SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Om talet pi

av

Oscar Johansson

2020 - No K37

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Om talet pi

Oscar Johansson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2020

1 Abstrakt

A usual constant in early mathematics is π. In this project we are going to study more about this "commonplace" number and present historical approximations. This project will also explore some of the mathematicians that studied π. The mathematicians are Archimedes, Gregory, Leibniz, Ninakantha, Euler. We will also present a proof that π is irrational. I also want to thank my mentor Torbjörn Tambour.

2 Sammanfattning

Ett vanlig tal ifrån tidig matematik är π. I detta arbete kommer vi studera mer av detta ”vardagliga” tal och presentera historiska approximationer. Arbetet presenterar de matematiker som studerade π. Dessa matematiker är Arkimedes, Gregory, Leibniz, Ninakantha, Euler. Vi kommer även presentera ett bevis för att π är irrationellt. Jag vill också tacka till min handledare Torbjörn Tambour.

Innehåll

3 Inledning

3.1 Varför skriva om π?

Många matematiska begrepp, metoder och tal används under ens skolgång. Ett av dessa är π vilket är något man börjar räkna med i högstadiet men ofta utan någon särskilt tydlig kontext. πs tydliga användning under högstadiet är för att räkna ut omkrets och area av cirklar. Arbetets syfte är att kunna skapa en djupare förståelse för framtida lärare eller forskare kring en matematisk tal som kanske alltid har känts som en självklarhet.

3.2 Vad är π?

π representerar det förhållande som finns mellan cirkelns diameter och cirkelns omkrets. Denna tal är detsamma för alla cirklar vilket innebär att den går att applicera på cirklar av olika storlekar. Formeln för omkretsen av en cirkel ser ut såhär $O = \pi d = 2\pi r$, vilket illustrerar användningen av π för att antingen få ut omkrets eller diametern av en cirkel. Talet π approximeras ofta till 3.141 för elementär matematik. För att få en lite smak av hur π ser ut kommer här en annan approximation med fler decimaltal $pi = 3.14159265359...$ Talet π är irrationellt vilket betyder att det inte kan uttryckas som ett förhållande mellan två heltal.[1]

3.3 Historia om π

Den tidigaste nedskrivna approximationen av π finns på lertavlor från Babylon och på papyrus i Egypten. 1900-1600 f.kr anses vara åldern på de lertavlor från Babylon där de approximerar pi till 25/8 vilket i decimalform är 3,125. Egyptens approximation $(\frac{16}{9})^2$ som är ungefär 3,16 och är skriven på Rhindpapyrusen. Rhindpapyrusen anses vara skriven runt 1650 f.kr. Däremot var Arkimedes den första som utvecklande en algoritm för beräkning av π.[1]

π kallas även för Arkimedes konstant och detta kommer från att Arkimedes lyckades beräkna π med två korrekta decimaler. Den metod som Arkimedes använde kunde fastslå att π måste ligga mellan 223/71 och 22/7 men mer om detta under Arkimedes del av arbetet.[1]

4 Arkimedes approximering av π

4.1 Historia om Arkimedes

Arkimedes levde på Sicilien där han föddes 287 fKr och dog 212 fKr. Arkimedes var en av de största matematikerna under sin era och hans tankar hade stor påverkan på matematik. Det främsta ämnesområdet inom matematik som han påverkade var geometri, utöver detta utvecklade han även metoder som påminer om integralkalkyl. Utöver att vara en matematiker var Arkimedes även en uppfinnare och en av hans uppfinningar var något man kallar för arkimedisk skruv. Arkimedisk skruv används för att flytta vätska till en högre nivå. Dock var Arkimedes mest kända upptäckt den princip som är döpt efter honom, denna princip beskriver varför föremål flyter och hur djupt de sjunker i vatten.

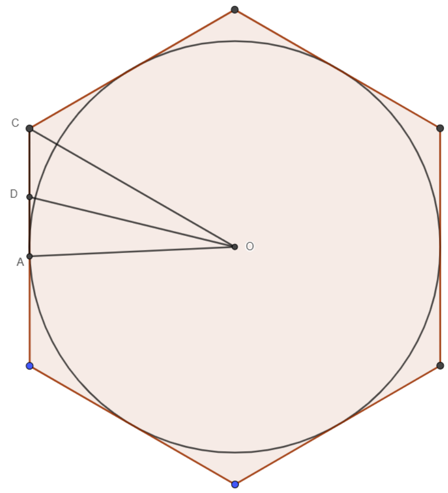
Arkimedes lyckades approximera π till var att det låg mellan 3+10/71 och 3+1/7 vilket i decimaltal är 3,14084 och 3,14285. Anledningen till varför approximationen har två värden var för att Arkimedes använde sig av två polygoner där ena var inuti cirkeln och den andra var utanför och använde sedan lemman som kommer presenteras senare i arbetet. Dessa polygoner användes för att räkna ut förhållandet mellan polygonernas diameter och deras omkrets vilket gav approximationen av π med övre och undre begränsningar, eftersom ena polygonen var större än cirkeln och den andra var mindre än cirkeln. Det inre polygonens hörn ligger på cirkeln och det yttre polygonens sida tangerar cirkeln. [6]

4.2 Lemma 1:

Utgå ifrån att sträckan OA är radien av cirkeln. Sträckan AC är en tangent i punkten A, låt sedan DO vara en bisektris i vinkeln AOC som skär tangenten AC i punkten D. Då är

$$\frac{DA}{DO} = \frac{CA}{(CO + OA)}$$

och då gäller även $DO^2 = OA^2 + DA^2$.[2] Formeln illustreras nedan.



