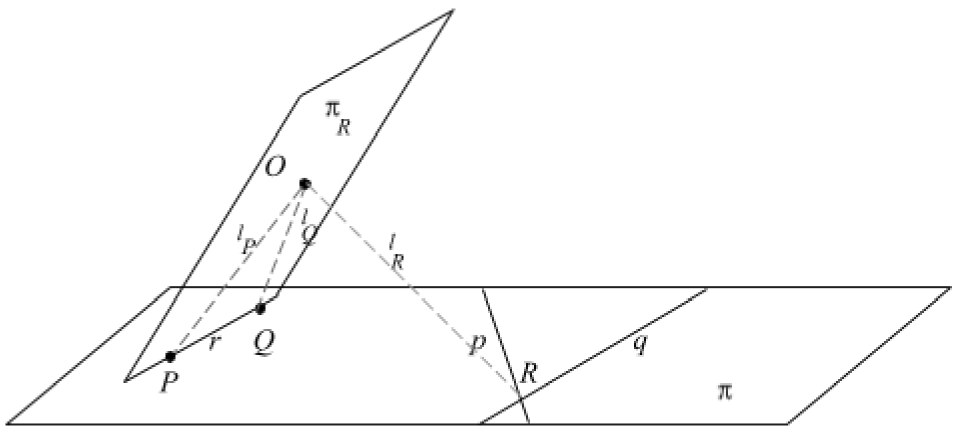
Låt L vara den oändlighetspunkt som svarar mot linjerna i ett linjeknippe M, vilka är parallella med planet π samt låt vidare l_M vara en linje i M som går genom O. Om vi konstruerar ett plan π_P som går genom O och är vinkelrätt mot l_M kommer det skära π i en linje vi kallar l . Då är l är den duala motsvarigheten till L. Se Figur 4.2.

Baklänges får vi för en linje l som går genom P (som ligger rakt under O) ett plan som innehåller l och O. Planet är vinkelrätt mot π och normalen, säg l_M är då parallell med π och skär en oändlighetspunkt L. L är den duala motsvarigheten till l.

Det sista fallet är då linjen *p* är oändlighetslinjen. Då är planet π_P, som går genom *p,* parallellt med π och går genom *O*. Dualen till oändlighetslinjen är då alltså projektionen av *O* på π, som är *P*.

Vi ska nu med hjälp av Figur 4.3 gå vidare till att visa Sats 4.1.

Sats 4.1 *Låt P, Q och R vara punkter och p, q och r deras duala linjer. Punkterna P och Q ligger på den räta linjen r, då och endast då de räta linjerna p och q skär varandra i punkten R.*



Figur 4.3 *Den duala motsvarigheten till två punkter P och Q som ligger på en linje r, är två linjer p och q som skär varandra i punkten R och motsvarande.*

I beviset använder vi oss av att om två plan π och π' genom *O* skär varandra längs en rät linje *l,* så är båda planens normaler vinkelräta mot *l* och ligger i normalplanet till *l.*

Bevis: Vi visar först att om *R* är skärningspunkten mellan *p* och *q* följer det att *r* går genom *P* och *Q*, där samtliga nämnda punkter och linjer ligger i ett plan, säg π. Låt *R* vara skärningspunkten mellan linjerna *p* och *q* i ett plan π. Låt vidare l_R vara linjen från *R* till *O* och π_R vara normalplanet till l_R. Låt π_P och π_Q vara planen som innehåller *O* samt *p* respektive *q*. Låt vidare linjerna l_P och l_Q vara linjerna från *O* till *P* respektive *Q* vilka är normaler till planet π_P respektive π_Q. Eftersom *R* ligger på skärningen mellan *p* och *q* är l_R skärningslinjen mellan π_P och π_Q. l_R är alltså vinkelrät mot l_P och l_Q och det följer att l_P och l_Q ligger i π_R. Slutligen har vi att *P* och *Q* ligger på *r*.

Nu återstår att visa att om P och Q ligger på r så ligger R på skärningen mellan p och q. Antag att P och Q är två punkter på den räta linjen r, som svarar mot de duala linjerna p och q. Antag att samtliga nämnda punkter och linjer ligger i ett plan π. Låt l_P och l_Q vara linjerna från P respektive Q till O, vilka spänner upp ett plan, säg π_R. Låt vidare π_P och π_Q vara normalplan till l_P respektive l_Q samt låt l_R vara skärningslinjen mellan π_P och π_Q. Då är l_R vinkelrät mot π_R samt skär planet π i en punkt, säg R. Men eftersom l_R är skärningslinjen mellan normalplanen π_P och π_Q måste R vara skärningspunkten mellan p och q. Se Figur 4.3.

Då R är en oändlighetspunkt följer det att p och q är parallella, men beviset följer av direkt översättning av beviset då R är en ordinär punkt.

