SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Några geometriska konstruktioner med passare och linjal

av

Johan Eriksson Viklund

2020 - No K5

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Några geometriska konstruktioner med passare och linjal

Johan Eriksson Viklund

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Alan Sola

2020

Några geometriska konstruktioner med passare och linjal

Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet

Johan Eriksson Viklund

Januari 2020

Innehåll

Kapitel 1

Introduktion

Detta arbete innehåller några av flera hittills studerade geometriska konstruktioner. Både möjliga men också omöjliga konstruktioner presenteras. De två omöjliga konstruktionerna är valda bland så kallade kända klassiska ölösliga problem"[9]. De möjliga konstruktionerna är några utvalda satser från Euklides verk Elementa. För att ge en bättre bild av vad detta arbete innehåller ges en kort bakgrund om geometri och Euklides.

Det kommer redovisas bevis av omöjliga geometriska konstruktioner. Bevisen använder resultat om rationella rötter till polynomekvationer [6], men utförliga förklaringar av dessa resultat förekommer inte ty det är inte syftet med detta arbete.

De satser som används och presenteras är några utav Elementas satser från första och tredje boken. I arbetet används uttrycket "konstruera"i mening att konstruera med passare och linjal.

I Elementa börjar Euklides med att förklara sina definitioner, axiom och postulat. Dessa står till grund för hans argument för hur hans satser om geometriska konstruktioner är korrekta. Dessa satser använder han sedan likt byggstenar för att visa nya satser. Dessa redovisas senare i arbetet.

Kapitel 2

Kort om geometri och Euklides

Mycket av det som vi idag betraktar som självklart och oproblematiskt visar sig vara resultatet av en lång och mödosam utvecklingsprocess. Denna insikt är kanske den viktigaste lärdomen av ett studium av geometrins historia."
Lindahl, L.Å. [7].

Det som Lindahl [7] skriver syftar på att matematiken genom historien har gått igenom flera stadier. Efter många om och men, sannolikt efter Euklides verk Elementa, studerades geometrin på nya sätt. Geometrins utvecklingen har bland annat gått från att matematik var algebra, talteori och geometri som ett gemensamt arbetsområde, till att ses som en deduktiv vetenskap. Det tvingade oss till att tänka och se på geometrin på annorlunda sätt.

Lindahl [7] skriver att geometri menas att ha gått från empirisk vetenskap där kunskap om *"hur förhåller sig saker och ting?"*, till deduktiv vetenskap där vi frågar oss *"varför förhåller det sig så?"*. Innan Euklides påverkade matematikens värld med Elementa var det Thales från Miletos som började med nytänkandet. Thales lyckades med logiska argument härleda några enkla påståenden ur andra.

Det var därifrån den nya fasen inleddes inom geometrin som Lindahl [7] påstår att Euklides fullbordade:

Detta arbete är onekligen en viktig milstolpe i det mänskliga tänkandets historia."

Dessvärre är inte särskilt mycket känt om Euklides. Han föddes någonstans i det dåvarande grekiska riket och arbetade troligen som lärare i Alexandria, som ligger i dagens Egypten. Han tros ha levt under hellenismen cirka år 325 f.kr till 265 f.kr [8].

Hellenismen var en tidsepok som började år 323 f.kr. vid Alexander den stores död och tog slut år 30 f.kr. då Egypten erövrades av Rom. Under hellenismen sträckte sig det dåvarande grekiska riket från den östra delen av medelhavs-området till mellanöstern [3].

Då det var känt att Euklides arbetade i Alexandria kallas han därför Euklides från Alexandria för att vara tydlig vem det talas om. Alexandria var huvudstaden i Egypten på den tiden och var erkänt över det grekiska riket för att vara centrum för forskning och vetenskap [2].

Euklides från Alexandria är av vissa verk och historier förväxlad med Euklides från Megara som levde ca 100 år tidigare [8]. Euklides från Megara var en känd filosof och existerar därför också i historieböcker. Namnet Euklides var vanligt på den tiden, och därför tros det vara en tillfällighet att personerna är ihopblandade [8].

Innehållet i Elementa är matematik samlat från många håll och kanter [4]. Det är ett ihopslaget verk av fler än bara Euklides upptäckter. Totalt har Euklides skrivit ihop en total av 13 böcker där olika ämnen behandlas:

Bok 1-6: Plan geometri
Bok 7, 8 och 9: Talteori
Bok 10: Inkommensurabla storheter
Bok 11, 12 och 13: Rymdgeometri

För att kunna presentera innehållet i böckerna har Euklides använt sig av definitioner, axiom och postulat [4]. Eftersom vår tids matematik är byggd mycket utav kunskap från Euklides verk Elementa, är det idag väl känt vad en punkt eller en rät linje är. Men det var inte helt självklart vad alla Euklides definitioner var på den tiden. Alltså behövde Euklides skriva ner förutsättningar och deduktiva antaganden.

Nedan kommer notationer om begreppen punkter, vinklar och linjesegment att förklaras. Även kommentarer om definitionerna och ett utav postulaten följer för att tydliggöra innehållet av detta arbete.

Alla axiom och postulat samt några definitioner ur bok 1 har jag tagit med för läsare att kunna förstå vad som hänvisas till i satserna. Jag har valt ut några satser ur bok 1 och bok 3. Vissa satser används för att förklara varandra men de som inte är bevisade i detta arbete finns att hitta på canities.se eller i en kopia av Elementa.

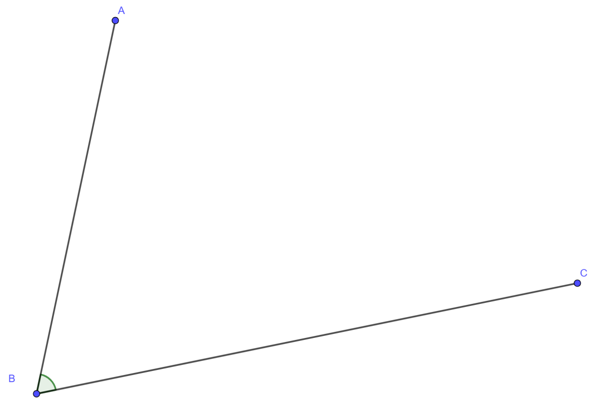
I Euklides första bok ur Elementa som handlar om plan geometri finns det 23 definitioner, 5 postulat och 5 axiom [4]. Jag har valt att ta med alla axiom och postulat från bok 1, men endast de definitioner som hänvisas till i satserna som gås igenom i detta arbete.

