SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Algebrans fundamentalsats

av

Setayesh Kormi Nouri

2020 - No K43

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Algebrans fundamentalsats

Setayesh Kormi Nouri

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2020

Abstract

Finding roots for polynomial of the form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

where $a_0, \ldots, a_n$ are coefficients and n is a non-negative integer is one of the oldest problems in mathematics. The coefficients can be integers, rational, real or complex numbers which are combined with the variables by addition, subtraction and multiplication. The fundamental theorem of algebra is a mathematical theorem for complex polynomials. According to this theorem, each polynomial $p(z)$ of degree $n > 0$ with complex coefficients has at least one complex solution (Fundamental theorem of algebra, 2020). A real polynomial has also at least one solution in the complex number plane because real numbers are a subset of complex numbers. The fundamental theorem of algebra can be proved using different methods, such as geometric and complex analytical. In this essay, we focus on a historical perspective of the fundamental theorem of algebra and two analytical proofs based on Liouville's theorem and other theorems from multidimensional analysis. In addition, we examine a corollary to the fundamental theorem of algebra.

Förord

Det finns ett antal personer som har hjälpt mig att få ihop detta självständiga arbete och jag vill gärna tacka dem. Jag vill säga ett stort tack till min handledare Torbjörn Tambour för hans ämnesförslag, utomordentliga handledning, konstruktiva kritik och korrekturläsning under arbetets gång. Ett stort tack till Alan Sola som har granskat mitt självständiga arbete. Dessutom vill jag tacka min examinator Rikard Bögvad. Jag vill också rikta ett stort tack till min familj som har stöttat mig under hela min lärarutbildning. Ett speciellt tack till Soroush för hans uppmuntran och för att han alltid tror på mig. Sist men inte minst vill jag tacka min fina vän Berna för hennes motiverande, stödjande och positiva ord.

Innehållsförteckning

1. Inledning ---9

1.1. Introduktion ---9

1.2. Olika sätt att skriva komplexa tal ---9

1.2.1. Rektangulär form ---9

1.2.2. Polär form -- 10

1.2.3. Potensform eller exponentiell form --11

1.3. Cirkel med medelpunkt i origo --11

1.4. Cirkel med medelpunkt i en annan punkt i origo ---12

2. Bakgrund till algebrans fundamentalsats --14

2.1. Bakgrund till algebrans fundamentalsats från 1608 till 1637 --------------------------14

2.2. Bakgrund till algebrans fundamentalsats från 1702 till 1742 --------------------------14

2.3. Bakgrund till algebrans fundamentalsats 1746 --16

2.4. Bakgrund till algebrans fundamentalsats 1779 --17

2.5. Bakgrund till algebrans fundamentalsats från 1814 till 1821 --------------------------20

3. Satsen om största och minsta värde --21

3.1. Inledning --21

3.2. Bevis av satsen om största och minsta värde ---21

4. Algebrans fundamentalsats – Bevis I ---24

4.1. Inledning --24

4.2. Analytisk funktion, Cauchys integralsats och integralformel ---------------------------24

4.2.1. Analytisk funktion ---24

4.2.2. Cauchys integralsats --24

4.2.3. Cauchys integralformel --25

4.3. Liouvilles sats --- 27

4.4. Algebrans fundamentalsats – Bevis I ---29

5. Algebrans fundamentalsats – Bevis II ---31

5.1. Inledning ---31

5.2. Algebrans fundamentalsats – Bevis II ---31

6. En följdsats till algebrans fundamentalsats ---36

6.1. Inledning ---36

6.2. Faktorsatsen --- 36

6.3. En följdsats till algebrans fundamentalsats ---36

6.4. Olika sätt att formulera algebrans fundamentalsats ---37

7. Referenslista ---38

1

Inledning

1.1. Introduktion

Att hitta rötter till ett polynom av formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

där a_0, …, a_n är koefficienter och n är ett icke negativt heltal är ett av matematikens äldsta problem. Koefficienterna som kan vara heltal, rationella, reella eller komplexa tal kombineras med variablerna genom addition, subtraktion och multiplikation. Algebrans fundamentalsats är en matematisk sats som handlar om komplexa polynom. Enligt denna sats har varje polynom $p(z)$ av graden $n > 0$ med komplexa koefficienter minst en komplex rot (Fundamental theorem of algebra, 2020). Även ett reellt polynom har minst en lösning i det komplexa talplanet eftersom reella tal är delmängd av komplexa tal. Algebrans fundamentalsats kan bevisas med hjälp av olika metoder bland annat geometriska och komplexanalytiska metoder. I detta självständiga arbete fokuserar vi på historien som ligger bakom algebrans fundamentalsats samt två analytiska bevis som baserar sig på Liouvilles sats och andra satser från flerdimensionellanalys. Dessutom kommer vi att gå igenom en följdsats till algebrans fundamentalsats. Till att börja med kommer vi kort att repetera några matematiska och geometriska egenskaper hos komplexa tal.

1.2. Olika sätt att skriva komplexa tal

I detta kapitelavsnitt kommer vi att gå igenom hur ett komplext tal kan skrivas på olika former. Vi kommer att använda Böiers och Persson (2010:459-473). Ett komplext tal z kan skrivas på

- rektangulär form,
- polär form,
- potensform eller exponentiell form.

1.2.1. Rektangulär form

Med ett komplext tal på den rektangulära formen menar vi att $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$. För varje komplext tal på denna form gäller att

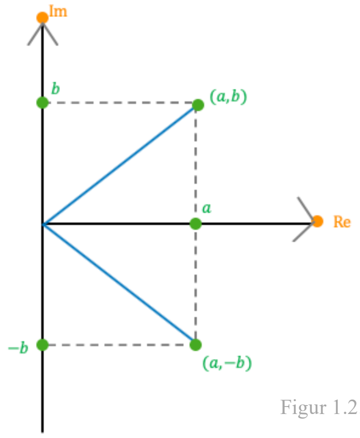
- a är realdelen av z som betecknas med $Re(z)$,
- b är imaginärdelen av z som betecknas med $Im(z)$,
- i är den imaginära enheten som har egenskapen $i^2 = -1$.

Alternativt kan vi skriva $z = a + b\sqrt{-1}$. Vi kan representera ett komplext tal i det komplexa talplanet som är ett tvådimensionellt koordinatsystem (Böiers & Persson 2010:459). Den horisontella koordinataxeln står för $Re(z)$ medan den vertikala koordinataxeln står för $Im(z)$. Ur figur 1.2.1 kan vi se att (a, b) är koordinaterna för z i det komplexa talplanet. Ett komplext tal z kan tolkas som en punkt, det vill säga $z = (a, b)$, i det komplexa talplanet. En annan geometrisk tolkning av det komplexa talet är att vi kan representera z som en vektor från origo till punkten (a, b).

Konjugering av det komplexa talet $z = a + bi$ som betecknas med $\bar{z}$ definieras som

$$\bar{z} = a - bi$$

där $\bar{z}$ är en spegling av z i den reella koordinataxeln (Böiers & Persson 2010:466).

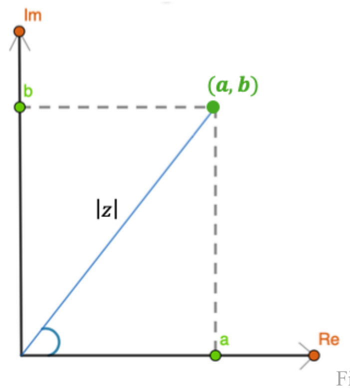


Figur 1.2.1

Absolutbeloppet av det komplexa talet $z = a + bi$ som betecknas med $|z|$ definieras som

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

vilket är ett reellt tal (Böiers & Persson 2010:467). Om vi tittar på figur 1.2.2 kan vi notera att absolutbeloppet av z följer direkt ur Pythagoras satsen. Med andra ord är $|z|$ avståndet mellan origo och punkten (a, b) i det komplexa talplanet.

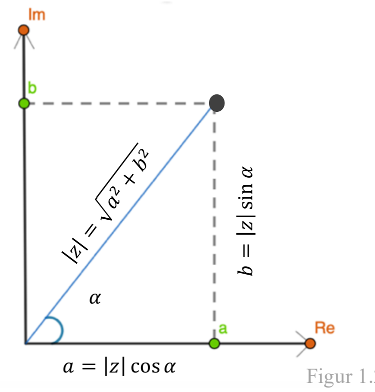


Figur 1.2.2

1.2.2. Polär form

Med hjälp av några grundläggande trigonometriska samband kan vi skriva ett komplext tal på polär form. Enligt figur 1.2.3 har vi en rätvinklig triangel där α är vinkeln mellan $|z|$ och den horisontella koordinataxeln. Vinkeln α är argumentet av z som kan bestämmas genom $\alpha = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Vi kan använda definition av cosinus och sinus för att få fram a:s och b:s polära koordinat, det vill säga $a = |z| \cos\alpha$ och $b = |z| \sin\alpha$ (Böiers & Persson 2010:472).