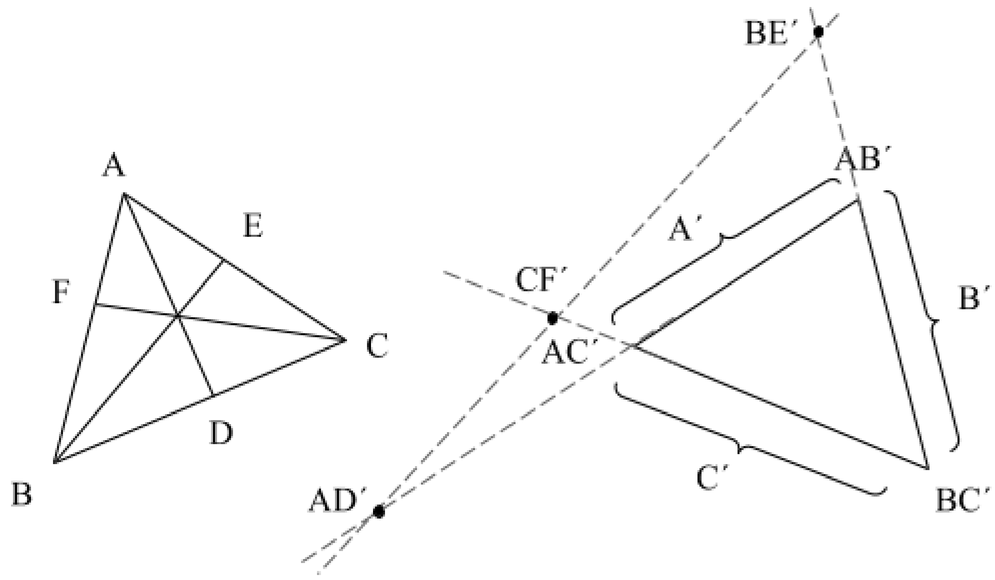
Då r är oändlighetslinjen följer det att planen π_R och π är parallella samt att P och Q är oändlighetspunkter, vilka alltså ligger på oändlighetslinjen r. Vi kan återigen få beviset genom direkt översättning av beviset då r är en ordinär linje.

□

4.2 Dualitet hos geometriska figurer

Utifrån dualiteten mellan punkter och räta linjer går vi nu vidare till geometriska figurers dualitet där vi nu ska bestämma en triangels dualitet.

Se Figur 4.3. Låt en triangel ha hörn i A, B samt C och vi förutsätter att de inte är kolinjära. Låt A', B' respektive C' beteckna den duala triangelns sidor, samt AB', AC' respektive BC' vara den duala triangelns sidor. Linjerna A' B' samt C' ingår inte i samma linjeknippe eftersom A, B samt C då skulle vara kolinjära. De räta linjerna AC och AB går båda genom A så deras duala motsvarigheter AB' samt AC' måste ligga på A'. På samma sätt inses att AB' samt BC' måste ligga på B'. och slutligen att AC' och BC' måste ligga på C'. Vi har nu alltså fått att den duala motsvarigheten till en triangel är en triangel.



Figur 4.3 *Dualitet för en triangel*

Vi fortsätter undersöka vår triangel i Figur 4.3 och drar de räta linjerna *AD*, *BE* samt *CF* på så vis att de skär varandra i en punkt. Eftersom sidorna *AB*, *AD* samt *AC* utgår från *A* ligger de duala punkterna *AB´*, *AD´* samt *AC´* på samma linje. På samma sätt får vi att *BC´*, *BE´* samt *BA´*, respektive *CA´*, *CF´* samt *CB´* är kolinjära. Vi har alltså att *AD´* ligger på den räta linjen *A´*. *AD´* kan ligga på den duala triangelns sida, men även på förlängningen av *A´*. Motsvarande gäller för *BE´* samt *CF´*. Dessutom skär ju linjerna *AD*, *BE* och *CF* varandra så de duala punkterna är alltså kolinjära. I figuren illustreras möjliga placeringar av *AD´*, *BE´* samt *CF´*.

5 Avslutning

Vi har nu behandlat grunderna i den projektiva geometrin och gått igenom grunden för korrekta avbildningar. Med start i centralprojektion har vi arbetat oss vidare till perspektiv för att slutligen gå in på dualitet. Vi har sett hur matematiken används då vi exempelvis avbildar ett hus eller ett schackrutigt golv för ett verklighetstroget resultat, men även hur en skugga eller solkatt kan föreställa en projektion av exempelvis ett staket eller ett fönster. En viktig del av det här arbetet är även hur den projektiva geometrin skiljer sig från övrig geometri med definitionen av parallellitet och användningen av oändlighetspunkter och oändlighetslinjen. Med avslutning i Desargues sats och dualitet har vi förklarat ett symmetriskt samband mellan punkter och linjer i den projektiva geometrin.

6 Referenser

6.1 Litteratur

Åtta kapitel om geometri, Anders Tengstrand 2011
Centralprojektion och perspektiv, Torbjörn Tambour 2001

6.2 Webbadresser

https://en.wikipedia.org/wiki/Perspective_(graphical)#History
https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_geometry
https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/laroplan-och-kursplaner-for-grundskolan/laroplan-lgr11-for-grundskolan-samt-for-forskoleklassen-och-fritidshemmet?url=1530314731%2Fcompulsorycw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DGRGRBIL01%26tos%3Dgr&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa219f#anchor1
https://sv.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci