SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Analysens Fundamentalsats

av

Tobias Malmgren

2020 - No 44

Analysens Fundamentalsats

Tobias Malmgren

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Boris Shapiro

2020

Examensarbete

Tobias Malmgren

December 2020

Innehåll

Kapitel 1

Inledning

I det här arbetet betraktas analysens fundamentalsats som anses vara en av de mest centrala satser inom området matematisk analys. Fokus kommer att ligga på historisk betraktelse över satsens uppkomst samt hur man kan bevisa satsen med olika metoder. Isaac Barrow var den första personen som lyckades bevisa satsen utan att använda sig av differentialer eller infinitesimaler. Uppsatsens höjdpunkt blir därför att gå igenom hans rigorösa bevis av satsen och tolka det i mer modernare termer.

För att kunna göra detta kommer vi i första delen av uppsatsen att gå igenom en bakgrundsdel där vi behandlar teori, definitioner och satser som lett fram till analysens fundamentalsats. De begrepp som kommer att tas upp är funktioner samt deras egenskaper, kontinuitet, derivator, gränsvärden och integralkalkylens medelvärdessats. Det finns även fall då man inte direkt kan tillämpa analysens fundamentalsats, t.ex. då man arbetar med funktioner som inte är kontinuerliga i en viss punkt men det är inget som kommer att studeras mer ingående i det här arbetet. Vi kommer därför att utgå från att funktionerna som behandlas är kontinuerliga och väldefinierade över intervallet som de studeras på. Syftet med bakgrunden är att vi ska få mer kunskap om de olika relevanta objekt inom matematiskt analys som behövs för att ta oss an de bevis som senare kommer att gå igenom. I den här delen kommer även en del grundläggande exempel att representeras för att demonstrera hur satserna används i konkreta fall. De resultat som gås igenom i denna del baseras till stor del på Persson och Böiers teori som de tar upp i sin bok Änalys i en variabel". Adams och Essex bok "Calculus - A complete course"har även varit till stor hjälp då de båda böckerna kompletterar varandra med olika perspektiv.

För att ge en djupare förståelse för analysens huvudsats uppkomst avslutar vi uppsatsen med ett avsnitt om de hisoriska aspekterna kring satsen samt en mer ingående historisk informationsdel om de personerna som bidragit mest till dess tillkomst och vad konkret de har bidragit med. Dessa personer är Sir Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Von Leibniz, James Gregory och Isaac Barrow. Då alla fyra matematiker var aktiva under samma period så har det varit svårt för historiker att sammanställa vem som bidrog med vad och om det faktiskt var så att en av dem var först med att komma på satsen.

Kapitel 2

Bakgrund

2.1 Funktioner

I det här arbetet studeras funktioner i en variabel. Vi kommer att få begränsa oss till kontinuerliga funktioner som skickar reella tal till reella tal.

Funktioner
Definitionen av vad en funktion är har ändrats med tidens gång. Under en lång tid var man överens om att en funktion var ett slags uttryck som berodde på en eller flera variabler. Senare insåg man att denna definitionen inte var tillräckligt och därför infördes följande definition som ansågs vara mer generell och som används än idag.

Definition 1. "*En **funktion** från en mängd M till en mängd N är en regel som till varje objekt i M på ett entydligt sätt ordnar ett objekt i N*"(Persson Böiers 2018, S.37)

Nedan ges några exempel på funktioner. Den första funktionen är konstant och beror inte på någon variabel, de andra funktionerna beror av en (x), två (a, b) och respektive tre (a, b, n) variabler.

$$7 + \frac{5}{2}, \qquad x^2 + 5, \qquad \sqrt{a^3} - \frac{2b}{3}, \qquad \frac{1}{(a+b)^n}$$

För många är funktioner något som kopplas till abstrakta matematiska uttryck men det finns även exempel på andra typer av funktioner som, omedvetet eller medvetet, dyker upp och används ibland i vardagen. Nedan ges ett mer intuitivt exempel på en sådan funktion.
I en familj finns det fem barn som ska klä på sig en tidig måndagsmorgon. På deras sängar har föräldrarna lagt tre olika uppsättningar av kläder till respektive barn som de får välja fritt bland. Input till funktionen är i vårt fall ett av barnen och output är en av klädesuppsättningarna som barnet ska ha på sig. Funktionen "att klä på sig"är en funktion som tar ett av barnen och kopplar det till en klädesuppsättning och utför en transformation och resultatet blir ett påklätt barn.

2.2 Definitionsmängd och värdemängd

För att få en bättre förståelse för hur funktioner är uppbyggda så behöver vi införa två stycken begrepp som förklarar vilka värden som en godtycklig funktion får respektive kan anta. Definitionsmängden och värdemängden för en funktion betecknas med D_f respektive V_f.

Definitionsmängden för en godtycklig funktion $f(x)$ är mängden av alla värden på x som funktionen tillåts anta. Vilka värden på x som är tillåtna beror på hur funktionen ser ut. Värdemängden är alla värden $f(x)$ erhåller när man sätter in olika värden för x i funktionen. För t.ex. funktionen $f(x) = x + 10$ har vi att D_f är hela $\mathbb{R}$ och detsamma gäller även för V_f eftersom att funktionen kan anta alla möjliga x och y-värden. Ett annat exempel är funktionen $h(x) = \frac{1}{x+5}$. För den här funktionen är alla x-värden förutom $x = 5$ tillåtna då det inte är tillåtet att dela någonting med noll. Vi får därför att definitionsmängden blir $(-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$. Funktionen kan inte anta värdet 0 ty vi har ett bråk med nollskild täljare vilket ger oss att funktionens värdemängd blir $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

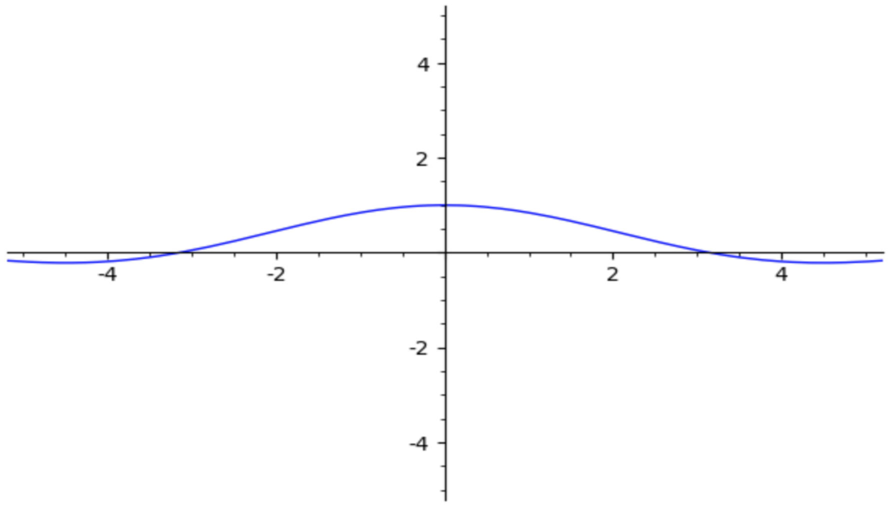
2.3 Gränsvärden

När vi studerarar gränsvärdet av en godtycklig funktion så undersöker vi vad funktionsvärdet, y-värdet, blir för funktionen då man närmar sig ett specifikt x-värde. I detta arbete går vi igenom två varianter av definitioner för gränsvärden som behövs för den övriga teorin som gås igenom inför huvudsatsen. Som introduktion börjar vi med att gå igenom ett exempel av ett gränsvärde för en välkänd funktion.

Vi studerar gränsvärdet för funktionen $f(x)$ då $x \to 0$ där

$$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$$

om vi låter $x \to$ uppstår problemet att vi får $\frac{0}{0}$ som inte är definierat eftersom att vi inte kan dela någonting med 0. Men om vi ritar upp funktionens graf och studerar vad som händer med funktionen då $x \to 0$ så kan vi observera ett annat resultat.



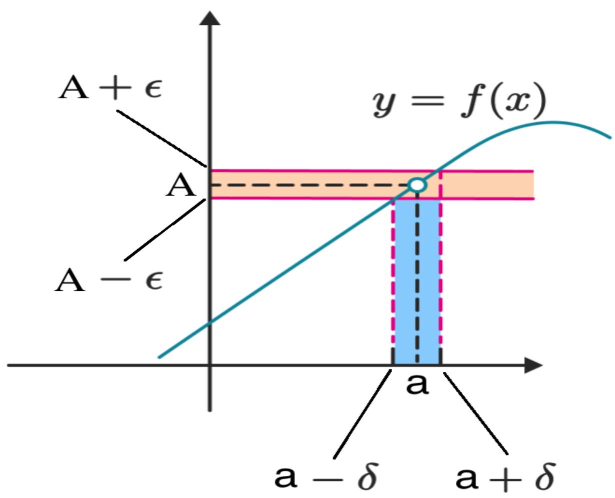
Figur 2.1: Funktionen $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$

Vi ser från grafen att funktionsvärdet för funktionen närmar sig 1 då $x \to 0$ trots att funktionen ej är definierad i punkten $x = 0$, vi kan därför konstatera att $f(x) \to 1$ då $x \to 0$. I praktiken är det oftast enklare att undersöka gränsvärden med hjälp av algebraiska metoder iställer för att använda sig av grafiska metoder, men just för det här exemplet kan det vara lämpligt att skissa funktionens graf för att hitta gränsvärdet i en önskad punkt.