Övriga definitioner, axiom och postulat från bok 1-13 finns även här att hitta på canities.se eller i en kopia av Elementa.

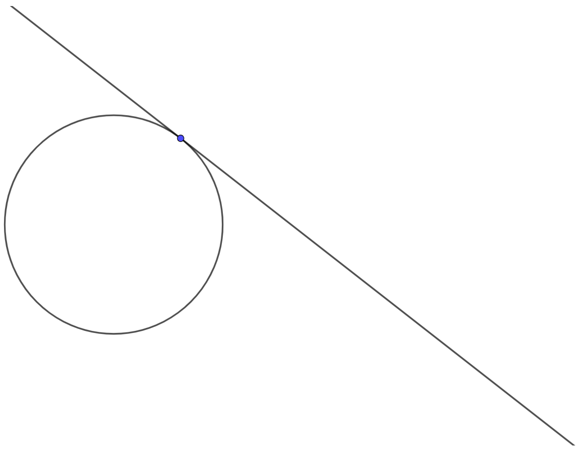
Det som följer är de definitioner, axiom och postulat jag har valt ut.

Notation angående linjer:
Ett linjesegment som går från en punkt A till en punkt B betecknas AB.

Notation angående vinklar:
Beteckning vinkel förtydligas med tecknet $\angle$. En vinkel $\angle ABC$ läses genom att vi börjar från punkt A, går till punkt B och slutar i punkt C. Då syftar $\angle ABC$ på vinkeln mellan sidorna AB och BC i hörnet B .



Notation om tangenter:
En tangent är en linje som går igenom en och endast en punkt på till exempel en cirkel. Då sägs linjen tangera cirkeln.



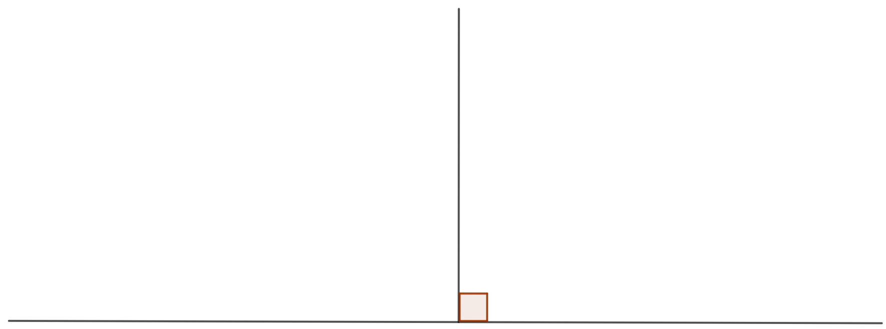
Definitioner

1. *"En punkt är, vars del är intet."*

Det är hur Euklides valde att definiera en punkt. I dagligt tal kan det översättas som att en punkt inte kan tas i sär, till skillnad från en linje som kan delas upp i flera kortare linjesegment. En punkt kan tänkas som den minsta byggstenen.

10. "*När en rät linje ställs mot en rät linje och de intilliggande vinklarna görs lika med varandra, är var och en av de lika vinklarna rät och den upprättstående linjen kallas vinkelrät mot linjen den står mot.*"

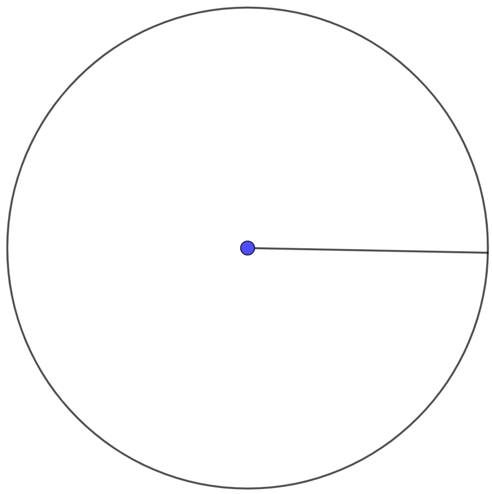
Här definierar Euklides begreppet vinkelrät samt hur en rät vinkel konstrueras. Genom att låta två linjer ställas mot varandra, till exempel som på bilden nedan, där vinklarna på båda sidor mellan linjerna är lika stora får vi fram hur två linjer är rätvinkliga mot varandra.



15. *"En cirkel är en plan figur som begränsas av en linje, omkretsen, för vilken från en punkt, av alla liggande i figuren, alla utdragna räta linjer dragna till cirkeln omkrets är lika med varandra."*

En plan figur syftar på det vi idag kallar tvådimensionell. Sedan beskriver Euklides att från samma punkt i cirkeln dras lika långa linjer som går till en linje som omger punkten som linjerna dras från.

Här definieras omkrets men också mittpunkt och radie utan att namnge dem.

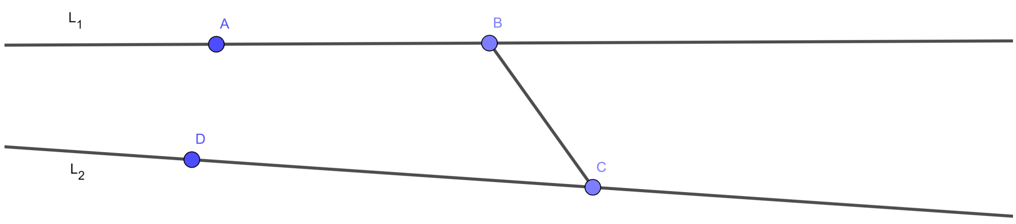


Postulat

1. Låt det vara självklart, postulerat, att från varje punkt till varje punkt kan en linje dras.
2. Och att dra ut en ändlig rät linje kontinuerligt i en rät linje.
3. Och att rita cirklar med alla medelpunkter och diametrar
4. Och att alla räta vinklar är lika med varandra.
5. Och om en rät linje skär två räta linjer och vinklarna på insidan och på samma sida utgör mindre än två räta, då sammanfaller de två räta linjerna obegränsat utdragna, på den sida där de mindre än två räta finns.

Kommentar på det femte postulatet:

Det femte postulatet betyder att om en linje BC skär två obegränsade linjer L_1 och L_2 och vinkeln $\angle ABC$ och $\angle BCD$ är tillsammans mindre än två räta (180°) kommer L_1 och L_2 att skära varandra på den sidan om $\angle ABC$ och $\angle BCD$, i detta fall till vänster.