Figur 1.2.3

Då kan vi skriva det komplexa talet $z = a + bi$ på följande sätt

$$z = a + bi = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

1.2.3. Potensform eller exponentiell form

Vi har sett hur ett komplext tal kan skrivas på rektangulär och polär form. Enligt Böiers och Persson (2010:473) kan vi observera att faktorn $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i den polära formen motsvarar ett komplext tal som ligger på enhetscirkeln eftersom

$$|\cos\alpha + i\sin\alpha|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Under 1700-talet definierade den schweiziske matematikern Leonard Euler (1707-1783) att

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

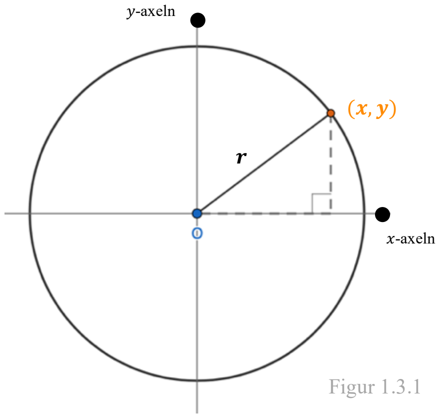
Detta exponentiella skrivsättet kallas för Eulers formel. Jämförelse av Eulers formel med den polära formen ger oss att $|z|$ saknas i Eulers formel. Vi multiplicerar både vänster- och högerledet med $|z|$ i Eulers formel

$$|z|e^{\alpha i} = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

vilket är den exponentiella formen av z.

1.3. Cirkel med medelpunkt i origo

I olika delar av varje kapitel använder vi sambandet $|z| = r$ och vi behöver veta vad detta innebär. I det här kapitelavsnittet förklarar vi vad $|z| = r$ betyder genom att utgå ifrån Circle (2020). Låt oss säga att vi har en cirkel med radien r och medelpunkten O som ligger i origo. Om vi tittar på figur 1.3.1 är (x, y) en godtycklig punkt som ligger på cirkelns rand. Med hjälp av en rätvinklig triangel kan vi bestämma avståndet mellan origo och varje punkt som ligger på cirkelns rand. I denna rätvinkliga triangel är r triangelns hypotenusa, x är triangelns horisontella katet och y är triangelns vertikala katet.



Figur 1.3.1

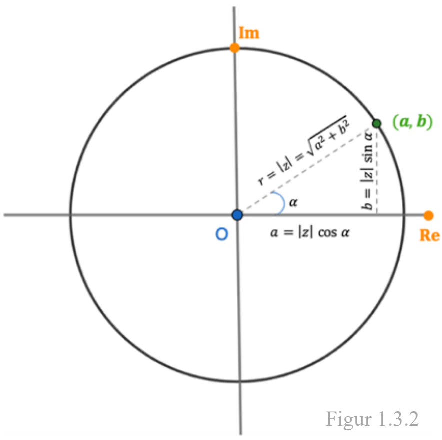
Vi kan se att r beskriver avståndet mellan origo och punkten (x, y). Genom Pythagoras sats kan vi bestämma avståndet mellan origo och punkten (x, y), det vill säga

$$x^2 + y^2 = r^2$$

så att

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vi har sett att $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ beskriver avståndet mellan origo och punkten (a, b) i det komplexa talplanet. Låt oss titta på figur 1.3.2. Vi kan notera att $|z|$ som är lika med cirkelns radie måste vara större eller lika med 0, och α som är argumentet till z har intervallet $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.



Figur 1.3.2

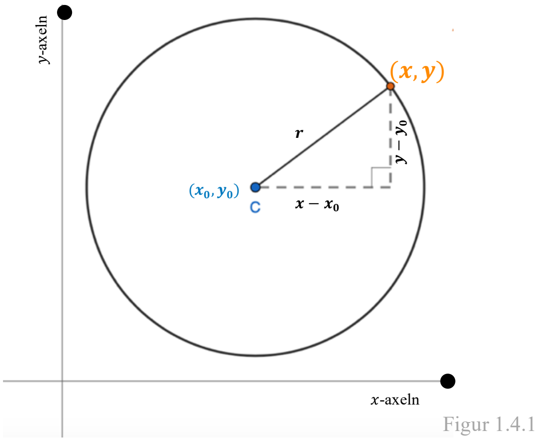
Ur figur 1.3.2 kan vi se att avståndet mellan origo och punkten (a, b) är

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

När vi har en cirkel med medelpunkt i origo beskriver vi avståndet mellan origo och punkter som ligger på cirkelns rand med hjälp av $|z| = r$.

1.4. Cirkel med medelpunkt i en annan punkt än origo

I detta kapitelavsnitt kommer vi att fokusera på en cirkel med medelpunkt i en annan punkt än origo med hänvisning till Circle (2020). Låt oss säga att vi har en cirkel med radien r och medelpunkten C i punkten (x_0, y_0) som inte är belägen i origo. Punkten (x, y) är en godtycklig punkt som är placerad på cirkelns rand. Enligt figur 1.4.1 gäller att r är triangelns hypotenusa, $(x - x_0)$ är triangelns horisontella katet och $(y - y_0)$ är triangelns vertikala katet.



Figur 1.4.1

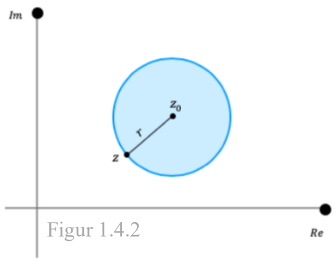
Vi vill bestämma avståndet mellan punkterna (x_0, y_0) och (x, y). Precis som vi har sett tidigare kan vi använda Pythagoras sats. Då får vi fram att

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

så att

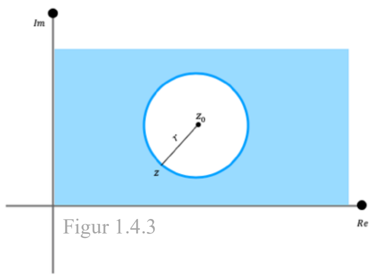
$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

vilket i sin tur är det generella sambandet för cirkelns ekvation. I vissa kapitelavsnitt skriver vi exempelvis $|z - z_0| = r$. Med detta samband menar vi att vi har en cirkel vars medelpunkt inte nödvändigtvis är origo, det vill säga z_0. Då beskriver vi avståndet mellan z som är en punkt belägen på cirkelns rand och z_0 genom $|z - z_0| = r$.


Figur 1.4.2

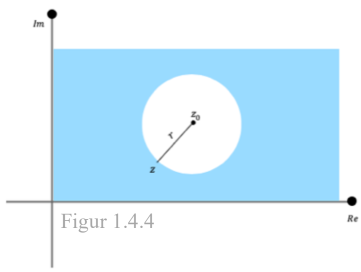
$|z - z_0| \leq r$

Punkter som ligger inne i cirkeln eller på cirkelns rand.


Figur 1.4.3

$|z - z_0| \geq r$

Punkter som ligger utanför cirkeln eller på cirkelns rand.


Figur 1.4.4

$|z - z_0| > r$

Punkter som ligger utanför cirkeln.

2

Bakgrund till algebrans fundamentalsats

2.1. Bakgrund till algebrans fundamentalsats från 1608 till 1637

Algebrans fundamentalsats har en ganska lång historia. Den tyske matematikern Peter Roth (-1617) brukar nämnas som den förste matematikern som försökte ge ett bevis för polynom med reella koefficienter. I boken ”*Arithmetica Philosophica*” som publicerades år 1608 hävdade Roth att varje reellt polynom av graden n har precis n rötter (Fundamental theorem of algebra, 2020). År 1629 kom boken ”*L'invention nouvelle en l'Algèbre*” där den franske matematikern Albert Girard (1595-1632) påstod att Roths bevis är sant om polynomet är fullständigt. Med fullständigt menade han att alla koefficienter i ett polynom av graden n måste vara nollskilda (Fundamental theorem of algebra, 2020). Girard presenterade inget bevis, men däremot motiverade han sitt påstående med hjälp av några exempel. Han visade bland annat att ekvationen

$$x^4 - 4x + 3 = 0$$

har lösningarna

$$x_{1,2} = 1,$$

$$x_3 = -1 + i\sqrt{2},$$

$$x_4 = -1 - i\sqrt{2}.$$

Vi kan observera att Girard trodde på sitt påstående för *alla* polynom eftersom koefficienterna till x^3 och x^2 är lika med 0 i det ovanstående exemplet. Girard påstod inte om att lösningarna alltid måste vara komplexa tal, det vill säga ha formen $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$ (Ebbinghaus, Ewing, Lamotke, Hermes & Hirzenruch, 2012:99). Han lämnade därmed möjligheten öppen för lösningar som inte är komplexa. Den franske matematikern René Descartes (1596-1650) publicerade Descartes teckenregel i boken ”*La Géométrie*” år 1637. Denna regel anger antalet möjliga positiva reella rötter till ett polynom, vilket är lika med antalet teckenväxlingar hos koefficienterna (Descartes teckenregel, 2020). Enligt Descartes teckenregel har polynomet

$$x^5 + 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 3 = 0$$

med teckenmönstret $(+ + - + -)$ maximalt tre positiva rötter. Koefficienterna som inte är nollskilda såsom koefficienten till x i detta exempel räknas inte med i antalet teckenväxlingar.

2.2. Bakgrund till algebrans fundamentalsats från 1702 till 1742

År 1702 påstod den tyske matematikern Gottfried Leibniz (1646-1716) att vissa polynom inte kan skrivas som produkter av första- och andragradspolynom (Ebbinghaus et al. 2012:100). Han gav som exempel

$$x^4 + a^4$$

där a är ett nollskilt reellt tal. Han hävdade att i faktoriseringen

$$x^4 + a^4 = (x^2 - a^2 i)(x^2 + a^2 i) = (x + a\sqrt{i})(x - a\sqrt{i})(x + a\sqrt{-i})(x - a\sqrt{-i})$$

går det inte att para ihop faktorerna så att produkterna blir reella polynom av grad 2 (Ebbinghaus et al. 2012:100). Med den matematiska kunskapen som vi har idag vet vi att $\sqrt{i}$ och dess konjugat $\sqrt{-i}$ kan skrivas på formen $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$. Vi har $z = a + bi$ och vi vill bestämma z så att $z^2 = i$. Vi kan observera att

$$i = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi. \qquad (1)$$

Av (1) följer det att

$$a^2 - b^2 = 0 \text{ så att } a^2 = b^2, \qquad (2)$$

$$2ab = 1 \text{ så att } a = \frac{1}{2b}. \qquad (3)$$

Vi sätter $a = \frac{1}{2b}$ i (2)

$$\frac{1}{4b^2} = b^2, \qquad (4)$$

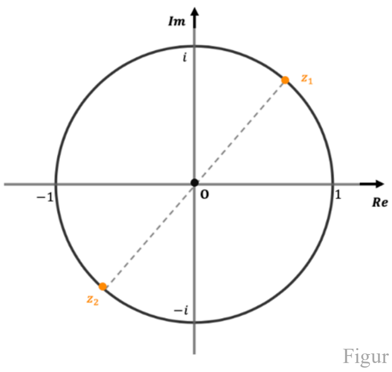
vilket i sin tur ger oss att $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Eftersom $a^2 = b^2$ får vi fram att $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Då finns det två z som uppfyller villkoret $z^2 = i$, det vill säga

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

och

$$z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Med andra ord är kvadratroten ur i lika med z_1 och z_2.



Figur 2.2.1

Multiplikation av ett komplext tal $z = a + bi$ med dess konjugat $\bar{z} = a - bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$ är

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

vilket är ett reellt icke negativt tal. Om Leibniz hade vetat att $\sqrt{i}$ och $\sqrt{-i}$ kan skrivas på formen $a + bi$ skulle han då se att produkten av konjugatparen $(x + a\sqrt{i})(x + a\sqrt{-i})$ och $(x - a\sqrt{i})(x - a\sqrt{-i})$ är reella. Istället för det falska påståendet skulle han ha fått

$$x^4 + a^4 = \left(x^2 + a\sqrt{2}\,x + a^2\right)\left(x^2 - a\sqrt{2}\,x + a^2\right).$$

År 1742 skrev den schweiziske matematikern Leonhard Euler (1707-1783) ett brev till Nikolaus Bernoulli (1687-1759) som också var en schweizisk matematiker. I brevet påstod Euler att Leibniz hade fel, men han skrev inget bevis för att motivera sitt påstående. Bernoulli tyckte att Eulers påstående inte stämmer och han påstod att fjärdegradspolynomet

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$$

inte kan skrivas som produkt av två reella andragradspolynom (Ebbinghaus et al. 2012:100). Detta fjärdegradspolynom har följande lösningar

$$z_1 = 1 + \sqrt{2 + i\sqrt{3}},$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{2 - i\sqrt{3}},$$

$$z_3 = 1 - \sqrt{2 + i\sqrt{3}},$$

$$z_4 = 1 - \sqrt{2 - i\sqrt{3}}.$$

Euler insåg att produkt av konjugatparen, $z_1 z_2$ och $z_3 z_4$, ger två reella andragradspolynom

$$(x^2 - (2 + \alpha)x + 1 + \sqrt{7} + \alpha)(x^2 - (2 - \alpha)x + 1 + \sqrt{7} - \alpha)$$

där α är $\sqrt{4 + 2\sqrt{7}}$.

2.3. Bakgrund till algebrans fundamentalsats 1746

Puiseux-serier är en generalisering av potensserier där negativa och rationella potenser av den okända variabeln kan förekomma. Enligt Puiseux series (2020) gäller att "if K is a field (such as the complex numbers) then we can define the field of Puiseux series with coefficients in K informally as the set of expressions of the $f = \sum_{k=k_0}^{+\infty} c_k T^{k/n}$ where n is a positive integer and k_0 is an arbitrary integer". Det var först år 1676 som Puiseux-serier introducerades av den engelske matematikern Isaac Newton (1642-1727). Han använde denna serietyp för att studera algebraiska kurvor med formen $P(x, y) = 0$ där P är ett polynom. År 1850 återupptäcktes serierna av den franske matematikern Victor Puiseux (1820-1883) och han bevisade att en polynomekvation $P(x, y) = 0$ har en lösning där y kan lösas ut som en potensserie i rationella exponenter av x (Puiseux series 2020). I den moderna matematiken kallas denna sats för Newton-Puiseux sats.

Den franske matematikern Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) var den förste matematikern som försökte bevisa algebrans fundamentalsats år 1746 (Fundamental theorem of algebra, 2020). Enligt Carrera (1992:897-898) bygger d'Alemberts bevis på två villkor

I. $|p(z)|$ antar ett minsta värde i någon punkt z_0,

II. om $p(z_0) \neq 0$ finns det punkter z i omgivningen av z_0 sådana att $|p(z)| < |p(z_0)|$.

d'Alemberts bevis liknar i stort sett det andra beviset som presenteras i kapitel 4. För att bevisa villkor (**I**) används teori för kontinuerliga funktioner, men denna teori var inte utvecklad under d'Alemberts tid. Han tog villkor (**I**) som självklart och utelämnade beviset. Puiseux-serier används i villkor (**II**) för att studera $y = p(x)$ där p är ett reellt polynom. Låt $P_0 = (x_0, y_0)$ vara en fix punkt sådan att $y_0 = p(x_0)$. Enligt Carrera (1992:899) antog d'Alembert att Newton-Puiseux sats är sann, så att x kan lösas ut ur $y = p(x)$ i omgivningen av (x_0, y_0) och

$$x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (y - y_0)^{q_k}. \qquad (1)$$

d'Alembert betraktade endast reella värden på y och lät det minsta reella värdet som $p(x)$ antar vara y_0, det vill säga $y_0 = p(x_0)$ (Carrera 1992:899). Ur ekvation (1) följer att x kan ha ett komplext värde då exponenterna q_k kan vara rationella tal och $(y - y_0)$ kan ha ett negativt värde. d'Alembert motiverade sitt resonemang på följande sätt; om y_0 är nollskild kan vi välja $y < y_0$ i någon omgivning av y_0 och ekvation (1) ger motsvarande värde på x. Men $p(x) = y < y_0$, vilket visar att y_0 inte kan vara minsta värde (Carrera 1992:899).

d'Alemberts bevis var ofullständigt, vilket ledde till att han fick kritik av olika matematiker såsom den tyske matematikern Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (Ebbinghaus et al. 2012:102). d'Alembert borde först bevisa att rötterna verkligen existerar och sedan motivera att de är komplexa. En annan kritik är att d'Alembert använder Puiseux-serier utan bevis. Med andra ord kan vi säga att både algebrans fundamentalsats och Newton-Puiseux sats baserades på varandra utan att någon av dem var bevisade.

2.4. Bakgrund till algebrans fundamentalsats 1779

Låt oss säga att vi har $f(z) = z^2$ och $z = x + iy$ där $x, y \in \mathbb{R}$. Vi kan observera att

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

där $(x^2 - y^2)$ är realdelen av $f(z)$ som betecknas med $Ref(z)$ och $2xy$ är imaginärdelen av $f(z)$ som betecknas med $Imf(z)$. Detta konkreta exempel visar oss hur vi kan skriva en komplex funktion i sin real- och imaginärdel som reella funktioner av x och y. En komplex funktion $w = f(z)$ består av komplexa variablerna z och w. Om $z = x + iy$ och $w = u + iv$ är $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$ reella funktioner av två variabler. Vi kan skriva

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(z) + iv(z)$$

där $u(z)$ är realdelen av $f(z)$ och $v(z)$ är imaginärdelen av $f(z)$ (Fine & Rosenberger 1998:36).

År 1799 publicerade Gauss sitt första geometriska bevis av algebrans fundamentalsats. Detta bevis som trycktes i Gauss doktorsavhandling är mindre abstrakt än de andra bevis som finns till algebrans fundamentalsats. Vi kommer att ge en kort sammanfattning av detta geometriska bevis. Gauss antog att $f(z)$ är ett polynom med reella koefficienter som har formen

$$f(z) = z^n + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + \cdots + Lz + M \tag{1}$$

där $z = x + iy$ med $x, y \in \mathbb{R}$ och $a_0 \neq 0$. Enligt Fine och Rosenberger (1998:182) antog Gauss att $n > 2$ eftersom i fallet $n = 1$ kommer polynomet att vara linjärt och det är klart att polynomet har ett nollställe. I fallet $n = 2$ kunde han tillämpa kvadratiska formeln (eng. ”*Quadratic formula*”) för att finna polynomets rötter. Gauss skrev polynom (1) i sin real- och imaginärdel

$$f(z) = U(z) + iV(z) = U(x, y) + iV(x, y). \tag{2}$$

Beviset går ut på att visa att de reella kurvorna $U(x, y) = 0$ och $V(x, y) = 0$ skär varandra i minst en punkt. Vi låter $z = r(\cos v + i \sin v)$ och med hjälp av de Moivres formel och polära formen kan vi skriva $U(x, y)$ och $V(x, y)$ på följande sätt

$$U = r^n \cos(nv) + Ar^{n-1} \cos(n-1)v + \cdots + Lr \cos v + M, \tag{3}$$

$$V = r^n \sin(nv) + Ar^{n-1} \sin(n-1)v + \cdots + Lr \cos v. \tag{4}$$

Enligt Fine och Rosenberger (1998:183) gäller att

$$r^n - \sqrt{2}\,(Ar^{n-1} + Br^{n-2} + \cdots + L) > 0 \tag{5}$$

om r är tillräckligt stort. Gauss betraktade kurvorna $U(x, y) = 0$ och $V(x, y) = 0$ och försökte visa att om r är tillräckligt stort kommer kurvorna $U(x, y) = 0$ och $V(x, y) = 0$ att skära cirkeln $|z| = r$, det vill säga en cirkel med medelpunkt i origo, i $2n$ punkter vardera (Ebbinghaus et al. 2012:106). Låt oss säga att P_k är punkter som ligger på cirkeln med radien r och

$$\arg P_k = (2k + 1)v \tag{6}$$

där $k = 0,1, \dots, 4n - 1$ samt $v = \frac{\pi}{4n}$. För att förstå hur Gauss bestämde tecknet på $U(x, y)$ i P_k betraktar vi punkterna P_{2k} och P_{2k+1}. Enligt Fine och Rosenberger (1998:183) gäller att

$$\cos(n \arg P_{2k}) = \cos\left(\frac{(4k + 1)\pi}{4}\right) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \tag{7}$$

vilket genom additionsformeln för cosinus kan skrivas som

$$\underbrace{\cos(k\pi)}_{\cos(k\pi) = (-1)^k} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \underbrace{\sin(k\pi)}_{\sin(k\pi) = 0} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Dessutom gäller att

$$\cos(n \arg P_{2k+1}) = \cos\left(\frac{(4k + 3)\pi}{4}\right) = \cos\left(k\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \tag{9}$$

$$\underbrace{\cos(k\pi)}_{\cos(k\pi)=(-1)^{k+1}}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\underbrace{\sin(k\pi)}_{\sin(k\pi)=0}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

I nästa steg multiplicerar vi U med $(-1)^k$

$$(-1)^k U(P_{2k})=\frac{r^n}{\sqrt{2}}+(-1)^k(A\,r^{n-1}\cos((n-1)\,P_{2k}+v)\,...= \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(r^n+(-1)^k\sqrt{2}(A\,r^{n-1}\cos((n-1)\,P_{2k}+v) \tag{12}$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{2}}(r^n-(Ar^{n-1}+\cdots)>0. \tag{13}$$

På samma sätt får vi

$$(-1)^{k+1}U(P_{2k+1})>0. \tag{14}$$

För att få en tydlig bild över tecknet på $U(x,y)$ i P_k ritar vi en teckentabell.

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	...	P_{4n-2}	P_{4n-1}
$U(P_k)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	...	$-$	$+$

Tabell 2.4.1

Av satsen om mellanliggande värden följer det att U har minst ett nollställe b_0 mellan P_0 och P_2, minst ett nollställe b_1 mellan P_2 och P_4 och så vidare. Allmänt har U ett nollställe b_k mellan P_{2k} och P_{2k+2} på cirkeln $|z|=r$. Med andra ord gäller att

$$\arg P_{2k}<\arg b_k<\arg P_{2k+2}.$$

Alternativt kan vi uttrycka oss på följande sätt

$$k\pi+\frac{\pi}{4}<n\arg b_k<k\pi+\frac{3\pi}{4}.$$

På samma sätt kan vi resonera tecknet på $V(x,y)$ i Q_k och rita en teckentabell för $V(Q_k)$.

	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	...	Q_{2n-1}	Q_{2n-2}
$V(Q_k)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	...	$-$	$+$

Tabell 2.4.2

Vi kan notera att $V > 0$ vid Q_0 men $V < 0$ vid Q_1. Då kommer V att ha minst ett nollställe t_0 mellan Q_0 och Q_1 och så vidare. Vidare kan vi notera att de $2n$ punkterna som finns för $V(x, y) = 0$ ligger mellan de $2n$ punkterna som finns för $U(x, y) = 0$ (Gauss 1799:20).

Vid punkterna b_j och t_j går kurvorna $U(x, y) = 0$ och $V(x, y) = 0$ in i cirkeln. Enligt en känd sats gäller att ”if a (non-compact) branch of an algebraic curve enters a bounded space (here, a circular disc) it must necessarily emerge from this space" (Ebbinghaus et al. 2012:107). Över hundra år hade denna sats tagit för givet och det var självklart för matematiker att denna sats är sann. Gauss förutsatte den kända satsen i sitt bevis men han kunde inte bevisa den. Han trodde på att när en kurva går in i cirkeln måste den komma ut på något sätt. Enligt Gauss (1799) gäller att en algebraisk kurva $U(x, y) = 0$ som skär cirkeln i en punkt och går in i cirkeln där, måste komma ut ur cirkeln och skära den i en punkt till. Samma förklaring gäller $V(x, y) = 0$. Någonstans inom cirkeln måste de parvis sammanbindande kurvorna $U(x, y) = 0$ och $V(x, y) = 0$ skära varandra (Gauss 1799). På detta sätt skapas nollställe till $U(x, y) + iV(x, y) = 0$. Det som var nytt i det geometriska beviset var att Gauss inte beräknade en rot utan försökte bevisa dess existens (Ebbinghaus et al. 2012: 102). Men detta bevis har flera brister, bland annat tar Gauss kurvans egenskaper för givet utan att redogöra dem. Han visar inte fullständigt att kurvorna $U(x, y) = 0$ och $V(x, y) = 0$ skär varandra.

2.5. Bakgrund till algebrans fundamentalsats från 1814 till 1821

Jean Robert Argand (1768-1822) som var en schweizisk-fransk matematiker presenterade ett bevis till algebrans fundamentalsats år 1814. Hans bevis var baserat på att en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd antar ett minsta värde (Fundamental theorem of algebra, 2020). Men det främsta problemet var att Argand inte motiverade existens av minsta värde. Boken ”*Cours d'analyse de l'ecole polytechnique*” av den franske matematikern Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) som trycktes år 1821 innehåller ett heltäckande och noggrant bevis av Argands grundidé utan att nämna något om honom (Fundamental theorem of algebra, 2020). År 1816 publicerade Gauss sitt andra och tredje bevis av algebrans fundamentalsats. Hans andra bevis är mer algebraiskt då algebraiska kroppar används i beviset. Den enda analytiska satsen som Gauss använder är satsen om uddagradspolynom, det vill säga att ett polynom av udda grad alltid har lösningar (Ebbinghaus et al. 2012:102). I sitt tredje bevis låter Gauss punkten z röra sig längs en sluten kurva i det komplexa talplanet. Genom en dubbelintegral studerar han antalet gånger som $f(z)$ gör ett helt varv runt origo (Ebbinghaus et al. 2012:102).

3

Satsen om största och minsta värde

3.1. Inledning

Förra kapitlet handlade om den långa historien som ligger bakom algebrans fundamentalsats. Många kända och kunniga matematiker försökte bevisa denna sats med hjälp av olika matematiska metoder, men det fanns brister i vissa bevisföringar. I det här kapitlet studerar vi satsen om största och minsta värde genom att utgå ifrån Neymark (2017:94, 479-480). Vi kommer att använda satsen om största och minsta värde när vi bevisar algebrans fundamentalsats.

3.2. Bevis av satsen om största och minsta värde

Sats 3.2.1. (Satsen om största och minsta värde)

Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat område D i $\mathbb{R}^2$. Då antar f ett största och minsta värde på D. Med andra ord finns det punkter $(a, b) \in D$ och $(c, d) \in D$ så att

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d)$$

för alla $(x, y) \in D$.

Bevis 3.2.2.

Vi vill bevisa sats 3.2.1. Det första steget som vi behöver göra är att visa att f som är en kontinuerlig funktion på det kompakta området D måste vara begränsad. Enligt Neymark (2017:480) är f begränsad på D om det finns ett reellt tal A så att

$$|f(x, y)| \leq A$$

för alla $(x, y) \in D$. Låt oss anta att f inte är uppåt begränsad. För varje heltal k finns det punkter $(x_k, y_k) \in D$ sådant att

$$|f(x_k, y_k)| > k.$$

Med hänvisning till Bolzano-Weierstrass sats i $\mathbb{R}^2$ innehåller följden $(x_k, y_k) \in D$ en konvergent delföljd $(x_{k_j}, y_{k_j}) \in D$ med gränsvärdet $(\beta, \eta) \in D$ då $j \to \infty$. Att vi har fått en konvergent delföljd beror på att D är ett begränsat område. Genom kontinuiteten av f på D får vi fram att

$$\lim_{j \to \infty} f\left(x_{k_j}, y_{k_j}\right) = f\,(\beta, \eta).$$

Men samtidigt ger $|f(x_k, y_k)| > k_j$

$$\lim_{j \to \infty} f\left(x_{k_j}, y_{k_j}\right) = +\infty.$$

Vi kan observera att vi har fått en motsägelse, vilket visar oss att f måste vara uppåt begränsad på D. Att f är nedåt begränsad kan bevisas på samma sätt genom att använda $-f$ istället för f. Nu har vi kommit fram till att A är en övre begränsning till f och $-A$ är en undre begränsning till f (Neymark 2017:480). Med andra ord gäller att

$$-A \leq f(x, y) \leq A$$

för alla $(x, y) \in D$.

Nästa steg som vi behöver göra är att visa att f måste anta ett största och minsta värde på D. Eftersom f är begränsad får vi ur supremum- och infimumegenskapen att det finns talen M och m sådant att

$$M = \sup_{(x,y)\in D} f(x, y)$$

och

$$m = \inf_{(x,y)\in D} f(x, y)$$

så att

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

för alla $(x, y) \in D$. Talet M är den minsta övre begränsningen till $f(x, y)$. Vi betraktar talet $M - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, som är mindre än M. Låt $(x, y) \in D$ vara en godtycklig punkt och då gäller antingen att

I. $f(x, y) \leq M - \frac{1}{n}$.

eller

II. $f(x, y) > M - \frac{1}{n}$.

Om (**I**) gäller så är $M - \frac{1}{n}$ en övre begränsning till $f(x, y)$, vilket inte kan vara sant då M är den minsta övre begränsningen till $f(x, y)$. Då måste (**II**) gälla. Eftersom M är den minsta övre begränsningen till f finns det en punkt $(x_n, y_n) \in D$ sådant att

$$f(x_n, y_n) > M - \frac{1}{n}.$$

Ur Bolzano-Weierstrass i $\mathbb{R}^2$ gäller att följden (x_n, y_n) innehåller en konvergent delföljd (x_{n_j}, y_{n_j}) som har gränsvärdet (c, d) i D då $j \to \infty$. Med tanke på att f är kontinuerlig får vi fram att

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}, y_{n_j}) = f(c, d).$$

Men vi kan också notera att

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}, y_{n_j}) = M.$$

Detta ger oss att

$$f(c, d) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}, y_{n_j}) = M$$

där M måste vara funktionens största värde. Med andra ord har vi bevisat att det finns $(c, d) \in D$ så att $f(c, d) = M$. På motsvarande sätt sker beviset av minsta värde där $m = f(a, b)$. Av $m \leq f(x, y) \leq M$ följer det att

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d)$$

för alla $(x, y) \in D$. Beviset är klart. $\square$

4

Algebrans fundamentalsats – Bevis I

4.1. Inledning

Algebrans fundamentalsats kan bevisas med hjälp av olika metoder. I det här kapitlet presenteras ett komplexanalytiskt sätt för att bevisa algebrans fundamentalsats.

4.2. Analytisk funktion, Cauchys integralsats och integralformel

4.2.1. Analytisk funktion

Ett villkor för att kunna tillämpa Cauchys integralsats och integralformel är att funktionen ska vara analytisk. Låt oss säga att $f(z)$ är en komplexvärd funktion. Enligt Fine och Rosenberger (1998:40) är $f(z)$ analytisk i punkten z_0 om $f(z)$ är analytisk i en omgivning av punkten z_0. Att $f(z)$ är analytisk i en öppen mängd M innebär att den är komplext deriverbar i varje punkt i mängden (Fine & Rosenberger 1998:40).

Alternativt kan vi säga att $f(z)$ är analytisk om dess komplexa derivata existerar, det vill säga

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

där $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Enligt Analytic function (2020) har analytiska funktioner viktiga egenskaper, bland annat

- summan, produkt och sammansättning av analytiska funktioner är analytiska,
- reciprok funktion av en analytisk funktion som är nollskild är analytisk,
- varje analytisk funktion är oändligt deriverbar.

4.2.2. Cauchys integralsats

I Cauchys integralsats och integralformel används kurvintegral (linjeintegral). Låt oss säga att vi har en komplexvärd funktion $f(z)$ och vi antar att γ är en kurva som kan parametriseras med $z = z(t)$, $A \leq t \leq B$ (Kurvintegral, 2020). Dessutom antar vi att f är kontinuerlig på γ. Då definieras kurvintegralen av f längs kurvans γ som

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_A^B f\big(z(t)\big)z'(t)\, dt.$$

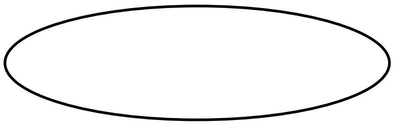
Med hjälp av Fine och Rosenberger (1998:64) formulerar vi Cauchys integralsats.

Sats 4.2.1. (Cauchys integralsats)

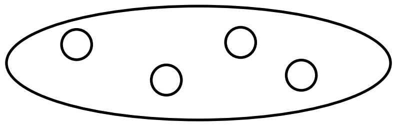
Vi låter $f(z)$ vara analytisk i ett enkelt sammanhängande område M och antar att γ är en sluten kurva som ligger i M. Då säger Cauchys integralsats att

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

M är ett enkelt sammanhängande område, vilket innebär att varje kurva som är belägen i detta område kan deformeras till en punkt utan att lämna M (Enkelt sammanhängande mängd, 2015). Informellt kan vi säga att M är ett enkelt sammanhängande område om det inte har några hål.



Figur 4.2.1
Ett enkelt sammanhängande område



Figur 4.2.2
Ett icke enkelt sammanhängande område

Vi antar att vi har två kurvor γ_1 och γ_2 med samma ändpunkter, det vill säga med samma start- och slutpunkt. Enligt Fine och Rosenberger (1998:65) gäller att om $f(z)$ är analytisk överallt mellan γ_1 och γ_2 kommer

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Detta följer direkt ur Cauchys integralsats

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

4.2.3. Cauchys integralformel

I det här kapitelavsnittet bevisar vi Cauchys integralformel. Vi kommer att använda Fine och Rosenberger (1998:66-69) men också Saff och Snider (2013:196) när vi ritar figur 3.3.1.

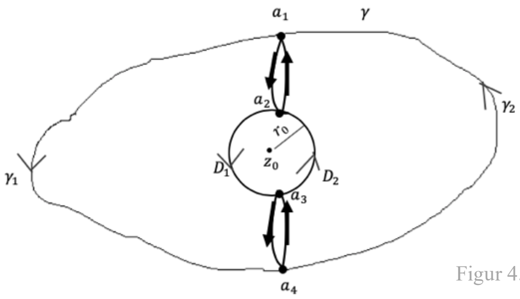
Sats 4.2.2. (Cauchys integralformel)

Vi låter f vara en analytisk funktion i området M som är ett enkelt sammanhängande område. γ är en sluten kurva som är positivt orienterad i M. Då gäller det för en godtycklig punkt z_0 som tillhör M att

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Bevis 4.2.3.