Gränsvärdet då x går mot en given punkt

Definition 6. Om vi har en godtycklig funktion $f(x)$ så säger vi att det gäller att $f(x)$ har gränsvärdet A då x går mot a om det för varje tal $\epsilon > 0$ existerar ett tal δ sådant att $|f(x) - A| < \epsilon$ för alla $0 < |x - a| < \delta$. Gränsvärdet då x går mot en punkt a betecknas vanligen med

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$



Figur 2.2: Geometrisk tolkning av delta-epsilon definitionen

Gränsvärde då x går mot oändligheten

Definition 7. Givet att vi har en godtycklig funktion $f(x)$ så säger vi att $f(x)$ har gränsvärdet A då x går mot oändligheten om det för varje tal $\epsilon > 0$ existerar ett tal $\omega(\epsilon)$ sådant att $|f(x) - A| < \epsilon$ för alla $x > \omega(\epsilon)$.

För att demonstrera hur definitionens användning går vi igenom ett grundläggande exempel. Vi ska visa att funktionen

$$f(x) = \frac{x+2}{x} \to 1 \quad d\mathring{a} \quad x \to \infty$$

För att göra detta så måste vi visa att det finns ett tal $\omega(\epsilon)$, givet att $\epsilon > 0$, sådant att $|\frac{x+2}{x} - 1| < \epsilon$ för alla $x > \omega$. Enligt definitionen får vi

$$|f(x) - 1| = |\frac{x+2}{x} - 1| = \frac{2}{x}.$$

Eftersom att $\frac{2}{x} < \epsilon$ är ekvivalent med att $x > \frac{2}{\epsilon}$ så ser vi att

$$x > \frac{2}{\epsilon} \Longrightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

därför duger talet $\frac{2}{\epsilon}$ eller vilket tal som helst som är större än detta tal. Vi har därmed visat att ett det finns ett godtyckligt ω som uppfyller $|f(x) - 1| < \epsilon$ för alla $x > \omega$ och därmed är vi klara.

2.4 Kontinuitet

Här går vi igenom tre olika typer av kontinuitet som är bra att känna till för de kommande satser och bevis som vi presenterar. De tre typerna är kontinuitet i en punkt, kontinuitet i ett intervall och allmän kontinuitet.

Kontinuitet i en punkt

Definition 2.1.

En funktion $f(x)$ sägs vara kontinuerlig i en punkt b om punkten b tillhör funktionens definitionsmängd och om följande gränsvärde existerar:

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

Vilket också kan skrivas på följande med hjälp av höger och vänstergränsvärde då definitionerna är ekvivalenta:

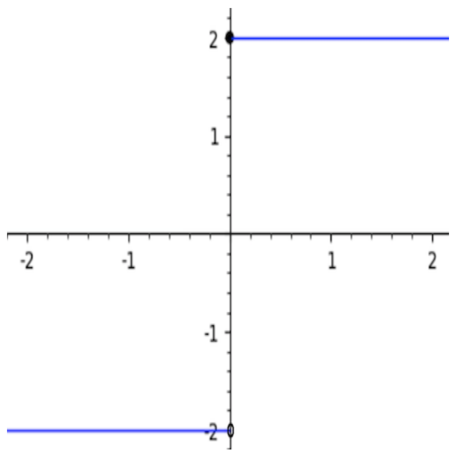
$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b+} f(x) = f(b)$$

Exempel på funktioner som är kontinuerliga i en punkt:
Funktionen $f(x) = x^2+1$ är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd. Om vi väljer punkten $x = 2$ får vi att $f(x) = x^2 + 1 \to 2^2 + 1 = 5$ då $x \to 2$

Ett exempel på en funktion som inte är kontinuerlig i en punkt är

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{då } x \geq 0 \\ -2 & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

Den här funktionen är kontinuerlig i alla punkter förutom i punkten $x = 0$, detta beror på att vänstergränsvärdet $\lim_{x \to 0-} g(x)$ och högergränsvärdet $\lim_{x \to 0+} g(x)$ inte stämmer överens.



Figur 2.3: Funktionen $g(x)$

Kontinuitet på ett intervall
Vad gäller kontinuitet på ett intervall så ser definitionen olika ut beroende

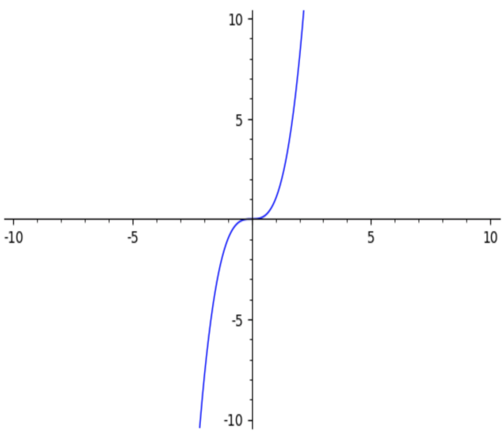
på hur intervallet som studerar ser ut. I det här arbetet begränsar vi oss till att studera öppna och slutna intervall.

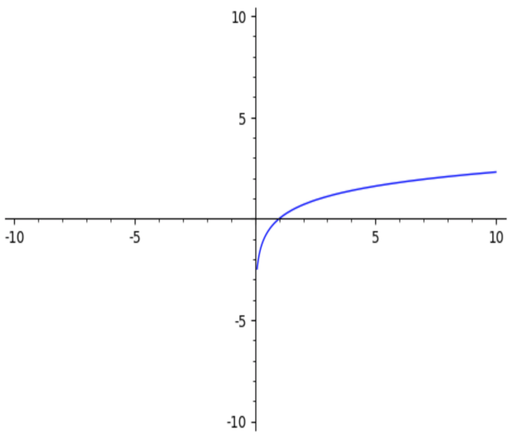
Definition 3.
En funktion säges vara kontinuerlig på det öppna intervallet (a, c) om det är så att funktionen är **kontinuerlig** i varje punkt $b \in (a, c)$.
En funktion säges vara kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, c]$ om det gäller att funktionen är **kontinuerlig** i varje punkt $b \in [a, c]$.

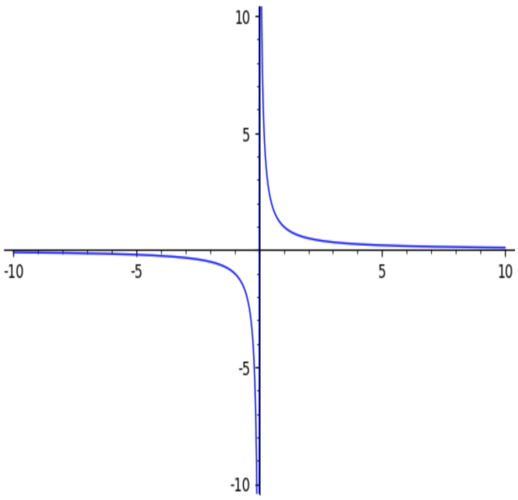
Kontinuerlig funktion
Definition 4. En funktion $f(x)$ säges vara en kontinuerlig funktion om den är **kontinuerlig** i varje punkt i sin definitionsmängd.

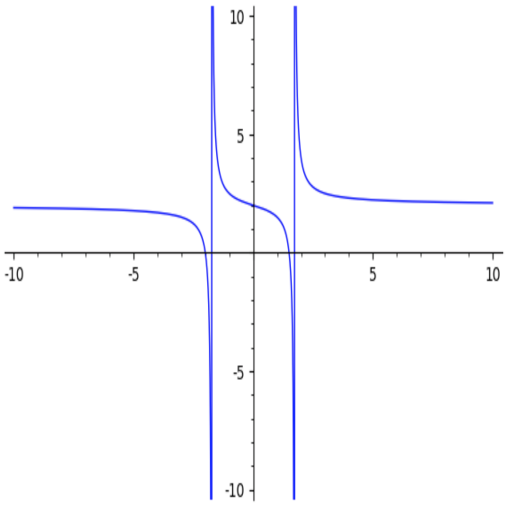
Informellt betyder detta att funktionen som man betraktar varken ska ha några hål, avbrott eller hopp i sig för att den ska klassas som kontinuerlig. Nedan visas fyra varianter av grafer på olika funktioner som antingen är kontinuerliga eller diskontinuerliga.

De två graferna på den första raden visar den kontinuerliga funktionen $f(x) = x^3$ respektive funktionen $g(x) = ln(x)$ som inte är kontinuerlig i punkten $x = 0$. Graferna på den andra raden representerar funktionerna $h(x) = \frac{1}{x}$ som inte heller är kontinuerlig i punkten $x = 0$ samt funktionen $k(x) = 2 + \frac{x}{(x^2-3)}$ som inte är kontinuerlig i två punkter, nämligen punkterna $x = -2$ och $x = \frac{3}{2}$.









2.5 Derivator

Ett annat viktigt begrepp som behöver gås igenom är derivata. I det här arbetet kommer vi inte att studera alla tillämpningar av derivator utan fokus ligger på deras användning i samband med elementära funktioner. Derivator används bland annat till att mäta förändringen av en viss funktion. Vilken derivata en viss funktion har beror helt på vilken funktion det är som man studerar. Derivatan av en funktion har många olika beteckningar, detta beror på att det var flera matematiker som ansåg sig ha bidragit till dess uppkomst. Några av dem ville ha sin del av äran och införde därför egna notationer men också för att deras metoder skiljer sig avsevärt från varandra. Följande notationer för derivatan av en funktion $f(x)$ anses vara de vanligaste.

