SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

En introduktion till vågekvationen

av

Markus Hedegaard-Friis

2021 - No K11

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

En introduktion till vågekvationen

Markus Hedegaard-Friis

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Salvador Rodríguez López

2021

Sammanfattning

Målet med detta arbete är att ge läsaren en introduktion till den linjära vågekvationen, dess lösningar och egenskaper. Arbetet visar kända formler för entydiga lösningar till begynnelse- och randvärdesproblem avseende den linjära vågekvationen i en till tre dimensioner. Lösningsformlerna visar på centrala egenskaper som beroendeområde, påverkansområde och begränsad fortplantningshastighet. Avslutningsvis härleds vågekvationens tillämpning för en vibrerande sträng samt för spridning av ljus och ljud.

Tack

Ett stort tack till min handledare Salvador Rodriguez Lopez för vägledning, återkoppling och engagemang i tillkomsten av detta arbete.

Innehåll

1 Introduktion

1.1 Mål, motiv och resultat

Målsättning med detta arbete är att ge läsaren en introduktion till vågekvationen. Vi fokuserar på den linjära vågekvationen som i sin homogena form skrivs

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - c^2\Delta u = 0.$$

Arbetet har bedrivits genom studier av befintlig litteratur som läroböcker, artiklar och allmänt publicerade föreläsningsanteckningar.

I arbetet presenterar och bevisar vi, med utgångspunkt i den karaktäristiska metoden, entydiga lösningsformler för linjära vågekvationsproblem i en, två och tre dimensioner. Vi diskuterar centrala egenskaper som beroendeområde, påverkansområden och begränsad fortplantningshastighet. En energimetod presenteras och används i bevisföring av lösningarnas unikitet. Avslutningsvis härleds den linjära vågekvationen som modell för en vibrerande sträng, ljus och ljud.

Motiven till valet av ämne är att vågekvationen har viktiga och intressanta fysikaliska tillämpningar och att insikter om vågekvationen kan fungera som en ingång till djupare studier om partiella differentialekvationer.

Partiella differentialekvationer används ofta som modeller för vitt skilda fysikaliska fenomen som elektricitet, värmeledning, vågor, med mera. Studier av partiella differentialekvationer ett stort och vitt förgrenat fält där till skillnad mot de ordinära differentialekvationerna det saknas en generell teori för lösning, enligt [4, s.3]. För exempel på olika partiella differentialekvationer se [4, s.3].

1.2 Grundläggande begrepp

För att underlätta läsningen redovisas här ett antal definitioner som används återkommande i arbetet.

En *Partiell differentialekvation (PDE)* är en ekvation med en funktion u av flera variabler och dess partiella derivator [14, s.1]. Detta kan kontrasteras mot en *ordinär differentialekvation (ODE)* som är en ekvation med en funktion u av en variabel och dess derivator. En av variablerna i en PDE är ofta tiden t.

Partiella derivator skrivs i uppsatsen ofta med hjälp av index. Till exempel betecknas första ordningens partiella derivata för u med avseende på x som $u_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$ och andra ordningens partiella derivata för u med avseende på x betecknas $u_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$.

En PDE i n rumsliga dimensioner och en tidsdimension t med funktionen $u(\bar{x},t) = u(x_1,...,x_n,t)$ kallas i denna text för en PDE i $\mathbb{R}^n$ eller för en PDE i *n dimensioner.*

Med *ordningen* av en PDE menar vi den högst förekommande ordningen av partiella derivator i ekvationen. Ordingen av partiella derivator bestäms av antalet partiella derivationer. I uppsatsen behandlas PDE:r av ordning ett och två.

En PDE kan generellt skrivas på formen $L(u) = f$ där L är en *differentialoperator*, till exempel $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, och f är en funktion. För $f = 0$ kallas PDE:n för *homogen*.

En differentialoperator L kallas *linjär* om för godtyckliga u_1 och u_2 på funktionens definitionsområde och godtyckliga konstanter A och B gäller $L(Au_1 + Bu_2) = ALu_1 + BLu_3$, se [15].

Om L är en linjär operator och f inte beror av u så kallas PDE:n $L(u) = f$ för *linjär*, se [15]. Denna uppsats ägnas uteslutande åt linjära PDE:r.

Ett *begynnelsevillkor* definierar u eller en partiell derivata av u vid en given tidpunkt. Ett *randvillkor* definierar u i en given punkt på randen av definitionsområdet med avseende på $\bar{x}$. Givna begynnelsevillkor och randvillkor benämns även som *data* för en PDE.

En PDE som ska uppfylla givna begynnelsevillkor och eventuella randvillkor kallas för ett *problem*.

Låt funktionen u vara definierad i en öppen mängd i $\mathbb{R}^n$. Vi säger att funktionen u är av *klass* C^k om alla partiella derivator till och med ordning k existerar och är kontinuerliga i definitionsområdet för u [8, s. 86].

När vi i uppsatsen talar om en *lösning* till ett problem så menar vi att lösningen är åtminstone k gånger kontinuerligt deriverbar, det vill säga att u är av klass C^k.

1.3 Historik

Studierna av vågor och vågekvationen sträcker sig långt tillbaka i historien. Här följer en grov sammanfattning över några milstolpar och centrala personer med relation till innehållet i uppsatsen.

Brook Taylor (1685-1721) upptäckte vågekvationen endast med fysiska insikter, enligt [16]. D'Alembert (1717-1783) härledde ekvationen $u_{tt} = u_{xx}$ med generell lösning $F(x + t) + G(x - t)$ där F och G är två gånger differentierbara funktioner som fortplantas i motsatta riktningar, enligt [20]. Begynnelsevärdesproblem av Cauchytyp kan lösas med d'Alemberts formel. Leonhard Euler (1707-1783) argumenterade mot d'Alembert att även icke kontinuerliga funktioner (till exempel vars grafer har skarpa hörn) kunde accepteras som begynnelsedata, enligt [20] och [3]. Daniel Bernoulli (1700-1782) menade att en vibrerande sträng borde kunna beskrivas med trigonometriska serier, enligt

[20]. Alla tre hade delvis rätt. D'Alemberts generella lösning är fortfarande korrekt. Metoder för att beskriva Eulers begynnelsefunktioner, liksom Bernouillis antagande, kom senare att bekräftas med upptäckter av Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), se [20] och [3].

Senare under 1800-talet publicerades lösningsformler för två och tre dimensioner. Ett par personer som bidrog var Siméon Denis Poisson (1781-1840) och den tyske fysikern Gustav Kirchhoff (1824 – 1887).

2 Transportekvationen

Inspirerade av [14, s. 11–15] och [9] närmar vi oss vågekvationens lösningar via en första ordningens, och därmed något mer lättlöst, PDE som kallas transportekvationen. Transportekvationen löser vi med vad som kallas den *karaktäristiska metoden*.

2.1 Karaktäristiska metoden

Vi presenterar här grunderna för hur den karaktäristiska metoden fungerar för linjära PDE:er, men först några definitioner.

Definition 2.1 (Vektorfält)**.** *En funktion på formen* $\vec{V}(x, y, z) =$
$= (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$ *definierad i ett delområde av* $\mathbb{R}^3$ *och med värden i* $\mathbb{R}^3$ *med tre komponenter* a, b *och* c *som beror av tre variabler* x, y *och* z *kallas för ett vektorfält, se [8, s. 325].*

Ett vektorfält associerar en vektor med varje punkt (x, y, z) i ett delområde av rummet.

Definition 2.2 (Graf)**.** *För en funktion* $z = f(x, y)$ *från ett område* Ω *i* $\mathbb{R}^2$ *till* $\mathbb{R}$*, där* (x, y) *ligger i* Ω *definierar vi grafen av* f *som den tredimensionella punktmängden* $\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\}$*, se [8, s. 16].*

Grafen bildar en yta rummet, uppspänd ovanför Ω.