$\frac{DA}{OA} = \frac{CA}{CO+OA}$.

4.2.1 Bevis för lemma 1:

Beviset som ska presenteras är att detta förhållande är sant:

$$\frac{DA}{OA} = \frac{CA}{CO+OA}.$$

Något som går att visa geometriskt är

$$CD = CA - DA.$$

vilket kommer användas i beviset och vi använder bisektrissatsen utan bevis som ser ut såhär:

$$\frac{DA}{OA} = \frac{CD}{CO}.$$

Ekvationen kan utvecklas genom substituering av CD vilket ger oss det här sambandet

$$\frac{DA}{OA} = \frac{CA-DA}{CO}.$$

Detta är samma som denna ekvation

$$\frac{DA}{OA} = \frac{CA}{CO} - \frac{DA}{CO}$$

Vi kan sedan flytta över $-\frac{DA}{CO}$ till andra sidan

$$\frac{DA}{OA} + \frac{DA}{CO} = \frac{CA}{CO}.$$

Genom att låta båda dessa nämmnare bli samma får vi denna ekvation

$$\frac{DA \times CO}{OA \times CO} + \frac{DA \times OA}{CO \times OA} = \frac{DA(CO+OA)}{CO \times OA} = \frac{CA}{CO}.$$

Vi flyttar nu över bråktermen från vänsterled till högerled och får denna ekvation

$$DA = \frac{\frac{CA}{CO}}{\frac{(CO+OA)}{CO \times OA}},$$

vilket vi kan förenkla till

$$DA = \frac{CA \times OA}{CO+OA}.$$

Vi tar sedan $\frac{1}{OA}$ på båda sidor och får då

$$\frac{DA}{OA} = \frac{CA}{CO+OA}.$$

Vilket är det som vi skulle bevisa.

Sambandet $DO^2 = OA^2 + DA^2$ är Pythagoras sats.

4.2.2 Användning av lemma 1

Arkimedes använde lemma 1 för att skapa en rekursiv algoritm för att bestämma sidornas längd i de polygoner han studerade. Detta gjorde han genom att låta vinkel AOC vara 30 grader, dvs en tredjedel av en rät vinkel. Eftersom vinkeln AOD är 15 grader, så är AD sidan i en regelbuden 12-hörning. Då polygonen är utanför cirkeln skapar det en övre begränsning när man räknar omkretsen på polygonen.[2] Det vi vill göra är att gå från en 6-hörning till en 12-hörning, sedan räkna ut den figurens omkrets vilket kommer ge oss en övre begränsning för π.

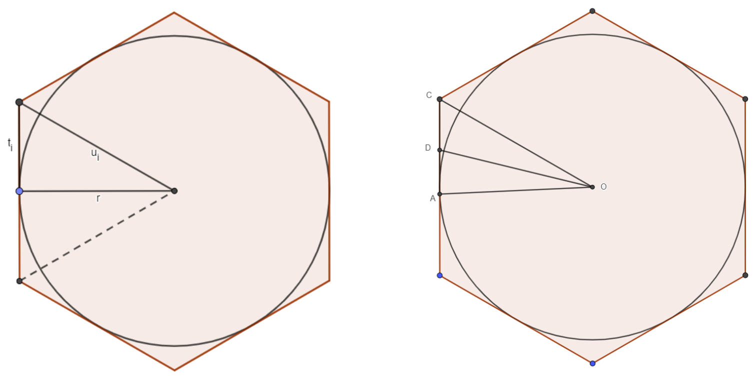
Vi kan skriva om lemma 1 till två stycken rekusiva formler:

$$t_{i+1} = \frac{rt_i}{u_i + r}$$

och

$$u_{i+1} = \sqrt{r^2 + t_{i+1}^2}.$$

där t_i =halva sidan av den polygon vi startar med (vårt fall 6-hörning), t_{i+1} =halva sidan av det nya polygon som har dubbelt så många hörn som det tidigare(vårt fall 12-hörning). r =radien av cirkeln (vårt fall enhetcirkeln) och u_i =sträckan från mitten av virkeln till toppen av ett hörn av polygonen. Se i figur nedan:



Ovan i figuren ser vi att ifall man drar linjer från två efterföljande hörn till mitten skapas en liksidig triangel. Eftersom A är placerad på mitten av en av dessa sidor blir $t_i = AC$ en halv sida i liksidiga triangeln. $u_i = CO$ är en hel sida i den liksidiga triangeln. $r = A0 = \frac{1}{2} l.e.$ vilket är vår radie då cirkeln är enhetcirkeln. Med hjälp av pythagoras sats kan vi räkna ut längden på C0.

$$CO^2 = \frac{1}{2}^2 + \frac{CO}{2}^2$$

Vilket genom uträkning ger oss $CO = \frac{1}{\sqrt{3}}$ och det betyder att $CA = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Vi har nu fått ut samtliga variabler för att räkna ut en omvandling från ett 6-sidig polygon till ett 12-sidigt polygon. Vi för in det i formeln t_{i+1}:

$$t_{i+1} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

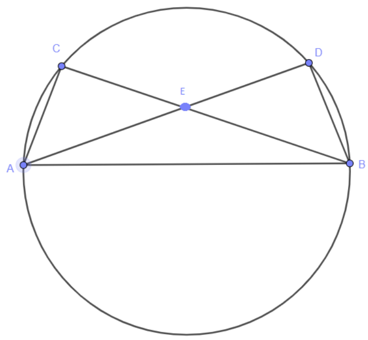
Vi använder nu detta värde och multiplicerar det med 24 för att uppnå en tolvsidigt polygon eftersom den enbart är längden av en halv sida på det nya polygonen.