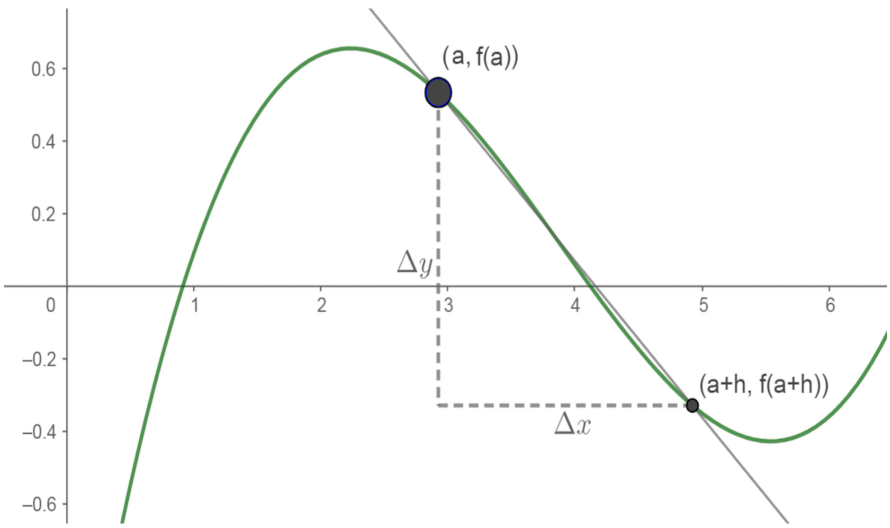
Matematiker	Notation
Isaac Newton	$\dot{x}$
Gottfried Leibniz	$\frac{dy}{dx}$
Joseph Louis Lagrange	$f'(x)$
Leonhard Euler	$Df(x)$

Derivatans definition

Definition 5. Om vi har en godtycklig funktion $f(x)$ som är definierad i omgivningen av en punkt a så gäller det att om gränsvärdet

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar så är funktionen $f(x)$ deriverbar i punkten a. Värdet av $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ kan tolkas som lutningen till den linje som går genom punkterna $(a, f(a))$ och $(a+h, f(a+h))$. Om vi låter h gå mot noll så kommer sekanten att övergå till en tangent i den önskade punkten. I figuren nedan betecknas förändringen i y och x led med $\Delta y = f(a+h) - f(a)$ respektive $\Delta x = a + h - a = h$.



Figur 2.4: Geometrisk tolkning av derivatans definition

För att visa hur man deriverar en funktion med hjälp av derivatans definition betrakar vi följande exempel. Vi ska derivera funktionen $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Enligt derivatans definition får vi:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 3 - x^2 - 2x - 3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+2x+2h+3-x^2-2x-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+2h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+2)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+2+h=2x+2$$

Andra definitioner av derivator
För att visa hur de olika metoderna skiljer sig åt så visar vi i det här avsnittet hur man deriverar samma funktion $f(x)=x^2+2x+3$ med hjälp av Newtons och Leibnizs definitioner av derivatan. I det här avsnittet kommer inte en mer ingående beskrivning av hur de två metoderna fungerar att ges och inte heller kommer någon geometrisk tolkning att ges då det är för omfattande för att ta med i denna uppsats.

Leibniz metod
Vi ska derivera funktionen $y=x^2+2x+3$ och för att göra detta så lägger vi till dy till alla termer som innehåller ett y och dx till alla termer som innehåller ett x. Gör vi detta så får vi följande uttryck

$$dy+y=(x+dx)^2+2(x+dx)+3$$

Vi utvecklar sedan paranteserna och får uttrycket

$$dy+y=(x^2+2x+3)+2xdx+dx^2+2dx$$

men vi vet att $y=x^2+2x+3$ och därför kan vi göra en substitution i högerledet vilket ger oss

$$dy+y=y+2xdx+dx^2+2dx$$

subtraherar vi sedan y från bägge led och delar med dx får vi

$$\frac{dy}{dx}=2x+dx+2.$$

Leibniz utnyttjade sedan att hans uppdelning av kurvan var så pass smal att differentialen dx kan antas vara försumbar i jämförelse med de andra två termerna. Om vi utnyttjar detta får vi i högerledet kvar termerna

$$\frac{dy}{dx}=2x+2$$

vilket stämmer överens med resultatet som vi fick när vi använde derivatans definition (Lund 1995, S.36-41).

Isaac Newtons metod

I praktiken är Netwon och Leibniz metoder likadana, det som skiljer dem åt är teorierna som ligger bakom hur de kom fram till dessa resultat. Newtons metod kräver en kort förklaring för att bli mer begriplig. Teorierna bakom Leibniz metod överlåter vi till läsaren att kolla upp. Newton tar, likt Leibniz, hjälp av ett litet tillägg som han får fram genom att studera förhållandet mellan fluxioner och fluenter som han betecknar med $\dot{x}$ respektive $\dot{y}$. Detta förhållande kan man beräkna genom att studera det lilla tidsintervall som han kallar för o och där $\dot{x}$ representerar tiden (x-led) och ẏ hastigheten (y-led). För att kunna beräkna förhållandet med denna metod måste man utgå från perfekta förhållanden vilket innebär att både tiden och hastigheten är konstanta. Förhållandet beräknas sedan genom att studera en godtyckligt punkt (x, y) på tidsintervallet som kommer att flytta sig till en en annan punkt på kurvan som han kallar för $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$. I denna punkt undersöker man punktens riktning och hastighet genom att studera diagonalen i rektangeln som konstrueras med hjälp av storheterna $\dot{x}$ och $\dot{y}$.

Vi studerar igen kurvan $y = x^2 + 2x + 3$ och gör tillägget $\dot{x}o$ till x och $\dot{y}o$ till y vilket ger oss

$$y + \dot{y}o = (\dot{x}o + x)^2 + 2(\dot{x}o + x) + 3$$

utvecklar vi paranteserna får vi

$$y + \dot{y}o = \dot{x}o^2 + 2x\dot{x}o + 2\dot{x}o + (x^2 + 2x + 3)$$

återigen utnyttjar vi att vi kan skriva $y = x^2 + 2x + 3$ i högerledet och får

$$y + \dot{y}o = \dot{x}o^2 + 2x\dot{x}o + 2\dot{x}o + y$$

sedan drar vi bort y från båda sidor och delar med ẋo vilket ger oss

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{x}o + 2x + 2$$

sedan tar man bort termerna som innehåller o och vi får

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x + 2$$

vilket också stämmer överens med resultatet vi fick med hjälp av derivatans definition (Lund 1995, S.49-54).

Deriveringsregler
Att tillämpa derivatans definition, eller någon annan av de definitioner som gåtts igenom, varje gång man ska derivera en funktion kan bli väldigt omfattande och därför är det mer vanligt att man i praktiken använder sig av de olika deriveringsreglerna när man snabbt vill ta reda på en funktions derivata. De olika deriveringsreglerna för elementära funktioner återfinnes i varje bok som behandlar funktioner och derivator och därför överlämnas detta avsnitt till den nyfikne läsaren att utforska.

2.6 Integraler

Ett sista centralt område inom matematisk analys som behövs gå igenom är integraler. En integral är resultatet som fås efter att man har integrerat en godtycklig kontinuerlig funktion. Med hjälp av integraler kan man exempelvis beräkna arean under en funktionskurva. Integraler används även till att beräkna andra storheter som volym, massa och längd av geometriska objekt, de är även en viktig matematisk tillämpning inom andra områden som sannolikhetsteori, fysik och försäkringsmatematik. I det här arbetet begränsar vi oss till att endast studera integralers användning vid beräkning av areor under funktionskurvor, vi kommer även att begränsa oss till att endast studera funktioner som är integrerbara.

Definition 5
Antag att funktionen $f(x)$ är integrerbar på intervallet $[a, b]$. Det entydligt bestämda talet ξ kallas för integralen av $f(x)$ över intervallet $[a, b]$ och betecknas

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Räkneregler för integraler För räkning med integraler så finns det flera räkneregler som man bör känna till. Räknereglerna är inte bara till för att underlätta beräkningen av integraler, det finns även uppgifter där man måste använda sig av räknereglerna för att få en integral som går att beräkna algebraiskt.

Sats 1. Antag att funktionerna f och g är integrerbara över intervallet $[a, b]$ då gäller det att

$$(1) \qquad \int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$(2) \qquad \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$(3) \qquad f(x) \leq g(x) \quad \text{i [a,b]} \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bevisen för för de olika räknereglerna finns exempelvis i Persson & Böiers (2018, s. 303). De flesta räknereglerna är dock relativt självklara om man tänker sig att integralen representerar arean av en yta.

Kapitel 3

Analysens fundamentalsats

3.1 Historisk bakgrund

Vi ska i detta avsnitt gå igenom en del historiska detaljer till Gottfried Wilhelm von Leibniz och Isaac Newton som anses vara de två personerna som uppfunnit analysens fundamentalsats. Vi kommer även att gå igenom en del av Isaac Barrows historia eftersom att vi senare i detta avsnitt kommer att gå igenom hans rigorösa bevis av satsen. Efter detta ges en sammanfattning av hur utvecklandet av beräknandet av areor under grafer gått till innan uppkomsten av analysens fundamentalsats.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Gottfried Wilhelm von Leibniz var en framgångsrik tysk matematiker som föddes år 1646 i staden Leipzig där han växte upp med sin far Friedrich Leibniz som var professor i moralisk filosofi och sin mor Catharina Schmuck som gick bort när Leibniz endast var sex år gammal. När Leibniz var sju år gammal började han på Nicolai Skolan i Leipzig där han utvecklade ett stort intresse för språk. Det sägs att intresset kom från hans vilja att kunna översätta sin fars akademiska texter vilket ledde till att han redan vid tolv års ålder behärskade grekiska och latin mycket väl. Under hans tid på skolan blev han även undervisad i Aristoteles logik som var ett fundamentalt synsätt för samhällets akademiker under åren som Leibniz växte upp. Leibniz blev inte alls övertygad av Aristoteles idéer, resonemang och koncept och började därför att utveckla egna idéer som han ansåg var bättre, det var även dessa idéer som låg till grund för de matematiska bevis som han senare i livet kom fram till. När han väl lärt sig att behärsa latin så ägnade han stor del av sin tid till att studera och förstå sin faders verk, framförallt verken inom området metafysik. Redan vid 14 årsåldern, år 1661, började Leibniz att studera filosofi och matematik vid Leipzigs universitet och tog sin examen två år senare (Katz 2009, s.565-568).