Definition 2.3 (Yta)**.** *En yta i rymden beskrivs av en funktion* $(s, t) \longmapsto (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ *från* $\mathbb{R}^2$ *till* $\mathbb{R}^3$*. För fixt* s_0 *utgör* $t \longmapsto (x(s_0, t), y(s_0, t), z(s_0, t))$ *en kurva i rummet som vi kallar parameterkurva. För fixt* t_0 *får vi motsvarande parameterkurva* $s \longmapsto (x(s, t_0), y(s, t_0, t), z(s, t_0, t))$*,se [8, s. 27].*

Vi kan tänka oss ytan konstruerad av dessa båda kurvor.

Definition 2.4 (Kurva)**.** *En funktion* $t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$ *från* $\mathbb{R}$ *till* $\mathbb{R}^3$ *kallas för en tredimensionell kurva. Variabeln* t *kallas parameter. Parametern definierar en genomloppsriktning (orientering) av kurvan. Olika funktioner kan ha samma värdemängd och orientering, vilket vi kallar för olika parameterframställningar av kurvan, se [8, s. 23].*

Antag en första ordningens PDE på formen

$$a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) = c(x,y), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Antag att $u(x,y)$ löser (1). Betrakta grafen $z = u(x,y)$ för u och definiera ytan Y parametersatt med x och y som $(x, y, u(x,y))$. Normalvektor till Y:s tangentplan är då $\vec{N_Y} = (u_x, u_y, -1)$. Ekvationen (1) innebär för en given punkt (x,y) att

$$(a(x,y), b(x,y), c(x,y)) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0$$

vilket betyder att Y:s tangentplan är parallell med vektorn $(a(x,y), b(x,y), c(x,y))$. Därmed gäller att en lösningsyta i varje punkt (x,y,z) tangerar ett vektorfält $\vec{V}(x,y) = (a(x,y), b(x,y), c(x,y))$.

Definition 2.5 (Integralyta)**.** *En yta i rummet som i varje punkt tangerar ett vektorfält kallas för integralyta till vektorfältet, se [14, s. 13].*

En integralyta associerad till (1) kan vi konstruera genom att bilda en union av karaktäristiska kurvor från alla punkter på en ickekaraktäristisk kurva.

Definition 2.6 (Karaktäristisk kurva och karaktäristiska ekvationerna)**.** *Kurvan χ parametriserad som $(x(s), y(s), z(s))$ kallas för karaktäristisk för PDE:n (1) associerad med vektorfältet $\vec{V}(x(s), y(s)) = (a(x(s), y(s)), b(x(s), y(s)), c(x(s), y(s)))$ om χ uppfyller de karaktäristiska ekvationerna*

$$\frac{dx}{ds} = a(x(s), y(s)), \quad \frac{dy}{ds} = b(x(s), y(s)), \quad \frac{dz}{ds} = c(x(s), y(s)).$$

Definition 2.7 (Ickekaraktäristisk kurva)**.** *Kurvan Γ parametriserad som $(x(r), y(r), z(r))$ kallas för ickekaraktäristisk för PDE:n (1) associerad med vektorfältet $\vec{V}(x(r), y(r)) = (a(x(r), y(r)), b(x(r), y(r)), c(x(r), y(r)))$ om Γ ingenstans tangerar vektorfältet $\vec{V}(x(r), y(r))$, [14, s. 14].*

Vi tolkar definitionen så att att vektorprodukten mellan tangentvektorn till en ickekaraktäristisk kurva Γ och en vektor i vektorfältet är skilt från noll i varje punkt.

Vi behöver en hjälpsats i form av Picard's existenssats. Bevis utelämnas. Den intresserade finner detta och mer insikter om satsen i [5].

Lemma 2.1 (Picard's existenssats)**.** *Betrakta ekvationen $y' = f(x,y)$ med villkoret $y(x_0) = y_0$. Antag att $f(x,y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ är kontinuerliga funktioner i någon öppen rektangel $R = \{(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$ som innehåller punkten (x_0, y_0). Då har begynnelsevärdesproblemet en unik lösning i något slutet intevall $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, där $h > 0$, se [5].*

Följande sats är hämtad och tolkad från [14, s. 14].

Sats 2.2. *Om $\Gamma = (x(r), y(r), z(r))$ är en kurva i $\mathbb{R}^3$ och Γ är icke-karaktäristisk till vektorfältet $\vec{V} = (a(x,y), b(x,y), c(x,y))$, där $a, b, c \in C^1$ så tillåter $\vec{V}$ en unik integralyta S som innehåller Γ.*

Bevis. Enligt antaganden ovan och förutsatt att Picards existenssats kan appliceras [21]) kan vi lösa systemet av karaktäristiska ekvationer

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x(s), y(s)) \\ \frac{dt}{ds} = b(x(s, y(s)) \\ \frac{dz}{ds} = c(x(s), y(s)) \end{cases}$$

villkorat av Γ

$$\begin{cases} x_0 = x(s_0) = x(r) \\ y_0 = y(s_0) = y(r) \\ z_0 = z(s_0) = z(r) \end{cases}$$

så att lösningarna för x, y, z är unika (åtminstone i en omgivning nära s_0, se [14, s. 14]). Vi har då för alla s och r lösningarna

$$\begin{cases} x(r, s) \\ y(r, s) \\ z(r, s). \end{cases}$$

Låt ytan $S : (x(r, s), y(r, s), z(r, s))$. Ytan S är då en integralyta till $\vec{V}$ eftersom de karaktäristiska ekvationerna uppfylles i varje punkt längs med Γ. Ytan S existerar då den spänns upp i en omgivning till alla punkter på kurvan Γ eftersom den är ickekaraktäristisk. Vidare är ytan S unik eftersom lösningarna till de karaktäristiska ekvationerna är unika. □

Antag att vi kommit fram till en integralyta enligt ovan. För att komma fram till en lösning $u(x, y)$ för (1) återstår att byta variabler från r och s till x och y så att

$$z(r, s) = z(r(x, y), s(x, y)) = u(x, y).$$

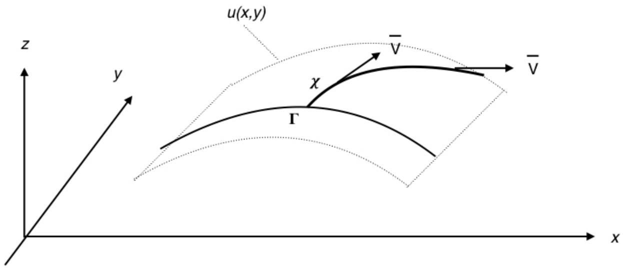
Det allmänna villkoret för att detta ska kunna genomföras är att kurvan Γ är ickekaraktäristisk, vilket kan bevisas med hjälp av inversa funktionssatsen, se [9]. Detta går vi dock inte djupare in på i detta i arbete.

Vi sammanfattar den karaktäristiska metoden för en linjär PDE (1) av första ordingen med två variabler (Figur 1):

1. Vi betraktar lösningen som en funktionsyta i rummet som tangerar ett vektorfält konstruerat av ekvationens koefficienter.

2. Vi reducerar PDE till ett system av karaktäristiska ODE:er.

3. För en ickekaraktäristisk kurva Γ i rummet kan vi hitta en unik integralyta (åtminstone i en omgivning nära Γ) från vilken z-komponenten med variabelbyte kan visa oss en lösning för PDE (1).



Figur 1: Karaktäristiska metoden

Anmärkning 2.1. *Den karaktäristiska metoden kan även appliceras på icke-linjära PDE:er, se [14, kap. 1]. En genomgång ligger utanför vald avgränsning för denna uppsats.*

2.2 Transportekvationen

Vi applicerar nu den karaktäristiska metoden på transportekvationen.

2.2.1 Utan villkor

Betrakta PDE:n (transportekvationen)

$$u_t(x,t) + cu_x(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

där c är en nollskild konstant. Vi ser att ekvationen är linjär, homogen, av första ordningen och med två variabler (där t representerar tid i fysikalisk mening). Inga begynnelsevillkor eller randvillkor är givna.

Från (2) ges de karaktäristiska ekvationerna som

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = c \\ \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dz}{ds} = 0, \end{cases}$$

vilket ger följande lösningar för karaktäristiska kurvor χ:

$$\begin{cases} x(s) = cs + A \\ t(s) = s + B \\ z(s) = C, \end{cases} \tag{3}$$

med godtyckliga konstanter A, B och C.