Vi vill bevisa Cauchys integralformel. Det första steget som vi gör är att vi ritar en figur där C_0 är en cirkel med radien r_0 och medelpunkten z_0 inom kurvan γ. För att cirkeln ska ligga i M måste vi välja r_0 tillräckligt litet.



Figur 4.2.3

Som Saff och Snider (2013:196) binder vi ihop cirkeln C_0 med kurvan γ genom linjesegment mellan punkterna a_1 och a_2 samt punkterna a_3 och a_4. Ur figur 4.2.3 kan vi observera att punkterna a_1 och a_4 delar kurvan γ in i γ_1 och γ_2. Dessutom kan vi se att punkterna a_2 och a_3 delar cirkeln C_0 in i D_1 och D_2. Vi kan notera att funktionen $\frac{f(z)}{z-z_0}$ är analytisk innanför och på kurvan γ förutom z_0. Punkten z_0 ligger inte på kurvan γ. Detta ger oss

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_1a_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{D_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{a_3a_4}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad (1)$$

och

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_4a_3}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{D_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{a_2a_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \qquad (2)$$

När vi adderar dessa integraler, det vill säga (1) och (2), tar de ut varandra eftersom de har motsatt riktning (Saff och Snider 2013:196). Då får vi att

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz. \qquad (3)$$

Vi kan deformera kurvan γ till en liten cirkel C_0 runt z_0 utan att integralens värde ändras (Fine & Rosenberger 1998:66). Detta är alltså en slutsats som följer från (3). Integralen över kurvan γ är lika med integralen över C_0 då funktionen är analytisk i en omgivning mellan γ och C_0. Vi kan skriva om högerledet i (3) på följande sätt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz. \qquad (4)$$

Den första integralen i högerledet av (4) är

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz=\frac{f(z_0)}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{1}{z-z_0}dz=\frac{f(z_0)}{2\pi i}2\pi i=f(z_0) \qquad (5)$$

där $\int_{C_0}\frac{1}{z-z_0}dz$ är en integral med värdet $2\pi i$ (Fine & Rosenberger 1998:67). För att få fram detta värde parametriserar vi C_0 på följande sätt

$$C_0: z=z_0+r_0e^{i\alpha},\ 0\le\alpha\le 2\pi.$$

så att

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{C_0} \frac{ir_0 e^{i\alpha} d\alpha}{z_0 + r_0 e^{i\alpha} - z_0} = \tag{6}$$

$$i \int_0^{2\pi} d\alpha = i[\alpha]_0^{2\pi} = i(2\pi - 0) = 2\pi i. \tag{7}$$

Nu har vi fått fram att

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz}_{\text{Integralen över kurvan } \gamma \text{ är oberoende av radien } r_0.} = \underbrace{f(z_0)}_{\text{Eftersom } f(z_0) \text{ är en konstant är den oberoende av radien } r_0.} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz}_{\text{Denna integral måste också vara oberoende av radien } r_0.}\,. \tag{8}$$

Vi behöver visa att den andra integralen som står i högerledet av (8) går mot 0. Eftersom f är kontinuerlig i punkten z_0 gäller det enligt definition av kontinuitet att för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ sådant att

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ då } |z - z_0| < \omega. \tag{9}$$

För $r_0 < \omega$ gäller det att

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{r_0}. \tag{10}$$

Vi behöver notera att r_0 måste vara mindre ω för att C_0 ska ligga inne i γ. Dessutom kan vi observera att cirkeln C_0 har omkretsen $2\pi r_0$. Vidare får vi

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\right| < \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r_0} 2\pi r_0 = \varepsilon. \tag{11}$$

Eftersom integralen inte beror på ε kan vi låta $\varepsilon \to 0$ (Fine & Rosenberger 1998:67). Då får fram att hela integralen är lika med 0.

Ur (4), (5) och (11) kan vi dra slutsatsen att

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{12}$$

Beviset är klart. $\square$

4.3. Liouvilles sats

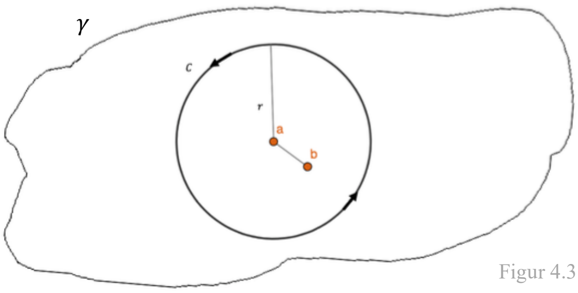
I nästa kapitelavsnitt kommer vi att bevisa algebrans fundamentalsats med hjälp av Liouvilles sats. I detta kapitelavsnitt ska vi ta reda på vad Liouvilles sats är. Denna sats är en tillämpning på Cauchys integralformel. Beviset nedan består av omformuleringar, översättningar och bearbetningar från Fine och Rosenberger (1998:70-71) samt Novozhilov (u.å.:1).

Sats 4.3.1. (Liouvilles sats)

Vi låter $f(z)$ vara en analytisk funktion och begränsad för alla $z \in \mathbb{C}$. Då säger Liouvilles sats att $f(z)$ är en konstant.

Bevis 4.3.2.

Vi vill bevisa Liouvilles sats. Låt oss anta att $f(z)$ är en analytisk funktion och begränsad för alla $z \in \mathbb{C}$. Då finns det ett $M > 0$ så att $|f(z)| \leq M$ för alla $z \in \mathbb{C}$ (Novozhilov u.å.:1). Vi låter $a, b \in \mathbb{C}$ vara två godtyckliga punkter. Vi betraktar en cirkel C med radien r och medelpunkten a som ligger i en positiv orienterad kurva γ. Dessutom låter vi b vara en punkt i cirkeln, men avståndet mellan punkt b och medelpunkten a måste vara mindre än r.



Figur 4.3.1

Cauchys integralformel ger oss

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz \tag{1}$$

och

$$f(b) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-b}\, dz \tag{2}$$

för båda punkterna. Vidare kan vi observera att

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right] dz = \tag{3}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left[\frac{(b-a)}{(z-b)(z-a)}\right] dz \tag{4}$$

vilket i sin tur ger oss

$$|f(b) - f(a)| = \frac{|b-a|}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)}\, dz\right|. \tag{5}$$

Vi har låtit cirkelns medelpunkt vara i punkt a, det vill säga $|z-a|=r$. Nu vill bestämma $|z-b|$ med hjälp av triangelolikheten. Vi kan observera att

$$r=|z-a|=|z-b+b-a|\leq|z-b|+|b-a|, \tag{6}$$

$$r\leq|z-b|+|b-a|. \tag{7}$$

Utifrån (7) följer det att $r-|b-a|\leq|z-b|$. Vi har sagt att $f(z)$ är begränsad för alla $z\in\mathbb{C}$. Vidare får vi

$$|f(b)-f(a)|=\frac{|b-a|}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)}\,dz\right|\leq\frac{|b-a|}{2\pi}\frac{M}{(r-|b-a|)r}2\pi r= \tag{8}$$

$$|b-a|\frac{M}{(r-|b-a|)}=|b-a|\frac{M}{\left(1-\frac{|b-a|}{r}\right)}\frac{1}{r}\to 0 \tag{9}$$

då $r\to\infty$. Därför kommer $f(a)=f(b)$ och eftersom a,b är godtyckliga är funktionen en konstant. Beviset är klart. □

4.4. Algebrans fundamentalsats – Bevis I

Vi har läst om analytiska funktioner, Cauchys integralformel och Liouvilles sats. I detta kapitelavsnitt kommer vi att bevisa algebrans fundamentalsats med hjälp av dessa komplexanalytiska verktyg. Det nedanstående beviset som är baserat på Liouvilles sats består av omformuleringar, översättningar och bearbetningar från Fine och Rosenberger (1998:70-71) samt Novozhilov (u.å.:1-2).

Sats 4.4.1. (Algebrans fundamentalsats)

Låt $p(z)$ vara ett icke konstant polynom av graden $n>0$ med komplexa koefficienter. Då har $p(z)$ minst en komplex rot.

Bevis 4.4.2.

Med hjälp av ett motsägelsebevis vill vi bevisa algebrans fundamentalsats. Vi låter

$$p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

vara ett komplext polynom av graden $n>0$ där $a_n\neq 0$. Absolutbeloppet av det ovanstående polynomet är

$$|p(z)|=|z^n|\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}\right|.$$

Vi kan observera att när $|z|$ blir stort kommer alla termer som har z i nämnaren att bli små. Uttrycket $\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}\right)$ kommer då att gå mot a_n. För stort $|z|$ får vi $|p(z)|\approx|z^n||a_n|$, vilket medför att $|p(z)|\to\infty$ då $|z|\to\infty$.