Under våren 1663 tog Leibniz möjligheten att studera vid staden Jenas universitet. Där möttes han av matematikundervisning som var av betydligt högre kvalité än han tidigare stött på. Leibniz nya lärare, matematikprofessorn Erhard Weigel, lade stort fokus på att lära Leibniz hur man gjorde matematiska bevis. Speciellt gick han igenom hur viktigt det var att man i detalj förklarade metoderna som använts när man skulle bevisa matematiska koncept och man tror att det var efter detta som Leibniz intresse för matematik tog fart. Leibniz tog med sig allt han lärt sig från Jenas universitet och när han återvände till Leipzig avlagde en examen inom filosofi kombinerat med juridik och matematik. Efter detta fokuserade Leibniz på sin habilitation i filosofi som är en kvalifikation som behövs för att man ska få lov att undervisa på universitsnivå i Tyskland, denna publicerades år 1666 under namnet "Dissertatio de arte combinatoria". Efter att Leibniz arbete publicerats fick han en del uppmärksamhet runtomkring sig och erbjöds flera stipendier av olika universitet runt om i Tyskland, trots detta blev han nekad till en doktorandtjänst inom juridik vid universitetet i Leipzig. Leibniz lät sig inte påverkas av detta och tog istället en doktorandtjänst vid Altdorfs universitet och tog även sin doktorsexamen där något år senare. Leibniz blev efter sin examen erbjuden ett jobb på Altdorfs universitet men tackade nej till tjänsten och valde istället att resa vidare. Så småningom hamnade han i Frankfurt där han jobbade med alla möjliga typer av uppdrag inom juridik, forskning och politik, under dessa år knöt han även kontakter med omtalade forskare i Paris och det var även dit han åkte härnäst (Mactutor, 1998).

Leibniz blev skickad till Paris på uppdrag av Baron von Boineburg som jobbade för den tyska regeringen. Leibniz uppdrag i Paris var att söka upp representanter för den franska regeringen och förhandla med dem för att få dem att upphöra sina anfall mot tyskt territorium. Detta gick inte som planerat då det var omöjligt för Leibniz att få prata med den franska regeringen. Medans han väntade på att få prata med regeringen så tog han kontakt med olika matematiker och filosofer i Paris och visade sina räknemaskin som han jobbat med under en längre tid. Det dröjde inte länge innan han återupptog sina studier i matematik vid stadens universitet där han blev handled av Christiaan Huygens. Leibniz blev tipsad av sin handledare att studera Saint-Vincents verk om summering av serier och redan efter några månader hade Leibniz bidragit med nya upptäckter inom området. Leibniz stannade inte länge i Paris då fredsuppdraget som han blev ditskickad till att göra misslyckades och istället skickades han till England i hopp om att kunna genomföra ett liknande fredsuppdrag. När han väl var i England besökte han The Royal Society som var ett akademiskt sällskap inom naturvetenskap och visade upp sin räknemaskin. Där fick han även möjligheten att träffa matematiker som Hooke, Boyle och Pell. I ett samtal med en av dem så visade Leibniz sina framsteg inom serier men fick tyvärr reda på att hans upptäckter redan blivit publicerade av matematikern Gabriel Mouton. Leibniz återvände strax därpå till Paris men insåg snabbt att han inte behärskade matematik på den nivån som han önskade och bestämde sig därför för att återvända till England för studera matematik (Mactutor, 1998).

Våren 1673 blev Leibniz medlem i The Royal Society of London vilket öppnade upp en helt ny värld av möjligheter för Leibniz. Där ägnade Leibniz sin tid åt att studera verk av matematiker som Pascal och James Gregory, han lärde sig även mer om området, som på engelska kallas för, ”geometry of infinitesimals ”. Så småningom återvände Leibniz till Paris och kom via sina kontakter från The Royal Society i kontakt med matematikern Ehrenfried Tschirnhaus som han jobbade tillsammans med under de kommande åren. Det var under dessa år som Leibniz utvecklade sina teorier och redovisade en första version av analysens fundamentalsats. Problemet med den tidiga versionen var att han inte lyckats införa en bra notation för sin kalkyl och det tog över ett år innan han publicerade notationen $\int f(x)\,dx$ i slutet av 1675. I denna publikation redovisade han även hur man differentierar en produkt av funktioner. Leibniz fortsatte sitt arbete och kom året därpå fram till att $d(x^n) = x^{n-1}dx$ för godtyckliga n. Under tiden som Leibniz arbetade med att utveckla analysens huvudsats så var han även i kontakt med Isaac Newton som anklagade Leibniz för att ha stulit hans metoder. Det blev en långvarig dispyt mellan Newton och Leibniz, vilket till stor del berodde på att det tog upp till ett år för breven emellan dem att komma fram, om vem som faktiskt uppfunnit satsen. Något år senare flyttade Leibniz till Hanover där han bodde tills han gick bort den 14 november 1716. Under denna tid tog han på sig många olika uppdrag och fortsatte sin forskning inom olika matematiska och fysikaliska områden och gjorde oerhört viktiga bidrag till binära system, determinanter, lösningar av system av linjära ekvationer, differentialkalkylen och inom fysiken. Tyvärr fortsatte dispyten som Leibniz tidigare haft med Newton men denna gång var det Newtons anhängare John Keill som anklagade Leibniz för plagiering av Newtons arbete. Dispyten fortsatte i flera år ända tills Leibniz lyckades bevisa att Newtons förståelse av högre ordningens derivator var inkorrekt genom en anonym publiciering och detta fick dem att lämna honom ifred tills hans bortgång. Faktum är att även om både Leibniz och Newton vägrade att inse det så var det att båda två uppfann calculus under samma skede och oberoende av varandras arbete (Mactutor, 1998).

Isaac Newton (1643-1727)

Isaac Newtons livsöde skiljer sig en hel del från Leibnizs. Newton föddes den 4:e januari 1643 i Woolsthorpe, Lincolnshire, England. Hans föräldrar var bönder men de levde väl då fadern ägde mycket land, fastigheter och boskap, de hade dock inga akademiska utbildningar. Newton fick aldrig möjligheten att lära känna sin far, som också hette Isaac Newton, då han gick bort tre månader innan Newton föddes. Newtons mamma, Hannah Ayscough, ärvde faderns förmögenhet som bestod av boskap och fastigheter. Hon gifte om sig redan när Newton var två år gammal med Barnabas Smith som var en minister som arbetade inom kyrkan. Smith ville ha en hustru men inte en styvson och därför valde Newtons mor att överge Newton och lät honom bo hos sina föräldrar för att kunna flytta till North Witham och bo med sin nya man. Newton blev behandlad som en föräldralös av hennes föräldrar och fick genomlida en tuff och tragisk barndom. Newtons relation med modern blev aldrig sig lik och även tio år senare när han återförenades med mamman och resten av sin släkt, då styvfadern gått bort, så var det svårt för Newton att acceptera henne. Strax därpå började Newton studera vid Free Grammar School i Grantham men studierna gick inget vidare för honom och modern valde därför att ta honom ur skolans värld för att istället lära honom att hjälpa till med hennes affärer och fastigheter. Newtons farbror ansåg att detta var ett dåligt beslut och övertalade henne att låta Newton få gå klart skolan. Han erbjöd sig även att undervisa Newton privat. Under tiden som han gick i skolan skulle han även förbereda sig inför antagningsprovet till universitetet. Sagt och gjort så återvände Newton till Free Grammar School och denna gång visade han en mycket tydlig förbättring i sina studier och detta ledde till att modern accepterade att Newton skulle gå vidare med sina studier (Katz 2009, s.544-550).

Newton började på Trinity College i Cambridge hösten 1661 och var betydligt äldre än de flesta av sina kurskamrater. På grund av sin mors status fick Newton titeln ”sizar” när han kom till universitetet. Titeln innebar att han, vid sidan av sina studier, fick i uppdrag att hjälpa andra elever med deras studier och diverse vardagssysslor (Mactutor, 2000). Newtons plan var att avlägga en examen inom juridik och det var inte förräns under tredje året som han fick välja valfria kurser. Han valde att studera Descartes, Gasseni, Hobbes, Galileo, och Boyles filosofier och blev intresserad av astronomi. Vidare studerade Newton Keplers verk och kom på egna idéer och koncept som han sammanfattade i en bok som han kallade för ”Quastiones Quaedam Philosophicae” och redan i denna bok visades Newtons potential. Newtons intresse för astrologi tog fart när han kom över en bok om astrologi på en marknad. Han insåg snabbt att han inte förstod matematiken , mer bestämt trigonometrin, som användes i boken. Därför bestämde han sig för att studera Barrows version av ”Euclids Elementa” följt av Oughtred Clavis bok ”Mathematica Elementa” och Descartes bok ”La Géométrie” för att sedan återuppta studierna med ett nytt perspektiv (Mactutor, 2000).

Året därpå blev Newton Fellow vid Trinity College. Han fortsatte sina studier inom matematik och astronomi. Universitetet såg en del av Newtons än dolda potential och erbjöds ett stipendium av universitetet, kort därefter tog han sin kandidatexamen. Sommaren 1665 bröt pesten ut i landet och på grund av detta stängdes universitetet och Newton fick återvända till Lincolnshire. Det var under de två kommande åren, då Newton studerade på egen hand hemifrån, som han gjorde oerhört stora och viktiga upptäckter inom astronomi, fysik, optik och matematik som skulle komma att förändra vår syn på vetenskapen. Det var även under denna period som Newton upptäckte och lade grunderna för det som vi idag kallar för differential och integralkalkyl. Newton var flera år före Leibniz med dessa upptäckter vilket var orsaken till dispyten emellan dem, han använde även en helt annan metod än Leibniz som involverade fluxioner och fluenter. När pesten var över år 1667 återvände Newton till universitetet i Cambridge och fortsatte sina studier på universitetet och avlagde så småningom en masterexamen. Under denna tid var det även flera matematiker, bland annat Barrow, som ville sprida Newtons nya upptäckter till resten av världen vilket ledde till att Newton blev berömd och han fick många följeslagare. Detta påverkade Newton senare i hans liv då så många hade höga förväntningar på honom och pressen blev till slut så pass stor att han fick dra sig tillbaka från forskningen (Mactutor, 2000).