Inför kurvan $\Gamma : (x(r) = r, t(r) = 0, z(r) = f(r))$ där $f(r)$ är en funktion. Kurvan går längs med x-axeln och är per definition icke-karaktäristisk.

Låt $s_0 = 0$. Då får vi för alla värden på parametern r

$$\begin{cases} x(0) = A = x(r) = r \\ t(0) = B = t(r) = 0 \\ z(0) = C = z(r) = f(r) \end{cases}$$

och för alla värden på parametern s får vi systemet

$$\begin{cases} x(r,s) = cs + r \\ t(r,s) = s \\ z(r,s) = f(r), \end{cases}$$

som definierar en integralyta innehållandes kurvan Γ.

Vi skriver om $x(r,s) = cs + r$ som $r(x,t) = x - ct$, då har vi

$$u(x,t) = z(r,s) = f(r) = f(x - ct).$$

Vi har därmed kommit fram till den generella lösningen $u(x,t) = f(x - ct)$ till (2) där f är en godtycklig C^1-funktion.

En egenskap för lösningen som får implikationer längre fram i uppsatsen är att u har konstant värde över de karaktäristiska kurvornas projektioner i xt-planet. Detta inses genom att elliminera s ur de första två ekvationerna i (3). Vi kan skriva om (3) som

$$\begin{cases} x - ct = D \\ z = C \end{cases}$$

där D är en konstant och $x - ct = D$ således en rätlinjig kurva i xt-planet över vilken z-värdena är konstanta. Grafiskt tolkar vi det som att ett givet z-värde färdas till höger längs med x-axeln med hastigheten c. Detta innebär att PDE:n beskriver transport av en funktion längs med x-axeln.

Om $c < 0$ så beskriver (2) en funktion f som färdas åt andra hållet (till vänster) på x-axeln och den generella lösningen är $f(x + ct)$. Det vill säga

$$u_t(x,t) - cu_x(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geq 0$$

har den generella lösningen $u(x,t) = f(x + ct)$ där f är en godtycklig funktion av klass C^1.

2.2.2 Begynnelsevärdesproblem

Låt oss nu även applicera den karaktäristiska metoden på ett begynnelsvärdesproblem, också benämnt som *Cauchy-problem*, för transportekvationen.

Betrakta

$$\begin{cases} u_t(x,t) + cu_x(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4}$$

där vi till skillnad mot det generella fallet har exakt information om lösningen vid tidpunkten noll. Funktionen $g(x)$ kallas för begynnelsevillkor eller initialvillkor.

Om vi parametersätter $\Gamma : ((x(r) = r, t(r) = 0, f(r) = g(r))$ och löser (4) med den karaktäristiska metoden ovan får vi att

$$u(x,t) = g(x - ct).$$

Vi observerar egenskapen att lösningens alla värden över tid beror data som ges av g vid nolltidpunkten.

Anmärkning 2.2. *Antag att $g(x)$ inte är av klass $\in C^1$. Om vi till exempel har initialvillkor med diskontinuitet i vissa punkter kommer dessa att transporteras med tiden över de karaktäristiska kurvornas projektioner xt-planet.*

3 Vågekvationen i $\mathbb{R}$

I denna sektion studerar vi den homogena vågekvationen

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \qquad x \in I \subset \mathbb{R}, \qquad t > 0$$

och den inhomogena vågekvationen

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad x \in I \subset \mathbb{R}, \qquad t > 0$$

med lämpliga begynnelse- och randvillkor. Den endimensionella vågekvationen kan representera en vibrerande sträng. Detta härleds i uppsatsens sista avsnitt.

3.1 Homogena vågekvationen i $\mathbb{R}$

Betrakta

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \tag{5}$$

som bekriver den homogena vågekvationen definerad över hela den reella tallinjen, utan specifik information om lösningen vid någon tidpunkt.

Den generella lösningen för (5) ges av summan av en funktion som transporteras högerut längs med tallinjen med hastigheten c och en funktion som rör sig åt vänster med hastighet c. Vi formulerar detta som en sats med ett bevis som till stor del följer bevisen i [4, s. 67] och [10].

Sats 3.1. *Den generella lösningen till ekvationen (5) ges av*

$$u = (x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

där F och G är godtyckliga funktioner av klass C^1.

Bevis. Vi skriver om ekvationen på operatorform och inser att om u är av klass C^2 så är $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ och därför kan operatorn faktoriseras enligt följande

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0. \end{aligned}$$

Definiera

$$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u.$$

Då har vi en homogen transportekvation

$$v_t - c v_x = 0$$

som vi visat har generella lösningen

$$v(x,t) = f(x+ct)$$

därmed är

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

ekvivalent med

$$u_t + c u_x = f(x+ct).$$

Vi löser denna inhomogena transportekvation. De karaktäristiska ekvationerna

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = c \\ \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dz}{ds} = f(x+ct) \end{cases}$$

ger

$$\begin{cases} x(s) = cs + A \\ t(s) = s + B. \end{cases}$$

Inför kurvan

$$\Gamma : (x(r) = r, t(r) = 0, z(r) = g(r)),$$

där $g(r)$ är en funktion. Sätt $x(s_0) = x(r)$ och $t(s_0) = t(r)$. Låt $s_0 = 0$. Då får vi

$$\begin{cases} x(r,s) = cs + r \\ t(r,s) = s. \end{cases}$$

Insättning i $\frac{dz}{ds} = f(x+ct)$ och analysens huvudsats [7] ger

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{ds} &= f(x+ct) = f(2cs+r) \\
\Rightarrow z(s) &= \frac{1}{2c}\int_0^{2cs+r} f(y)dy + C(r)
\end{aligned}$$

med integrationsvariabeln $y = 2cs + r$. Sätt $z(s_0) = x(r) = g(r)$ och låt $s_0 = 0$ vilket ger

$$z(s_0) = \frac{1}{2c}\int_0^r f(y)dy + C(r) = g(r) \Leftrightarrow C(r) = g(r) - \frac{1}{2c}\int_0^r f(y)dy$$

så att

$$z(r,s) = \frac{1}{2c}\int_0^{2cs+r} f(y)dy + g(r) - \frac{1}{2c}\int_0^r f(y)dy.$$

Lösningen blir då

$$u(x,t) = z(r(x,t), s(x,t)) = \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} f(y)dy + g(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} f(y)dy,$$

som kan skrivas

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

där F och G ges av

$$F(x+ct) := \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} f(y)dy, \quad , G(x-ct) := -\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} f(y)dy + g(x-ct)$$

och därmed är beviset klart. □

Kurvorna $x - ct = konstant$ och $x + ct = konstant$ kallas för vågekvationens *karaktäristikor*. Om $F, G \neq 0$ betyder det att vi har två familjer av korsande karaktäristikor i xt-planet.

3.2 Homogen vågekvation med begynnelsevillkor i $\mathbb{R}$

Vi inför begynnelsevillkor för lösningens läge och hastighet vid tidpunkten noll. Då har vi att undersöka Cauchy-problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x), \end{cases} \tag{6}$$

där g och h är givna funktioner.

Problemet kan lösas med d'Alemberts formel. Vilket vi formulerar som en sats.

Sats 3.2 (d'Alembert's formel). *Om $g \in C^2$ och $h \in C^1$ så ger*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)ds$$

en C^2-lösning till (6).

Bevis. Bevisidén är att låta den generella lösningen $u(x,t) = F(x+ct)+G(x-ct)$ uppfylla begynnelsevillkoren och se vilka krav dessa ställer på funktionerna F och G, se [14, s. 75].