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2} \times 24 \approx 3,215390$$

Vi får alltså ut att en övre begränsning, alltså måste π vara mindre än $3,214390$.

4.3 Lemma 2:

Börja med att sätta sträckan AB till diametern av en cirkel. Låt C vara en punkt på cirkeln. Då är vinkeln ABC rät. Låt sträckan AD vara en bisektris till vinkel CAB vilken skär cirkeln i punkten D. Dra en linje mellan punkten D och punkten B i cirkeln och kalla den stäckan DB. Då är $AB^2/BD^2 = 1+(AB+AC)^2/BC^2$. Då är också $AD^2 = AB^2-BD^2$.[6] Nedan är en figur och formeln för lemma 2.



$$\frac{AB^2}{BD^2} = 1 + \frac{(AB+AC)^2}{BC^2}.$$

4.3.1 Bevis för Lemma 2:

Bevis: vi startar med att multiplicera båda sidor med $(BD^2 \times BC^2)$ vilket ger oss detta

$$AB^2 \times BC^2 = BD^2 \times BC^2 + BD^2(AB + AC)^2.$$

Vi flyttar över $BD^2 \times BC^2$ från högerledet och skriver om det till

$$(AB^2 - BD^2) \times BC^2 = BD^2(AB + AC)^2.$$

Genom att använda Pythagoras sats på triangeln ABD kan vi skriva om vänsterledet till enbart $AD^2 \times BC^2$ och då allt är i kvadrat kan vi ta roten ur vilket ger oss

$$AD \times BC = BD(AB + AC).$$

Vi dividerar nu båda sidor med AC

$$\frac{AD \times BC}{AC} = BD(\frac{AB}{AC} + 1).$$

I skärningspunkten E (se figur ovan) ger bisektrisatsen att $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$ och vi får då detta

$$\frac{AD \times BC}{AC} = BD(\frac{BE}{CE} + 1).$$

Vi fortsätter att utveckla högerledet genom att flytta ut $\frac{1}{CE}$ ur parantesen

$$BD(\frac{BE}{CE} + 1) = BD\frac{(BE+CE)}{CE}.$$

Utifrån räkneregler med sträckor kan man skriva om $BE + CE = BC$. Vi förkortar sedan bort BC från båda sidor vilket ger oss

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{CE}$$

Denna ekvation är sann då trianglarna ABD och AEC är likformiga då de delar samma vinklar.

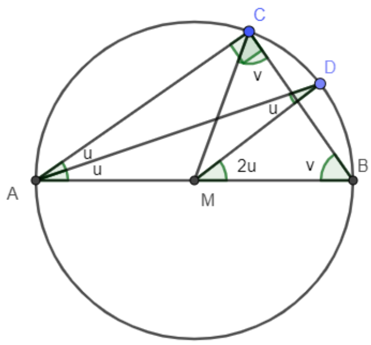
4.3.2 Användning av Lemma 2:

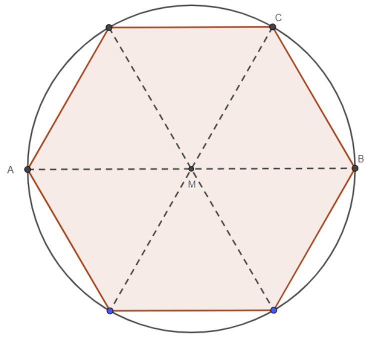
Arkimedes använde sig av lemma 2 för att räkna ut omkretsen på av ett polygon inuti en cirkel, vilket är det som ger oss en nedre begränsning för π. Vi kommer använda Lemma 2 för att räkna ut omkretsen av en 12-hörning genom att använda en 6-hörning. Målet är att med hjälp av lemma 2 beräkna sidan i 12-hörningen vilket gör det möjligt att beräkna omkretsen.

Vi studerar en regelbunden m-hörning, där Arkimedes använde $m = 3 \times 2^n$. Inuti vår m-hörning har vi diagonalen AB som är diametern i vår cirkel. På cirkeln finns B och C vilket motsvarar två efterliggande hörn i polygon. Vid dessa punkter har de vinkeln v som är lika med halva hörnvinkeln. Vi vet att $\angle CMB$ är $\frac{360}{m}$ grader, vilket leder till att $2v + \frac{360}{m} = 180$ och vi kan där med räkna ut att $v = 90 - \frac{180}{m}$. Precis som i Lemma 2 är AD en bisektris till $\angle CAB$. Vi definerar u = $\angle CAD$= $\angle DAB$. $\angle MDA = u$ eftersom $\triangle AMD$är en likbent triangel. Vi får då att $\angle BMD = 2u$ vilket vi fås då $2u + \angle AMD = \angle BMD + AMD$. Då $\angle$ ACB är rät betyder det att $2u + v = 90$grader och där med att:

$$2u = 90 - v = 90 - (90 - \frac{180}{m}) = \frac{180}{m}$$

Detta visar att $2u$ är halva medelpunktsvineln i m-hörningen. När vi skapar en 2m hörning betyder det därmed att våra punkter B,D och C är efterligande hörn i vår nya regelbunden 2m-hörning.