Efter att Newton tagit sin masterxamen började han att undervisa inom optik på universitet, i kursen delade han även med sig av upptäckterna som han gjort under tiden som han satt i karantän. Newton fortsatte sin forskning inom optik och beslöt sig för att skänka bort ett teleskop till Royal Society vilket ledde till att han blev erbjuden ett medlemskap i föreningen. Newton tackade ja till erbjudandet och gick med i sällskapet år 1672 och med hjälp av dem lyckades han publicera sin första vetenskapliga artikel om optik i "Philosophical Transactions of the Royal Society" under samma år. Det tog många år innan Newton publicerade sina framsteg inom optiken igen då han hamnade i en dispyt med forskaren Hooke. Hooke påstod att Newton stal hans idéer. Det tog Newton ända fram till år 1704, vilket var efter Hooks bortgång, innan han valde att publicera sin bok om optik. Newton distanserade sig efter dispyten från Royal Society då Hooke var en av de som var högst uppsatt i föreningen. Newton fortsatte att stöta på motgångar i sin karriär. År 1678 blev han anklagad av Liége för att ha stulit hans idéer och under samma år gick Newtons mamma bort vilket ledde till att han fick ett sammanbrott och isolerade sig allt mer från omvärlden. Trots att Newtons forskningskarriär var kort så hann han bidra med många viktiga resultat. Hans viktigaste bidrag till världen var hans upptäckter kring gravitationen, speciellt Newtons gravitationslag och rörelselagarna. År 1693 fick Newton ett till sammanbrott och valde att helt dra sig tillbaka från forskarscenen. Vad som var orsaken till detta är okänt än idag. Newton lämnade Cambridge och reste till London, där han fick jobbet som föreståndare för The Royal Society på grund av Charles Montague goda rekommendationer. Trots att Newton gått vidare i sitt liv så sade han aldrig upp sitt medlemskap i The Royal Society där han år efter år blev blev vald till ordförande fram till sin död, han blev även dubbad av drottningen Anne år 1705 och blev en av de första forskare som blivit hedrad för sitt arbete i England (Mactutor, 2000).

Isaac Barrow (1630-1677)

Barrow föddes i oktober år 1630, vilket exakt datum han föddes på är än idag okänt. Barrows mor, Ann, gick precis som Leibniz mor bort tidigt och hans fader Thomas Barrow valde att skicka bort honom för att leva med sin farfar när Barrow var runt fyra år gammal. Redan två år senare gifte Thomas om sig och man tror att han gjorde detta för att få hem Isaac igen då han ville att Isaac skulle börja studera vid tidig ålder. Barrow skickades till Charterhouse skola som endast, likt de andra skolorna under denna tid, var avsedd för pojkar. Thomas fick även betala dubbel avgift för att skolan skulle ge Barrow den uppsyn som krävdes med tanke på hans unga ålder. Skolan misslyckades dock med sitt uppdrag att uppfostra Isaac vilket ledde till att han blev en bråkstake och detta påverkade hans studier negativt. Thomas fick reda på detta och valde att skicka Isaac till skolan Felstead i Essex som på den tiden var känd för att vara oerhört disciplinerad. Skolan kunde hantera Isaac och fick honom att vilja ta sig an det som undervisades på skolan. Han gjorde snabba framsteg och fick goda resultat i kurserna som han tog, vilket mestadels var kurser i latin, hebreiska samt kurser som förberedde Barrow för universitetsstudier. Under tiden som han studerade gick hans far igenom motgångar i sina affärer och hade därför inte råd att betala skolans avgifter. Trots detta valde skolans rektor, då han sett Barrows potential, att låta Barrow fortsätta och avsluta sina studier på skolan (Mactutor, 1998).

År 1643 fick Barrow ett stipendium på Peterhouse college på grund av att hans farbror var Fellow där. En tid senare sparkade skolan ut farbron på grund av hans politiska åsikter vilket ledde till att Barrow skickades till Oxford istället. Barrows vistelse i Oxford blev inte långvarig. Det nalkades inbördeskrig och därför skickades han till London år 1644 där han blev handledd av Thomas Fairfax. Thomas Fairfax blev, likt Barrows far, ruinerad och kunde därför inte längre hjälpa Barrow, men som tur var hade Barrow varit i kontakt med en tidigare skolkamrat som lovade att hjälpa Barrow med ekonomiskt stöd vid Trinity Collage i Cambridge. Barrow började vid Trinity Collage och blev handledd av Duport som var professor i grekiska studier. Under Duports handledning studerade Barrow bland annat grekiska, latin, hebreiska, kronologi, geografi och teologi. Han fick även under sitt andra år på skolan påbörja sina studier i matematik och valde då att studera aritmetik, geometri och optik. Han tog sin examen år 1649 och ansökte om ett stipendium för att få fortsätta sina studier inom matematik vilket han också fick. Barrow ansåg att studenterna fick studera för lite matematik och tack vare hans engagemang och entusiast för ämnet så lyckades han så småningom lägga grunden för den matematik som undervisades på Cambridge (Mactutor, 1998).

Barrow hamnade, likt Newton och Leibniz, i motvind under sin karriär men av andra anledningar än de andra. Han hade inga problem med att sprida sina tankar och idéer till andra och höll därför vid flera tillfällen mellan 1649 och 1654 tal om sina politiska åsikter som han förmodligen skulle behållit för sig själv men som tur var lyckades rektorn på skolan hjälpa honom att ta sig ur konflikterna som han hamnat i. Barrow tog sin masterexamen år 1652 och stannade kvar på universitetet för att studera medicin men också för att hjälpa till med att forma utbildningen som gavs på universitetet. Barrow hade tidigare lovat universitetet att han skulle fortsätta med sina studier i teologi när han tog emot stipendiumet och fick därför avbryta sina nuverande studier i medicin och istället återgå till att studera teologi. När han studerade kyrkans historia kom han in på ämnet astronomi som krävde kunskaper om geometri och därför bestämde han sig för, likt Newton, att lära sig mer om geometri för att kunna förstå matematiken inom astronomin. Han lärde sig geometrin på egen hand genom att skriva om Euklides Elementa och publicerade en egen bok om geometri som också användes som litteratur i kurser på univeristetet. År 1655 beviljades Barrow möjligheten att få studera i Paris och reste dit under villkoren att han skulle få 16£ per år de kommande tre åren men i utbyte var han tvungen att kontinuerligt vara i kontakt med universitetet så att de kunde följa hans utveckling. Universitet i Paris var en besvikelse för Barrow då det inte fanns några matematiker som kunde lära honom något nytt. Han fick heller inte möjligheten att åka till Rom på grund av pesten. Han reste senare vidare till andra städer i Europa i hopp om att finna bättre undervisning men stötte på en följd av komplikationer som förlängde hans vistelse i de olika städerna han besökte och han återvände inte till Cambridge förens i September år 1659 (Mactutor, 1998).

När han kom tillbaka fick han jobbet som professor i grekiska vid universitet men på grund av de regler som fanns vid universitetet så förbjöds han att ha andra inkomster vid sidan om som inte involverade unversitetsstudier vilket ledde till att han fick ekonomiska problem. Han tog därför ett till jobb som professor i geometri vid ett annat universitet som hette Gresham College. Han blev oerhört engagerad i sin tjänst vid Gresham då han tyckte om att undervisa matematik. Några år senare införde Cambridge universitet tjänsten Lucasian Professor och på grund av sina tidigare meriter fick Barrow jobbet. Han blev den därmed den förste Lucasian Professor i matematik vid universitet. I och med detta slutade han som professor i grekiska. Under sin tid som professor i matematik så publicerade Barrow en rad av viktiga lektionsanteckningar som blev kända i världen. Det var även i en av dessa anteckningar som hans bevis av analysens fundamentalsats publicerades, detta var dock till följd av Leibniz och Newtons arbete. Newton besökte även Barrows lektioner och de delade många idéer och tankar med varandra under de kommande åren som gynnade bådas karriärer. De höll även kontakten med varandra via brev. Det var John Collins som publicerade Barrows anteckningar efter att Newton hjälpt till med att göra dem redo för publicering. I dessa anteckningar återfanns även viktiga resultat om tangenter och andra områden inom integralkalkylen. År 1669 lade Barrow matematiken på hyllan och avslutade sin tjänst som professor i matematik på Cambridge, hans efterträdare var Isaac Newton. Han valde att ägna resten av sina dagar åt att hjälpa till med uppbyggandet av Wren biblioteket men gick bort kort därpå och fick aldrig chansen att se verket färdigbyggt (Mactutor, 1998).