Axiom

1. Det som är lika med detsamma är också inbördes lika.
2. Och om lika läggs till lika, är de hela lika.
3. Och om lika dras från lika, är resterna lika.
4. Och de inbördes sammanfallande är lika med varandra
5. Och det hela är större än delen.

Kapitel 3

Exempel på möjliga geometriska konstruktioner

Med en konstruktion menas här att endast linjal och passare får användas för att skapa geometriska figurer och konstellationer. En linjal definieras genom att den är ett verktyg som är rakt i syfte att användas endast till att rita raka linjer, inte för att mäta längder. En passare definieras som ett verktyg för att rita cirklar, men som inte har vinkelmått likt en gradskiva [6]. Den första boken från Elementa handlar om plan geometri som jag har valt att visa fyra satser från. Sedan har jag valt ut två satser från bok 3 som handlar om cirkelgeometri. Alltså har jag totalt tagit sex satser som jag kommer att redogöra för.

Samtliga bevis är direkt tagna från Elementa [4][5]. Satser som i bevisen hänvisar till andra satser som inte redovisas i detta arbete finns att hitta från en kopia av Elementa eller på Canities.se som jag själv har tagit från.

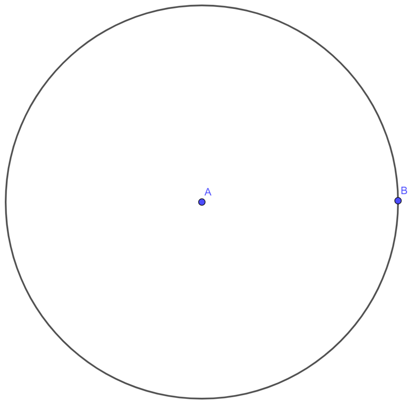
Vi kan bevisa samtliga satser som följer med hjälp av passare och linjal.

Den första satsen Euklides skrev om i Elementa beskriver hur en liksidig triangel konstrueras.

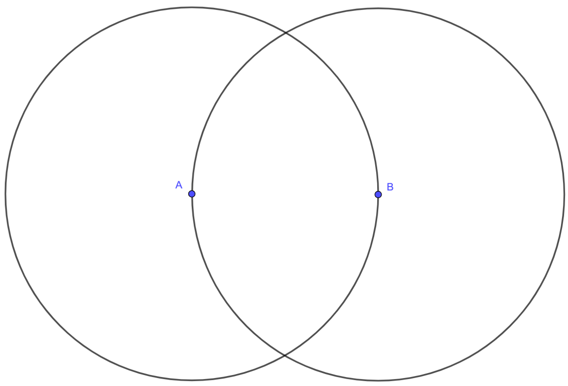
Bok 1, Sats 1 [4]
På den givna ändliga räta linjen AB konstrueras en liksidig triangel.

Bevis:

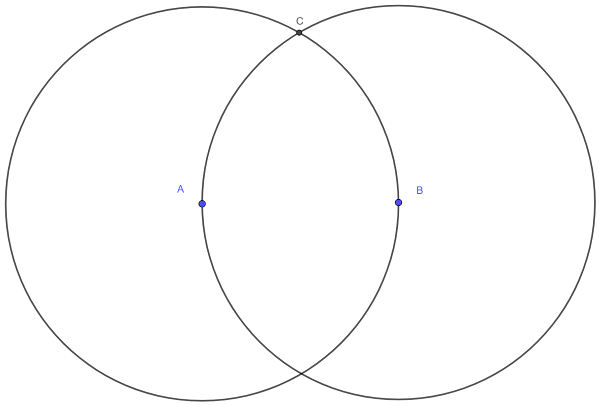
1. Vi ritar en cirkel med sin mittpunkt A och som har sin periferi ut till punkt B.



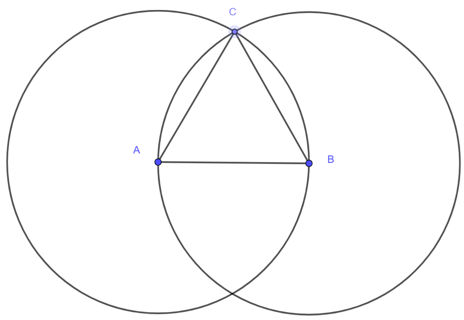
2. Sedan ritar vi en till cirkel med mittpunkt i B och periferi ut till punkt A.



3. Vi sätter ut en punkt C där cirklarna skär varandra för att få en gemensam punkt för att dra radierna till.



4. Vi drar linjer som går från A till B, B till C och A till C.



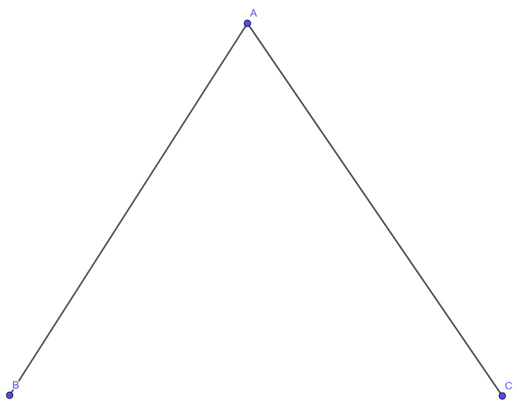
Vi kan då konstatera att triangel ABC är liksidig då båda cirklarna har lika stora radier då radien från båda cirklarna når till den andras mittpunkt. Samt att sträckan från A till C, samt B till C är längden av radien som vi kom fram till är lika långa.

Därmed har vi konstruerat en liksidig triangel.

Bok 1, Sats 9 [4]
Den givna vinkeln delas i hälften.

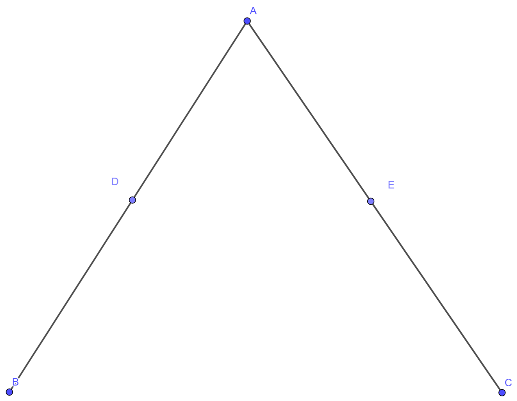
Bevis:

Låt den givna vinkeln vara $\angle BAC$.