Lemma 2 säger:

$$\frac{AB^2}{BD^2} = 1 + \frac{(AB + AC)^2}{BC^2}$$

Vi sätter radien till 1 och den regelbundna sidan till d_m. I figuren är $BC = d_m$ och $BD = d_{2m}$. Vi använder nu Pythagoras sats vilket ger oss $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 4 - d_m^2$. Insättning i Lemma 2 ger då

$$\frac{4}{d_{2m}^2} = 1 + \frac{(2 + \sqrt{4 - d_m^2})^2}{d_m^2}$$

Vi har att $d_6 = 1$ eftersom regelbunda sidor i en 6-hörning är lika lång som radien. Med insättning av detta värde i ekvationen ovan ger det oss att $d_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. För att få ut en approximering av π med detta värde behöver vi

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} \times \frac{12}{2} \approx 3.10583$$

Där 12 kommer från att det är en 12-hörning och vi delar med 2 för att diametern i cirkeln är 2 och inte 1. 3.10583 används nu som en nedre begränsning för π. Vi kombinerar nu detta resultat med den övre begränsningen som vi räknade ut med lemma ett och kan dra slutsatsen att $3.10483 < \pi < 3,215390$. Tyvärr kan vi ej approximera π mer än till

3 när vi studerar 12-hörningar. Arkimedes använde sig av dessa lemmor för att skapa begränsningar med 96-hörningar både utanför och innanför cirkeln, vilket är 4 steg in.

5 Gregory-Leibniz π serie

En känd π serie upptäcktes oberoende av tre olika matematiker. Den kallas för Gregory-Leibniz serie och ser ut såhär $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Den förste som upptäckte serien var troligen den indiske matematikern Ninakantha. Här under kommer det presenteras mer kring dessa personer och de kommer att ske i den ordning som de påverkade upptäckten av denna serie. Ninakantha upptäckte serien på 1500-talet, men Gregory och Leibniz först på 1600-talet.[4]

5.1 Mer om Ninakantha

Ninakantha Somayaji var en indisk matematiker som föddes 1444 och dog 1544. Genom att vara född i Indien var Ninakantha en del av kastsystemet och han var från en familj som hade en möjlighet att bli lärd. Ninakantha studerade astronomi under Ravi och även Vedanta (vilket är en hinduisk filosofisk inriktning som fokuserar på att analysera och läsa gamla texter om religon). En person som Ninakantha studerade under var Damodra som var son till Paramesvara. Då Damodra följde Paramesvaras lärdomar gör det Ninakantha också till en följare av Paramesvara. Damodra var Paramesvaras son och Paramesvara var en mycket känd indisk astronom. Det finns matematiska astronomiska texter som Ninakantha skrev som överlevt tills idag.

Ninakantha viktigaste astronomiska avhandling heter Tantrasamgraha vilket täckte många viktiga områden inom indisk astronomi. I denna avhandling behandlas flera olika astronomiska fenomen i olika delar. Den berör åtminstone sju olika delar och som exempel på vad som presenterades var de första två kapitlens fokus kring planeters longituder och deras rörelser. Denna avhandlings relevans för Ninakantha som matematiker är att den använde sig av matematik från en annan indisk matematiker vid namn Madhava. Dock var det inte enbart att Ninakantha använde sig av Madhavas matematik utan även utvecklades hans resultat. Ninakantha kom fram till serien ($\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 \ldots$) genom att studera gränsen av ett uttryck för en båge av cirkeln omkrets.[7]

5.2 Vem var Gregory?

James Gregory var född i Skottland 1638. Det verkar troligt att Gregorys akademiska skicklighet kom ifrån hans mors sida, då hans morbror var en student under Viète. Det var även hans mor som började att lära Gregory i matematik i början, hon startade hans matematiska utbildning med geometri. När hans far gick bort tog Gregorys bror över hans undervisning, då han fick studera Euklides elementa vilket enligt Gregory inte var en utmaning.

Gregory hade ett enormt intresse för teleskop och efter upppmuntran av sin bror skrev en bok om detta område. Denna bok innehöll femtionio satser om reflektion och reflektion av ljus. Trotts detta ansåg Gregory inte att han kunde bygga ett teleskop då han menade att han saknade den tekniska kunskapen för att skapa de speglar som behövdes för att bygga teleskopet.

År 1664 åkte Gregory till Italien där han spenderade sin tid i Universitetet av Padua och det var där han utgav Geometrias pars Universalis 1668. Målet med skriften var att bevisa att π och e var transcendenta tal, detta misslyckades Gregory med. Gregory misslyckande var att ett av hans argument hade ett svagt fel. Dock påverkar det inte de framgångarna denna text har i andra områden som konvergens och algebraiska funktioner för att nämna några fåtal områden som denna matematiska text påverkade inom matematiken.[8]

5.3 Historia kring Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz var född i Sachsen (vilket ligger i nuvarande Tyskland) och var en matematiker och filosof. Som elev i skolan var Leibniz begåvad och i strävan att kunna läsa böcker som fanns i hans fars bibliotek började han lära sig mer avancerad latin och grekiska. I skolan fick han lära sig om Aristoteles logik om kategorisering av kunskap. Detta system var otillräckligt enligt Leibnitz vilket ledde till att han kom på idéer för att förbättra det systemet. Leibniz ideer har påverkat synen på vad ett matematiskt bevis är.

Som fjortonåring började Leibniz på universitetet där han studerade matematik och filosofi. Universitetet han var på hade dessvärre en svag matematisk utbildning men en extraordinär filosofi utbildning. Utifrån dåtidens standard var en fjortonårig universitetsstudent ung men det var flertal andra studenter i samma åldersgrupp. I samband med detta tog han en termin i Jena där han studerade under Erhard Weigel. Weigels idéer inspirerade Leibnitz att förstå att matematiska bevis vikt för andra ämnesområden vilket för honom var logik och filosofi.

