SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Kedjebråk, Fareyföljder och Fordcirklar

av

Olavus Rogowski

2020 - No K7

Kedjebråk, Fareyföljder och Fordcirklar

Olavus Rogowski

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Håkan Granath, Annemarie Luger

2020

Kedjebråk, Fareyföljder och Fordcirklar

Olavus Rogowski

25 mars 2020

Innehåll

1 Sammanfattning

Inom matematikens historia så har bråk förekommit inom matematikens begynnelse och många matematiker världen över har jobbat med bråk. Idag så lär vi oss om bråk i grundskolan som ett steg i att kunna lära oss om högre nivå av matematik. Vi blickar ständigt framåt men i detta arbete så ska vi ta och stanna vid bråken och se vad vi kan lära oss om bråken om vi ändrar det förhållande vi har med dem. Vad händer om vi skulle utföra bråk addition genom att inte hitta först gemensam nämnare utan att direkt addera täljarna och nämnarna för sig, vad kan vi få ut av detta? Vi har tidigare kunnat visualiserat bråk med hjälp av tårtdiagram eller kvadratdiagram men kan vi visualisera det på något annat sätt och går det att visualisera ett kedjebråk? I detta arbete så kommer vi att studera bråk utifrån dessa frågor där vi ser närmare på kedjebråk, Fareyföljder och Fordcirklar.

2 Introduktion

I denna uppsats så kommer vi att bekanta oss med några egenskaper hos bråktalen. Visa begränsningar har gjorts i mån av tid och utrymme vilket medför att vi kommer bara att fokusera på de bråktal som ligger mellan noll till och med ett i denna uppsats. Uppsatsens är uppdelad i tre delar, varje del hämtar sin information från en källa vardera.
I uppsatsens första del så kommer vi att bekanta oss med kedjebråk och Euklides algoritm taget från Olds bok *Continued fractions*[1].
I uppsatsens andra del så kommer vi att undersöka Fareyföljder vilket är tagna från Nivens *An Introduction to the Theory of Numbers*[2]. I denna del så studerar vi hur vi kan utifrån bara bråktalen noll och ett ta fram alla bråktal som ligger emellan dessa.
I uppsatsens tredje del så kommer vi att studera Fordcirklar vilket vi har hämtat ifrån Fords artikel *Fractions* [3]. I denna del så kommer vi kunna se hur vi kan skriva bråktal som cirklar och på så sätt visualisera bråktal som geometriska figurer i ett koordinatsystem. Vi avslutar med att se på en tillämpling av Fordcirklar där vi använder oss av dessa för att visualisera kedjebråk som en kedja av Fordcirklar.

3 Kedjebråk

I detta avsnitt disuterar vi kedjebråk i förberedelse inför avsnittet med Fordscirklar. Avsnittets material är i stort sätt hämtat från Olds bok *Continued fractions* [1]. Vi kommer att börja med att introducera kedjebråk och visa att alla rationella tal kan skrivas som kedjebråk och omvänt att alla kedjebråk som är ändliga kan skrivas som rationella tal. Vi ska också se hur man med hjälp av Euklides algoritm kan snabbt och enkelt ta fram de tal som behövs för att konstruera våra kedjebråk.

Definition 3.1. Ändligt enkelt kedjebråk
Låt $a_0 \in \mathbb{Z}$ och $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ där $n \geq 0$ och betrakta

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}}. \tag{3.1}$$

Denna uppställning av upprepande bråk kallas för ändligt enkelt kedjebråk.

Varför det kallas för ändligt enkelt kedjebråk är eftersom antalet a_i är ändligat många och enkelt för att varje täljare i kedjebråket har värdet 1. Framtida benämningar av kedjebråk i detta arbete kommer att åtsyfta just ändliga enkla kedjebråk. Termerna $a_0, a_1, \cdots, a_n$ i kedjebråket kallas för partiella kvoter. Med de partiella kvoterna kan vi införa en ny notation för kedjebråk 3.1 vilket är $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n]$.
Vi kan med lätthet se att ändliga kedjebråk är rationella tal; men vi kommer även visa att tvärtom så kan varje rationellt tal, $\frac{p}{q}$ där $p, q \in \mathbb{Z}$ och $q \neq 0$, skrivas som kedjebråk.

Låt oss ta ett exempel:
Ta det rationella talet $\frac{32}{17}$, utför vi heltalsdivisionen av detta tal så får vi

$$\frac{32}{17} = 1 + \frac{15}{17} \tag{3.2}$$

vilket vi också kan skriva som

$$\frac{32}{17} = 1 + \frac{1}{\frac{17}{15}}. \tag{3.3}$$

Nämnaren $\frac{17}{15}$ kan vi skriva om genom att utföra heltalsdivisionen vilket ger oss

$$\frac{17}{15} = 1 + \frac{2}{15} \tag{3.4}$$

som i sin tur kan skrivas som

$$\frac{17}{15} = 1 + \frac{1}{\frac{15}{2}}. \tag{3.5}$$

Vi upprepar samma steg som innan och får fram

$$\frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

Här avslutar vi våra beräkningar, för om vi skulle gå vidare så skulle vi få

$$\frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1} \tag{3.7}$$

vilket är samma som att skriva $2 = 1 + 1$. Låt oss nu återsubstituerar in värdena som vi har fått fram i våra heltalsdivsioner, vilket ger oss

$$\frac{32}{17} = 1 + \frac{1}{\frac{17}{15}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{15}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2}}}$$

eller

$$\frac{32}{17} = [1; 1, 7, 2].$$

Sats 3.8. *Varje rationellt tal kan skrivas om till ett ändligt kedjebråk och omvänt gäller att varje ändligt kedjebråk representerar ett rationellt tal.*

Bevis. Antag att x är ett rationellt tal, $x = \frac{p}{q}$ där $p, q \in \mathbb{Z}$ och $q > 0$. Vi utför heltalsdivisionen och får

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} \tag{3.9}$$

där heltalet a_0 väljs sådant att resten $r_1 \in \mathbb{Z}^+$ uppfyller $0 \leq r_1 < q$. Olikheten $0 \leq r_1 < q$ ger oss två möjliga fall, $r_1 = 0$ eller $r_1 > 0$. Om $r_1 = 0$ så innebär det att $a_0 = \frac{p}{q}$ vilket medför att vi har hittat alla partiella kvoter som konstruerar kedjebråket, alltså $x = [a_0;]$. Om $r_1 > 0$ fortsätter vi processen. Vi börjar med att skriva om

$$x = a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}. \tag{3.10}$$

Eftersom $\frac{q}{r_1} > 1$ utför vi heltalsdivisionen nu med q och r_1 vilket ger oss

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}. \tag{3.11}$$

Observera att $0 \leq r_2 < r_1 < q$ och att $a_1 > 0$. Som innan så finns det två möjliga fall, $r_2 = 0$ och $r_2 > 0$ vilka vi undersöker. Om $r_2 = 0$ så har vi hittat alla sökta partiella kvoter för att konstruera kedjebråket, som blir $x = [a_0; a_1]$. Om istället $r_2 > 0$ så fortsätter divisionsprocessen med att finna nästa partiella kvot i kedjebråket som innan. Vi skriver om bråket

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}. \tag{3.12}$$

Då $q > 0$ och alla rester är strikt avtagande icke-negativa heltal så innebär det att denna process av divisioner tillslut kommer att avslutas, vilket gör att vi får $q > r_1 > r_2 > \cdots > r_n = 0$. Det ger oss

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}, \tag{3.13}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n + \frac{r_n}{r_{n-1}} = a_n + 0. \tag{3.14}$$

Vi kan nu bilda kedjebråket genom att återsubstituera in värdena. Ersätt värdet av $\frac{q}{r_1}$ i (3.10) med (3.12) vi får då

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}. \tag{3.15}$$

Vi fortsätter återsubstituera steg för steg, vilket ger oss tillslut kedjebråket

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}. \tag{3.16}$$

För att visa omvändningen låt oss observera kedjebråket

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}. \tag{3.17}$$

Konstruktionen av kedjebråket består av enbart ändligt antal additioner och divisioner av heltal så kan inga irrationella tal bildas och detta leder till att kedjebråket måste vara rationellt. □

3.1 Euklides algoritm

Euklides algoritm är en flerstegsprocedur som används för att bestämma den största gemensamma delaren (SGD) till två heltal. Denna algoritm återfinnes i Euklides Elementa (300 f.v.t.) men man antar att den har funnits tidigare.
Istället för att använda sig av den process som vi har använt oss av för att få fram kedjebråk från föregående avsnitt så kan vi använda oss av Euklides algoritm vilket kommer ge oss de partiella kvoterna vi behöver för att bilda kedjebråket.

Sats 3.18. *De successiva kvoterna i Euklides algoritm för heltalen* p *och* $q \neq 0$ *är de partiella kvoterna i kedjebråkespresentationen av* $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Bevis. Låt $\frac{p}{q}$ vara ett rationellt tal, för att finna $SGD(p,q)$ använder vi Euklides algoritm:

$$\begin{aligned}
p &= a_0 \cdot q + r_1 & 0 < r_1 < q,\\
q &= a_1 \cdot r_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1,\\
r_1 &= a_2 \cdot r_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2,\\
&\vdots & \vdots\\
r_{n-3} &= a_{n-1} \cdot r_{n-2} + r_{n-1} & 0 < r_{n-1} < r_{n-2},\\
r_{n-2} &= a_n \cdot r_{n-1} + 0 & 0 = r_n.
\end{aligned}$$

Den sista icke försvinnande resten, r_{n-1}, är $SGD(p,q) = r_{n-1}$. Följden som bildas av $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ bildar en strikt avtagande följd av icke negativa heltal som måste bli noll inom ändligt många steg.
Nästa steg involverar att vi stuvar om algoritmen så att vi får

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} & 0 < r_1 < q,\\
\frac{q}{r_1} &= a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} & 0 < r_2 < r_1,\\
\frac{r_1}{r_2} &= a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}} & 0 < r_3 < r_2,\\
&\vdots & \vdots\\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}} & 0 < r_{n-1} < r_{n-2},\\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_n + 0 & 0 = r_n.
\end{aligned}$$

Nu, substituerar vi in varje bråk steg för steg och får fram uttrycket från (3.1). □

Exempel: Låt oss använda Euklides algoritm på $\frac{290}{934}$ för att få fram $SGD(290, 934)$

$$\begin{aligned}
290 &= \mathbf{0} \cdot 934 + 290 \\
934 &= \mathbf{3} \cdot 290 + 64 \\
290 &= \mathbf{4} \cdot 64 + 34 \\
64 &= \mathbf{1} \cdot 34 + 30 \\
34 &= \mathbf{1} \cdot 30 + 4 \\
30 &= \mathbf{7} \cdot 4 + 2 \\
4 &= \mathbf{2} \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

Vi har fått fram $SGD(290, 934) = 2$ men det vi är mer intresserade av är de partiella kvoterna $[0; 3, 4, 1, 1, 7, 2]$ som vi fick fram av att använda Euklides algoritm vilket vi kan använda för att bilda kedjebråket till $\frac{290}{934}$ vilket blir

$$[0; 3, 4, 1, 1, 7, 2] = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2}}}}}}.$$

3.2 Entydligheten av kedjebråk

Kedjebråkutvecklingen av $\frac{6}{17}$ är

$$[0;2,1,5] = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$$

men vi kan också skriva $\frac{6}{17}$ som

$$[0;2,1,4,1] = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1}}}}$$

vilket gör att vi har två möjliga sätt att skriva ett och samma rationella tal men inga mer. Den form som föredras är den förstnämnda då den ger färre partiella kvoter.