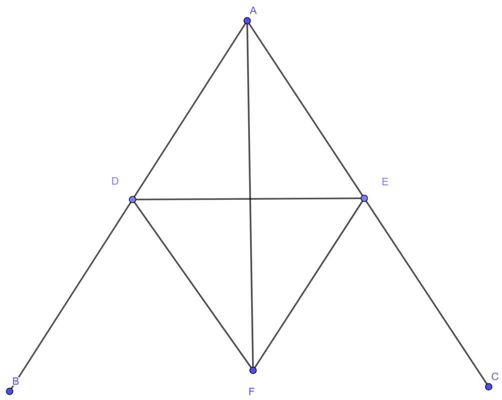
Denna vinkel ska delas i hälften.

Låt punkten D sättas godtyckligt på sidan AB. Sedan sätter vi en punkt E på AC genom att skära av AE lika lång som AD (Bok 1, Sats 3)[4].



Kommentar: Sats 3 i Bok 1 visar hur det är möjligt att skära av ett längre linjesegment så att det blir lika långt som ett annat valt kortare linjesegment. Vi skulle också kunna med hjälp av en passare dra E lika långt från A som D genom att rita en cirkel med mittpunkt A och radie D och sedan med hjälp av radiens längd sätta E på sidan AC.

Förbind först punkterna D och E för att sedan med den nyskapade linjen DE resa en liksidig triangel DEF (Bok 1, Sats 1)[4]. Dra till sist en linje mellan A och F.



Då säger vi att vinkeln $\angle BAC$ har delats i hälften av linjen AF.

Eftersom AD är lika lång som AE och AF är en gemensam sida, är linjerna AD och AF lika med AE respektive AF. Dessutom då linjen DF är lika lång som EF, är alltså vinkeln $\angle DAF = \angle EAF$ (Bok 1, Sats 8)[4].

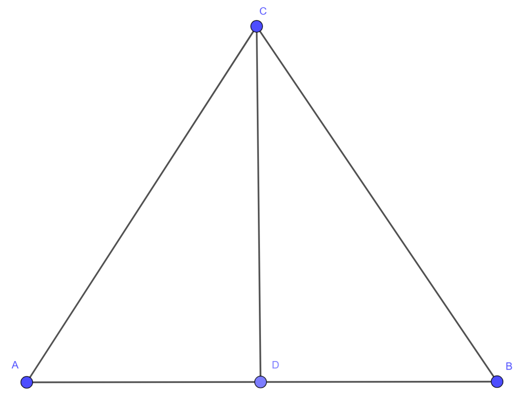
Och då har vi visat att vinkeln $\angle BAC$ har delats i hälften.

Bok 1, Sats 10 [4]
Den ändliga räta linjen delas i hälften.

Bevis:

Låt AB vara en given rät linje.

Vi konstruerar en liksidig triangel ABC med AB som bas (Bok 1, Sats 1)[4]. Vi delar vinkeln $\angle ACB$ i hälften med den räta linjen CD (Bok 1, Sats 9)[4]. Vi ska visa att AB delas i hälften vid punkten D.



Eftersom sidan AC är lika med BC och DC är en gemensam sida, är de två sidorna AC och DC lika med BC och DC och därav är vinkeln $\angle ACD = \angle BCD$ och då är basen AD lika med basen BD (Bok 1, Sats 4)[4].

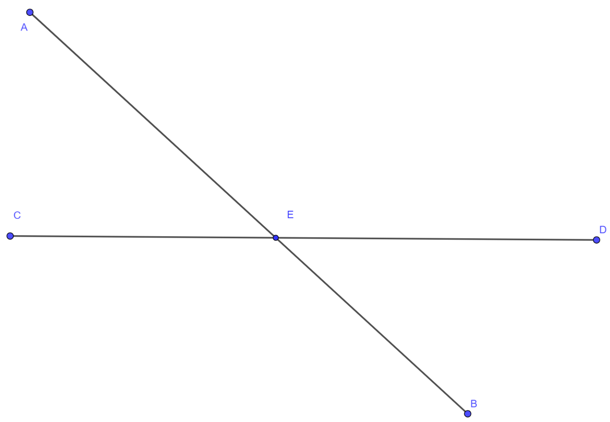
Och då har vi vid punkt D lyckats dela AB i hälften.

Bok 1, Sats 15 [4]

När två räta linjer skär varandra bildar de vertikalt motstående vinklar lika med varandra.

Bevis:

Två räta linjer, AB och CD, skär varandra i punkt E. Då säger vi att vinklarna $\angle AED$ och $\angle CEB$ är lika, samt att $\angle AEC$ och $\angle BED$ är lika och ska visa detta.



Då AE skär genom CD och bildat vinklarna $\angle AEC$ och $\angle AED$ måste de vinklarna vara lika med två räta vinklar (Bok 1, Sats 13)[4], det vill säga 180°. På samma sätt kan vi konstatera att eftersom CE skär AB och bildar vinklarna $\angle CEB$ och $\angle AEC$ måste de också vara lika med två räta vinklar. Då kan vi se från $\angle AEC + \angle AED = \angle AEC + \angle CEB$ att om vi tar bort $\angle AEC$ kommer vi få att $\angle AED = \angle CEB$. Ty

$$\angle AEC + \angle AED = \angle AEC + \angle CEB$$

och enligt Axiom 3 [4] när lika dras från lika så är

$$\angle AED = \angle CEB$$

På samma sätt kan vi visa att vinklarna $\angle AEC$ och $\angle BED$ är lika.

Och därmed har vi visat det vi skulle.

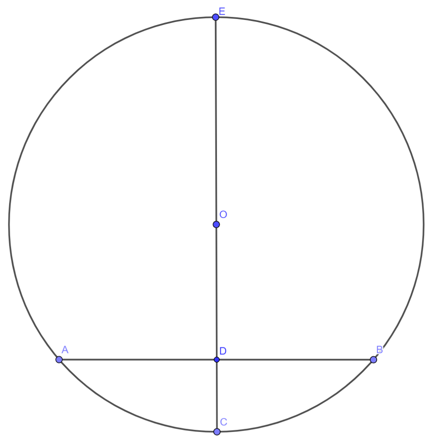
Bok 3, Sats 1 [5]
Finna den givna cirkelns medelpunkt.