Leibniz rörde sig mellan många olika akademiska institutioner under sitt liv. Efter ha rest mycket spenderade han tid i Paris där han fick akademiska kontakter vilket skapade ett intresse att fortsätta studera matematik. 1673 insåg Leibniz att han behövde utveckla sin matematiska förmåga yttligare, vilket ledde till att han fördubblade sina ansträgningar inom ämnet.[9]

5.4 Sats och bevis

5.4.1 Sats

Detta är Gregory-Leibniz serie:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Ett modernt bevis använder Maclaurinutvecklingen av arctan.

$$\arctan x = \int_0^x \tfrac{1}{1+t^2} dt = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \tfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Sätter man x=1 och låter n gå mot oändligheten, så får man Gregory-Liebniz formel, men man måste visa att resttermen går mot 0.

5.4.2 Bevis

Vi börjar med att ta geometrisk summa vilket kan skrivas som

$$\tfrac{1-z^{n+1}}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + ...z^n$$

Målet är att få vänsterledet i denna utveckling till att bli $\frac{1}{1+t^2}$ för att närma oss vårt mål vill vi att täljaren ska bli 1 och därför adderar vi $\frac{z^{n+1}}{1-z}$ vilket blir

$$\tfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + ... + z^n + \tfrac{z^{n+1}}{1-z}$$

Det vi behöver göra nu för att nå målet är att sätta variabeln $z = -t^2$ och då får vi

$$\tfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 + ...(-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \tfrac{(t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

I vänsterledet har vi nu derivatan för arctan vilket var vårt mål. Nu ska vi integrera på båda sidor på intevallet $[0, x]$ vilket leder till ekvationen

$$\arctan x = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \tfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Vi vill nu undersöka resttermen då $|x| \leq 1$. I vårt fall kommer vi enbart studera positiva x. För att bevisa Gregory-Leibniz formel behöver vi visa att resttermen $\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ går mot noll då $n \to \infty$. Eftersom allt är positiv vet vi att

$$\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^{2n+2} dt$$

För att kunna visa att resttermen går mot noll då $n \to \infty$ måste nya integralen integreras

$$\int_0^x t^{2n+2} dt = \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^x = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

Vi vill undersöka detta när $n \to \infty$. Med antagandet som är att $|x| \leq 1$ samt att x är positivt ser vi att det största värde täljaren antar är 1. Då täljaren ligger mellan $0 < x^{2n+3} \leq 1$ (vilket innebär att den är begränsad) och nämnaren kommer att växa över alla gränser. Utifrån det kan vi dra denna slutsats:

$$\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

Genom instängningsregeln visar vi att resttermen går mot noll för stora n, vilket skulle visas. Eftersom restermen går mot noll under de förhållanden som beskrivits ovan kan vi nu skriva detta utryck:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...$$

vilket gäller för alla $0 \leq x \leq 1$. Avslutningsvis sätts $x = 1$ vilket gör att vi upnår Gregory-Leibniz serie.

5.5 Långsam konvergens påverkan på approximeringsmöjligheter

Denna utveckling konvergerar långsamt, vilket betyder att man måste ta med ett mycket stort antal termer för att få ett bra närmevärde. Vi kommer att undersöka hur antalet av termer påverkar antalet korrekta decimaler för π. Det som konvergerar långsamt i maclaurinutvecklingen är denna restterm:

$$(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

För att kunna studera denna restterm ordentligt kommer vi att dela upp maclaurinutvecklingen på detta sätt:

$$R_n(x) = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

Och sedan ta resterande av maclaurinutvecklingen i en annan funktion:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

vilket leder till

$$\arctan x = S_n(x) + R_n(x).$$

Detta stämmer eftersom

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt.$$

Under beviset gjorde vi uppskattningen att

$$\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \leq \int_0^x t^{2n+2}dt$$

om x är positivt. Sedan gjordes även denna observation

$$\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Vilket leder till att:

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

Vi behöver dock också ha samma antagande som under beviset vilket är att $|x| \leq 1$. Vi utgår från Gregory-Leibniz formel vilket ger värdet $\frac{\pi}{4}$ då x=1. Vi kan då skriva om den formeln till detta:

$$\frac{\pi}{4} = S_n(1) + R_n(1).$$

För att lösa ut π självständigt behöver vi multiplicera båda sidor med 4 vilket ger oss detta utryck:

$$\pi = 4S_n(1) + 4R_n(1).$$

För att testa hur mycket felmarignal vi får bestäms några test parametrar för n vilket avgör hur nära vi kan approximera π eller snarare vilken mängd av decimialtal som blir korrekt. Dessa test görs genom att använda matlab och undersöka olika variabler.