Sats 3.19. *Om x representerar ett kedjebråk med udda (jämnt) antal partiella kvoter så finns det också en representation med jämnt (udda) antal partiella kvoter.*

Bevis. Vi har fem fall vi behöver undersöka:

1. Då $a_n = 0$.
2. Då $a_n \geq 2$.
3. Då $a_n = 1$.
4. Då $a_n \leq -2$.
5. Då $a_n = -1$.

Det första fallet är ett specialfall och kan bara ske när $a_n = a_0 = 0$ vilket innebär att det kedjebråk vi har är $[0;] = 0$. Om den sista partiella kvoten $a_n \geq 2$ så kan vi alltid skriva om den sista kvoten på följande vis

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}. \tag{3.20}$$

Omvänt om den sista partiella kvoten är istället $a_n = 1$ så kan vi addera denna till den näst sista partiella kvoten enligt

$$\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{a_{n-1} + 1}. \tag{3.21}$$

Med partiella kvoter kan vi nu skriva ifall $a_n \geq 2$

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n - 1, 1], \tag{3.22}$$

och om $a_n = 1$

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, 1] = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]. \tag{3.23}$$

För de två sista fallen, $a_n \leq -2$ och $a_n = -1$, så måste $n = 0$ eftersom $a_0 \in \mathbb{Z}$ medan $a_n \in \mathbb{Z}^+$, vilket innebär för fallet $a_n = -1$ så kan vi bara skriva på ett sätt vilket är $[-1;]$. För fallet $a_n \leq -2$ så innebär det att vi har $[a_n;]$ vilket gör att vi kan skriva $[a_n;] = [a_n - 1; 1]$. □

Nedan kommer vi att använda oss av följande notation.

Definition 3.2. Golvfunktionen
Golvfunktionen $\lfloor x \rfloor$ tar ett reellt tal x och ger största heltalet som är lika med eller mindre än x.

Sats 3.24. *Om två kedjebråk*

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n] \quad och \quad [b_0; b_1, b_2, \cdots, b_N]$$

representerar samma rationella tal $\frac{p}{q}$ *samt om* $a_n > 1$ *och* $b_N > 1$ *då är* $n = N$ *och alla partiella kvoter är lika.*

Bevis. Anta att vi har att $n = N$. Vi använder oss av golvfunktionen för att få fram heltalsdelen av $\frac{p}{q}$, vilket är $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = a_0$ respektive $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = b_0$ vilket i sin tur leder till att $a_0 = b_0$. Vi observerar att för $t = [0; a_1, a_2, ..., a_n]$ så gäller $0 \leq t < 1$ (då vi har $a_n \geq 2$) vilket ger oss

$$a_0 \leq [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n] < a_0 + 1.$$

Då är

$$\frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_n]} = [0; a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{p}{q} - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor. \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{[b_1; b_2, ..., b_N]} = [0; b_1, b_2, ..., b_N] = \frac{p}{q} - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor. \tag{3.26}$$

Låt nu $s = [0; a_2, ..., a_n]$ då gäller att $0 \leq s < 1$, vilket gör att vi kan åter använda golvfunktionen till att reducera kedjebråken (3.25) och (3.26). Då vi har $n = N$ och vi upprepar iterativt ovanstående process så kommer vi att få tillslut

$$[a_n;] - \lfloor [a_n;] \rfloor = 0$$

samt

$$[b_N;] - \lfloor [b_N;] \rfloor = 0$$

vilket ger oss att de två kedjebråkens partiella kvoter är lika i varje steg. Anta istället att $n < N$ där $N = n + m$ där $m \in \mathbb{Z}^+$ samt $m > 0$ och att alla partiella kvoter tills a_n och b_n har varit lika och vi har reducerat kedjebråken tills steg n. Vi har sett att om vi använder golvfunktionen och beräknar $[a_n;] - \lfloor [a_n;] \rfloor$ så får vi 0, vilket avslutar kedjebråket. Men för $[b_n; b_m, \cdots, b_N]$ så får vi istället

$$[b_n; b_m, \cdots, b_N] - \lfloor [b_n; b_m, \cdots, b_N] \rfloor = [0; b_m, \cdots, b_N] = \frac{1}{[b_m, \cdots, b_N]}.$$

Detta innebär att vi har minst en eller fler, då $b_N > 2$, partiella kvoter i $[b_0; b_1, \cdots, b_N]$ än i $[a_0; a_1, \cdots, a_n]$ vilket innebär att $[a_0; a_1, \cdots, a_n] \neq [b_0; b_1, \cdots, b_N]$. □

Följdsats 3.27. *Varje rationellt tal $\frac{p}{q}$ har från undantaget $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n] = [a_n; a_1, a_2, \cdots, a_n - 1, 1]$ ett unikt kedjebråk.*

Bevis. Beviset för detta är en följd av de satser vi just genomfört. □

4 Fareyföljd

I detta avsnitt introducerar vi Fareyföljder som återfinnes i [2] *An Introduction to the Theory of Numbers* och diskuterar grundläggande egenskaper samt sambandet med Eulers ϕ-funktion.

Fareyföljderna konstrueras i en tabell på följande vis; första raden i tabellen består bara av bråken $\frac{0}{1}$ och $\frac{1}{1}$. För att få fram raderna $n = 2, 3, \cdots$ så använder vi följande regel iterativt: Konstruera raden n genom att först kopiera föregående rad $n-1$ och sedan lägg till nu de bråk som saknas; för att lägga till de bråk som saknas observerar vi nämnarna av bråken på rad $n-1$. Ta två bråk som står brevid varandra i rad $n-1$, $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$. Om nämnare b och b' uppfyller villkoret $b + b' \leq n$ då lägger vi till bråket $\frac{a+a'}{b+b'}$ mellan bråken $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ i rad n.

I rad 1 har vi bara bråken $\frac{0}{1}$ och $\frac{1}{1}$ och deras nämnare är lika med rad numret vilket är $n = 1$. Rad 2 konstruerar vi nu genom att först kopiera föregående rads bråk, som är $\frac{0}{1}$ och $\frac{1}{1}$, till den nya raden innan vi lägger till de bråk som saknas för att konstruera rad 2. Vi undersöker bråken från föregående rad som står brevid varandra i den föregående raden och specifikt undersöker vi nämnarna. Nämnarna för de bråk som står brevid varandra från rad 1 är bägge 1, adderat med varandra ger det oss att de är lika med det aktuella radnumret som vi vill konstruera bråk till, vilket är 2. Detta innebär att vi ska lägga till ett nytt bråk i rad 2 som ligger mellan bråket $\frac{0}{1}$ och $\frac{1}{1}$, som står brevid varandra i rad 1, vilket är lika med $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Rad 2 innehåller då bråken $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$. Vi inför notationen $\mathbb{F}_n$, där $\mathbb{F}$ står för en följd och där n, där $n > 1$, står för i vilken rad i tabellen som följden $\mathbb{F}_n$ står i. Med den införda notationen kan vi skriva de två första raderna enligt sådan $\mathbb{F}_1 = [\frac{0}{1}, \frac{1}{1}]$ samt $\mathbb{F}_2 = [\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}]$.

Vi konstruerar på samma sätt raderna 3, 4, 5 och 6 och får fram följande tabell, där den n-te raden i tabellen kallas för *Fareyföljden av ordningen n*.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\[1em]
\frac{0}{1} & & & & & & \frac{1}{2} & & & & & & \frac{1}{1} \\[1em]
\frac{0}{1} & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} & & & & \frac{1}{1} \\[1em]
\frac{0}{1} & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & & & \frac{1}{1} \\[1em]
\frac{0}{1} & & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & & \frac{1}{1} \\[1em]
\frac{0}{1} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & \frac{1}{1}
\end{array}
$$

Figur 1: Tabell av Fareyföljder av ordningen 1 till och med 6.

Vi kan redan nu, åtminstone till och med rad 6, observera ett par egenskaper hos de bråk som återfinnes i tabellen. Alla bråken står i sin reducerade form; alla de reducerade bråken står i växande ordning; alla de reducerade bråken ligger i intervallet $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ samt $b \leq n$; om de reducerade bråken $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ ligger brevid varandra i rad n så gäller $a'b - ab' = 1$ och $b + b' > n$. Alla dessa egenskaper i tabellen och mer ska vi visa i detta avsnitt om Fareyföljder.

Definition 4.1. Två bråk som står brevid varandra i Fareyföljden av ordningen n kallas närliggande.