Bevis:

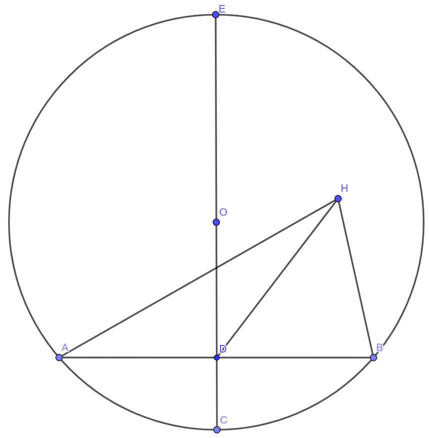
Vi ritar en cirkel med punkterna A, B och E, och vi ska finna cirkelns medelpunkt.

Vi drar en rät linje AB från A till B och delar den i hälften vid punkt D (Bok 1, Sats 10) [4]. Vi drar DE vinkelrätt från D (Bok 1, Sats 11) [4] samt drar CE och delar CE på hälften vid O (Bok 1, Sats 10) [4].

Vi ska alltså visa att O är cirkelns medelpunkt.



Vi visar detta genom att sätta ut en punkt H som inte ligger på O och antar att H är cirkelns medelpunkt. Sedan förbinder vi punkterna A, B, och D med H för att få HA, HB och DH.



Vi antar att då AD är lika lång som DB, och DH är en gemensam sida, så är förhållandet mellan AD och DH lika med DB och DH. Baserna HA och HB antar vi är lika långa då de båda är dragna från den antagna medelpunkten H, och då vet vi att vinklarna $\angle ADH$ samt $\angle BDH$ är lika (Bok 1, Sats 8) [4]. Då en rät linje satt på en annan rät linje gör lika intilliggande vinklar lika med varandra, betyder det att både $\angle ADH$ och $\angle BDH$ är räta (Bok 1, Definition 10) [4].

Kommentar:

Om vi sätter punkten H så att H ligger någonstans på linjen CE fallerar argumentet då båda vinklarna $\angle ADH$ och $\angle ADO$ blir räta, vilket i sådana fall motsäger det vi sagt vi ska visa. Argumentet från beviset är taget från Elementa och är gammalt. Beviset innehåller inte fallet då H placeras på linjen CE.

Men detta fall kan vi förklara ändå. Om H skulle placeras på linjen CE måste $H = O$ för att vara medelpunkten av cirkeln ABE, då HC och HE måste vara lika stora. Och det kan vi göra med Sats 10 från Bok 1 [4].

Alltså är vinkeln $\angle ADH$ rät och vinkeln $\angle ADO$ rät. Då är alltså $\angle ADH$ lika med $\angle ADO$. Men detta är omöjligt då den större kan inte vara lika med den mindre. Därför kan vi säga att H inte är cirkelns medelpunkt.

Med samma metod visar vi enkelt att alla andra punkter inom cirkeln förutom O inte är cirkelns medelpunkt och därför måste O vara cirkelns medelpunkt.

Bok 3, Sats 18 [5]

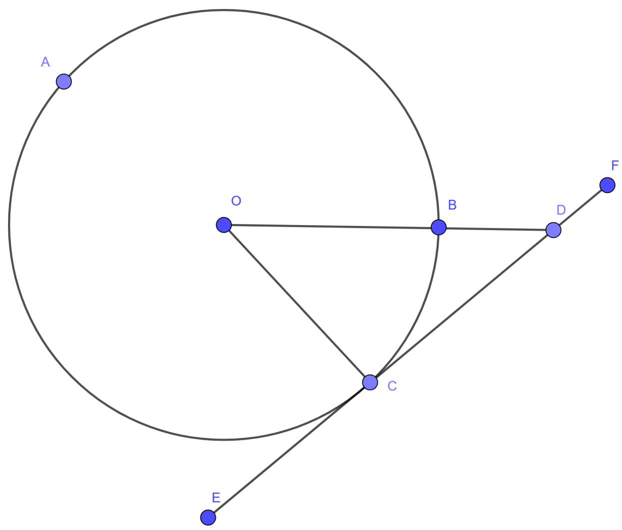
En tangent är vinkelrät mot en linje som går genom cirkelns medelpunkt och tangentens tangeringspunkt.

Bevis:

Låt någon rät linje EF tangera cirkeln ABC vid punkten C och vi låter cirkelns medelpunkt O vara känd (Bok 3, Sats 1) [5]. Vi drar sträckan OC mellan O och C.

Det vi ska visa är att OC är vinkelrät mot EF och det gör vi genom att visa att det inte finns någon annan linje än OC som är vinkelrät mot EF.

Men vi börjar med att anta att en dragen linje OD är vinkelrät mot EF (Bok 1, Sats 12) [4].



Om vi antar att OD är vinkelrät mot EF är vinkeln $\angle ODC$ rät och därav att vinkeln $\angle OCD$ är spetsig då två vinklar i en triangel är mindre än två räta (Bok 1, Sats 17) [4]. Då kan vi också säga att eftersom en längre sida spänner upp en större vinkel (Bok 1, Sats 19) [4], så är sidan OC längre än OD. Vi kan också se att OB och OC är lika långa då de är lika med cirkelns radie.

Då vi precis har kommit fram till att OC är längre än OD och samtidigt lika lång som OB kan vi säga att även OB är längre än OD. Men detta är omöjligt och därför kan vi konstatera att vinkeln $\angle ODC$ inte är rät, det vill säga att OD inte är rät mot EF. Men då vi antagit att en av vinklarna i triangeln ODC är rät, och vi vet att $\angle ODC$ inte är det, måste vinkeln $\angle OCD$ vara rät då $\angle COD$ inte kan vara rät oavsett hur vi flyttar på punkt D.

Med denna metod visar vi att det inte finns någon annan linje som går genom medelpunkten till EF, som är vinkelrät mot EF. Alltså är OC den enda linje som är rät mot EF. Det vill säga det finns ingen annan linje som går genom medelpunkten och tangeringspunkten, som är vinkelrät mot en tangenten.

Och det var det vi ville visa.

Kapitel 4

Exempel på omöjliga geometriska konstruktioner

Dessa två exempel på klassiska olösliga problem är omöjliga att konstruera med hjälp av endast passare och linjal. Nedan kommer bevis på kubens fördubbling följt av att tredela en vinkel att redovisas.

För bevisen av problemen använder jag algebraiska metoder för att visa omöjlighet.

Évariste Galois [1] var en fransk matematiker som kom fram till Galoisteori. Galoisteori ger ett samband mellan gruppteori och kroppar (field theory på engelska). Detta samband gör det möjligt att reducera problem inom kroppar till gruppteori som kan ses som enklare att förstå. Med Galoisteori kunde man med algebraiska lösningar se att de följande olösliga problemen är omöjliga att konstruera med hjälp av passare och linjal som är relaterade till Galois arbete om rötter av tal.