Vi börjar med en ett lågt n. Låt oss approximera π då n= 100. Vi börjar med att undersöka $S_{100}(1)$ och ser vilket värde det antar när vi sätter in det i matlab

$$4S_{100}(1) = \sum_{k=0}^{100} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \approx 3.15149$$

och efter detta behöver vi dessutom addera resttermen vilket är

$$4R_{100}(1) \leq \frac{4}{203} \approx -0.02$$

Utifrån detta kan man se att restermen kommer påverka den andra decimalen i approximationen vilket gör att man kan enbart dra en slutsats kring den första decimalen. Vi kan då enbart approximera

$$\pi \approx 3.1.$$

För att sätta det i en tidigare kontext när vi undersökte Arkimedes approximationer kunde han fastställa π till

$$\pi \approx 3.14.$$

För att försöka fastställa pi för flera decimaler genom samma model provar vi yttligare några n. De n som testas är nu n=1000, n=1 000 000, n= 1 000 000 000. När n=1000

$$4S_{1000}(1) = \sum_{k=0}^{1000} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \approx 3.142591654339544$$

och

$$4R_{1000}(1) \leq \frac{4}{2003} \approx -0.002$$

vilket leder till att man kan bestämma ytterligare en decimal. Vi fortsätter undersökningen med n= 1 000 000 vilket enligt matlab ger värdet

$$4S_{1000000}(1) = \sum_{k=0}^{1000000} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \approx 3.141593653588775$$

och

$$4R_{1000000}(1) \leq \frac{4}{2000003} \approx -0.000002$$

vilket ger oss fem decimaler och betyder att vi kan approximera

$$\pi \approx 3.14159.$$

Nu är enbart den sista n= 1000000000 kvar. Med samma metod testar vi även detta värde i matlab och får ut

$$4S_{1000000000}(1) = \sum_{k=0}^{1000} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \approx 3.141592654588051$$

och

$$4R_{1000000000}(1) \leq \frac{4}{2000000003} \approx -0.000000002$$

detta ger oss yttligare 3 decimaler från det tidigare testet.

5.5.1 Slutsats

Utifrån testen som gjorts kan man se ett mönster, för att göra det mer överskådligt kommer nu resultaten av testet placeras i en tabell.

$n =$	$4S_n(1) \approx$	$4R_n(1) \leq$	Korrekta decimaler
$100(10^2)$	3.15149	0.02	1
$1000(10^3)$	3.142591654339544	0.002	2
$1000000(10^6)$	3.141593653588775	0.000002	5
$1000000000(10^9)$	3.141592654588051	0.000000002	8

Vi definerar n till 10^z där z= antal nollor i n. Av de få test som genomförts tycks formeln för antallet korrekta decimaler(y) ges av formeln $y = n - 1$. Därmed kan vi dra slutsatsen att för varje gång vi multipicerar med 10 fås en ny korrekt decimal av π.

6 Eulers serie:

6.1 Om matematikern Euler

Leonard Euler var född 1707 i Schweiz och dog 1783. Euler lärde sig matematik från sin far som var präst med begränsade matematiska kunskaper. Dessa kunskaper räckte för att ge Euler matematiska grundkunskaper. När Euler senare började skolan lärde de inte ut något mer om matematik. När Euler växte upp sökte till ett universitet då hans far ville att Euler skulle följa hans fotspår och bli präst. Under sin utbildning kände Euler att inget var lika intressant som matematik och tillsammans med en familjevän lyckades de övertala hans far att låta Euler byta inriktning.

När han blev färdigutbildad började han arbete på St Petersburgs vetenskapsakademien i Ryssland. Där träffade han sin fru och de fick tretton barn (men bara 5 överlevde). Euler själv påstod att några av hans största matematiska upptäckter gjordes när han var omringad av lekande barn. Eulers matematik har påverkat många matematiska områden, ett par av dem är geometri, trigonometri och talteori. Vissa notationer som används idag kommer från Euler som till exempel att man skriver f(x) för funktioner, e som basen för naturliga logaritmer och π för pi.[10]

6.2 Eulers π serien

Den approximering som sker vid användning av Eulers serie ser ut på detta sätt:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Detta kommer visas genom det bevis som William J. Leveques presenterade i en lärobok 1956. Beviset består av två delar där man med hjälp av en dubbelintegral visar att den är lika med både vänsterledet och högerledet av serien. Då det är samma dubbel integral leder det till man bevisar att vänsterledet = högerledet. [4]

6.2.1 Bevis

Vi börjar med att sätta

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy$$

Vi vill nu utveckla $\frac{1}{1-xy}$ genom att utveckla det i geometrisk serie. Formeln för geometrisk summa ser ut såhär:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + ...$$

genom att sätt $t = xy$ får vi denna ekvation på detta sätt:

$$\frac{1}{1-xy} = 1 + xy + (xy)^2 + (xy)^3 + ... = \sum_{n\geq 0} (xy)^n$$

Insättning i vår dubbelintegral leder till detta utryck:

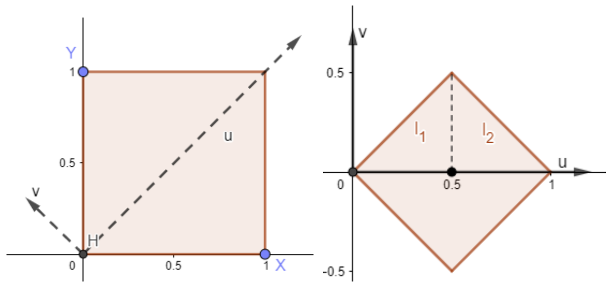
$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n\geq 0} (xy)^n dxdy = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^n dxdy$$

Vi får flytta ut summa utanför integralerna men varför kommer ej presenteras i denna uppsats, förklaring finns i kapitel 6.6 i [11]. Vi kan sedan dela upp dem i två intergraler och genomföra integrering för att få detta

$$\sum_{n\geq 0} (\int_0^1 x^n dx)(\int_0^1 y^n dy) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

Utrycket vi får är då detsamma som utrycket i vänsterledet på Eulers serie.