Låt $t = 0$, vilket ger

$$\begin{cases} u(x,0) = F(x) + G(x) = g(x) \\ u_t(x,0) = cF'(x) - cG'(x) = h(x). \end{cases}$$

Derivering av första uttrycket och division med c i det andra uttrycket ger

$$\begin{cases} F'(x) + G'(x) = g'(x) \\ F'(x) - G'(x) = \frac{1}{c}h(x). \end{cases}$$

Gausselliminering ger

$$\begin{cases} F'(x) = \frac{1}{2}g'(x) + \frac{1}{2c}h(x) \\ G'(x) = \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{2c}h(x). \end{cases}$$

Integration ger

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2c}H(x) + A \\ G(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2c}H(x) + B, \end{cases}$$

där H är primitiv funktion till h. Observera att konstanterna $A + B = 0$ enligt begynnelsevillkoret $F(x) + G(x) = g(x)$.

Låt nu $t > 0$, vilket innebär att vi substituerar variabeln x med $x+ct$ i $F(x)$ och med $x - ct$ i $G(x)$, vilket ger

$$\begin{cases} F(x+ct) = \frac{1}{2}g(x+ct) + \frac{1}{2c}H(x+ct) + A \\ G(x-ct) = \frac{1}{2}g(x-ct) - \frac{1}{2c}H(x-ct) + B \end{cases}$$

som innebär

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x+ct) + G(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[H(x+ct) - H(x-ct)\right] + A + B \\ &= \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)ds. \end{aligned}$$

Därmed är begynnelsevillkoren uppfyllda. Partiell derivering ger

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= \frac{c^2}{2}\left[g''(x+ct)+g''(x-ct)\right] + \frac{c}{2}\left[h'(x+ct)-h'(x-ct)\right],\\
u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2}\left[g''(x+ct)+g''(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[h'(x+ct)-h'(x-ct)\right],\\
u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\left[g(x+ct)+g(x-ct)\right]
\end{aligned}$$

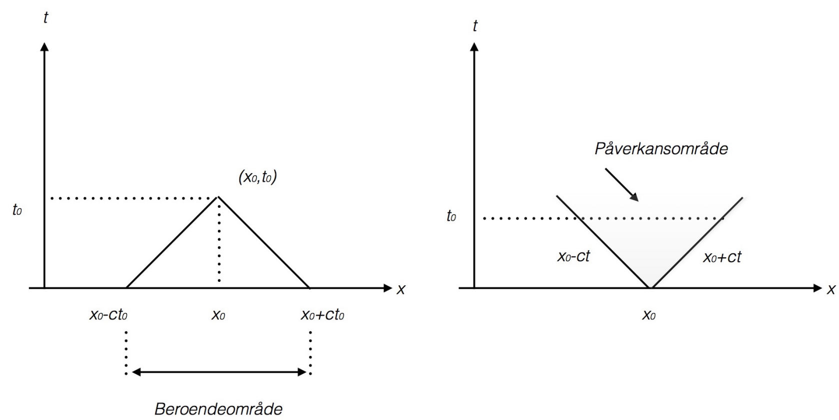
Vi ser att om $g \in C^2$ och $h \in C^1$ då är per definition $u \in C^2$ och vi har att $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. $\square$

Den del av definitionsmängden för begynnelsedata g och h som påverkar värdet av u vid en given punkt i tid och rum kallas *beroendeområde*, motsvarande engelskans domain of dependance. För vågekvationen i $\mathbb{R}$ avläser vi beroendeområdet ur d'Alemberts lösningsformel. Värdet av u i en given punkt (x_0, t_0) beror på värdena av g för $x = x_0 - ct_0$ och $x = x_0 + ct_0$ samt av värden av h på intervallet

$$\{x : x_0 - ct_0 \leq x \leq x_0 + ct_0\}.$$

Detta intervallet är lika med beroendeområdet eftersom inga andra värden utanför detta intervall bidrar till värdet av $u(x_0, t_0)$ (Figur 2).

Mängden punkter $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ vilkas beroendeområden innehåller en initial punkt $(x_0, 0)$ kallas för *påverkansområde*, motsvarande engelskans domain of influence, för $(x_0, 0)$.



Figur 2: Beroende- och påverkansområden

För vågekvationen i $\mathbb{R}$ avläser vi beroendeområdet geometriskt (Figur 2). Vi ser att endast för värden $u(x,t)$ till höger om linjen $x_0 - ct$ och till vänster om linjen $x_0 + ct$ finns begynnelsevärdet $(x_0, 0)$ i beroendeområdena. Därmed inser vi att värdena $g(x_0, 0)$ och $h(x_0, 0)$ endast påverkar lösningar $u(x,t)$ på mängden

$$\{(x,t) : x_0 - ct \leq x \leq x_0 + ct, t \geq 0\}$$

. Detta intervallet är lika med påverkansområdet, med avseende på $(x_0, 0)$.

Koncepten med beroende- och påverkansområden ger upphov till ett fenomen som kallas *ändlig fortplantningshastighet*. Vilket innebär att vid varje fix tidpunkt t_0 har begynnelsevärdet ingen påverkan på lösningsvärden utanför intervallet $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ och att det tar tiden $t = \frac{|x-x_0|}{c}$ för ett begynnelsevärde att röra sig från x_0 till x.

3.3 Homogena vågekvationen på halvlinjen i $\mathbb{R}$

Vågekvation på halvlinjen betyder att vi tillför ett randvillkor till begynnelsvärdesproblemet i den fysikaliska meningen att strängen fixeras i punkten $x = 0$. Betrakta problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < +\infty, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Det ska visa sig att problemet har två olika lösningsformler beroende på om x är större eller mindre än en karaktäristika ct. Vi kommer dit via udda kontinuerlig utvidgning av problemets villkor till ett hjälpproblem i hela tallinjen där lösning ges av d'Alemberts formel, se [4, s. 69] och [9].

Definition 3.1. *Den udda kontinuerliga utvidgningen av funktionerna g och h definieras som, se[4, s. 69]*

$$g_{udda}(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x \leq 0 \end{cases}, h_{udda}(x) = \begin{cases} h(x), & x \geq 0 \\ -h(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Betrakta problemet

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0 \\ U(x,0) = g_{udda}(x) \\ U_t(x,0) = h_{udda}(x) \end{cases}$$

med en C^2-lösning som ges enligt d'Alemberts formel

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[g_{udda}(x+ct) + g_{udda}(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h_{udda}(s)ds.$$

Sats 3.3. *Låt $u(x,t)$ definieras som $U(x,t)$ på halvlinjen $0 < x < +\infty$. Då gäller att $u(x,t)$ är en lösning för problemet (7).*

Bevis. Eftersom u per definitionen ovan uppfyller PDE:n i (7) återstår att undersöka att u även uppfyller villkoren i problem (7). Begynnelsevillkoren uppfylls för $t = 0$ och $x > 0$, ty

$$u(x, 0) = U(x, 0) = g_{udda}(x) = g(x)$$

och

$$u_t(x, 0) = U_t(x, 0) = h_{udda}(x) = h(x).$$

Randvillkoret för $x = 0$ och $t > 0$ uppfylls, ty

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \frac{1}{2}(g_{udda}(ct) + g_{udda}(-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} h_{udda}(s)ds \\ &= \frac{1}{2}(g(ct) - g(ct)) + \frac{1}{2c}\left(\int_{ct}^{0} h(s)ds + \int_{0}^{ct} h(s)ds\right) \\ &= 0 + 0 = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Därför är $u(x,t)$ definierat som $U(x,t)$ på halvlinjen $0 < x < +\infty$ en lösning till problemet (7). □

Vi bestämmer u. Definitionen av g_{udda} och h_{udda} ger olika lösningsformler i två områden A och B som separeras av karaktäristikan ct (Figur 3).