Sats 4.1. *Om $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$, sådan att $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$, är närliggande bråk i Fareyföljden av ordningen n så gäller $a'b - ab' = 1$.*

Bevis. Vi kan se att för $n = 1$ så har vi $\frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ och $\frac{a'}{b'} = \frac{1}{1}$ insatt i $a'b - ab' = 1$ ger oss $1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1$. Låt oss anta att satsen är också sann för ordningen $n - 1$. Om vi undersöker nu för ordningen n så kommer vi behöva undersöka för $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ eller $\frac{a}{b}$, $\frac{a+a'}{b+b'}$ eller $\frac{a+a'}{b+b'}$, $\frac{a'}{b'}$, då $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ är närliggande bråk av ordningen $n - 1$. Vi undersöker dessa tre fall. För basfallet så ha vi sett att $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ är närliggande bråk. Om vi nu undersöker för fallet då vi har bråken $\frac{a}{b}$ och $\frac{a+a'}{b+b'}$ så får vi

$$(a + a')b - a(b + b') = a'b - ab' = 1,$$

enligt induktionsantagandet. Om vi nu ser på det sista fallet för $\frac{a+a'}{b+b'}$ och $\frac{a'}{b'}$ då har vi

$$a'(b+b') - (a+a')b' = a'b - ab' = 1$$

enligt basfallet. Utifrån vad vi har undersökt så stämmer vårt påstående för närliggande bråk och vi är klara. $\square$

Sats 4.2. *Alla bråk $\frac{a}{b}$ i tabellen står i reducerad form, det vill säga $SGD(a, b) = 1$.*

Bevis. Observera att alla bråk som har konstruerats och lagts till i tabellen 1 av ordningen 6 är i reducerad form. Frågan är om vi konstruerar en ny rad och lägger till bråk om de nya bråken är också i reducerad form.
Sätt $k = SGD(a + a', b + b')$. Vi ska visa att $k = 1$. Vi skriver

$$\begin{aligned} a + a' &= k \cdot m \\ b + b' &= k \cdot l \end{aligned}$$

där $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Vi multiplicera första raden med b och andra raden med $-a$

$$\begin{aligned} ab + a'b &= k \cdot m \cdot b \\ -ab - ab' &= -k \cdot l \cdot a \end{aligned}$$

sedan tar vi och addera den andra raden till den första

$$a'b - ab' = k(m \cdot b - l \cdot a)$$

men vi har redan i sats 4.1 visat att $a'b - ab' = 1$ vilket ger att vi får

$$1 = k(m \cdot b - l \cdot a). \tag{4.3}$$

I (4.3) är både k och $m \cdot b - l \cdot a$ heltal. Den enda möjligheten är att $k = 1$. Vilket innebär att de bråk tal vi lägger till med medianten är reducerade.

$\square$

Sats 4.4. *I varje Fareyföljd står bråken i storleksordning.*

Bevis. Det vi vill visa är att bråket vi lägger till, $\frac{a+a'}{b+b'}$, det vill säga verkligen uppfyller $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$. Låt oss undersöka den vänstra olikheten först:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'}. \tag{4.5}$$

Den är ekvivalent med

$$ab + ab' < ab + a'b$$

vilket är ekvivalent med

$$ab' < a'b$$

som i sin tur är ekvivalent med

$$0 < a'b - ab'.$$

Men vi vet sedan innan att $a'b - ab' = 1$ vilket ger oss att vi får $0 < 1$ vilket innebär att vår olikhet (4.5) är sann. På liknande sätt kan vi visa den högra olikheten är ekvivalent med $0 < 1$. □

Beräkningsprocessen vi använde oss av för att lägga till nästa bråk i tabellen kallas för medianten, vilket defineras så här.

Definition 4.2. Farey addition, Freshman sum eller Mediant
Om $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ där $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ samt $b, b' \neq 0$ så inför vi följande beteckning

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} = \frac{a + a'}{b + b'}. \tag{4.6}$$

Med medianten samt ovanstående satser konstruerar vi alltså ett bråk på reducerad form och medianten kommer också placeras i följden så att följden är i storleksordning.

Observera att ett nödvändigt villkor för att tillhöra en $\mathbb{F}_n$ är att nämnaren måste vara mindre eller lika med n. Om medianten av två bråk från $\mathbb{F}_{n-1}$ där nämnaren blir $b+b' > n$ så innebär det att $\frac{a+a'}{b+b'}$ inte kommer existera i ordningen n; den första gången som $\frac{a+a'}{b+b'}$ kommer att förekomma i Fareyföljden är då ordningen är $b + b'$.

Sats 4.7. *Om $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ är närliggande bråk i någon ordning, så finns bland alla bråk som ligger mellan dessa två ett unikt bråk, nämligen $\frac{a+a'}{b+b'}$, som har den minsta nämnaren av alla dessa bråk.*

Bevis. Från hur vi konstruerade tabellen och enligt ovanstående satser vet vi att $\mathbb{F}_n$ är en ordnad följd av reducerade bråk samt att medianten $\frac{a+a'}{b+b'}$ kommer vara det första tal som kommer ligga mellan $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ i ordningen $n = b + b'$, vilket ger oss

$$\frac{a}{b} < \frac{a + a'}{b + b'} < \frac{a'}{b'}.$$

Avståndet mellan bråken $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ är

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{a'b - ab'}{bb'} = \frac{1}{bb'}$$

på grund av sats 4.1. Låt oss nu se på ett valfritt bråk $\frac{x}{y}$ som ligger mellan $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ sådan att

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{a'}{b'}.$$

Ur denna olikhet kan vi läsa ut att vi har

$$ay < bx$$
$$b'x < a'y$$

och att avståndet mellan bråken blir

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \left(\frac{a'}{b'} - \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a'y - b'x}{b'y} + \frac{bx - ay}{by} \geq \frac{1}{b'y} + \frac{1}{by} = \frac{b + b'}{bb'y} \quad (4.8)$$

det vill säga vi har fått

$$\frac{b + b'}{bb'y} \leq \frac{a'b - ab'}{bb'} = \frac{1}{bb'} \quad (4.9)$$

vilket vi kan skriva som

$$b + b' \leq y.$$

Vi har två fall att undersöka, när $b + b' < y$ så betyder det att bråket $\frac{x}{y}$ inte har den minsta nämnaren. Om däremot $b + b' = y$ så medför det att olikheten (4.9) blir en likhet och därmed är även (4.8) en likhet vilket medför att $a'y - b'x = 1$ och $bx - ay = 1$. Vi kan nu få fram att

$$a'y - b'x = bx - ay$$
$$\frac{x}{y} = \frac{a + a'}{b + b'}$$

är det bråk med minsta nämnare som ligger mellan $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ i ordningen $n = b + b'$ samt står i sin förkortade form. $\square$

Sats 4.10. *Om $0 \leq x \leq y$, och $\frac{x}{y}$ är ett reducerat bråk, då kommer bråket $\frac{x}{y}$ att förekomma i $\mathbb{F}_y$ och i alla efterkommande Fareyföljder.*

Bevis. För fallet då nämnaren är $y = 1$ så är det lätt att se att den kommer att förekomma i Fareyföljden $\mathbb{F}_n$ av ordningen n och vidare, då det ger oss $x = 0$ eller $x = 1$ vilket ger oss bråken $\frac{0}{1}$ och $\frac{1}{1}$ och de förekommer första gången då $y = 1 = n$ samt senare enligt hur nästkommande rader i Fareyföljden konstrueras.

Vi vill nu visa att satsen även håller när $y \geq 2$ det vill säga då vi har $y = n+1$. Låt $0 \leq x \leq n+1$ samt $SGD(x, n+1) = 1$ om då $x = 0$ eller $x = n+1$ då kommer $SGD(x, n+1) = n+1 > 1$ vilket betyder att x inte kan vara intervallgränserna utan ligger i $0 < x < n+1$. Vi vill nu kunna visa att $\frac{x}{n+1}$ ligger i ordningen $n+1$. Låt $\frac{a}{b}$ vara det största bråket i ordningen n sådan att det är mindre än $\frac{x}{n+1}$ och låt bråket $\frac{a'}{b'}$ vara det minsta bråket i ordningen n sådan att det är större än $\frac{x}{n+1}$, vi får då olikheten

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{n+1} < \frac{a'}{b'}.$$

Enligt hur vi konstruerar nästkommande rader i tabellen med hjälp medianten så vet vi att $\frac{x}{n+1}$ inte kan förekomma i rad n då nämnaren är $n+1$ vilket är större än n. Detta medför att bråken $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ är då närliggande bråk i rad n och enligt sats 4.7 har vi $\frac{a+a'}{b+b'} = \frac{x}{n+1}$ och att denna mediant kommer att förekomma första gången i rad $n+1$. □

Definition 4.3. Två olika bråk i en Fareyföljd av ordningen n som bildar summan ett kallas för Fareypar.

Sats 4.11. *I en Fareyföljd av ordningen n har alla bråk i Fareyföljden, med undantaget för $\frac{1}{2}$, ett komplementerande bråk,*

$$\frac{1}{1} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}.$$

Bevis. Observera att $\mathbb{F}_1$ har enbart två bråk, $\frac{0}{1}$ och $\frac{1}{1}$, vilket medför att dessa är det enda Fareyparet i följden av ordningen $n = 1$. I $\mathbb{F}_{n\geq 2}$ så kommer de bråken som bildar delarna av Fareyparet ligga på var sin sida av $\frac{1}{2}$. Vi vill nu visa att alla bråk i ordningen n har ett komplementerande bråk. Låt ordningen vara n där $n < b + b'$ och låt bråket $\frac{a}{b}$ ligga i intervallet $\frac{0}{1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{2}$. Enligt definition 4.3 då finns det ett bråk till $\frac{a}{b}$ som tillsammans bildar summan ett.

$$1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}.$$

Låt nu $\frac{a'}{b'}$ vara närliggande bråk till $\frac{a}{b}$, samt $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$, i ordningen n så att $\frac{0}{1} < \frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{1}{2}$. Enligt definition 4.3 så finns det ett bråk i Fareyföljden som tillsammans med $\frac{a'}{b'}$ bildar summan ett, vi finner det talet

$$1 - \frac{a'}{b'} = \frac{b'-a'}{b'}.$$

Då bråket $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ innebär det att det komplementerande bråket till $\frac{a'}{b'}$ ligger i intervallet $\frac{1}{2} < \frac{b'-a'}{b'} < \frac{b-a}{b} < \frac{1}{1}$. Än så länge vet vi inte om komplementen är närliggande bråk till varandra. I ordningen $n+1 = b+b'$ så finner vi medianten av bråken $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$, vilket ger oss

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} = \frac{a+a'}{b+b'}.$$

Enligt definition 4.3 så kommer det finns ett bråk till $\frac{a+a'}{b+b'}$ i ordningen $n+1$ som tillsammans bildar summan ett. Vi tar fram det komplementerande talet

$$1 - \frac{a+a'}{b+b'} = \frac{b+b'-a-a'}{b+b'}$$

vilket ligger mellan $\frac{1}{2} < 1-\frac{a'}{b'} < 1-\frac{a+a'}{b+b'} < 1-\frac{a}{b} < \frac{1}{1}$. Då medianten inte existerade i ordningen n och för första gången medianten förekommer är i ordningen $n+1$ så vet vi att medianten måste vara närliggande till de två bråk som bildar medianten. Men då mediantens komplementerande bråk inte kunde existera tidigare så måste det bråket uppstå samtidigt som medianten. Enligt hur medianten konstrueras så måste då talen $1-\frac{a'}{b'}$ och $1-\frac{a}{b}$ vara närliggande tal till komplementet $1-\frac{a+a'}{b+b'}$. Detta innebär att i ordningen n så är $\frac{b'-a'}{b'}$ och $\frac{b-a}{b}$ närliggande bråk.