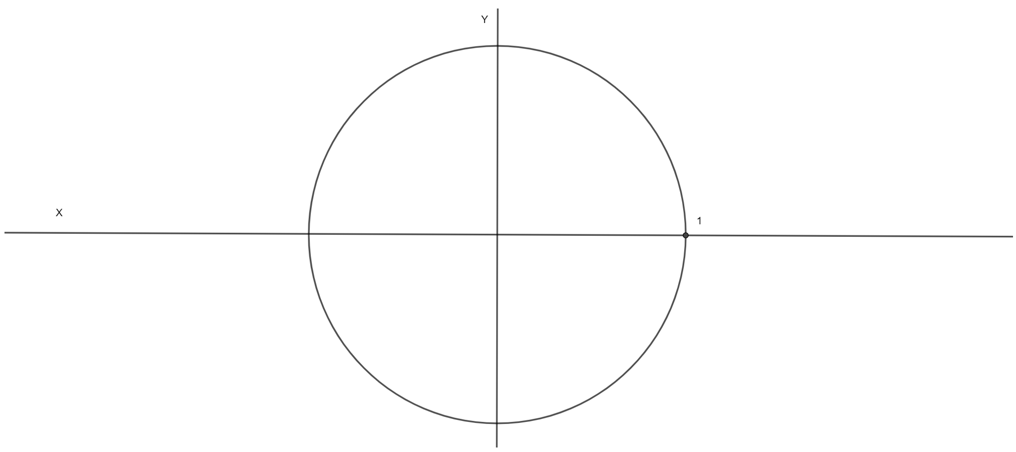
Båda dessa bevis kommer fram till att ingen av problemen har en lösning som ger konstruerbara tal. Därför följer ett avsnitt om konstruerbara tal innan bevisen av de olösliga problemen presenteras.

Konstruerbara tal
Ett konstruerbart tal är ett reellt tal x sådant att punkten $(x, 0)$ är konstruerbar.

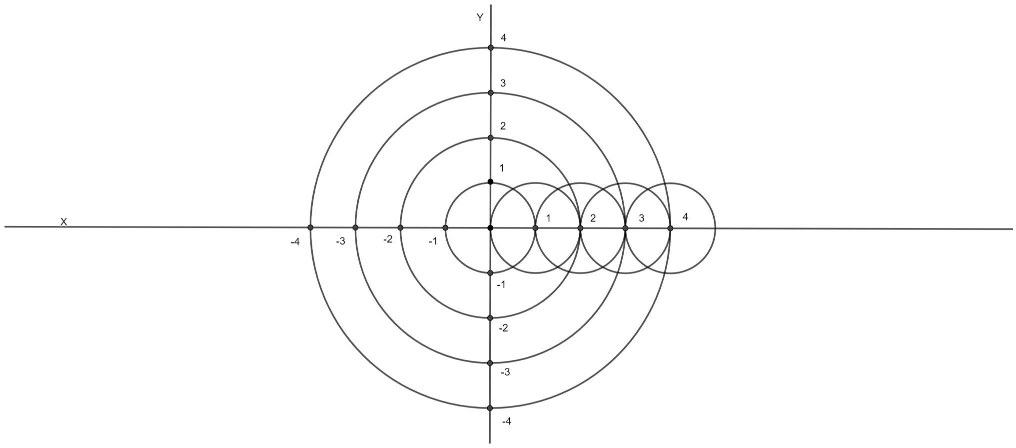
Nicklasson & Zickert [9]

För att visa hur vi kan konstruera punkten $(x, 0)$ förklarar Nicklasson och Zickert [9] att vi kan med linjal och passare konstruera upp en bild.

Genom att dra två obegränsade linjer räta mot varandra likt två koordinataxlar kan vi sedan med hjälp av passare konstruera upp heltal genom att använda oss av cirklar och dess radie. Om vi ritar ut en cirkel med centrum i punkten där de två linjerna skär varandra, som är punkt $(0, 0)$, och en radie av enhetslängd 1 på x-axeln kan vi på så sätt konstruera fram punkt $(1, 0)$.



Sedan kan vi rita en cirkel med enhetslängd 1 i punkt $(1, 0)$ för att få punkt $(2, 0)$. Och på detta sätt kan vi konstruera fram hur många heltal vi vill på x-axeln.



Nicklasson och Zickert [9] sammanfattar detta i en definition:

Definition 2.2.1.
"... En konstruerbar **punkt** *är en punkt (x,y) som kan konstrueras med hjälp av passare och linjal i ett ändligt antal steg, utifrån punkterna (0,0) och (1,0). Ett konstruerbart* **tal** *är ett reellt tal x sådant att punkten (x,0) är konstruerbar."*

Låt säga att vi har byggt upp ett koordinatsystem, på det sätt som beskrivs ovan, då kan vi konstruera en punkt (x, y) där x och y är heltal. Om vi sedan drar en parallell linje med y-axeln genom punkten (x, y) kommer vi få punkten $(x, 0)$ som skärningspunkten med x-axeln. Om vi på samma sätt genom (x, y) drar en parallell linje med x-axeln kommer vi få punkten $(0, y)$. Då har vi konstruerat talen x och y.

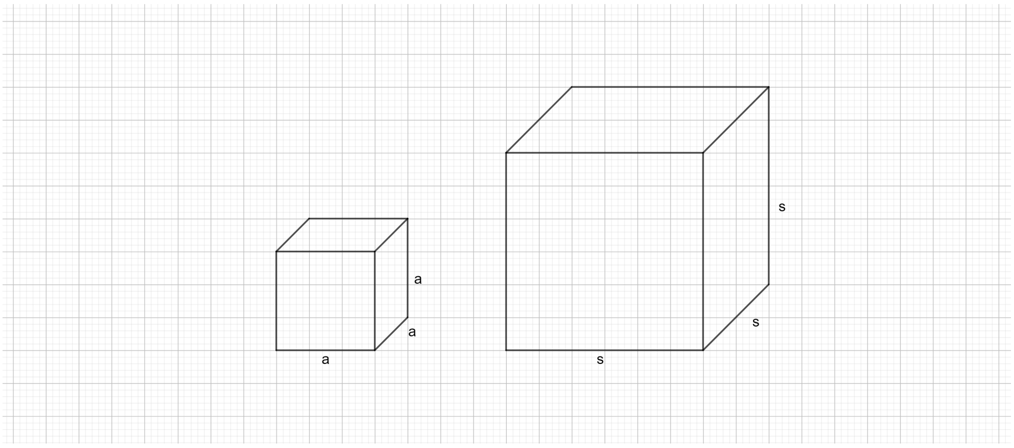
Viktigt att anmärka är att det är heltal vi visat är konstruerbara.