För $A = \{(x,t) : t > 0, x > ct\}$ får vi

$$u(x,t) = U(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)ds.$$

För $B = \{(x,t) : t > 0, x < ct\}$ får vi

$$u(x,t) = U(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) - g(ct-x)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} h(s)ds.$$

I formlerna ser vi att lösningar för region B har beroendeområde

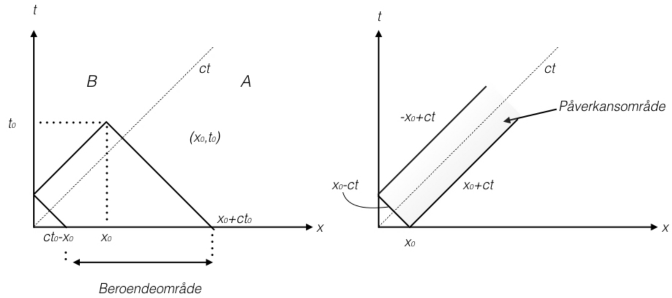
$$\{x : ct_0 - x_0 \leq x \leq x_0 + ct_0\}.$$

Geometriskt tolkar vi det som att den vänstergående vågen reflekteras i $x = 0$. Halvlinjens lösningar har påverkansområde som inramas av linjerna $ct - x_0$, $x_0 + ct$ och $x_0 - ct$ (Figur 3).

3.4 Homogena vågekvationen på ett intervall i $\mathbb{R}$

Vågekvation på ett intervall betyder att vi utöver begynnelsvärdesproblemet inför randvillkor kallat *Dirichletvillkor* som i den fysikaliska meningen betyder att strängen fixeras i punkterna $x = 0$ och $x = l$ så att $u(0,t) = u(l,t) = 0$ för $t \geq 0$. Då har vi begynnelse/randproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{8}$$



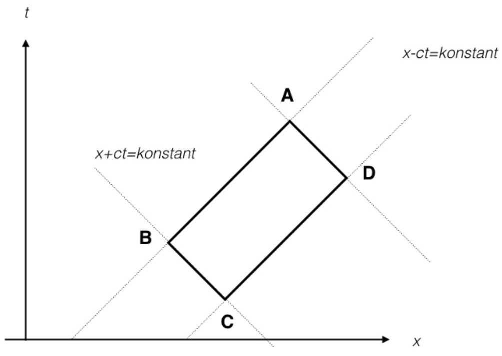
Figur 3: Beroende- och påverkansområden på halvlinjen

Vi undersöker två olika lösningsmetoder för (8). Parallellogrammetoden och variabelseparation.

3.4.1 Parallellogrammetoden

Från [22] och [14, s. 76] hämtar vi en geometrisk egenskap för vågekvationens lösningsmängd längs med dess karaktäristikor.

Sats 3.4 (Parallellogramregeln)**.** *Antag ett parallellogram $ABCD$ i ett öppet område $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ där parallellogrammets sidor är karaktäristikor för en vågekvation $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$, enligt figur 4.*



Figur 4: Parallellogram

Då gäller $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$.

Bevis. Alla lösningar för PDE:n kan skrivas som $u(x, t) = F(x+ct)+G(x-ct)$.

Det ger

$$\begin{aligned}u(A) &= F(A) + G(A),\\ u(B) &= F(B) + G(B),\\ u(C) &= F(C) + G(C),\\ u(D) &= F(D) + G(D).\end{aligned}$$

Vidare, eftersom punkterna ligger på karaktäristikor på vilka funktionsvärdena för F respektive G är konstanta har vi för funktionen F som förflyttar sig åt vänster

$$\begin{aligned}F(B) &= F(C),\\ F(A) &= F(D),\end{aligned}$$

och för funktionen G som förflyttar sig åt höger

$$\begin{aligned}G(A) &= G(B),\\ G(D) &= G(C),\end{aligned}$$

vilket ger att

$$\begin{aligned}u(A) + u(C) &= F(A) + G(A) + F(C) + G(C) = F(D) + G(B) + F(B) + G(D)\\ &= F(B) + G(B) + F(D) + G(D) = u(B) + u(D),\end{aligned}$$

vilket bevisar satsen. □

Satsen säger att vi kan bestämma $u(A)$ för en punkt (x_0, t_0) om vi känner till $u(B), u(C)$ och $u(D)$.

Vi applicerar parallellogramregeln på problem (8). Vi delar upp xt-planet i regioner $R_1, R_2, R_3, ...$ bildade av karaktäristikor som utgår för $t = 0$ från randvillkorspunkterna $x = 0$ och $x = l$ och vi låter sedan karaktäristikorna reflektera mot intervallgränserna för $t > 0$. (Figur 5). Vi låter varje R_i innehålla karaktäristikan/karaktäristikorna som bildar regionens övre gräns/gränser.

Betrakta regionen

$$R_1 = \{(x, t) : ct \leq x \leq l - ct, t > 0\}.$$

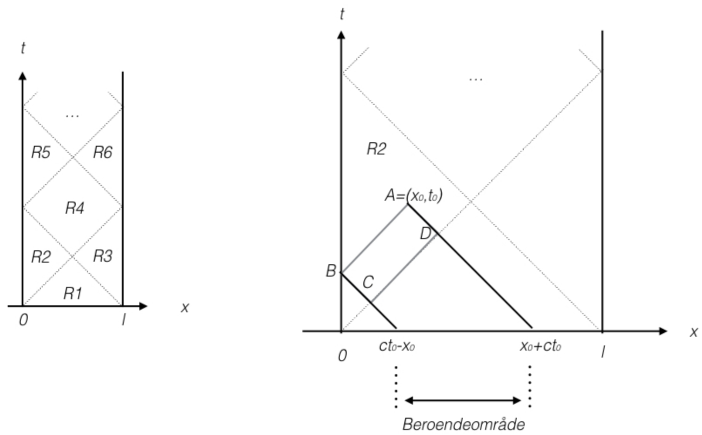
För (x_0, t_0) i regionen R_1 ges lösningen av d'Alemberts formel.

Betrakta regionen

$$R_2 = \{(x, t) : 0 \leq x < ct, 0 \leq x \leq l - ct\, t > 0.$$

För $A = (x_0, t_0)$ i regionen R_2 ges lösningen av parallellogramregeln

$$u(A) = u(B) + u(D) - u(C)$$



Figur 5: Parallellogrammetoden

där

$$
\begin{aligned}
u(B) &= u(0,t) = 0, \\
u(C) &= \frac{1}{2}\left[g(0) + g(-x_0 + ct_0)\right] + \frac{1}{2c}\int_0^{-x_0+ct_0} h(s)ds \\
&= \frac{1}{2}g(-x_0 + ct_0) + \frac{1}{2c}\int_0^{-x_0+ct_0} h(s)ds
\end{aligned}
$$

och

$$
\begin{aligned}
u(D) &= \frac{1}{2}\left[(g(0) + g(x_0 + ct_0)\right] + \frac{1}{2c}\int_0^{x_0+ct_0} h(s) \\
&= \frac{1}{2}g(x_0 + ct_0) + \frac{1}{2c}\int_0^{x_0+ct_0} h(s)ds.
\end{aligned}
$$

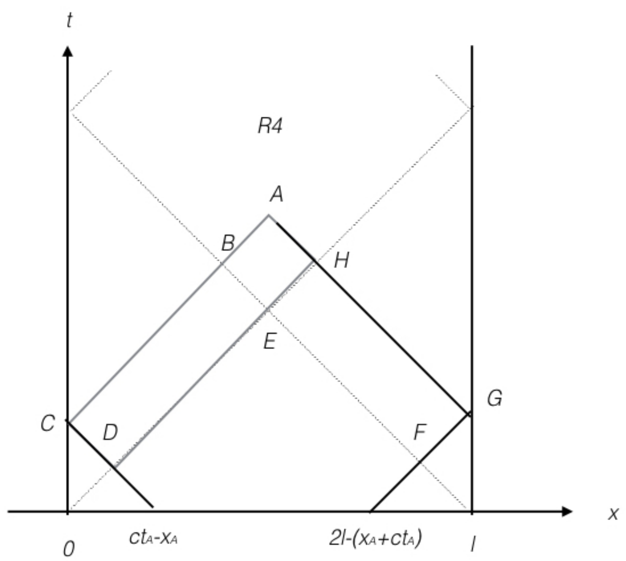
Så att

$$
\begin{aligned}
u(A) &= \frac{1}{2}g(x_0+ct_0) + \frac{1}{2c}\int_0^{x_0+ct_0} h(s)ds \\
&- \frac{1}{2}g(-x_0+ct_0) - \frac{1}{2c}\int_0^{-x_0+ct_0} h(s)ds \\
&= \frac{1}{2}\left[g(x_0+ct_0) - g(-x_0+ct_0)\right] + \frac{1}{2c}\int_{-x_0+ct_0}^{x_0+ct_0} h(s)ds.
\end{aligned}
$$

Observera att för $(x_0, t_0) \in R_2$ får vi beroendeområdet

$$\{ct_0 - x_0 \leq x \leq ct_0 + x_0\}.$$

Vi kan successivt finna lösningar i även regionerna R_3, R_4 och så vidare. Vi exemplifierar för $A = (x_A, t_A)$ i R_4. Se figur 6.