□

Observera att alla $\mathbb{F}_{n\geq 2}$ är följder med udda antal element och att $\mathbb{F}_1$ är den enda följden som har jämnt antal element.

Med de satser vi har gått igenom fram tills nu kan vi introducera en alternativ definition av Fareyföljder: Den strikt växande följden av alla reducerade bråk mellan $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+$ och $b \leq n$ kallas för Fareyföljd av ordningen n.

Sats 4.12. *Låt $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''}$ vara vilka som helst tre närliggande bråk i $\mathbb{F}_n \geq 2$. Då är $\frac{a'}{b'} = \frac{a+a''}{b+b''}$.*
Observera: $\frac{a+a''}{b+b''}$ behöver ej vara förkortat.

Bevis. Utifrån sats 4.1 vet vi att $\frac{a}{b}$ och $\frac{b'}{b'}$ är närliggande bråk så gäller $a'b-ab' = 1$. Låt oss anta att $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ och $\frac{a''}{b''}$ är närliggande bråk.
Då har vi

$$a'b - ab' = 1 \tag{4.13}$$

$$a''b' - a'b'' = 1 \tag{4.14}$$

sätter vi ekvationerna (4.13) och (4.14) lika med varandra får vi

$$a'b - ab' = a''b' - a'b'' \tag{4.15}$$

löser vi ut $\frac{a'}{b'}$ från (4.15) får vi att

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a+a''}{b+b''}$$

vilket ger oss att $\frac{a'}{b'}$ är medianten av $\frac{a}{b}$ och $\frac{a''}{b''}$. □

Sats 4.16. *Låt* $\frac{p}{q}$ *och* $\frac{p'}{q'}$ *vara de bråk som står direkt till vänster och höger om bråket* $\frac{1}{2}$ *i Fareyföljden av ordningen* $n \geq 2$. *Då är*

$$q = q' = 1 + 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

det vill säga, nämnaren q *är det största udda heltalet* $\leq n$. *Dessutom gäller att* $p + p' = q$.

Bevis. Om $\frac{p}{q}$ och $\frac{p'}{q'}$ står direkt till höger och vänster om $\frac{1}{2}$ så att de är närliggande bråk till $\frac{1}{2}$. För $\frac{p}{q}$ och $\frac{1}{2}$ har vi att

$$2p - 1 \cdot q = 1 \Leftrightarrow q = 2p - 1 \tag{4.17}$$

och för $\frac{1}{2}$ och $\frac{p'}{q'}$ så har vi

$$q' \cdot 1 - 2p' = 1 \Leftrightarrow q' = 2p' + 1. \tag{4.18}$$

Observera att q och q' kan enbart anta udda värden, vilket beror på att $p, p', q, q' \in \mathbb{Z}^+$. Vi får att q och q' måste vara udda heltal.
Låt oss nu ta fram avståndet mellan de närliggande bråken, vi får då att

$$\frac{1}{2} - \frac{p}{q} = \frac{1 \cdot q - 2 \cdot p}{2q} = \frac{1}{2q} \tag{4.19}$$

$$\frac{p'}{q'} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot p' - 1 \cdot q'}{2q'} = \frac{1}{2q'}. \tag{4.20}$$

Vi har sedan innan sett från tidigare konstruktion av Fareyföljden i figur 1 att symmetri uppstår och att det observerade avståndet mellan bråken måste ha samma avstånd till $\frac{1}{2}$. Detta leder till att $q = q'$ enligt symmetri. Enligt hur vi konstuerar rader med hjälp av medianten och basfallet, då $n = 2$, så ser vi att det närmaste bråktalet till $\frac{1}{2}$ har en udda nämnare. Det innebär att när det närmaste bråket till $\frac{1}{2}$ skapar en mediant som ska läggas till emellan dessa två bråk så kommer det nya bråkets nämnare att vara ett udda tal (då vi adderar ett jämnt och udda tal så får vi alltid ett udda tal). Inget jämnt tal kan läggas till vilket innebär att $q = q'$ är det största udda heltalet nämnaren kan anta.
Det som återstår nu är att visa $p + p' = q$, vi adderar (4.17) och (4.18) och får

$$q + q' = 2p + 2p' - 1 + 1$$

och vi har sedan tidigare i beviset fått $q = q'$, vilket vi nu använder oss av och får att

$$2q = 2p' + 2p$$

vilket är ekvivalent med

$$q = p + p'.$$

Nu är hela beviset klart. $\square$

För nästa sats så kommer vi behöva nedanstående definition.

Definition 4.4. Eulers ϕ-funktion
Om j är ett positivt heltal så är funktionen $\phi(j)$ antalet tal som är relativt prima med j och ligger inom intervallet $1 \leq k \leq j$. Funktionen $\phi(j)$ kallas för Eulers ϕ-funktion.

Låt oss se på två exempel på Eulers ϕ-funktion, $\phi(5) = 4$ där de fyra talen 1, 2, 3 och 4 är relativt prima till 5 och $\phi(6) = 2$ där de två talen 1 och 5 är relativt prima till 6.
Observera att Eulers ϕ-funktion då vi använder det på Fareyföljdens ordning $\phi(n)$, där $n \geq 2$, ger oss de antal bråk som vi behöver lägga till i Fareyföljden av ordningen n från ordningen $n-1$ för att få fram alla bråk som ligger i $\mathbb{F}_n$.

Sats 4.21. *Låt S_n beteckna antalet bråk $\frac{a}{b}$ i $\mathbb{F}_n$. Då är $S_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \phi(j)$ och summan av alla $\frac{a}{b}$ i $\mathbb{F}_n$ är lika med $\frac{1}{2} \cdot S_n$.*

Bevis. Observera att för $\mathbb{F}_{n=1}$ så har vi bara två bråk, $\frac{0}{1}$ och $\frac{1}{1}$ där den senare kan vi få fram genom att ta $\phi(1) = 1$ vilket medför att vi har $S_{n=1} = 1 + \phi(1) = 2$ och vi är klara med basfallet. Låt oss nu anta att $S_{n-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \phi(i)$. $\mathbb{F}_n$ består av alla reducerade bråk som finns i $\mathbb{F}_{n-1}$ samt alla reducerade bråk som ligger mellan noll och ett, sådana att de har en täljare som är relativt primt till nämnaren n, vilka är $\phi(n)$ till antalet. Om vi undersöker nu hur många bråk i $\mathbb{F}_n$ det finns får vi att

$$\#(\mathbb{F}_n) = \#(\mathbb{F}_{n-1}) + \phi(n) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \phi(i)\right) + \phi(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \phi(i) = S_n.$$

Därmed har vi bevisat första delen av satsen.
För den andra delen av satsen, låt oss se på alla bråk i Fareyföljden som inte är lika med $\frac{1}{2}$. Om vi bortser från $\frac{1}{2}$ så bildar alla bråk i Fareyföljden Fareypar vilka har summan ett per definition. Summan av alla bråk som inte är lika med $\frac{1}{2}$ är lika med antalet Fareypar, vilket i sin tur är lika med hälften av alla bråk i följden som inte är lika med $\frac{1}{2}$. Om det finns ett bråk vi inte har tagit med så kan det bara anta värdet $\frac{1}{2}$ som vi har uteslutit, det vill säga den totala summan av alla tal i en Fareyföljd är lika med hälften av Fareyparen plus $\frac{1}{2}$ vilket är samma sak som att säga

$$\frac{S_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sum_{j=1}^{n} \phi(j)}{2} \tag{4.22}$$

$\square$

Sats 4.23. *Låt $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ gå igenom alla par av närliggande bråk i Fareyföjden av ordningen $n > 1$. Då ges det minsta och största avståndet mellan två bråk i Fareyföljden av dessa relationer*

$$min\left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{n(n-1)} \quad och \quad max\left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{n}.$$

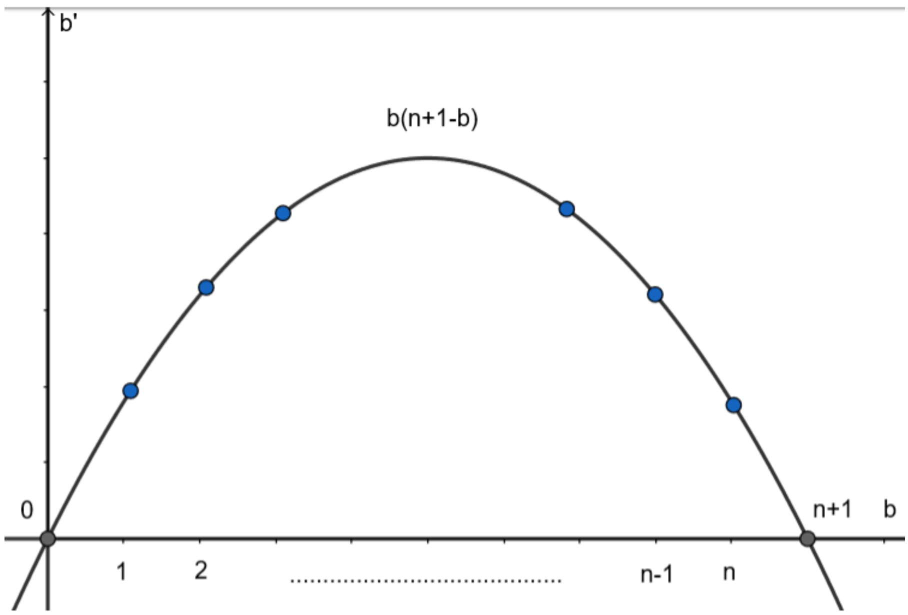
Bevis. Då vi har närliggande bråk som vi går igenom så vet vi att de uppfyller $a'b - ab' = 1$ och avståndet mellan två närliggande bråk är

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{a'b - ab'}{bb'} = \frac{1}{bb'}.$$

Vi vet sedan tidigare att $b, b' \leq n$ för att de ska tillhöra ordningen n.

Dessutom enligt hur nya rader konstrueras i Fareyföljden så vet vi att i rad $n > 1$ så kommer det finnas bråk med nämnare $n - 1$

Den största produkt av bb' som vi kan konstruera är då att en av b eller b' är lika med n, och den andra är lika med föregående ordning, $n - 1$, då vi har givet att $n > 1$ vilket ger oss produkten $n(n - 1)$ vilket medför att vi kan konstruera det minsta möjliga bråket $\frac{1}{n(n-1)}$.