Då kan vi sammanfatta detta med att säga att ett konstruerbart tal är någonting som vi kan konstruera med hjälp av passare och linjal. Ett icke konstruerbart tal kan vi alltså *inte* rita upp med endast passare och linjal vilket vi kommer fram till vid de två kommande problemen.

Kubens fördubbling

Om vi har en given sida a hos en kub är det omöjligt att konstruera en sida som ger kuben dess dubbla volym.

Vi konstruerar en kub med sidan a, och vill då sedan konstruera en till kub som har sidan s och som ger den första kubens dubbla volym.



För att visa att detta är omöjligt börjar vi ställa upp en ekvation för att illustrera likheten mellan volymerna.

Vi ställer upp

$$s^3 = 2a^3$$

och vi antar att den lilla kuben har sidan av en enhetslängd [6] och kan då reducera $s^3 = 2a^3$ till

$$s^3 = 2$$

Då skulle det ge att kubens sida är

$$s = \sqrt[3]{2}$$

Var vänliga och notera att oavsett längden på sidan a kommer den större kubens sida s alltid vara $\sqrt[3]{2}$ gånger större än a ty

$$s^3 = 2a^3 \Leftrightarrow s = \sqrt[3]{2} \cdot a$$

Om kubens fördubbling vore möjlig så skulle kuben med sidan s ha en sida som är av längden av ett konstruerbart tal [9]. Vi ska alltså visa att $\sqrt[3]{2}$ inte är ett konstruerbart tal.

Enligt Nicklasson och Zickert [9] är $\sqrt[3]{2}$ ett konstruerbart tal om och endast om polynomet $p(s) = s^3 - 2$ har några konstruerbara rötter. Och i detta fall visar vi det med deras sats 6.2.7 som säger:

Öm ett kubiskt polynom

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

med rationella koefficienter inte har några rationella rötter, så har det inte heller några konstruerbara rötter."

Alltså behöver vi visa att polynomet inte har några rationella rötter.

Enligt deras sats 6.2.4 [9], där Nicklasson och Zickert använder begreppet heltalspolynom och syftar på polynom med heltalskoefficienter,

Äntag att ett heltalspolynom

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$$

har en rationell rot $\frac{r}{s}$*, sådan att* r *och* s *är relativt prima. Då gäller det att* r *delar* a_0 *och* s *delar* a_n*."*

säger det att vi kan konstatera att eftersom vårt polynom är $p(s) = s^3 - 2$, så är de enda möjliga rötterna ± 1 och ± 2.

Insättning i polynomet ger

$$p(1) = 1^3 - 2 = -1$$

$$p(-1) = (-1)^3 - 2 = -3$$
$$p(2) = 2^3 - 2 = 6$$
$$p(-2) = (-2)^3 - 2 = -10$$

Vi kan nu se att inget utav talen är en rot till polynomet och därmed kan vi säga att det inte finns några rationella rötter till problemet. Alltså drar vi slutsatsen att med hjälp av Nicklasson och Zickerts [9] definition av konstruerbara tal att med endast passare och linjal inte kan konstruera en sida av en kub som är av en irrationell storlek.

Därför är det omöjligt att konstruera sidan av kuben med dubbel volym.

Att tredela en vinkel

Att tredela en vinkel med hjälp av passare och linjal är känt för att vara omöjligt [6]. Det går självklart att tredela en vinkel om till exempel en gradskiva används. Men generellt finns det ingen metod för att tredela en vinkel. Att tredela en $60°$ vinkel är omöjligt med endast passare och linjal, vilket kommer bevisas här. Vi kommer med hjälp av trigonometriska funktioner och rationella rötter visa varför detta är omöjligt.

För detta bevis använder vi likheterna för vinkelsumman, dubbla vinkeln för cosinus, trigonomiska ettan och dubbla vinkeln för sinus:

$$\textbf{(vinkelsumman)} : \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\textbf{(dubbla vinkeln för cosinus)} : \cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\textbf{(trigonomiska ettan)} : \sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$$

$$\textbf{(dubbla vinkeln för sinus)} : \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Vi börjar med att betrakta en given vinkel θ som vi vill dela i tre, alltså $\left(\frac{\theta}{3}\right)$. Vi använder oss av de fyra övre listade likheterna för att kunna uttrycka $\cos(\theta)$ i $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$.

Då kan vi skriva följande:

$$\cos(\theta) = \cos\left(2\cdot\frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{3}\right)$$

Vi använder oss då av vinkelsumman för att skriva

$$\cos(\theta) = \cos\left(2\cdot\frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{3}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{\theta}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sin\left(2\cdot\frac{\theta}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

Sedan använder vi oss dubbla vinkeln för cosinus

$$\cos\left(2\cdot\frac{\theta}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sin\left(2\cdot\frac{\theta}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$= \left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) - 1\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sin\left(2\cdot\frac{\theta}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

Nu använder vi dubbla vinkeln för sinus för att kunna skriva

$$\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)-1\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)-\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$=\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)-1\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)-2\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

Detta kan vi skriva om till

$$2\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)-2\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)=2\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\left(1+2\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)$$

Nu använder vi trigonomiska ettan

$$2\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\left(1+2\left(1-\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)\right)$$

Nu har vi använt oss av de fyra likheterna och kan nu skriva om

$$2\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\left(1+2\left(1-\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)\right)=2\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\left(1+2-2\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)$$

$$=2\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\cdot\left(3-2\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)=2\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)-3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)+2\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$=4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)-3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

Nu har vi uttryck $\cos(\theta)$ i termer av $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$. För att komma vidare sätter vi upp följande ekvation:

Vi sätter likheten $\cos(\theta)=g$ samt skriver hjälpekvationen $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)=z$ så att vi får:

$$\cos(\theta)=4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)-3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\Leftrightarrow 4z^3-3z-g=0$$

Vi kallar $4z^3 - 3z - g = 0$ för (2).

Vi vill nu konstruera en lösning till (2). I början av beviset sa vi att det generellt var omöjligt att tredela en vinkel av $60°$ med endast passare och linjal. Så därför sätter vi $\theta = 60°$ vilket ger oss $\cos(60°) = \frac{1}{2}$.