Figur 6: Parallellogrammetoden i region R_4

Parallellogramregeln ger att

$$u(A) = u(B) + u(H) - u(E),$$

där

$$u(B) = u(C) + u(E) - u(D) = u(E) - u(D)$$

och

$$u(H) = u(E) + u(G) - u(F) = u(E) - u(F)$$

så att

$$u(A) = u(E) - u(D) - u(F).$$

Beräkna med d'Alemberts formel

$$u(D) = u(x_D, t_D) = \frac{1}{2}(g(0) + g(x_D + ct_D) + \frac{1}{2c}\int_0^{x_D+ct_D} h(s)ds.$$

Eftersom $g(0) = 0$ och karaktäristikornas geometri ger att $x_D + ct_D = ct_A - x_A$ så är

$$u(D) = \frac{1}{2}g(ct_A - x_A) + \frac{1}{2c}\int_0^{ct_A-x_A} h(s)ds.$$

D'Alemberts formel för $u(F)$ och karaktäristikornas geometri $x_F - ct_F = 2l - (x_A + ct_A)$ ger att

$$u(F) = \frac{1}{2}g(2l - (x_A + ct_A)) + \frac{1}{2c}\int_{2l-(x_A+ct_A)}^{l} h(s)ds.$$

D'Alemberts formel ger

$$u(E) = \frac{1}{2c}\int_0^l h(s)ds.$$

Vi får då

$$\begin{aligned} u(A) &= u(E) - u(D) - u(F) \\ &= \frac{1}{2}\left[g(ct_A - x_A) + g(2l - (x_A + ct_A))+\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct_A-x_A}^{2l-(x_A+ct_A)} h(s)ds. \end{aligned}$$

Notera att påverkansområde får vi genom att låta karaktäristikorna stråla ut från en punkt $(x_0, 0)$ och sedan reflekteras på intervallgränserna $x = 0$ respektive $x = l$ (Figur 7).

Anmärkning 3.1. *Samma lösningsformler för vågekvationen på ett intervall kan även härledas med utvidgning av begynnelsedatafunktionerna h och g, se [10].*

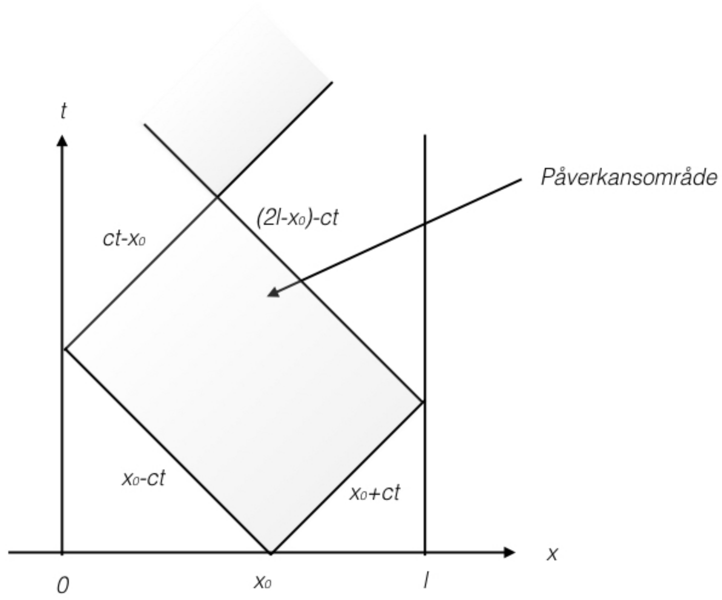
3.4.2 Variabelseparation

Parallelogrammetoden (och udda utvidgning) har fördelen att ge en explicit lösningsformel för evaluering av u i en specifik punkt, men tenderar att bli tidskrävande och tungarbetad när vi vill studera större delar av xt-planet.

Därför ska vi se på en annan lösningsmetod för intervall som har en helt annan infallsvinkel och ger lösningen presenterad som en oändlig periodisk funktionsserie.

Representation med parallellogramregeln/udda utvidgning respektive med funktionsserie kan sägas representera vad två olika sinnesorgan (öra respektive öga) uppfattar av en vibrerande sträng, se [6, s. 141]. D'Alemberts formel visar vad ögat uppfattar och oändliga periodiska serier representerar vad örat hör.

Vi börjar studiet av variabelseparation med att definiera separerad lösning till ett renodlat randvärdesproblem av så kallat Dirichlettyp.



Figur 7: Påverkansområde

Definition 3.2 (Separerad lösning)**.** *En lösning till Dirichletproblemet för vågekavationen*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, \qquad t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(l,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

på formen

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

där X är en funktion $0 < x < l \to \mathbb{R}$ och T är en funktion $t > 0 \to \mathbb{R}^+$ kallas för separerad lösning [18, kap. 4.1].

Med fortsatt [18, kap. 4.1] som källa transformerar vi Dirichletproblemet till ett system av ordinära differentialekvationer (ODE:er) enligt följande.

Antag att separerad lösning till (8) existerar. Insättning av $u(x,t) = X(x)T(t)$ i PDE:n $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ och division med $-c^2 XT$ ger

$$-\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

där λ är en konstant. Vi kan därmed transformera PDE:n $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ till ett system av två ODE:er

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x) \\ -T''(t) = \lambda c^2 T(t). \end{cases}$$

Randvillkoren implicerar

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,$$
$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0.$$

Därmed har vi transformerat PDE:n och randvillkor till ett systemet av ODE:er

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \\ -T''(t) = \lambda c^2 T(t). \end{cases}$$

En ODE är ofta enklare att lösa än en PDE. Observera dock att vi ännu ej infört begynnelsevillkoren och därför kan förvänta oss en mängd lösningar till systemet.

Vi identifierar lösningar på ODE:n med randvillkor med avseende på $X(x)$. Först introducerar vi begreppen egenvärde och egenfunktion som dessa beskrivs i [11].

Definition 3.3 (Egenvärde och egenfunktion)**.** *Om det finns ett tal λ som löser ekvationssystemet*

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

där $X(x) \neq 0$ så kallas λ för egenvärde för differentialoperatorn $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ på intervallet $[0,l]$. Den till egenvärdet tillhörande funktionen $X(x)$ kallas för egenfunktion.

Sats 3.5. *Ekvationssystemet*

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = 0 \\ X(x) = 0 \end{cases}$$

har egenvärden $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$, $\lambda > 0$ med tillhörande egenfunktioner

$$X_n(x) = D_n \sin \sqrt{\lambda} x = D_n \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$$

där D_n är godtyckliga konstanter för $n = 1, 2, 3, ...$

Bevis. Antag att $\lambda > 0$. Då har vi

$$-X''(x) = \lambda X(x)$$

ekvivalent med

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

vilket är en homogen linjär ODE av andra ordningen. Vi löser denna genom att finna lösningar till det karaktäristiska polynomet och applicera den allmänna lösningsformeln, se [7, s. 388]. Ansättning $X = Ce^{rx}$, där $C = konstant$ ger

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \Leftrightarrow Ce^{rx}(r^2 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}$$

som ger lösningarna

$$X(x) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} = C\cos\sqrt{\lambda}x + D\sin\sqrt{\lambda}x.$$

där C och D är reella konstanter (de komplexa lösningarna ignoreras ty X är per definition reell). Införande av randvillkoret $X(0) = 0$ ger

$$X(0) = C\cos 0 + D\sin 0 \Rightarrow C = 0,$$

medan $X(l) = 0$ ger

$$X(l) = D\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Per definition är $X(x) \neq 0$ vilket implicerar att $D \neq 0$, vilket ger $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ och därmed är

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

för heltal $n \geq 1$.