Högerledet kan hittas genom att göra ett variabelbyte i I. Där kordinaterna är $u := \frac{y+x}{2}$ och $v := \frac{y-x}{2}$. Då det sker ett variabelbyte skapas ett nytt integrationsområde. Det nya integrationsområdet är en kvadrat med hörn (0,0), $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, (1,0) och $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$. Det gamla integrationsområdet och det nya integrationsområdet illusteras nedan.



Detta ger oss:

$$\frac{1}{1-u^2+v^2}$$

Detta kommer dock kräva att vi substituerar ut dxdy mot 2dudv vilket vi får genom att använda Jacobis determinant. Vilket fungerar genom att ta våra nya variabler dvs $x = u - v$ och $y = u + v$ och insättning av deras derivator i en 2×2-matris. Det ser ut såhär:

$$det\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = det\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Då det nya intergreringsområdet och funktionen är symmetrisk längs u-axeln kommer vi därför beräkna den två gånger, en integral för nedre delen av området och en för övre delen. Detta i kombination med omvandlingen dxdy leder det till att vi behöver multiplicera varje integral med 4. Då får vi detta utryck:

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}}(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2})du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2})du$$

Vi kan nu dela upp I till två nya variabler I_1 och I_2 vilket ger oss.

$$I_1 = 4\int_0^{\frac{1}{2}}(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2})du$$

och

$$I_2 = 4\int_{\frac{1}{2}}^1(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2})du$$

Observera följande formel:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

Genom att sätta $a = \sqrt{1-u^2}$ ger det oss följande

$$\int \frac{dv}{1-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{v}{\sqrt{1-u^2}}$$

Vi applicerar det nu på våra I och där av får vi:

$$\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}$$

När de läggs ihop tillbaka till en variabel får vi:

$$4\int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{1-u^2}})du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 (\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}})du$$

Genom att definera värderna vi fått i vårt I på detta sätt $g(u) := \arctan(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}})$ och genom uträkning av får vi $g(u)$ derivata blir $g'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. Vi definerar $h(u) := \arctan(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}) = \arctan(\sqrt{\frac{1+u}{1-u}})$ och räknar ut $h(u)$ derivata är $h'(u) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. Dessa definitioner görs för att vi vill applicera denna formel på vårt I:

$$\int_a^b f'(x)f(x)dx = \left[\frac{1}{2}f(x)^2\right]_a^b = \frac{1}{2}f(b)^2 - \frac{1}{2}f(a)^2.$$

Används detta på I sker denna utveckling:

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} g'(u)g(u)du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 -2h'(u)h(u)du \\ &= 2\left[g(u)^2\right]_0^{\frac{1}{2}} - 4\left[h(u)^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= 2g(\frac{1}{2})^2 - 2g(0)^2 - 4h(1)^2 + 4h(\frac{1}{2})^2 \\ &= 2(\frac{\pi}{6})^2 - 0 - 0 + 4(\frac{\pi}{6})^2 \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis har vi vet vi nu att $I = \frac{\pi^2}{6}$ och att $I = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$. Detta betyder att vi kan skriva

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

vilket skulle visas.

7 Talet π är irrationellt

För att bevisa att π är ett irrationelt tal använder jag mig av Ivan Nivens bevis som en grund. Beviset som Niven presenterar är kort och kompakt vilket leder till ett behov att utveckla det ihopp om att skapa en mer klar bild av hur beviset fungerar.

Huvudtanken med beviset är att ange en egenskap som ett rationellt tal skulle besitta och sedan visa att π inte har den egenskapen. Utifrån beviset kommer den delas upp i egenskap ett och två. Sedan kommer det ske en bevisförklaring för dessa som kommer vara mer utvecklad. [5]

7.1 Bevis för irrationalitet

Vi ska göra ett motsägelsebevis och antar därför att π är rationellt, $\pi = \frac{a}{b}$. Vi vet även att $a > b$, eftersom värdet på π är större än 1 vilket betyder det att ej finns ett heltal som både är större än täljaren och får hela utrycket till större än 1. Heltalen a och b kommer sedan att användas i ett polynom som baserar sig på ett annat heltal n (ej definerat ännu) som ser ut på detta sätt

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

Dessutom är F(x) definerat baserat på derivator av f(x) på detta sätt:

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) + ... + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

7.1.1 Egenskap ett

Integralen

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx$$

är alltid ett heltal.

7.1.2 Bevis av egenskap 1

Vi sätter

$$g(x) = n!f(x) = x^n(a - bx)^n.$$

Polynomet g har heltalskoefficienter eftersom a och b är heltal. Termerna i g har grad$\leq 2n$. $g(x)$ skrivs på detta sätt

$$g(x) = c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1} + ... + c_{2n}x^{2n}$$

och där c_i är ett heltal. Det vi är intresserande av är värdet av $g^{(i)}(0)$. Därför tittar vi på $D^i(x^k)$. D^i betyder ite derivatan. Utifrån detta behöver vi undersöka utfall beroende på förhållandet mellan i och k. Ifall $i < k$ är

$$D^i(x^k) = k(k-1)...(k-i+1)x^{k-i},$$

vilket blir 0 ifall $x = 0$. Då $i > k$ är $D^i(x^k) = 0$ för alla x. Nu är det enbart kvar $i = k$ vilket ger $D^k(x^k) = k!$.