Figur 2: Graf

På samma sätt som hur vi tog fram den minsta möjliga avståndet så utgår vi från $\frac{1}{bb'}$ för att finna största möjliga avstånd mellan två bråk. Vi vet sedan tidigare om $\frac{a}{b}$ och $\frac{a'}{b'}$ är närliggande bråk i $\mathbb{F}_n$ så är $b + b' > n$ (om $b + b' \leq n$ så skulle deras mediant tillhöra $\mathbb{F}_n$ och ligga mellan dem). Vi söker nu det minsta värdet av $h(b, b') = bb'$ kan anta sådan att $b + b' \geq n + 1$. Vi undersöker för när $1 \leq b, b' \leq n$ och sätter $b' \geq n + 1 - b$ och får då att $h(b, b(n + 1 - b)) = b \cdot (n + 1 - b)$. Om $b = 1$ så har vi

$$h(1, n) = n$$

och om $b = n$ har vi

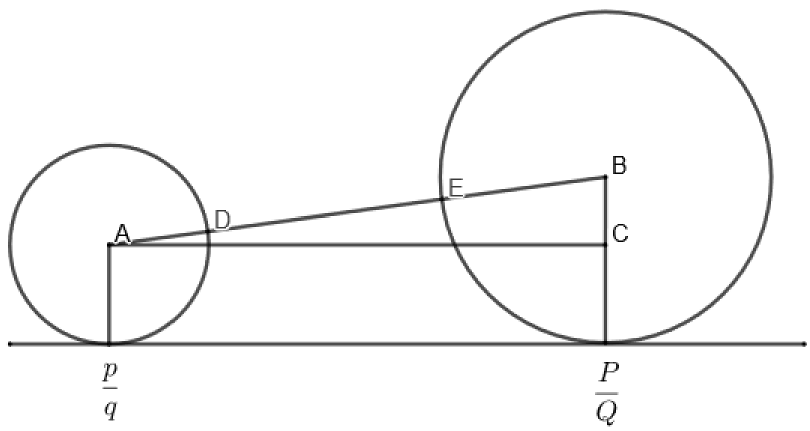
$$h(n, 1) = n.$$

Undersöker vi figur 2 så ser vi att b inte kan anta ett lägre värde än 1 och kan inte anta ett större värde än n då vi har att både b och b' är nämnare vilket gör att de inte kan anta ett värde som medför att någon av dessa blir 0. Vi kan enkelt nu se att $b, b' = 1, n$ vilket ger oss att bråket $\frac{1}{n}$ är det största möjliga avståndet mellan två bråk som vi kan bilda i $\mathbb{F}_n$. $\square$

5 Fordcirklar

I detta avsnitt introducerar vi Fordcirklar; de satser och bevis som vi kommer att använda oss av bygger i stort på L.R.Fords artikel [3] gällande hur man kan geometriskt representera bråktal och några egenskaper hos dessa geometriska representationer. I denna framställning kommer vi att begränsa oss till de reella fallen, de som är intresserade hur Ford behandlar de komplexa fallen så rekommenderas det att studera Fords artikel.

Bråket, $x_1 = \frac{p}{q}$, där $p, q \in \mathbb{Z}$ och $q \neq 0$ samt $SGD(p, q) = 1$, kan vi representera som en cirkel i xy-planet. Konstruktionen av denna cirkel genomför vi genom att sätta cirkelns radie till $\frac{1}{2q^2}$, låt cirkeln tangera x-axeln i punkten $(x_1, 0)$ och cirkelns mittpunkt ligger i $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$, vilket innebär att cirkeln ligger i det övre halvplanet. Cirkeln kallas för Fordcirkel till bråket $\frac{p}{q}$. Låt oss konstruera ytterligare en Fordcirkel på samma sätt $x_2 = \frac{P}{Q}$ där $P, Q \in \mathbb{Z}$ och $SGD(P, Q) = 1$ och har mittpunkten $\left(\frac{P}{Q}, \frac{1}{2Q^2}\right)$ och tangerar x-axeln i punkten $(x_2, 0)$.
Låt $\frac{p}{q}$ och $\frac{P}{Q}$, vara två olika bråk. Låt oss nu undersöka avståndet mellan Fordcirklarnas mittpunkter. Det vi vill undersöka är om Fordcirklarna ligger skilda från varandra, tangerar varandra i en punkt eller om de skär varandra. Låt oss bilda



Figur 3: Fordcirklarna $\frac{p}{q}$ och $\frac{P}{Q}$.

en rätvinklig triangel enligt figur 3.
Om vi använder Pythagoras sats kan vi undersöka de tre fallen. Vi ser att det horisontella avståndet AC i figuren är $\left|\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}\right|$ medan det vertikala avståndet BC,

som är skillnaden mellan Fordcirklarnas radie, fås genom $\left|\frac{1}{2Q^2} - \frac{1}{2q^2}\right|$. Hypotenusan AB ges av Pythagoras sats,

$$AB^2 = \left(\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{2Q^2} - \frac{1}{2q^2}\right)^2.$$

Vi utvecklar högerledet

$$HL = \frac{P^2q^2 - 2PpQq + p^2Q^2}{Q^2q^2} + \frac{q^4 - 2q^2Q^2 + Q^4}{4Q^4q^4}.$$

Om vi lägger till $+\frac{1}{Q^2q^2} - \frac{1}{Q^2q^2}$ i högerledet så kan vi nu skriva det som

$$\begin{aligned}
HL = \frac{P^2q^2 - 2PpQq + p^2Q^2 - 1}{Q^2q^2} + \frac{q^4 - 2q^2Q^2 + Q^4 + 4Q^2q^2}{4Q^4q^4} &= \\
\frac{(Pq - pQ)^2 - 1}{Q^2q^2} + \frac{(Q^2 + q^2)^2}{4Q^4q^4} &= \\
\frac{(Pq - pQ)^2 - 1}{Q^2q^2} + \left(\frac{1}{2Q^2} + \frac{1}{2q^2}\right)^2 &= \\
\frac{(Pq - pQ)^2 - 1}{Q^2q^2} + (AD + BE)^2.
\end{aligned}$$

Vi ser nu att om $|Pq - pQ| > 1$, så är avståndet AB större än de sammanlagda längden AD och BE, vilket innebär att Fordcirklarna är helt skilda från varandra. Skulle $|Pq - pQ| = 1$ så får vi att avståndet AB är lika med det sammanlagda avståndet AD och BE vilket i sin tur innebär att Fordcirklarna måste tangera varandra. Det sista fallet då $|Pq - pQ| < 1$ kan bara inträffa när $Pq - pQ = 0$ eftersom vi har sedan innan sagt att talen $p, q, P, Q \in \mathbb{Z}$. Det innebär att det enda fallet då $Pq - pQ = 0$ är då $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ vilket medför att de Fordcirklar vi har valt är inte olika utan samma Fordcirkel har valts två gånger.
Det vi har kommit fram till är Fords första sats gällande Fordcirklar:

Sats 5.1. *Fordcirklar till de två reducerade bråken $\frac{p}{q}$ och $\frac{P}{Q}$ är antingen tangerande eller helt skilda från varandra.*

Definition 5.1. Intilliggande bråk
Två bråk, $\frac{p}{q}$ och $\frac{P}{Q}$, som står i sin reducerad form och uppfyller $|Pq - pQ| = 1$ kallas intilliggande bråk.

Observera att två bråk som är intilliggande om och endast om deras Fordcirklar är tangerande.

Sats 5.2. *Varje bråk $\frac{p}{q}$ har minst ett intilliggande bråk.*

Bevis. Att det finns ett heltal P och Q som uppfyller ekvationen $|Pq - pQ| = 1$ (eller om $\frac{p}{q} < \frac{P}{Q}$ då kan vi finna ett P och Q sådan att det uppfyller ekvationen $Pq - pQ = 1$) är en grundsten i talteori. Låt oss ändå bevisa satsen med induktion. Om $q = 1$ så ser vi med lätthet att till bråket $\frac{p}{1}$ så har vi det intilliggande bråket $\frac{p+1}{1}$ vilket uppfyller ekvationen $|Pq - pQ| = 1$. För att bevisa att satsen gäller generellt så antar vi att alla bråken vars nämnare är mindre än q har ett intilliggande bråk och bevisar för bråket $\frac{p}{q}$. Låt n vara det största positiva heltal som är mindre än $\frac{p}{q}$ då kan vi skriva med heltalet m

$$\frac{p}{q} = n + \frac{m}{q} = \frac{nq + m}{q}, \qquad 0 < m < q.$$

Då $m < q$ då har $\frac{q}{m}$ ett intilliggande bråk $\frac{r}{s}$ så att $|sq - rm| = 1$. Då är bråket

$$\frac{P}{Q} = n + \frac{s}{r} = \frac{nr + s}{r}$$

intilliggande till $\frac{p}{q}$ för

$$|Pq - pQ| = |(nr + s)q - (nq + m)r| = |sq - rm| = 1.$$

Vilket vi ville visa. $\square$

Observera att skillnaden mellan närliggande bråk och intilliggande bråk är hur vi använder dessa i detta arbete. När vi diskuterar närliggande bråk så undersöker vi om två bråk i en Fareyföljd av en specifik ordning ligger brevid varandra. När vi diskuterar intilliggande bråk då finns ingen Fareyföljd som begränsar vilka bråk vi har, så länge bråken uppfyller ekvationen $|Pq - pQ| = 1$ så är de intilliggande. Vi ska nu visa hur vi kan bilda nya Fordcirklar av två befintliga Fordcirklar.

Sats 5.3. *Givet två Fordcirklar som tangerar varandra och dessutom tangerar x-axeln i $\frac{p}{q}$ respektive $\frac{P}{Q}$ då finns det precis en tredje Fordcirkel som ligger emellan dessa två och tangerar x-axeln i punkten $\frac{p+P}{q+Q}$ samtidigt som den tangerar dessa två Fordcirklar.*

Bevis. Det vi vill visa är att $\frac{p+P}{q+Q}$ är intilliggande till $\frac{p}{q}$ och $\frac{P}{Q}$ samt att bråket $\frac{x}{y}$ som är intilliggande till både $\frac{p}{q}$ och $\frac{P}{Q}$ måste vara $\frac{p+P}{q+Q}$.

Vi konstanterar först att $\frac{p+P}{q+Q}$ är intilliggande då det uppfyller villkoret för att vara intilliggande bråk:

$$|p(q + Q) - q(p + P)| = |pQ - Pq| = 1$$

respektive

$$|P(q+Q) - Q(p+P)| = |pQ - Pq| = 1.$$

Låt oss anta att det existerar en Fordcirkel som tangerar punkten $\frac{x}{y}$ på x-axeln och tangerar de omnämnda Fordcirklarna.