Efter insättning i (2) får vi

$$4z^3 - 3z - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 4z^3 - 3z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8z^3 - 6z = 1$$

Vi kallar $8z^3 - 6z = 1$ för (3).

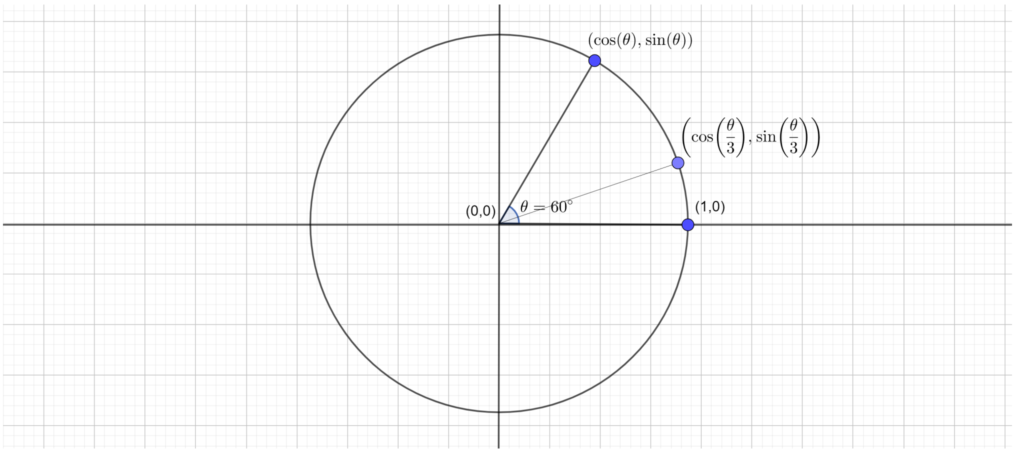
Kyhlström [6] hänvisar till kapitel 2.2.0 i sitt arbete där hon likt Nicklasson och Zickert [9] gör i kubens fördubbling visar att det måste finnas några rationella rötter för att det ska finnas en lösning till (3). Vi skriver om (3) där vi sätter $v = 2z$ och kallar den ekvationen för (4)

$$v^3 - 3v = 1$$

Vi vill nu visa att det inte finns några rationella rötter till (4). Vi har i föregående problem om kubens fördubbling gått igenom en sats som motiverar för vilka rationella rötter som är möjliga för ett heltalspolynom, och då vårt polynom är $v^3 - 3v = 1$ är det ± 1 som är dem möjliga rötterna till (4).

Men med insättning av ± 1 i (4) kan vi se att det inte ger en lösning ty
$v(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 \neq 1$ och $v(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) \neq 1$.
Det vill säga att det inte finns några rationella rötter till (4) och likt slutsatsen på problemet om kubens fördubbling säger vi att då vinkeln ska delas upp i tre vinklar som inte är av rationell storlek, kan detta inte göras enbart med passare och linjal.

Beviset kan illustreras med en bild där θ är den givna vinkeln och $\frac{\theta}{3}$ är en tredjedel av θ i en enhetscirkel i ett koordinatsystem.



Tidigare i kapitlet har vi visat hur vi kan konstruera tal och punkter.

I bilden ser vi att vi har en vinkel θ med koordinaterna $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, i detta fall där $\theta = 60°$. Om vi delar θ i tre så kommer den nya vinkeln få koordinaterna $\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)$. Och i det konkreta fallet där $\theta = 60°$ så har vi räknat ut att $\cos(20°)$ är ett ickerationellt tal och därav ett ickekonstruerbart tal, som i översättning till koordinater så skulle den vinkeln få $(\cos(20°), \sin(20°))$ där både $\cos(20°)$ och $\sin(20°)$ är två ickekonstruerbara tal. Då vi med passare och linjal inte kan konstruera fram ickerationella tal, kan vi inte konstruera fram en tredelning av en vinkel.

Därför är det omöjligt att tredela en vinkel med enbart passare och linjal.

Kapitel 5

Avslutande kommentarer

I detta arbete har jag kort redovisat om geometrins historik och om ett par historiska matematiker. Jag är en lärarstudent som läser till Ämneslärare och läser idrott och matematik som ämnen. Matematik har alltid varit ett roligt ämne för mig, dels för att det är för mig ett logiskt område men också för att jag haft lätt för det. Jag hade däremot aldrig reflekterat mer än utanför kursboken om hur och varifrån matematiken vi vet idag kommer ifrån.

Genom att få läsa igenom alla arbeten och ha gjort efterforskning av inte bara matematiken men också av omständigheterna till när och hur Elementa skrevs, har förstorat mitt perspektiv på matematik som område. Det har med det perspektivet också gett en större respekt för hur utvecklat inte bara geometri utan all matematik är. Enligt min erfarenhet av matematik i skolan är det att det vi lär oss oftast bara är som det är, vilket ger många kli i huvudet. Men precis som på universitetet där allt är motiverat tycker jag att matematik i tidigare stadie också kan behöva mer förklaringar till hur och varför det vi läser om är relevant. Det är en reflektion som jag kommer ta med mig. Detta arbete har varit lärorikt och utvecklande för mig.

Jag skulle till sist vilja tacka min handledare Alan Sola för hans stora tålamod och handledning.

Litteraturförteckning

[1] Britannica. (2019). Hämtad 2019-12-19.
https://www.britannica.com/biography/Evariste-Galois

[2] Britannica. (2019). Hämtad från 2019-11-20.
https://www.britannica.com/place/Alexandria-Egypt

[3] Britannica. (2019). Hämtad från 2019-11-20.
https://www.britannica.com/event/Hellenistic-Age.

[4] Canities. (2019). Hämtad från 2019-10-16.
http://canities.se/elementa1.html#e_01_001

[5] Canities. (2019). Hämtad från 2019-10-16.
http://canities.se/elementa3.html#e_03_Definitioner

[6] Ida Kyhlström.(2015). *Möjliga och omöjliga konstruktioner*. Uppsala Universitet.

[7] Lindahl, L.Å. (2004). *En inledning till Geometri.*
Hämtad från 2019-11-01
http://www2.math.uu.se/∼ lal/kompendier/Geometribok.pdf

[8] MacTutor. (1999). Hämtad från 2019-10-18
https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid.html

[9] Nicklasson, L. Zickert, G. (2017).*Geometriska konstruktioner.* Institutionen för matematik KTH och matematiska institutionen Stockholms Universitet.