Dispyten mellan Leibniz och Newton

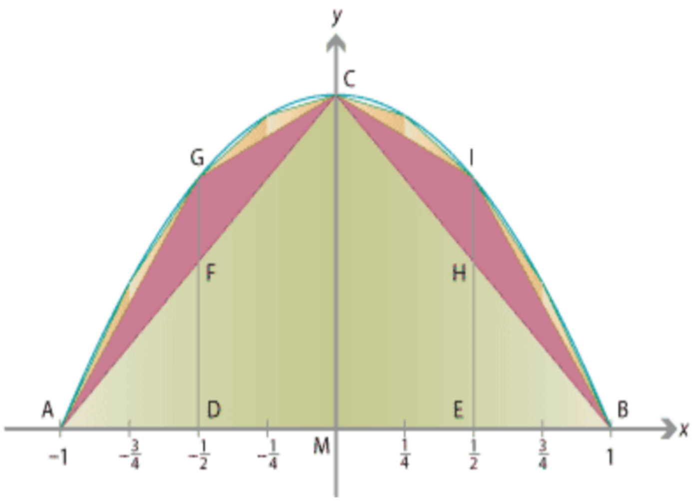
Den välkända dispyten mellan Leibniz och Newton handlade om vem av de två matematikerna som skulle bli krönt till skaparen av det som idag kallas för calculus och analysens fundamentalsats. I början hade Leibniz och Newton en bra relation med varandra, de hade båda hört talas om varandras goda framsteg och på grund av detta brevväxlat med varandra och disskuterade sina idéer och tankar. Från vad vi vet så beskrev Newton sin version av differentialkalkylen som involverade fluxioner och fluenter redan år 1666 men likt många andra forskare under den tiden så valde han att vänta med att publicera sina upptäckter. År 1687 publicerade Newton sitt livsverk "Philosophiae naturalis principia mathematica" och i den kunde man tydligt återse de idéer och koncept från integralkalkylen som han påstått sig kommit på 20 år tidigare. Leibniz publicierade däremot sin version av integralkalkylen redan år 1684 och trodde, då ingen tidigare hade publicerat integralkalkylen, att han var ensam skapare till verket. De två hade helt olika metoder men trots detta så anklagade matematikern John Wallis Leibniz för att ha stulit Newtons metoder. Han påstod även att Leibniz hade lärt sig om integralkalkylen av Newton vilket man idag vet inte är sant. Dispyten mellan dem höll på länge och de växlade ett dussintals brev med varandra där de försökte motbevisa den andre. Ett decenium senare blev Leibniz återigen anklagad men denna gång var det av matematikern Fatio de Duillier som anklagade Leibniz för plagiering. Man tror att Duillier anklagade Leibniz för att han blivit förolämpad när han läst en skrift av Leibniz där han påstått att det fanns vissa sorters matematiska problem som endast kunde lösas med hans version av integralkalkylen. Denna anklagelse blev, likt Wallis anklagande, snabbt välkänd inom forskarvärlden och samtidigt som detta behövde Leibniz handskas med den omständiga och långdragna dispyten han hade med Newton. Newton och Leibniz var även oense kring filosofiska frågor som de bråkade om offenligt. Dessa dispyter gynnade varken Newtons eller Leibniz karriär. Faktum är att uppståndelsen mellan dem fick dem båda att se dåliga ut. Två år senare bestämde sig Royal Society, som Newton var medlem i, att försöka reda ut konflikten. Problemet var att det var Newton som höll i utredningen och därför var många, speciellt Leibniz, kritiska till att han utnyttjat sitt medlemskap för att få det att se ut som att det var Leibniz som stulit idéer från honom och inte tvärtom. Det var även det som Royal Society kom fram till i deras sammanfattning av utredningen, att det var Leibniz som stulit Newtons idéer och att han lärt sig om analysens fundamentalsats från Newton. Leibniz accepterade inte detta och anklagade Newton och resterande medlemmarna i Royal Society för att ha stulit hans metoder och medvetet gjort ändringar i dem för att få metoden att se annorlunda ut. Efter detta lugnade diskussion ner sig en aning men dispyten fortsatte i form av brevkonversationer mellan Newton och Leibniz vilket till slut ledde till att de lät varandra vara. Leibniz blev inte heller störd av någon annan fram till hans bortgång den 14 november 1716 men dispyten upptogs kort därpå av andra matematiker och blev återigen ett omdebatterad ämne inom forskarvärlden decennier framöver (AMSI, 2011).

3.1.1 Areor under grafer, innan analysens huvudsats

Redan under antiken började filosofer som ägnade sig åt matematik att experimentera kring hur man kunde beräkna arean av ett område som begränsas av en kurva. Två av filosoferna var Antiphon och Eudoxus som utvecklade en metod där de tog hjälp av figurer som de redan visste hur man beräknade arean av, mer bestämt polygoner, för att beräkna arean av figurer som cirklar och ellipser. Metoden går ut på att fylla området med oändligt många polygoner som inte får överlappa varandra, det är tänkt att dessa polygoner ska täcka så stor del av ytan som möjligt och när antalet polygoner går mot oändligheten får man en god approximation av områdets area. Denna metod används än idag och kallas för utmattningsmetoden. Archimedes använde sig också av denna metod och lyckades beräkna volymer och areor av områden, han klarade även av att göra oerhört goda approximationer av konstanten π. Med hjälp av utmattningsmetoden kom Archimedes fram till att $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, han var även den första personen som lyckades beräkna arean av cirklar och areor under olika sorters parabler som i moderna termer motsvarade integraler som

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx.$$

För att åskådliggöra hur geniala Archimedes metoder var går vi igenom ett exempel där vi använder oss av hans metod för att beräkna arean under funktionen som precis nämnts.



Figur 3.1: Archimedes indelning av parabeln (AMSI, (2011))

Vi börjar med att konstruera en inskriven triangel i parabeln som skär x-axeln i punkterna $A = (-1, 0)$ och $B = (1, 0)$ samt y-axeln i punkten $C = (0, 1)$. Vi låter $M = (0, 0)$ vara mittpunkten på sträckan AB. Vi vet då att ΔABC har arean 1 eftersom $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$.

Vi konstruerar sedan ytterligare två inskrivna trianglar i parabeln som placeras utanför området som täcks av triangeln ΔABC. Vi låter $D = (\frac{-1}{2}, 0)$ vara mittpunkten på sträckan AM och $E = (\frac{1}{2}, 0)$ vara mittpunken på sträckan BM. Vidare drar vi linjen D som är parallel med y-axeln som skär sträckan AC i punkten C samt parabeln i punkten $G = (\frac{-1}{2}, \frac{3}{4})$ och får de två trianglarna ΔAGC och ΔBIC. För att beräkna arean av ΔAGC tar vi hjälp av sträckan FG. Arean av triangeln ges av hälften av höjden FG multiplicerat med bredden av ΔAGC där bredden är hälften av triangeln ΔABC dvs

$\frac{2}{2} = 1$. För att beräkna sträckan FG så noterar vi att trianglarna ΔADF och ΔAMC är likformiga och därför kan vi få fram sambandet

$$\frac{DF}{AD} = \frac{MC}{AM} \iff DF = AD \cdot \frac{MC}{AM} = \frac{1}{2}$$

och kan beräkna att $FG = DG - DF = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, dvs en fjärdedel av triangeln ΔABC höjd. Då triangeln ΔAGC har hälften av bredden och en fjärdedel av höjden av traingel ΔABC så blir dess area $\frac{1}{8}$ av ΔABC. Med samma resonemang och beräkningar får vi fram att även triangeln ΔBIC har arean $\frac{1}{8}$.

Om vi fortsätter att konstruera fler trianglar så kommer vi i nästa steg att behöva konstruera 4 nya trianglar och sedan 8,16,32... nya trianglar. Under n:te steget har vi konstruerat 2^n inskrivna trianglar i figuren som inte överlappar någon annan triangels område. Archimedes lyckades bevisa att för varje steg av nya trianglar så minskade trianglarnas bredd med hälften och dess höjd med en fjärdedel av triangeln i steget innan. Dessa resulterar med att summan av trianglarnas areor blir

$$1 + \frac{2}{8} + \frac{2^2}{8^2} + \frac{2^3}{8^3} + ... = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ...$$

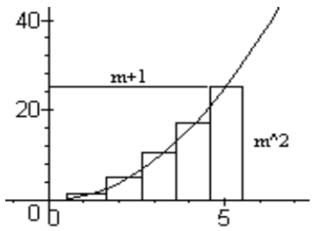
vilket är en geometrisk serie som kan beräknas med hjälp av formeln

$$1 + a^2 + a^3 + ... = \frac{1}{1 - a}$$

vilket ger oss att summan av areorna blir $\frac{3}{4}$ vilket är precis det vi hade fått om vi hade använt oss av integraler för att beräkna arean. Under en lång tid efter Antiphon, Eudoxus och Archimedes fortsatte man med att använda sig av olika varianter av utmattningsmetoden för att beräkna areor för specialfall av områden med hjälp av listiga konstruktioner och det tog en lång tid innan någon gjorde framsteg och lyckades komma på en mer generella metod för att beräkna arean av ett godtyckligt område.