För enkelhetens skull låt $\frac{p}{q} < \frac{P}{Q}$ då ligger den tredje Fordcirkeln mellan de två då $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{P}{Q}$ det vill säga $py < xq$ och $xQ < Py$. Vi betraktar två Fordcirklar åt gången (en av de ovannämnda Fordcirklarna och den nya Fordcirkeln) och använder oss av egenskapen hos intilligande bråk. Vi får då fram att

$$\begin{aligned} |xq - py| &= 1 \\ xq - py &= 1, \qquad ty \qquad py < xq \\ |Py - xQ| &= 1 \\ Py - xQ &= 1, \qquad ty \qquad xQ < Py. \end{aligned}$$

Vi kan nu se att $xq - py = Py - xQ$ och om vi ordnar om så att vi bryter ut $\frac{x}{y}$ så får vi $\frac{x}{y} = \frac{p+P}{q+Q}$. Med detta så har vi fått fram Fordcirkeln som ligger mellan $\frac{p}{q}$ och $\frac{P}{Q}$. □

Sats 5.4. *Om $\frac{P}{Q}$ är ett intilliggande bråk till $\frac{p}{q}$ då får vi alla intilliggande bråk till $\frac{p}{q}$ med*

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P+np}{Q+nq} \tag{5.5}$$

där n antar alla heltalsvärden.

Bevis. Det vi vill visa är två saker, vi börjar med att visa att $\frac{P+np}{Q+nq}$ är verkligen intilliggande till $\frac{p}{q}$. Vi kan se med lätthet att bråken som är givna är intilliggande bråk till $\frac{p}{q}$ enligt definition, då

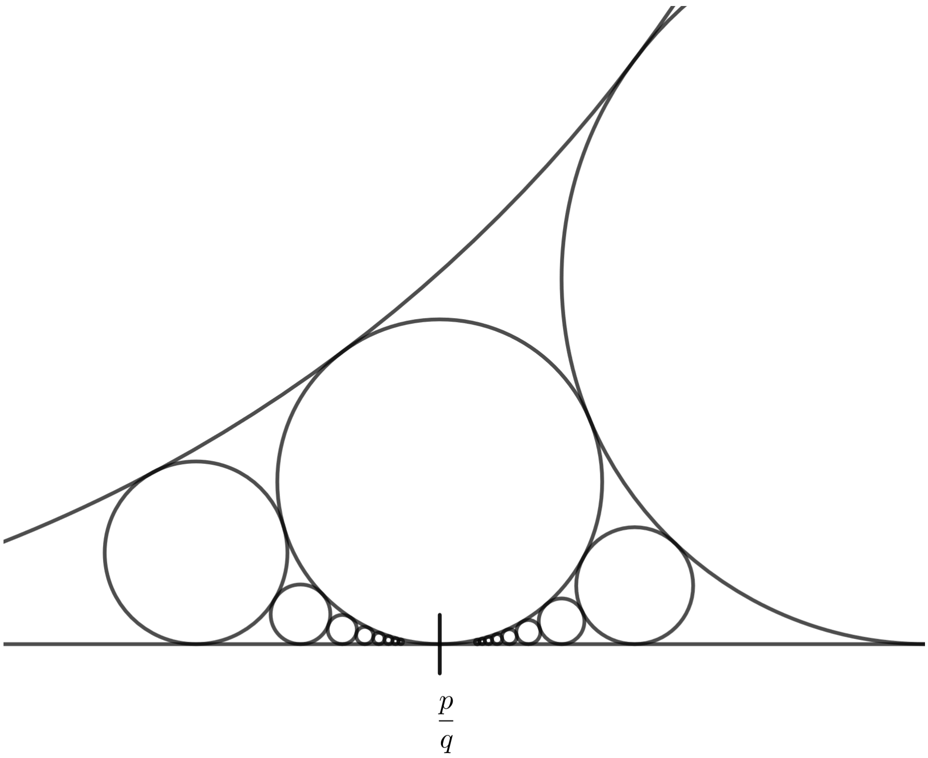
$$|(P+np)q - p(Q+nq)| = |Pq - pQ| = 1.$$

Det vi vill nu visa är att om $\frac{A}{B}$ är intilliggande till både $\frac{p}{q}$ och $\frac{P}{Q}$ så är $\frac{A}{B}$ av formen (5.5), det vill säga det finns ett tal N sådant att

$$\frac{A}{B} = \frac{P+Np}{Q+Nq}. \tag{5.6}$$

Vi sätter $N := \frac{PB-AQ}{Aq-pB}$ och visar att det duger. Då $\frac{p}{q}$ är intilliggande till $\frac{A}{B}$ då vet vi att N är ett heltal, det är för att $|Aq - pB| = 1$. Nu när vi har N så räknar vi ut vad $\frac{P+Np}{Q+Nq}$ blir.

$$\frac{P+Np}{Q+Nq} = \frac{P + \frac{PB-AQ}{Aq-pB}\cdot p}{Q + \frac{PB-AQ}{Aq-pB}\cdot q} = \frac{P(Aq-Bp) + p(PB-AQ)}{Q(Aq-Bp) + q(PB-AQ)} = \frac{A}{B}\cdot\frac{Pq-pQ}{Pq-pQ} = \frac{A}{B}.$$



Figur 4: Tangerande Fordcirklar vars bråk är intilliggande till $\frac{p}{q}$

Det vill säga bråket $\frac{P+np}{Q+nq}$ är ett intilliggande bråk och tar vi ett valfritt intilliggande bråk till $\frac{p}{q}$ och $\frac{P}{Q}$ till exempel $\frac{A}{B}$ så kommer det vara på formen $\frac{P+np}{Q+nq}$. □

Alternativt så kan vi göra beviset geometriskt; observera figur 4 så ser vi att det blir omöjligt att skapa ytterligare Fordcirklar som både ligger i det övre halvplanet, tangerar x-axeln, tangerar Fordcirkeln $\frac{p}{q}$ och samtidigt inte skär andra Fordcirklar i denna omgivning. Med detta har vi nu visat att det finns inga andra möjliga intilliggande bråk samt visat hur vi får fram alla de intilliggande bråken till $\frac{p}{q}$.

Sats 5.7. *Av de intilliggande bråk till $\frac{p}{q}$ (där $q > 1$) så har exakt två av dessa nämnare som är numeriskt mindre än q.*

Bevis. Då $\frac{p}{q}$ har en nämnare $q > 1$ då ser vi med lätthet utifrån figur 4 att det finns exakt två Fordcirklar som är större samt intilliggande till denna Fordcirkel. □

Det intressanta är om vi inte skulle begränsa vårt q till att vara större än ett så kan vi hitta ytterligare ett till bråk $\frac{1}{0}$, vilket i sig är odefinerat men uppfyller de egenskaper som krävs för att vara ett intilliggande bråk. Det uppfyller kravet för att vara intilliggande med de bråk som är $\frac{p}{1}$ där $p \in \mathbb{Z}$ då vi får $|1 \cdot 1 - p \cdot 0| = 1$. Detta bråk definerar Ford som den räta linjen $y = 1$ som är tangerande till alla Fordcirklar som representeras av $\frac{p}{1} = p$.

5.1 Tillämpning

Vi avslutar denna uppsats med att se på en tillämpning av Fordcirklar, nämlingen hur Fordcirklar kan användas för att avbilda kedjebråk geometriskt.
Vi vet sedan tidigare hur vi bildar kedjebråk av ett bråk och hur vi kan skriva kedjebråket utifrån enbart använda sig av de partiella kvoterna till $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$.

Med de partiella kvoterna $a_0, a_1, \ldots, a_n$ så bildar vi bråken

$$\begin{aligned}
k_0 &= \frac{a_0}{1} = [a_0;] \\
k_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1] \\
k_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = [a_0; a_1, a_2] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

genom att successivt kapa de partiella kvoterna efter första, andra, tredje, ... partiella kvoten. Dessa bråk kallar vi för första, andra, tredje, ... *konvergenten* (*convergent* på engelska) till kedjebråket $\frac{p}{q}$. Vi kommer att se att varje konvergent ger oss en bättre och bättre uppskattning av kedjebråket till $\frac{p}{q}$ där den n:te konvergenten ger oss $k_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ vilket är lika med kedjebråket till bråket $\frac{p}{q}$. Vi kommer också att se att varannan konvergent kommer att vara mindre än $\frac{p}{q}$ och varannan kommer vara större än $\frac{p}{q}$ men med varje steg som vi tar så kommer konvergenterna närma sig $\frac{p}{q}$, därav namnet konvergent.

Sats 5.8. *Nämnaren p_i och täljaren q_i hos konvergenten k_i av kedjebråket $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ satisfierar ekvationerna*

$$\begin{aligned}
p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\
q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2}
\end{aligned}$$

där $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ med initialvärdena

$$p_{-1} = 1, \quad p_{-2} = 0, \quad q_{-1} = 0, \quad q_{-2} = 1.$$

Bevis. Vi börjar med att ta fram basfallet k_0, vilket vi får fram genom att sätta in initialvärdena i p_i och q_i. Detta ger oss

$$p_0 = a_0 \cdot 1 + 0 = a_0 \tag{5.9}$$

$$q_0 = a_0 \cdot 0 + 1 = 1 \tag{5.10}$$

$$k_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = [a_0;]. \tag{5.11}$$

Vi tar fram på samma sätt k_1 och vi får då att

$$p_1 = a_1 \cdot a_0 + 1 \tag{5.12}$$

$$q_1 = a_1 \cdot 1 + 0 \tag{5.13}$$

$$k_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 \cdot a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1] = \frac{a_1 \cdot p_0 + p_{-1}}{a_1 \cdot q_0 + q_{-1}}. \tag{5.14}$$

Om vi nu tänker induktivt och sätter in $i = 2$ i p_i och q_i. Då får vi

$$k_2 = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0}. \tag{5.15}$$

Låt oss anta att satsen är sann för värdena $0, 1, 2, \ldots$ till och med ett värde x, där x är ett positivt heltal sådan att vi får

$$k_j = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_j] = \frac{p_j}{q_j} = \frac{a_j \cdot p_{j-1} + p_{j-2}}{a_j \cdot q_{j-1} + q_{j-2}} \tag{5.16}$$

där $j = 0, 1, 2, \ldots, x-1, x$. Vi vill nu visa att satsen är sann även för $x+1$ och för att göra det bildar vi

$$k_{x+1} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_x, a_{x+1}] = \frac{a_{x+1} \cdot p_x + p_{x-1}}{a_{x+1} \cdot q_x + q_{x-1}} = \frac{p_{x+1}}{q_{x+1}}. \tag{5.17}$$

Observera att ekvationerna (5.16) och (5.17) skiljer sig bara på att k_j har a_j medan k_{x+1} har $\left(a_x + \frac{1}{a_{x+1}}\right)$ som sista partiella kvot. Detta medför att vi skulle kunna räkna ut vad k_{x+1} är från ekvationen (5.16) där vi ersätter j med x och får

$$k_x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{x-1}, a_x] = \frac{p_x}{q_x} = \frac{a_x \cdot p_{x-1} + p_{x-2}}{a_x \cdot q_{x-1} + q_{x-2}}. \tag{5.18}$$

Vi uppmärksammar att talen p_{x-1} och q_{x-1} bara beror på a_{x-1} och talen p_{x-2} och q_{x-2} bara beror på föregående a, p och q. Det vill säga är att talen $p_{x-1}, q_{x-1}, p_{x-2}, q_{x-2}$ beror bara på de $x-1$ första partiella kvoterna $a_0, a_1, \ldots, a_{x-1}$ och är därmed oberoende av a_x. Detta innebär att värdena inte kommer att förändras av att vi ersätter a_x med $\left(a_x + \frac{1}{a_{x+1}}\right)$.