Vi förutsätter att $p(z)$ saknar nollställen för alla $z \in \mathbb{C}$. Detta tillåter oss att definiera $g(z) = \frac{1}{p(z)}$. Då kommer $g(z)$ att vara nollskild och analytisk i hela komplexa talplanet. Detta visar oss att första villkoret i Liouvilles sats är uppfyllt.

Om $|z| \to \infty$ kommer $|p(z)| \to \infty$, vilket medför att det finns ett reellt tal $r > 0$ så att om $|z| > r$ måste $|p(z)| > A$, för någon konstant A. För

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{p(z)}\right| = \left|\frac{1}{z^n}\right| \left|\frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}}\right|.$$

gäller att $\left|\frac{1}{p(z)}\right| \to 0$ då $|z| \to \infty$. Vi kan notera att $|g(z)| = \left|\frac{1}{p(z)}\right| < \frac{1}{A}$ för $|z| > r$. Vi betraktar en cirkel $C \subset \mathbb{C}$ i origo med radien r som är tillräckligt stort och väljs enligt ovan.

Att $g(z)$ är analytisk ger oss att den är kontinuerlig på det kompakta området, $|z| \leq r$. Då existerar ett B så att $|g(z)| \leq B$ på $|z| \leq r$.

Vi har sagt att

- om $|z| \leq r$ då är $|g(z)| \leq B$ för alla $z \in \mathbb{C}$,
- om $|z| > r$ då är $|g(z)| = \left|\frac{1}{p(z)}\right| < \frac{1}{A}$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Vi sätter $D = \max\left\{\frac{1}{A}, B\right\}$ och denna begränsning $|g(z)| \leq D$ gäller för alla $z \in \mathbb{C}$. Då är det andra villkoret i Liouvilles sats uppfyllt.

Att $g(z) = \frac{1}{p(z)}$ är analytisk och begränsad innebär enligt Liouvilles sats att den är en konstant. Då kommer $p(z)$ att också vara en konstant som saknar nollställen. Med andra ord har vi bevisat att ett polynom som inte har några nollställen måste vara konstant, vilket i sin tur är en motsägelse till graden $n > 0$. Beviset är klart. $\square$

5
Algebrans fundamentalsats – Bevis II

5.1. Inledning

Algebrans fundamentalsats bevisades med hjälp av komplexanalytiska metoder i förra kapitlet. I detta kapitel presenteras ett annat sätt för att bevisa algebrans fundamentalsats. Beviset är analytiskt då satser från flerdimensionell analys kommer till användning.

5.2. Algebrans fundamentalsats – Bevis II

Vi ska formulera och bevisa två hjälpsatser som tillsammans bevisar algebrans fundamentalsats. De nedanstående hjälpsatserna och deras bevis är främst baserade på Fine och Rosenberger (1998:31-32) förutom där andra referenser anges.

Hjälpsats 5.2.1.

Vi låter $p(z)$ vara ett icke konstant polynom med komplexa koefficienter. Då antar $|p(z)|$ ett minsta värde i någon punkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Bevis 5.2.2.

Vi vill bevisa hjälpsats 5.2.1. Vi låter $p(z)$ vara ett komplext polynom av graden $n > 0$ som har följande form

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

där $a_n \neq 0$. Minsta värdet $|p(0)| = 0$ existerar om $p(z)$ inte består av några koefficienttermer, det vill säga a_0 , …, a_n ; men i detta fall är koefficienttermerna nollskilda. Men i detta fall är koefficienttermerna nollskilda. Från förra kapitlet (se s.25) vet vi att $|p(z)| \to \infty$ då $|z| \to \infty$. Då finns det $r > 0$ så att om $|z| > r$ måste $|p(z)| \geq |p(0)| = |a_0|$ (Svensson & Mickelin 2014:36). Detta beskriver området utanför cirkeln. Eftersom $p(z)$ är kontinuerlig måste den enligt sats 3.2.1 anta ett minsta värde, säg $|p(z_0)|$, innanför eller på cirkeln. Med andra ord menar vi att om $|z| \leq r$ kommer $|p(z_0)| \leq |p(z)|$. Å andra sidan kan vi notera att $|p(z_0)| \leq |p(0)| \leq |p(z)|$ om $|z| > r$. Vi kan observera att z_0 ligger i det sökta området och

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|$$

för alla $z \in \mathbb{C}$ (Svensson & Mickelin 2014:36). □

Hjälpsats 5.2.3.

Vi låter $p(z)$ vara ett icke konstant polynom med komplexa koefficienter. Om $p(z_0) \neq 0$ kan inte $|p(z_0)|$ vara minsta värdet av $|p(z)|$.

Bevis 5.2.4.

Vi vill bevisa hjälpsats 5.2.3 som består av

Steg A) definition av en ny funktion $f(z)$,

Steg B) omskrivning av a_k och z på exponentiell form,

Steg C) förenkling genom Eulers identitet,

Steg D) tillämpning av triangelolikheten,

Steg A

Om $p(z_0) \neq 0$ kan vi enligt Fine och Rosenberger (1998:31) definiera en ny funktion $f(z)$ som ser ut på följande sätt

$$f(z) = \frac{p(z + z_0)}{p(z_0)} \tag{1}$$

för alla $z \in \mathbb{C}$. Vi kan observera att $f(0) = \frac{p(0+z_0)}{p(z_0)} = \frac{p(z_0)}{p(z_0)} = 1$. Vi vill visa att $|f(0)|$ inte kan vara minsta värdet av $|f(z)|$.

Steg B

Polynomekvationen $f(z)$ av graden $n > 0$ har formen

$$f(z) = 1 + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \cdots + a_n z^n \tag{2}$$

där $a_n \neq 0$. I den ovanstående polynomekvationen är a_k den andra koefficienten som är nollskild efter 1. Eftersom a_k är ett komplext tal kan vi skriva den på sin exponentiella form

$$a_k = |a_k| e^{i\alpha}. \tag{3}$$

Dessutom låter vi

$$z = |a_k|^{-\frac{1}{k}} r e^{i\theta} \tag{4}$$

där $0 < r < 1$ (Lankham, Nachtergaele & Schilling 2007:3). Vi sätter omskrivningarna till a_k och z i (2)

$$f(z) = 1 + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \cdots + a_n z^n = \tag{5}$$

$$1 + |a_k| e^{i\alpha} \left(|a_k|^{-\frac{1}{k}} \right)^k r^k e^{ik\theta} + r^{k+1} g(r) = \tag{6}$$

$$1 + |a_k| e^{i\alpha} |a_k|^{-1} r^k e^{ik\theta} + r^{k+1} g(r) \tag{7}$$

för något polynom $g(r)$. Vi fortsätter att förenkla polynomekvationen

$$f(z) = 1 + r^k e^{i\alpha} e^{ik\theta} + r^{k+1} g(r) = \tag{8}$$

$$1 + r^k e^{i(\alpha+k\theta)} + r^{k+1} g(r). \tag{9}$$

Steg C

För att det ska bli enklare att räkna vidare kan vi skriva faktorn $e^{i(\alpha+k\theta)}$ på ett annat sätt. Ur Eulers identitet får vi att

$$e^{i(\alpha+k\theta)} = e^{i\pi} = -1. \tag{10}$$

Vi kan observera att

$$\alpha + k\theta = \pi \tag{11}$$

ger oss att

$$\theta = \frac{\pi-\alpha}{k}. \tag{12}$$

Nästa steg är att sätta in omskrivningen till θ i (9)

$$f(z) = 1 + r^k e^{i(\alpha+k\theta)} + r^{k+1} g(r) = \tag{13}$$

$$1 + r^k e^{i(\alpha+k\frac{\pi-\alpha}{k})} + r^{k+1} g(r) = \tag{14}$$

$$1 + r^k e^{i\pi} + r^{k+1} g(r) = \tag{15}$$

$$1 - r^k + r^{k+1} g(r). \tag{16}$$

Steg D

Triangelolikheten ger oss

$$|f(z)| \leq |1 - r^k| + |r^{k+1} g(r)|. \tag{17}$$

Enligt förutsättningarna har vi $0 < r < 1$, vilket leder till att $1 - r^k > 0$ och $r^{k+1} > 0$. Med andra ord är

$$|f(z)| \leq 1 \underbrace{- r^k + r^{k+1}|g(r)|}_{\text{Vi faktoriserar ut } -r^k} = 1 - r^k(1 - r|g(r)|). \tag{18}$$

Innan vi drar en slutsats behöver vi undersöka några saker i den ovanstående triangelolikheten

$$|f(z)| \leq \underbrace{1 - \underbrace{r^k \underbrace{(1 - \underbrace{r|g(r)|}_{\textbf{Steg 1}})}_{\textbf{Steg 2}}}_{\textbf{Steg 3}}}_{\textbf{Steg 4}}. \tag{19}$$

- **Steg 1**

  Vi vet att $g(r)$ är ett polynom och $0 < r < 1$. När $r \to 0$ kommer $g(r) \to A$, för någon konstant A. I $r|g(r)|$ gäller att $r|g(r)| \to 0$ då $r \to 0$. Denna produkt, det vill säga $r|g(r)|$, kommer vara mindre än 1.