Därmed fås

$$X_n(x) = D_n \sin\sqrt{\lambda}x = D_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Antag att $\lambda = 0$. Detta ger att $X(x) = 0$, så alltså är per definition $\lambda \neq 0$.

Antag att $\lambda < 0$ och sätt $\lambda = -\beta$. Då har vi

$$-X''(x) = -\beta X(x) X''(x) - \beta X(x) = 0,$$

vilket ger

$$X''(x) - \beta X(x) = 0 \Leftrightarrow Ce^{rx}(r^2 - \beta) = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{\beta}$$

som ger lösningarna

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\beta}x} + C_2 e^{\sqrt{\beta}x}.$$

Randvillkoret $X(0) = 0$ medför då att $C_1 = 0$ och $C_2 = 0$ så att $X(x) = 0$, vilket motsäger definitionen för egenvärde. □

Vi vänder uppmärksamheten till ODE:n $-T''(t) = \lambda c^2 T(t)$ vars lösningar med samma lösningsmetod som ovan, se [7, s. 388], ges av

$$T(t) = E\cos c\sqrt{\lambda}t + F\sin c\sqrt{\lambda}t.$$

där E och F är godtyckliga konstanter.

Vi har från sats 3.5 differentialoperatorns egenvärden $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$. Insättning ger

$$T_n(t) = E_n \cos\left(\frac{nc\pi}{l}t\right) + F_n \sin\left(\frac{nc\pi}{l}x\right).$$

Systemet av ODE:er är nu löst och vi har funnit att den separerade lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, \qquad t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(l,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

ges av

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left[A_n \cos\left(\frac{nc\pi}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{nc\pi}{l}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

där $A_n = E_n D_n$, $B_n = F_n D_n$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$. Men eftersom $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ är homogen och linjär är även mängden av alla summor av lösningar en del av lösningsmängden.

Därför *påstår* vi att även funktionsserien

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{nc\pi}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{nc\pi}{l}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{9}$$

löser problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l \qquad , t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(l,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Vi återkommer senare till konvergens. Först undersöker vi om serien uppfyller PDE:n och problemvillkoren. Randvillkoren uppfylls ty

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{nc\pi}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{nc\pi}{l}t\right)\right] \sin 0 = 0,$$

$$u(l,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{nc\pi}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{nc\pi}{l}t\right)\right] \sin(n\pi) = 0.$$

Insättning i PDE:n visar att funktionsserien också uppfyller $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

Givet att påståendet ovan är korrekt är vi är nu redo att införa begynnelsevillkoren för ursprungsproblemet (8). Vi deriverar (9) med avseende på t

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{nc\pi}{l} A_n \sin\left(\frac{nc\pi}{l}t\right) + \frac{nc\pi}{l} B_n \cos\left(\frac{nc\pi}{l}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Om (9) ska ge lösning för (8) så måste följande konvergens uppfyllas

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum_n^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = g(x), & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x,0) = \sum_n^{\infty} \frac{nc\pi}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = h(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Om vi antar att våra begynnelsevillkor kan beskrivas som likformigt konvergerande serier enligt ovan så kan vi visa formler för koefficienterna A_n och B_n. För detta behöver vi två hjälpsatser.

Lemma 3.6. *Om funktionerna f_n är kontinuerliga och funktionsserien $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergerar likformigt i det begränsade intervallet $[a, b]$ så är*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n dx.$$

Bevis. Se [13]. $\square$

Lemma 3.7. *För heltal m och n gäller att integralen*

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \begin{cases} \frac{l}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Bevis. Beviset kommer från [11]. De trigonometriska sambanden

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

är ekvivalent med

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b)}{2} - \frac{\cos(a+b)}{2}$$

som ger

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(m-n)\pi}{l} x dx - \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(m+n)\pi}{l} x dx.$$

För $m = n$ har vi

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^l dx - \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{2m\pi}{l} x dx \\ &= \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2m\pi} \sin \frac{2m\pi}{l} x \right]_0^l = \frac{l}{2} - 0 = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

För $m \neq n$ har vi

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(m-n)\pi}{l} x dx - \frac{1}{2} \int_0^l \cos \frac{(m+n)\pi}{l} x dx =$$
$$\frac{1}{2} \left(\frac{l \sin(m-n)\pi}{(m-n)\pi} - \frac{l \sin 0}{(m-n)\pi} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{l \sin(m+n)\pi}{(m+n)\pi} - \frac{l \sin 0}{(m+n)\pi} \right) = 0,$$

vilket slutför beviset. $\square$

Vi formulerar värdena för koefficienterna A_n och B_n i en sats.

Sats 3.8. *Sätt*

$$g(x) = \sum_{n}^{\infty} A_n \sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big), \qquad 0 \le x \le l,$$

$$h(x) = \sum_{n}^{\infty} \frac{nc\pi}{l} B_n \sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big), \qquad 0 \le x \le l$$

och anta att funktionsserierna konvergerar likformigt. Då är

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big) g(x)dx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l \sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big) h(x)dx.$$

Bevis. Betrakta

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Låt m vara ett heltal. Multiplicera vänster- och högerled med $\sin\big(\frac{m\pi}{l}x\big)$ och integrera med avseende på $0 \le x \le l$. Då har vi

$$\int_0^l \sin\Big(\frac{m\pi}{l}x\Big) g(x)dx = \int_0^l \sin\Big(\frac{m\pi}{l}x\Big) \sum_{n}^{\infty} A_n \sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big)dx.$$

Lemma 4.6 ger

$$\int_0^l \sin\Big(\frac{m\pi}{l}x\Big) g(x)dx = \sum_{n}^{\infty} \int_0^l \sin\Big(\frac{m\pi}{l}x\Big) A_n \sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big)dx.$$

Lemma 4.7 ger

$$\int_0^l \sin\Big(\frac{m\pi}{l}x\Big) g(x)dx = A_m\frac{l}{2}$$

där $m = n$, så att

$$A_n = \frac{l}{2}\int_0^l \sin\Big(\frac{n\pi}{l}x\Big) g(x)dx.$$

På motsvarande sätt genomförs beviset för B_n. □

Sammanfattningsvis har vi visat följande. Lösning till det homogena begynnelseproblemet med Dirichletvillkor (8) ges av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[A_n \cos\frac{nc\pi}{l}t + B_n \sin\frac{nc\pi}{l}t\Big] \sin\frac{n\pi}{l}x$$

där

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}xg(x)dx,$$
$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}xh(x)dx$$

om serieutveckling av begynnelsedatan är möjlig så att serierna

$$g(x) = \sum_n^\infty A_n \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad ,0 \leq x \leq l,$$
$$h(x) = \sum_n^\infty \frac{nc\pi}{l} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad ,0 \leq x \leq l,$$

båda är absolut konvergenta.

Serierna ovan kallas för *Fourierserier* och enligt litteratur kan många funktioner $g(x)$ serieutvecklas på ett intervall $[0,l]$ [18, kap. 4.1]. En genomgång för utveckling och konvergens av Fourierserier ligger dock utanför ramen för denna uppsats. För mer om Fourierserier, se till exempel [11].

Vi kommer under avsnittet om Energimetoder se att om det finns en lösning som är C^2 så kommer denna att vara unik. Det vill säga lösning på formen (9) och formerna vi får med parallellogrammetoden representerar en och samma lösning.

3.4.3 Randvillkor av andra typer

I föregående avsnitt studerade vi vågekvationsproblem med randvillkor av Dirichlettyp. Varabelseparation är även en metod lämplig för vågekvationsproblem där randvillkoren inte är av Dirichlettyp under förutsättning att randvillkoren är *symmetriska* [11]. Vi exemplifierar med ett problem med randvillkor av *Neumanntyp*, det vill säga $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ för $t \geq 0$, se [18, kap. 4.2].