Det vi får nu är $g^{(i)}(0) = 0$ för $i < n$ och för $i > 2n$. Vi tittar nu på intervallet $n \leq i \leq 2n$. Det finns bara en term i $g^{(i)}(x)$ som har grad i och dess värde är $c_i \times i!$, vilket betyder att $g^{(i)}(0) = c_i \times i!$. Detta leder till att $f^{(i)}(0) = \frac{c_i \times i!}{n!}$ vilket är ett heltal då $i \geq n$. Detta i sin tur betyder att då $x = 0$ är $f(x)$ och $f^{(i)}(x)$ heltalslösningar.

Detta stämmer även för $x = \frac{a}{b} = \pi$ vilket visas genom att göra denna insättning

$$\begin{aligned} f(\frac{a}{b} - x) &= \frac{(\frac{a}{b} - x)^n(a - b(\frac{a}{b} - x))^n}{n!} \\ &= \frac{(\frac{a}{b} - x)^n(a - a + bx)^n}{n!} \\ &= \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \end{aligned}$$

Vilket ger oss samma funktion som f(x). Utifrån detta kan man fastslå att för x=0 och för $x = \frac{a}{b}$ att det finns ett motsvarande heltalsvärde för dem. Vi får

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) &= F''(x)\sin x + F'(x)\cos x - F'(x)\sin x + F(x)\sin(x) \\
&= F''(x)\sin x + F(x)\sin x \\
&= (F''(x) + F(x))\sin x \\
&= f(x)\sin x
\end{aligned}$$

Sista steget fås genom deriveringen av F(x) som gjordes tidigare och när man deriverar den två gånger och adderar F(x) blir det endast f(x) kvar. Vi ska nu integrera över $[0, \pi]$:

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0) = F(\frac{a}{b}) + F(0)$$

Tidigare etablerade vi att f(x) och alla dess derivator där $x = 0$ eller $x = \frac{a}{b}$ är heltal. Eftersom $f(x)$ och alla dess derivator är heltal är $F(x)$ också heltal. Vi etablerar då egenskap 1 eftersom denna integral alltid måste vara ett heltal.

7.1.3 Egenskap 2

Följande förhållande gäller

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

när $0 < x < \pi$.

7.1.4 Bevis av egenskap 2

För att bevisa den nedre gränsen vet vi att $\sin x$ är positiv för alla x-värden mellan 0 och π. Vi vet att f(x) är positivt då $a > bx$ under intervallet $0 < x < \pi$. Anledningen till varför $a > bx$ kan förklaras då x = π. Utifrån antagandet om att $\pi = \frac{a}{b}$ kan vi skriva det som $a = \pi b$ och det betyder att ifall $a - b\pi = 0$ då π ej är i intervallet för x och alla x i intervallet är mindre än π betyder det att $a > bx$ stämmer.

Eftersom båda $\sin x$ och f(x) är positiva leder en multiplicering med dem till ett fortsatt positivt tal. Detta ger oss den nedre gränsen. För den övre gränsen förstår vi att $(a-bx)^n$ minskar i storlek i samband med att x ökar. Detta leder till att $a^n > (a-bx)^n$. Dessutom är x störst för vårt intevall då $x = \pi$. Utifrån detta fås sammanbandet:

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

Då sinx är en positiv funktion och att den aldrig blir större än 1 gör det att det egenskap 2 håller.

7.1.5 Motsägelse av egenskaper

Utifrån egenskap två ska vi nu integrera hela utrycket vilket ger oss

$$\int_0^\pi 0dx < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < \int_0^\pi \frac{\pi^n a^n}{n!} dx$$

Utför vi interationen får vi

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$$

Vi tittar ifall $\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!} \to 0$ då $n- > \infty$ genom att skriva om det såhär

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(\pi a)^n}{n!} = 0.$$

Detta stämmer då

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

är ett standardgränsvärde. Instängningsregeln används sedan på vår integral för att visa att den också närmar sig 0 för stora n.

Utifrån dessa egenskaper kan vi bevisa att π är irrationellt. Egenskap 1 säger att integralen alltid är ett heltal. Men enligt egenskap 2 kommer intergralen närma sig 0 för stora n. Eftersom integralen är positiv kommer den aldrig att bli 0. Genom detta kan man sätta integralen ligger i ett intevall mellan 0 och 1 för stora n. Detta visar att egenskaperna är motsägande vilket leder till att antagandet att $\pi = \frac{a}{b}$ inte stämmer. Då har vi har bevisat att π är irrationelt.

8 Källförteckning

[1] Wikipedia, pi 21/04-2020. Taget från: https://sv.wikipedia.org/wiki/Pi

[2] Katz, Victor J. (1998), A History of Mathematics, An Introduction, 2nd edition, Addison- Wesley Educational Publishers, Inc.

[3]Berggren, Lennart Borwein, Jonathan Borwein, Peter (2004), Pi: A Source Book, third edition, Springer-Verlag New York, LLC.

[4]Aigner, Martin M. Ziegler, Günter(2003), Proofs from THE BOOK, third edition, Springer-Verlag New York.

[5] Niven, Ivan. A simple proof that π is irrational. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), no. 6, 509. https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183510788

[6] O'Connor, JJ Robertson, EF(1999), Archimedes of Syracuse https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archimedes/

[7] O'Connor, JJ Robertson, EF(2000), Nilakantha Somayaji. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nilakantha/

[8] O'Connor, JJ Robertson, EF(2000), James Gregory.

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gregory/

[9] O'Connor, JJ Robertson, EF(1998), Gottfried Wilhelm von Leibniz. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz/

[10] O'Connor, JJ Robertson, EF(1998) Leonhard Euler. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/

[11]Person, Arne Böiers, L-C (2005) Analys i fler variabel, tredje upplagan, Studentlitteratur AB, Lund.