- **Steg 2**

  I det här steget ska vi undersöka $1 - r|g(r)|$. Enligt förra steget kommer $r|g(r)|$ vara mindre än 1, vilket medför att $1 - r|g(r)|$ också kommer vara ett tal mellan 0 och 1,

  $$1 - r|g(r)| < 1.$$

- **Steg 3**

  Vi multiplicerar $1 - r|g(r)|$ med r^k och enligt tidigare förutsättning har r intervallet $0 < r < 1$. Då kommer $0 < r^k < 1$ och vi får samma resultat som tidigare steg

  $$r^k(1 - r|g(r)|) < 1.$$

- **Steg 4**

  Samma förklaring gäller för $1 - r^k(1 - r|g(r)|)$ så att

  $$1 - r^k(1 - r|g(r)|) < 1.$$

  Med andra ord är

  $$|f(z)| \leq 1 - r^k(1 - r|g(r)|) < 1 = f(0),$$

  vilket inte kan vara minsta värdet.

Då har vi visat att $|f(0)|$ inte kan vara minsta värdet av $|f(z)|$. Vi behöver notera att i Fine och Rosenberger (1998:32) används beteckningen r_0. De menar att det finns ett r-värde, säg r_0, som är tillräckligt litet så att $r_0|g(r_0)| < 1$ (jfr steg 1). $\square$

Med hjälp av hjälpsats 5.2.1 och hjälpsats 5.2.3 kan vi slutföra algebrans fundamentalsats bevis II.

Sats 5.2.5.(Algebrans fundamentalsats)

Låt $p(z)$ vara ett komplext polynom av graden $n > 0$. Då har $p(z)$ minst ett komplext nollställe z_0 så att $p(z_0) = 0$.

Bevis 5.2.6.

Beviset till sats 5.2.5 är baserat på en kombination av hjälpsats 5.2.1 och hjälpsats 5.2.3. Ur hjälpsats 5.2.1 följer det att $|p(z)|$ antar ett minsta värde i någon punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ (Fine & Rosenberger 1998:32). Detta minsta värde måste vara 0 annars är det inte ett minsta värde enligt hjälpsats 5.2.3. Slutligen kan vi säga att $p(z)$ har en komplex lösning. $\square$

6

En följdsats till algebrans fundamentalsats

6.1. Inledning

I de två senaste kapitlen presenterades två olika bevis till algebrans fundamentalsats som visar att ett komplext polynom $p(z)$ av graden $n > 0$ har minst en komplex rot. Det här kapitlet behandlar en följdsats till algebrans fundamentalsats som är baserad på faktorsatsen. Vi kommer att utgå ifrån Böiers och Persson (2010:53-54,486).

6.2. Faktorsatsen

Sats 6.2.1. (Faktorsatsen)

Vi antar att talet a är ett nollställe till polynomekvationen $p(z) = 0$. Då gäller det att $(z - a)$ är en faktor i $p(z)$. Alternativt kan vi uttrycka oss på följande sätt

$$p(z) = (z - a)q(z)$$

för något polynom $q(z)$.

Bevis 6.2.2,

Vi vill bevisa sats 6.2.1. Vi låter talet a vara ett nollställe, det vill säga $p(a) = 0$. Vid division av $p(z)$ med faktorn $(z - a)$ får vi ett kvotpolynom $q(z)$ och ett restpolynom $r(z)$

$$p(z) = (z - a)q(z) + r(z). \tag{1}$$

Vi kan observera att graden av $r(z)$ måste vara mindre än graden av $(z - a)$ som är 1. Detta visar oss att $r(z)$ är en konstant då den är av grad 0 (Böiers & Persson 2010:54). Med andra ord gäller att

$$p(z) = (z - a)q(z) + C \tag{2}$$

där C är en konstant. Om vi sätter $z = a$ i (2) får vi fram att

$$p(a) = (a - a)q(a) + C = C. \tag{3}$$

Vi har sagt att $p(a) = 0$ vilket i sin tur medför att $p(a) = C = 0$. Ur detta följer att

$$p(z) = (z - a)q(z) \tag{4}$$

stämmer. Beviset är klart. □

6.3. Följdsats till algebrans fundamentalsats

Följdsats 6.3.1. (Algebrans fundamentalsats)

Varje komplext polynom $p(z)$ av graden $n > 0$ har precis n rötter.

Bevis 6.3.2.

Vi vill bevisa följdsats 6.3.1. Enligt sats 4.4.1 vet vi att $p(z)$ har minst en komplex lösning, säg λ_1. Med hjälp av faktorsatsen kan vi uttrycka oss på följande sätt

$$p(z) = (z - \lambda_1)p_1(z) \tag{1}$$

där $p_1(z)$ är ett polynom av grad $n-1$. Polynomet $p_1(z)$ har ett nollställe λ_2, vilket i sin tur ger oss

$$p(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)p_2(z) \tag{2}$$

där $p_2(z)$ är ett polynom av grad $n-2$. Vi fortsätter på samma sätt tills vi får

$$p(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2).(z - \lambda_3)\dots(z - \lambda_n)p_n \tag{3}$$

där graden av p_n är lika med 0 (Böiers & Persson 2010:486). Detta betyder att p_n är en nollskild konstant. Då kan vi dra slutsatsen att $p(z)$ har precis lösningarna $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Observera att rötterna inte behöver vara olika. Beviset är klart. □

6.4. Olika sätt att formulera algebrans fundamentalsats

Det finns ett antal olika sätt att formulera algebrans fundamentalsats. I detta självständiga arbete har vi formulerat algebrans fundamentalsats på tre olika sätt

I. Låt $p(z)$ vara ett icke konstant polynom av graden $n > 0$ med komplexa koefficienter. Då har $p(z)$ minst en komplex rot.

II. Låt $p(z)$ vara ett komplext polynom av graden $n > 0$. Då har $p(z)$ minst ett komplext nollställe z_0 så att $p(z_0) = 0$.

III. Varje komplext polynom $p(z)$ av graden $n > 0$ har precis n rötter.

7
Referenslista

Analytic function. (2020, 16 april). I *Wikipedia*. Hämtad 2020-05-22 från https://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_function

Böiers, L., & Persson, A. (2010). *Analys i en variabel*. Lund: Studentlitteratur AB.

Carrera, J. (1992). *The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss*. Publications Matematiques, Vol 36.

Circle. (2020, 5 maj). I *Wikipedia*. Hämtad 2020-05-05 från https://en.wikipedia.org/wiki/Circle

Descartes teckenregel. (2020, 25 april). I *Wikipedia*. Hämtad 2020-05-01 från https://sv.wikipedia.org/wiki/Descartes_teckenregel

Ebbinghaus, H., Ewing, J., Lamotke, K., Hermes, H., & Hirzenruch, F.(2012). *Numbers*. New York: Springer.

Enkelt sammanhängande mängd. (2015, 9 februari). I *Wikipedia*. Hämtad 2020-05-24 från https://sv.wikipedia.org/wiki/Enkelt_sammanhängande_mängd

Fine, B., & Rosenberger, G. (1997). Fundamental Theorem of Algebra. New York: Springer Science & Business.

Fundamental theorem of algebra. (2020, 30 mars). I *Wikipedia*. Hämtad 2020-04-02 från https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra

Gauss, C. *New Proof of the Theorem That Every Algebraic Rational Integral Function In One Variable can be Resolved intro Real Factors of the First or the Second Degree*. Helmstedt: Fleckeisen. Hämtad 2020-05-06 från http://www.quantresearch.org/Gauss_PhD_Dissertation.pdf

Kurvintegral. (2020, 6 augusti). I *Wikipedia*. Hämtad 2020-08-15 från https://sv.wikipedia.org/wiki/Kurvintegral

Lankham, I., Nachtergaele, B., Schilling, A. (2007). *The fundamental theorem of algebra*. University of California: Davis.

Neymark, M. (2017). *Matematisk analys: flera variabler*. Stockholm: Liber AB.

Novozhilov, A. (u.å.). *Liouville's theorem. Fundamental theorem of algebra*. Hämtad 2020-03-10 från https://www.ndsu.edu/pubweb/~novozhil/Teaching/452%20Data/12.pdf

Puiseux series. (2020, 11 april). I *Wikipedia*. Hämtad 2020-05-01 från https://en.wikipedia.org/wiki/Puiseux_series

Saff, E., Snider, A. (2013). *Fundamentals of complex analysis: engineering, science, and mathematics*. 3.ed. Harlow: Pearson.

Svensson, L., Mickelin, O. (2014). *Kort om linjär algebra*. KTH.