Vi kan nu äntligen beräkna k_{x+1}. I ekvationen (5.18) så ersätter vi a_x med $\left(a_x + \frac{1}{a_{x+1}}\right)$ och får

$$k_{x+1} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{x-1}, \left(a_x + \frac{1}{a_{x+1}}\right)] \tag{5.19}$$

enligt antagandet så är det lika med

$$\frac{\left(a_x + \frac{1}{a_{x+1}}\right) \cdot p_{x-1} + p_{x-2}}{\left(a_x + \frac{1}{a_{x+1}}\right) \cdot q_{x-1} + q_{x-2}}. \tag{5.20}$$

Låt oss nu multiplicera nämnaren och täljaren med a_{x+1}. Vi får då

$$k_{x+1} = \frac{(a_x a_{x+1} + 1)p_{x-1} + a_{x+1}p_{x-2}}{(a_x a_{x+1} + 1)q_{x-1} + a_{x+1}q_{x-2}} \tag{5.21}$$

vi ordnar om i termerna och får då

$$k_{x+1} = \frac{a_{x+1}(a_x p_{x-1} + p_{x-2}) + p_{x-1}}{a_{x+1}(a_x q_{x-1} + q_{x-2}) + q_{x-1}}. \tag{5.22}$$

Värdet i paranteserna i (5.22) är lika med

$$a_x p_{x-1} + p_{x-2} = p_x, \tag{5.23}$$

$$a_x q_{x-1} + q_{x-2} = q_x. \tag{5.24}$$

Vi kan med detta byta ut värdena i paratesen hos ekvationen (5.22) och får då att

$$k_{x+1} = \frac{a_{x+1}p_x + p_{x-1}}{a_{x+1}q_x + q_{x-1}} = \frac{p_{x+1}}{q_{x+1}}, \tag{5.25}$$

vilket vi ville visa. □

Sats 5.26. *Om $p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2}$ och $q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}$ är samma som från föregående sats då är*

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^{i+1}, \qquad \textit{där} \quad i \geq 0. \tag{5.27}$$

Bevis. Vi kontrollerar först basfallen $i = 0, 1$. Dessa ger oss:

$$p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = a_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 = (-1)^{0+1},$$

respektive:

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_1 p_0 + p_{-1}) \cdot 1 - a_0 \cdot (a_1 q_0 + q_{-1}) = (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_0(a_1 \cdot 1 + 0) = 1 = (-1)^{1+1}.$$

Vi vill nu visa att om satsen är sann för $i = x$ så är den sann också för nästa heltal $i = x + 1$. Från definitionen vet vi att för $i = x + 1$ så har vi

$$p_{x+1} = a_{x+1} p_x + p_{x-1}, \tag{5.28}$$

$$q_{x+1} = a_{x+1}q_x + q_{x-1}, \tag{5.29}$$

vilket gör att vi kan skriva

$$p_{x+1}q_x - p_x q_{x+1} = (a_{x+1}p_x + p_{x-1}) \cdot q_x - p_x \cdot (a_{x+1}p_x + p_{x-1}) = (-1)(p_x q_{x-1} - p_{x-1}q_x).$$

Vi antar att satsen håller för $i = x$ Det gör att vi kan då skriva

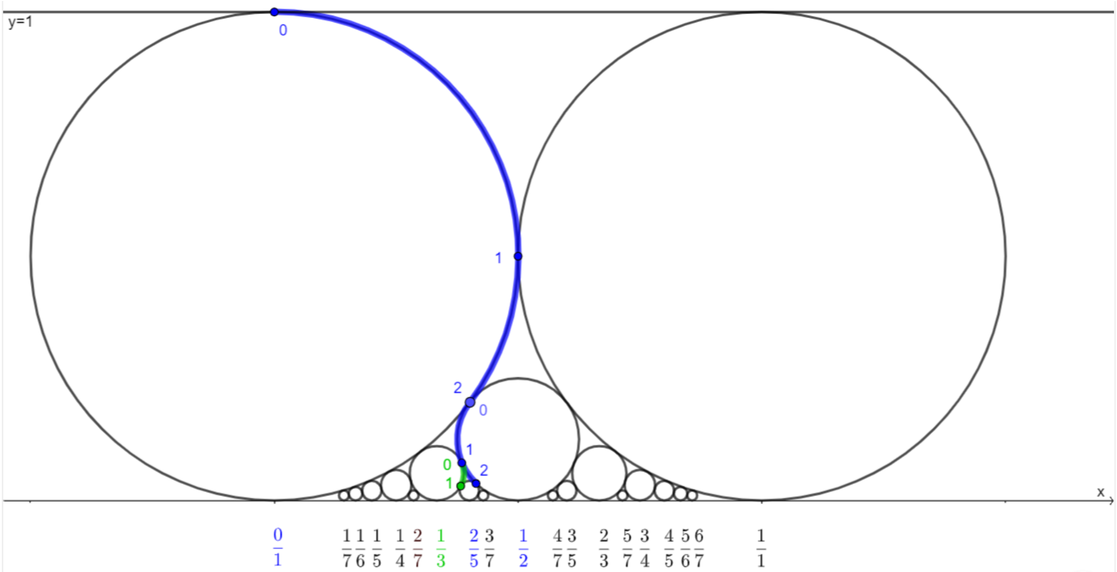
$$p_x q_{x-1} - p_{x-1}q_x = (-1)^{x+1} \tag{5.30}$$

vilket gör att vi dra följande slutsats

$$p_{x+1}q_x - p_x q_{x+1} = (-1)^{x+1+1}. \tag{5.31}$$

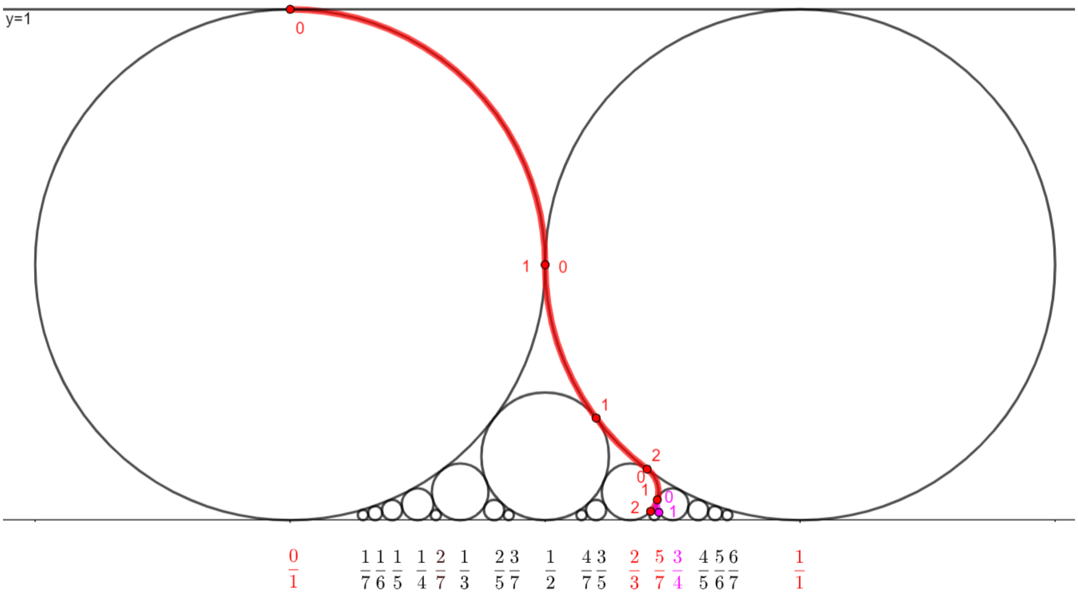
□

Det vi har nu visat med denna sats är att de successiva konvergenterna är intilliggande bråk, vilket vi kommer använda oss av nu för att visa hur med Fordcirklar vi kan visualisera ett kedjebråk.



Figur 5: Exempel [0;2,2]

Om vi har ett kedjebråk så kan vi ta fram kedjebråkets partiella kvoter och konvergenter, vilket vi kan visualisera som Fordcirklar.
Den första Fordcirkeln vi får är $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$, denna Fordcirkel tangerar $y = 1$ och x-axeln. Tangeringspunkten med $y = 1$ kallar vi för 0. Vandrar vi längst denna Fordcirkels periferi till höger så kommer den första Fordcirkel vi tangerar få tangeringspunkten 1, nästa Fordcirkel som tangeras får tangeringspunkten 2 o.s.v..
Vid fallet då vi ser på två tangerande Fordcirklar så är deras tangeringspunkt med varandra nollpunkten. Utifrån nollpunkten från en av Fordcirklarna så vandrar vi på den Fordcirkelns periferi i nedåtgående riktning, då vi vandrar på periferin kommer vi att tangera Fordcirklar och varje tangeringspunkt vi passerar numreras 1,2,3 o.s.v..
En intressant egenskap hos alla dessa tangeringspunkter är att varje tangeringspunkt som vi passerar sammanfaller med de partiella kvoterna i kedjebråket. Detta innebär om vi har alla Fordcirklar mellan 0 och 1 då behöver vi bara de partiella kvoterna som tillhör kedjebråket $\frac{p}{q}$ för att hitta alla Fordcirklar som är konvergenter till $\frac{p}{q}$. Dessa Fordcirklar bildar en kedja som är unik till kedjebråket $\frac{p}{q}$(vilket vi har sett tidigare när vi undersökte unikhet till kedjebråk).
I figur 5 och 6 så kan vi se på exempel av två kedjebråk, det ena är $[0; 2, 2]$ som representeras av en blå färg (och den gröna+blå färgen representerar kedjebråket $[0; 2, 1, 1]$ och det andra är $[0; 1, 2, 2]$ som representeras av en röd färg (och den rosa+röda färgen representerar kedjebråket $[0; 1, 2, 1, 1]$) där vi kan se utifrån den färgade sträckan hur vi har vandrat på Fordcirklarnas periferi.
För att konkretisera processen i hur vi tar fram Fordcirklarna som visualiserar



Figur 6: Exempel [0;1,2,2]

kedjebråket så utför vi dessa steg:

1. Vi börjar med att hitta Fordcirkeln som är lika med konvergenten $\frac{p_0}{q_0} = a_0$ som också tangerar linjen $y = 1$.