Långt senare, under 1600-talet, började man återigen göra stora framsteg och flera matematiker kom på nya metoder för att beräkna areor av områden under kurvor. Johannes Kepler var en tysk matematiker och fysiker som var en av de första som lyckades beräkna arean av mer generella områden med hjälp av metoder där han använde sig av infinitesimalkalkyl. Han lyckades bland annat beräkna arean av en cirkel med denna metod, han fick även i uppdrag att beräkna arean och volymen av stadens vinfat med sina metoder. Strax därpå lyckades Gilles de Roberva, som var en fransk matematiker, visa att arean under en cykloid är tre gånger så stor som arean av dess genererande cirkel. Hans metod gick ut på att konstruera en cykloid samt dess genererande cirkel av samma material och sedan väga dem och då kom han fram till att cykloiden vägde ungefär tre gånger mer. Runt år 1635 gjorde den italienska matematikern Cavalieri stora framsteg inom detta område. Cavalieri studerade Keplers verk och utvecklade en helt ny metod för att beräkna arean under mer komplicerade funktionsgrafer som idag kallas för "method of indivisibles". Metoden går ut på att använda sig av indivisibla element, det vill säga odelbara segment av linjer och ytor, och använda dessa för att göra en approximation av det sökta områdets area och sedan jämföra detta område med ursprungsområdet man studerat. Under flera år fortsatte Cavalieri att utveckla sina metoder och han kom så småningom på hur man kunde integrera funktioner för att det sedan beräkna dess area. Det var även han som gjorde de första upptäckterna och bidragen till integralkalkylen och med sin nya metod lade han även grunden till Fermats, Newtons, Leibniz och Wallis kommande arbete inom området. I den nya metoden som Cavalieri utvecklat, där han också använder sig av indivisibla element, föreställde han sig att en graf kan representeras med ett oändligt antal skuggade områden. Han kom på att om man låter de skuggade områdena vara tillräckligt små så blir de istället till linjer. Dessa linjer skapar i sin tur en ojämn rät linje precis under kurvan vilket leder till att små trianglar skapas precis ovanför kurvan, detta synliggörs tylidgare i figuren nedan. Cavalieri var sedan listig och använde sig av trianglarna och rektanglarna i kombination med faktumet att förhållandet mellan en triangels och en rektangels area är $\frac{1}{2}$ givet att de har samma bas och höjd för att beräkna integralen av enklare funktioner. För att demonstrera hans metod går vi igenom ett exempel där vi beräknar arean under parabeln $f(x) = x^2$.

Om vi utgår från figuren nedan så ser vi att varje rektangulärt område har basen 1 och höjden x^2. Vi betecknar antalet rektangulära områden med m, Cavalieri försökte sedan att uttrycka arean under grafen med hjälp av areor av figurer som man redan visste arean på. Han konstruerade därför en rektangel som innehöll alla de andra rektanglarna som hade bredden $m + 1$ i och med att det finns m rektanglar och den första startar vid $\frac{1}{2}$ och den



Figur 3.2: Representation av Cavalieris metod (WPI, (1997))

sista slutar vid $m + \frac{1}{2}$ och rektangelns höjd blir m^2 enligt definitionen av en parabel.

Han satte sedan upp en ekvation för förhållandet mellan den stora rektangeln area och summan av de små rektanglarnas areor och fick fram ekvationen

$$\frac{\text{summa av m rektanglars area}}{\text{stora rektangelns area}} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + m^2}{(m+1)m^2}$$

sedan prövade Cavalieri sig fram och satte in olika värden på m i ekvationen och kom fram till följande omskrivning av ekvationen

$$\frac{\text{summa av m rektanglars area}}{\text{stora rektangelns area}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6m}$$

han experimenterade vidare med uttrycket och upptäckte att ju större m blev desto mindre påverkan hade uttrycket $\frac{1}{6m}$ i ekvationen. Det vill säga han hade i modern notation kommit fram till att

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{6m} = \frac{1}{3}$$

Cavalieris hade därmed omedvetet använt sig av gränsvärden i sina försök till att beräkna areor under grafer och gjorde därmed ett till viktigt bidrag till integralkalkylen. Han lyckades även härleda ett algebraiskt uttryck för området under grafen. Han kom fram till att parabelns höjd blev x^2 oavsett vilket värde på x som valdes och att om man valde att den stora rektangeln skulle börja vid ett godtyckligt värde x så blev rektangelns area $x \cdot x^2 = x^3$. Han hade därmed lyckats komma fram till att områdets area kunde beskrivas med funktionen $\frac{x^3}{3}$ och kunde sedan välja godtyckliga intervall för att beräkna områdets area.

Med hjälp av Cavalieris verk kom matematikern John Wallis lite senare fram till ett mer systematiskt sätt att integrera funktioner. I sin algoritm utnyttjade han förhållandet mellan en funktionskurva och dess areakurvan för att kunna komma fram till en primitiv till funktionen. Denna metod gick att använda för de flesta, då kända, elementära funktioner och polynom. Även matematikern Pierre de Fermat lyckades utveckla metoder för att beräkna areor under grafer, han hade dock ett helt annat tillvägagångssätt än hans föregångare som alla använt sig av linjer för att beskriva ett områdes area. Fermats använde sig istället av serier för som representerade summan av de oändligt många rektanglarna som beskrev ett godtyckligt område. Hans metod gick ut på att successivt dela upp området under grafen i rektanglar vars storlek blev mindre samtidigt som värdet på x blev mindre. Både Fermat och Wallis samt alla de andra matematiker som utvecklat metoder som bidragit till utvecklingen av beräknandet av areor under grafer är minst lika nämnvärda som Archimedes och Cavalieries metoder. Tyvärr finns det inte plats för att nämna dem alla i denna uppsats och strax efter Fermats och Willis upptäckter började Newton, Leibniz och Barrow att göra sina upptäckter inom integralkalkylen och det är nu dags att gå igenom några av de satser och bevis som de har bidragit med.

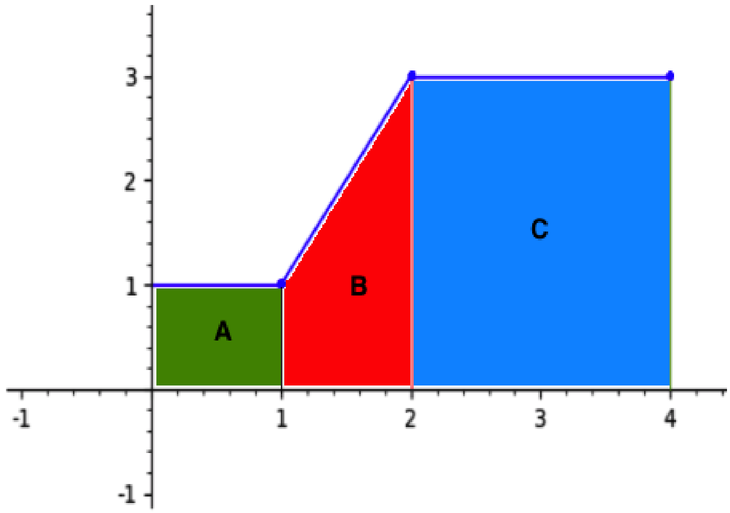
3.2 Formulering av satsen

Analysens fundamentalsats knyter ihop de två mest centrala begreppen inom analysen, nämligen derivator och primitiva funktioner. Analysens huvudsats ledde till uppkomsten av insättningsformeln som gjorde det möjligt att, med hjälp av primitiva funktioner, beräkna areor under kurvor på ett effektivt sätt. För att introducera satsen börjar vi med ett exempel för att illustrera sambanden mellan derivator och integraler.

Givet att vi har funktionen $g(t)$ så ska vi försöka beräkna de primitiva funktionerna för respektive intervall genom att enbart använda oss av integraler. Om vi lyckas med att göra detta så har vi hittat en koppling mellan integralbegreppet och primitiva funtkioner vilket är innebörden av analysens huvudsats. Vi vill finna

$$\int_0^x g(t)\,dt, \quad \text{där} \quad 0 \leq x \leq 4 \quad \text{där}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{då } 0 \leq t \leq 1 \\ 2t-1 & \text{då } 1 \leq t \leq 2 \\ 3 & \text{då } 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$$



Figur 3.3: Funktionen g(t)

Vi börjar med att hitta en primitiv funktion för funktionen i det första delintervallet när $0 \leq t \leq 1$ som i figuren representeras med område A vilket är en kvadrat med bredden x och höjden 1, detta ger oss

$$0 \leq x \leq 1: \qquad \int_0^x g(t) = x \cdot 1 = x$$

I det andra delintervallet, vilket representeras av område B i figuren, då $1 \leq t \leq 2$ har vi som i område A en kvadrat med sidan x och höjden 1 men även en triangel med höjden $(2x-2)$ och bredd $(x-1)$ vilket ger oss

$$1 \leq x \leq 2: \qquad \int_0^x g(t) = x \cdot 1 + \frac{(2x-2)(x-1)}{2} = x + (x-1)^2 = x^2 - x + 1$$

I det sista delintervallet som representeras av område C, då $2 \leq t \leq 4$, har vi en större kvadrat. För att beräkna primitiva funktionen för funktionen som motsvarar det här området kan vi ta hjälp av beräkningarna för område B

$$2 \leq x \leq 4 : \qquad \int_0^x g(t) = \int_0^2 g(t) + \int_2^x g(t) = 2^2 - 2 + 1 + 3(x-2) = 3x - 3$$

Sammanfattningsvis får vi, där $G(x)$ är den primtiva funktionen till $g(t)$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt = \begin{cases} x & \text{då } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{då } 1 \leq x \leq 2 \\ 3x - 3 & \text{då } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Om vi nu deriverar denna funktion så får vi följande

$$G'(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{då } 1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{då } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

vilket är precis funktionen som vi hade från början fast med x insatt i funktionen istället för t, det vill säga $g(x)$. Vi har lyckats komma fram till att $G'(x) = g(x)$. Detta är precis det som analysens fundamentalsats säger, nämligen att för en given godtycklig funktion kan vi konstruera en primitiv funktion till denna genom att integrera från en punkt fram till x och låta x variera.

3.3 Bevis av satsen

I den här delen kommer vi att gå igenom beviset av analysens fundamentalsats. Vi ska presentera två versioner av beviset, en variant av standardbevis och sedan Isaac Barrows bevis av satsen. Vi börjar med ett av standardbevisen av satsen, dels för att det förbereder oss för Barrows mer svårtolkade bevis men också för att vi senare kommer att ta hjälp av standardbeviset för att lättare kunna tolka och förstå Barrows bevis av satsen.

Vi behöver först gå igenom en annan sats, nämligen integralkalkylens medelvärdessats som vi kommer att använda oss av i beviset. Vi behöver även i standardbeviset och i beviset av integralkalkylens medelvärdessats att ta hjälp av räknereglerna för integraler.