2. Från tangeringspunkten av Fordcirkeln $\frac{p_0}{q_0}$ och linjen $y = 1$ vandra på Fordcirkelns periferi i höger nedåtgående riktning tills vi tangerar Fordcirkeln $\frac{p_1}{q_1}$. Denna Fordcirkel ligger a_1 tangeringspunkter till höger om Fordcirkeln $\frac{p_0}{q_0}$ med utgångspunkt från tangeringspunkten med Fordcirkeln $\frac{p_0}{q_0}$ och linjen $y = 1$. $\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_0}{q_0}$.

3. Vi utgår nu från tangeringspunkten mellan Fordcirklarna $\frac{p_0}{q_0}$ och $\frac{p_1}{q_1}$, men vi vandrar nu på periferin på Fordcirkeln $\frac{p_1}{q_1}$ i vänster nedåtgående riktning från tangeringspunkten tills vi tangerar Fordcirkeln $\frac{p_2}{q_2}$ som ligger a_2 tangeringspunkter till vänster om tangeringspunkten mellan Fordcirklarna. $\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_1}{q_1}$.

4. Vi upprepar ovanstående steg tills vi når den partiella kvoten a_n vilket kommer ge oss konvergenten för $\frac{p_n}{q_n}$ som är lika med kedjebråket och avslutar vår kedja av Fordcirklar.

Visa intressanta egenskaper uppstår:

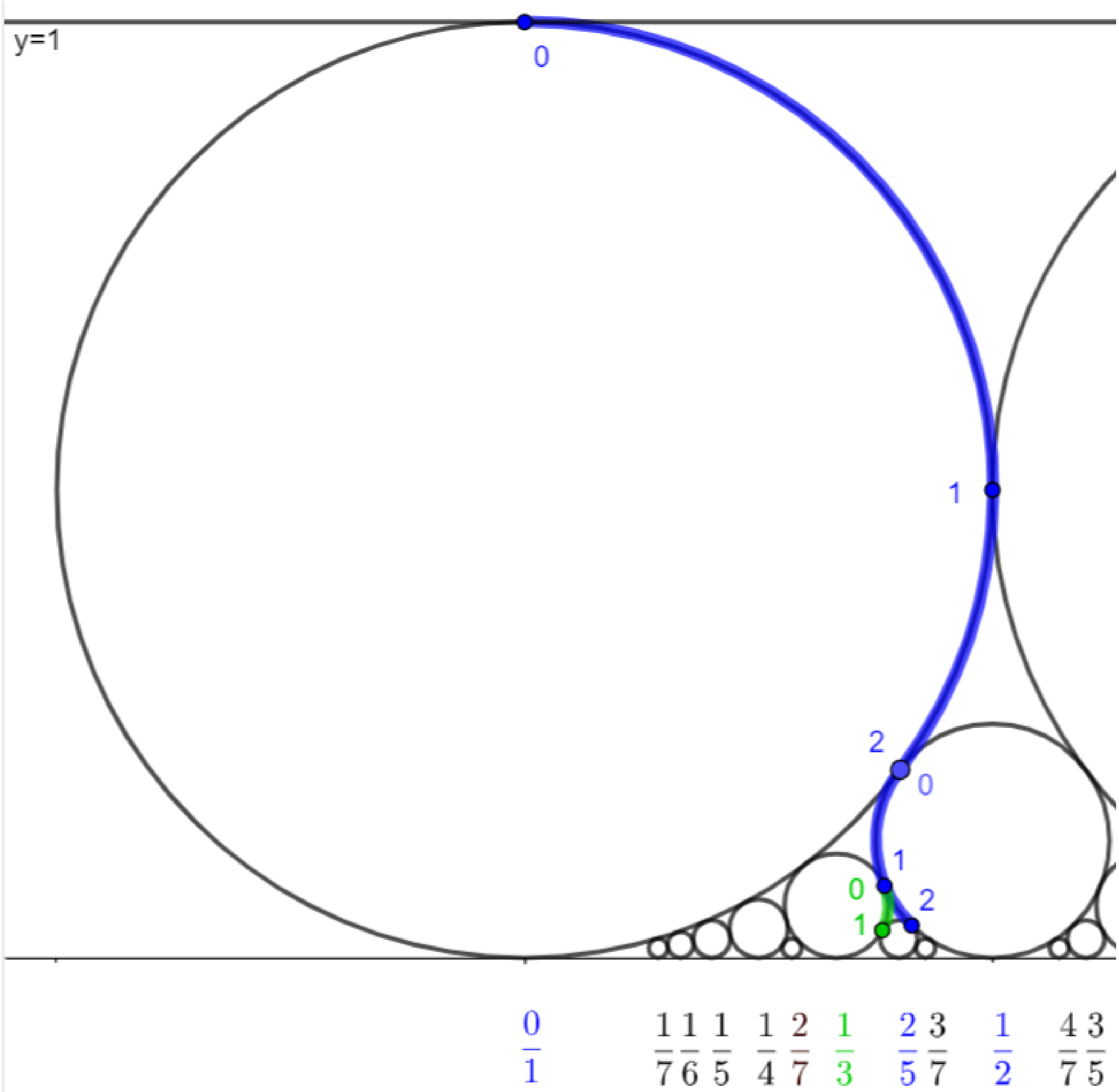
1. För varje konvergent vi tar fram så närmar vi oss kedjebråkets värde.

2. De udda konvergenterna växer mot kedjebråket medan de jämna konvergenterna avtar mot kedjebråket.

3. Att kedjebråket ligger mellan de udda och de jämna konvergenterna.

4. Att efterföljande nämnare är numeriskt större än förgående nämnare, $q_{n+1} > q_n$.

Som tidigare gällande kedjebråk där $a_n > 1$ så kan vi få en till Fordcirkel genom omskrivningen av $a_n = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$ vilket gör att vi kan få ytterligare en konvergent men inte mer.



Figur 7: Exempel [0;2,2]

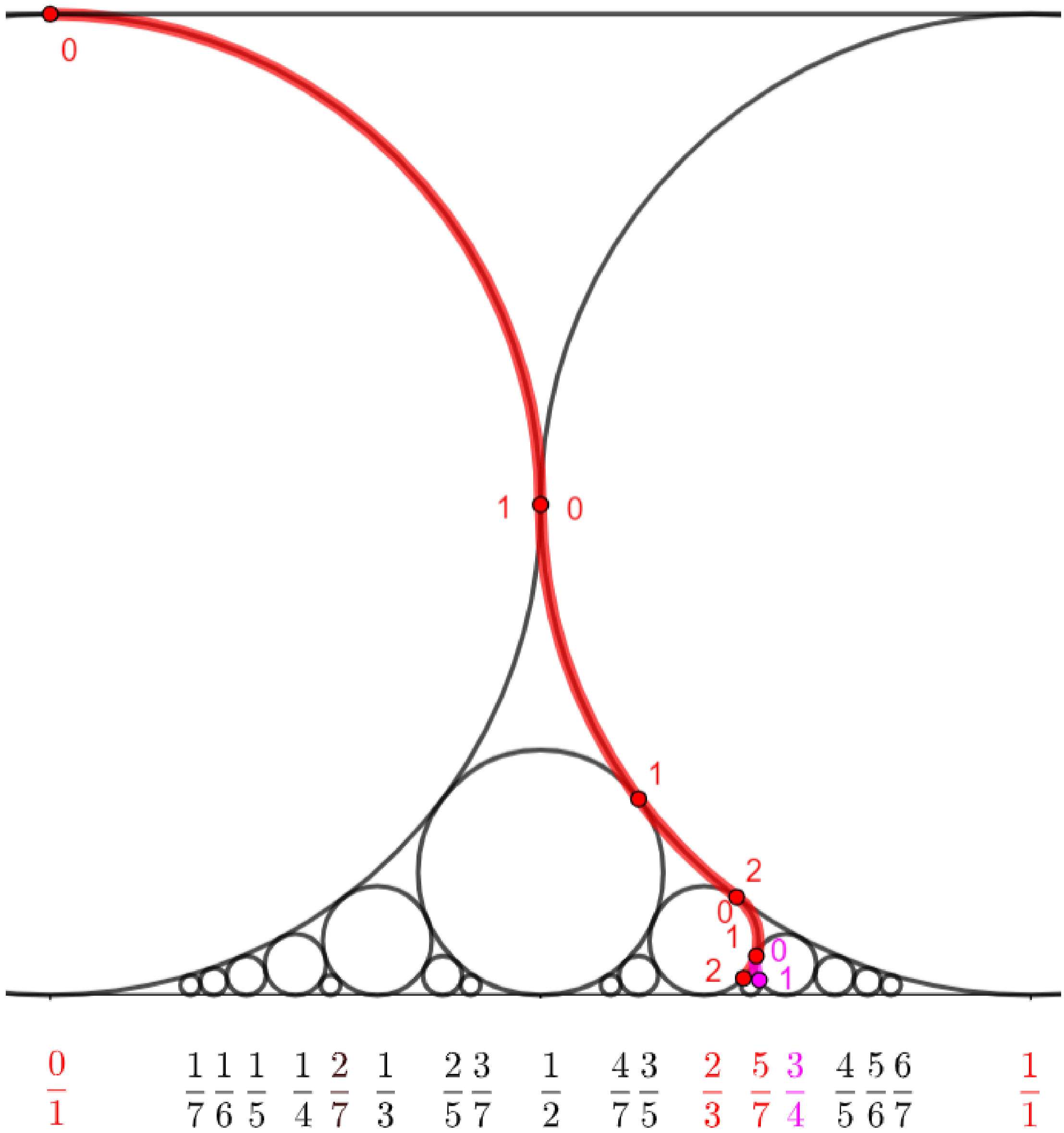
6 Referenser

Referenser

[1] *Continued fractions*, Olds, C.D, 1963, Washington: Random House, sidor 5-30.

[2] *An Introduction to the Theory of Numbers*,Niven, Ivan & Zuckerman, Herber S., 4 upplagan. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1980, sidor 170-173.

[3] *Fractions*, Ford, L R, 1938, Fractions. The American Mathematical Monthly. Vol. 45, No. 9, sidor 586-601.



Figur 8: Exempel [0;1,2,2]