Sats 2. Integralkalkylens medelvärdessats
Om vi har en funktion f som är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ så finns det minst en punkt ξ, där $a \leq \xi \leq b$, som uppfyller

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Detta kan man tolka som att om man har en funktion som går mellan a och b så finns det minst en punkt ξ mellan a och b sådant att om man tar funktionsvärdet i den här punkten och ritar ut en konstant funktion med funktionsvärdet $f(\xi)$ så kommer arean av den rektangel som bildas att vara detsamma som arean under grafen.

Bevis
Vi börjar med att ansätta $m = min_{[a,b]}f(x)$ och $M = max_{[a,b]}f(x)$. Då vet vi att $m \leq f(x) \leq M$ eftersom att m är det minsta funktionsvärdet som funktionen kan anta och M är det största värdet som funktionen kan anta, därav följer det att $f(x)$ ligger någonstans mellan dessa värden.
Enligt en av räknereglerna för integraler vet vi att

$$f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

vilket ger oss

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$$

men då m och M är konstanter kan vi skriva om detta som

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

om vi dividerar med $(b-a)$ får vi nu

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Enligt satsen om mellanliggande värden som säger att alla värden mellan funktionens minimum och maximum måste antas, givet att funktionen är kontinuerlig på intervallet, så måste det finnas ett $\xi \in [a, b]$ sådant att

$$f\xi) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Analysens fundamentalsats
Sats 3.
Antag att vi har en godtycklig funktion f som är kontinuerlig i intervallet $a \leq x \leq b$. Vi definierar

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt, \qquad \text{där } a < x < b.$$

Då gäller det att G är deriverbar och har derivatan

$$G'(x) = g(x), \quad a < x < b.$$

Bevis
Vi tar hjälp av derivatans definition och gör ansättningen

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}.$$

Med hjälp av definitionen av intergraler kan vi skriva om detta till

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot (\int_a^{x+h} g(t)dt - \int_a^x g(t)dt).$$

Sedan använder vi oss av räkneregeln för integraler som säger att vi kan dela upp ett integrationsintervall i två delar och skriver om uttrycket till

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot (\int_{x}^{x+h} g(t)dt).$$

Sedan tar vi hjälp av integralkalkylens medelvärdessats som vi gick igenom får kan vi göra en listig omskrivning av detta uttryck och får

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot (\int_{x}^{x+h} g(t)dt) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot g(\xi)(x+h-x)$$

där $\xi \in [x, x+h]$. Vi kan nu förenkla detta uttryck och får

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot g(\xi)(x+h-x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot g(\xi)(h) = \lim_{h \to 0} g(\xi)$$

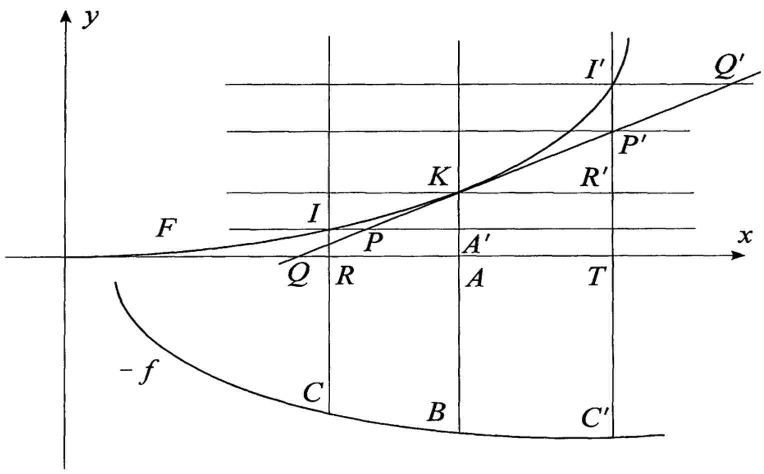
och då ξ ligger mellan x och $x+h$ samt för att g är kontinuerlig så leder detta till att

$$\lim_{h \to x} g(\xi) = g(x)$$

$\square$

Barrows bevis av satsen

Under sin tid som professor vid Cambridge Universitet höll Isaac Barrow i flera föreläsningar om geometri, optik och mer grundläggande matematik. Det var under åren 1664-1666 som han genomförde sina föreläsningar om geometri och i förberedelse till dessa skrev han mycket detaljerade lektionsanteckningar som han också lät publiceras år 1670 i sin bok ”The Geometrical Lectures of Isaac Barrow". I dessa antecknigar, mer precist i lektionsanteckningarna för lektion tio och elva, gav han det första beviset av analysens huvudsats där han varken använder differentialer eller infinitesimaler, istället använde han geometri och tangenter för att bevisa satsen. Barrow ägnade en stor del av sin tid som matematiker åt att studera tangenters egenskaper. Han förstod att en tangent endast får tangera en kurva i en punkt och därför går hans bevis ut på att konstatera att sträckan QK antingen faller under kurvan F eller till höger om denna (Naunenberg, (2011)).



Figur 3.4: Barrows graf

Om vi utgår från figuren ovan, låt f vara en strikt växande, positiv och kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$ och låt F vara den funktion som representerar arean under kurvan för funktionen f från a till x. Välj sedan en godtycklig punkt A på x-axeln och konstruera en stråle som skär kurvan F i punkten K sådant att vinkeln mellan x-axeln och strålen blir rät. Låt vidare B vara strålens skärningspunkt med kurvan f.

Sats 3. Analysens fundamentalsats, Barrows version

Om en linje dras från punkten K till en godtycklig punkt på x-axeln sådant att

$$\frac{AK}{AQ} = AB$$

då kommer denna linje att vara en tangent till kurvan F i punkten K.

Bevis
Trianglarna $\Delta PA'K$ och ΔQAK är likformiga. Med hjälp av likformigheter och antagandena för figurens konstruktion fås sambandet $\frac{AK}{AQ} = \frac{A'K}{A'P} = AB$ som kan skrivas om till $AB \cdot A'P = A'K$=arean för området $CRAB$ enligt areafunktionen F. Då f är en strikt växande funktion fås olikheten att arean för $CRAB < AR \cdot AB$ som ger att $A'P < AR$. Detta leder till att linjen KQ strikt hamnar under kurvan F och att punkten P på denna linje måste hamna till höger om punkten I på kurvan F.

Med samma resonemang och då förhållandet mellan de olika sidorna i de två trianglarna är lika fås sambandet $AB = \frac{P'R'}{KR'}$ vilket kan skrivas om till $P'R' = AB \cdot KR'$. Då f är strikt växande vet vi att

$$AB \cdot KR' < \text{arean } C'TAB.$$

Vi kan sedan skriva om uttrycket och få fram olikheten

$$P'R' < I'R'$$

Detta innebär att punkten P' på linjen KQ' strikt hamnar under punkten I' på kurvan F och därför måste sträckan KQ' hamna under F. Enligt Barrow har vi därmed bevisat att linjen QQ' är tangent till kurvan F i punkten K och har lutningen KB.

□

3.4 Avslutande kommentarer

Som avslut gör vi ett försök till att översätta Barrows sats till andra termer som stämmer mer överens med den första varianten av analysens huvudsats som tidigare gavs i uppsatsen. Ett annat sätt att tolka Barrows sats är genom följande påstående. Om vi drar tangenten till kurvan F i punkten K så gäller det att tangentens lutning är lika med funktionsvärdet för kurvan $f(x)$ vilket med modernare termer översätts till

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

och det är precis det analysens fundamentalsats säger. Det är dock viktigt att notera att Barrows bevis enbart består av ren geometri och går inte direkt att tillämpa för att göra några eventuella beräkningar. Sanningen är att Barrows inte alls insåg satsens möjligheter och hur användbar den skulle komma att bli. Det var Newton och Leibniz som senare gjorde denna upptäckt och lyckades visa satsens riktiga potential. Att Barrows version av beviset inte fick den uppmärksamhet och påverkan på matemmatik som han tyckte att den förtjänade gjorde honom besviken och därför hoppas jag att jag med denna uppsats lyckats påminna er läsare om hans plats uppe i rampljuset.

Jag vill även tacka min handledare Boris Shapiro för alla betydelsefulla diskussioner, kommentarer och råd som jag fått taigit del av under arbetets gångs och för att du, trots de annorlunda förhållandena som vi nu tvingas leva i, lyckats ge mig så pass bra handledning.

Kapitel 4

Litteratur

I. Persson, Arne., Böiers, Lars-Christer (2018). Analys i en variabel. Upplaga 3 Lund: Studentlitteratur

II. Lund, Jens (1995). Från tangent till derivata: en historisk överblick. Stockholm: KUB

III. Essex, C., A. Adams, R., (2018). Caluclus - A complete course. Upplaga 9. Pearson Canada Inc.

IV. Mactutor (1998), hämtad 2020-10-05 från:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz/

V. Mactutor (2000), hämtad 2020-10-13 från:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton/

VI. Mactutor (1998), Hämtad 2020-10-15 från:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Barrow/

VII: Katz, Victor J (2019). A history of mathematics. 3rd edition. Pearson Education Inc.

VIII: Autralian mathematical science institute (AMSI), (2011), Hämtad 2020-10-20 från:
https://amsi.org.au/ESA_Senior_Years/SeniorTopic3/3b/3b_4history_2.html

IX: Naunenberg, M. (2011). Barrow and Leibniz on the fundamental theorem of the calculus. University of California. [Elektronisk resusrs].

X: Autralian mathematical science institute (AMSI), (2011), Hämtad 2020-11-15 från:
www.amsi.org.au/ESA$_{S}enior_{Y}ears/SeniorTopic3/3f/3f_{4}history.html$

XI : Worcester Polytechnic Institute (WPI), (1997), Hämtad 20-11-20 från:
www.math.wpi.edu/IQP/BVCalcHist/calc1.html