Antag att Neumannproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, \qquad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u_x(l,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

har separerad lösningar $u(x,t) = X(x)T(t)$. Vi applicerar metoder från föregående sektion vilket ger egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Antag att $\lambda > 0$. Då ges alla ovillkorade lösningar av

$$X(x) = C\cos\sqrt{\lambda}x + D\sin\sqrt{\lambda}x$$

så att
$$X'(x) = \sqrt{\lambda} D \cos \sqrt{\lambda} x - \sqrt{\lambda} C \sin \sqrt{\lambda} x.$$
Vi inför randvillkor
$$X'(0) = \sqrt{\lambda} D \cos 0 - \sqrt{\lambda} C \sin 0 = \sqrt{\lambda} D = 0 \Leftrightarrow D = 0.$$
Inför randvillkor
$$X'(l) = -\sqrt{\lambda} C \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{l}$$
där $n = 1, 2, 3, ...$

Sammantaget har vi för $\lambda > 0$ egenvärden och tillhörande egenfunktioner
$$\begin{cases} \lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2 \\ X_n(x) = C_n \cos \sqrt{\lambda} x = C_n \cos \frac{n\pi}{l} x. \end{cases}$$
Antag $\lambda = 0$. Då ges ovillkorade lösningar av
$$X(x) = Cx + D$$
så att
$$X'(x) = C.$$
Vi inför randvillkor
$$X'(0) = C = 0.$$
Inför randvillkor
$$X'(l) = C = 0.$$

Sammantaget har vi att $\lambda = 0$ är ett egenvärde med korresponderande egenfunktion
$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ X_0(x) = D. \end{cases}$$

Låt $\lambda < 0$, Sätt $\lambda = -\gamma^2$. Då skriver vi egenvädesproblemet
$$\begin{cases} X''(x) - \gamma^2 X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$
Då får vi ovillkorade lösningar
$$X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$$
så att
$$X'(x) = \gamma(Ce^{\gamma x} - De^{-\gamma x}).$$
Vi inför randvillkor $X'(0) = \gamma(C - D)$, vilket är ekvivalent med att $C = D$. Vi inför randvillkor $X'(l) = \gamma D(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) = 0$, vilket ger att $D = C = 0$.

Sammantaget har vi då att $X(x) = 0$ för $\lambda < 0$ som då per definition av egenvärde inte är ett egenvärde.

På samma sätt som i Dirichletfallet kan vi finna $T(t)$. Från omskrivning av ursprungsproblem har vi ODE:n

$$T''(t) + c^2\lambda T(t) = 0.$$

Egenvärdet $\lambda_0 = 0$ ger

$$T_0''(t) = 0 \Rightarrow T_0'(t) = A_0 \Rightarrow T_0(t) = A_0 t + B_0,$$

medan egenvärden $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$ ger

$$T(t)_n = A \cos c\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin c\sqrt{\lambda_n} t = A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right),$$

där A och B är konstanter och $n \geq 1$. En separerad lösning kan då skrivas

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_n(x,t) = A_0 t + B_0 + \left[A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

och analogt med tidigare resonemang om oändlig serieutveckling har vi att

$$u(x,t) = A_0 t + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (11)$$

definierar en lösning av vågekvationen med randvillkor av Neumanntyp.

Lägg till begynnelsevillkor $u(x,0) = g(x)$ och $u_t(x,0) = h(x)$. Då har vi att (11) ger en lösning om fourierserierna

$$g(x) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

$$h(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

existerar. Och om så är fallet går det också att bestämma koefficienterna eftersom Neumannvillkoren är symmetriska. Detta finns beskrivet i [11]. Genomgång av teorin för detta ingår inte i uppsatsen av avgränsningsskäl.

Poängen med avsnittet, som förhoppningsvis har framgått, har varit att visa att ett vågekvationsproblem på ett intervall kan reduceras till ett egenvärdesproblem på ett system av ordinära differentialekvationer.

3.5 Den inhomegena vågekvationen

Vi vill lösa den inhomegena vågekvationen definierad på hela den reella tallinjen och med begynnelsvillkor av Cauchytyp

$$
\begin{cases}
u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\
u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\
u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R}.
\end{cases}
\tag{12}
$$

Lösningen u kan skrivas som en summa $u = v + w$ där v löser problemet

$$
\begin{cases}
v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x,t) \\
v(x,0) = 0 \\
v_t(x,0) = 0.
\end{cases}
\tag{13}
$$

och w löser problemet

$$
\begin{cases}
w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\
w(x,0) = g(x) \\
w_t(x,0) = h(x).
\end{cases}
\tag{14}
$$

Till följd av att ekvationerna är linjära kan vi säga att (13) och (14) löser (12).

Sats 3.9. *Om $w(x,t)$ är en lösning till (14) och $v(x,t)$ är en lösning till (13) så är $u = v + w$ en lösning till (12).*

Bevis. Definiera differentialoperatorn

$$
L := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).
$$

Då har vi per definition av linjäritet att

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} = Lu = L(v+w) = Lv + Lw = f(x,t) + 0 = f(x,t), \\
u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = 0 + g(x) = g(x), \\
u_t(x,0) = v_t(x,0) + w_t(x,0) = 0 + h(x) = h(x).
\end{aligned}
$$

Detta visar att u löser (12). □

Från tidigare avsnitt vet vi att formeln

$$
w(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(s)ds \tag{15}
$$

ger en lösning till (14).

Vi vill nu beskriva en lösning för (13). Detta kan vi göra med hjälp av *Duhamels princip*. Duhamels princip fungerar för linjära differentialekvationer i allmänhet och innebär att en inhomogen ekvation med homogena begynnelsevillkor bryts ner till summan (integralen) av lösningsmängden för en homogen hjälpekvation med ett specifikt begynnelsevillkor, se [15]. Vi applicerar principen på (13). I detta fall kan vi med inspiration från [14, s. 80] använda följande hjälpekvation och begynnellsevillkor.

$$\begin{cases} V_{tt}(x,t,s) - c^2 V_{xx}(x,t,s) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > s \\ V(x,s,s) = 0, & t = s \\ V_t = f(x,s,s) = f(x,s), & t = s \end{cases} \tag{16}$$

som har lösning $V(x,t,s)$ för $s > 0$.

Jämfört med de vågekvationsproblem vi sett tidigare har vi här ersatt den fixerade tidpunkten 0 med en parmetriserad tidpunkt s.

Låt $\eta(t,s) = t - s$ då är (16) ekvivalent med

$$\begin{cases} V_{tt}(x,\eta) - c^2 V_{xx}(x,\eta) = 0, & x \in R, \eta > 0 \\ V(x,0) = 0 \\ V_t = f(x,0) = f(x). \end{cases}$$

som, givet $f(x) \in C^1$, löses av

$$V(x,\eta) = \frac{1}{2c} \int_{x-c\eta}^{x+c\eta} f(y)dy \Leftrightarrow V(x,t,s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y)dy.$$

Sats 3.10 (Duhamels princip)**.** *Antag att $V(x,t,s) \in C^2$ för x och t tillsammans, kontinuerlig för s och att V löser (16). Då är $v(x,t) = \int_0^t V(x,t,s)ds$ en lösning till (13).*

Bevis. Om $V(x,t)$ och V_t är kontinuerliga så gäller regler för derivation under integraltecken, enligt [8, kap. 5.1], vilket ger att

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= V(x,t,t) + \int_0^t V_t(x,t,s)ds = V(x,s,s) + \int_0^t V_t(x,t,s)ds \\ &= 0 + \int_0^t V_t(x,t,s)ds = \int_0^t V_t(x,t,s)ds. \end{aligned}$$

Vidare derivation med avseende på t ger

$$\begin{aligned} v_{tt}(x,t) &= V_t(x,t,t) + \int_0^t V_{tt}(x,t,s)ds = V_t(x,s,s) + \int_0^t V_{tt}(x,t,s)ds \\ &= f(x,s) + \int_0^t V_{tt}(x,t,s)ds = f(x,t) + \int_0^t V_{tt}(x,t,s)ds. \end{aligned}$$

Derivation med avseende på x ger

$$v_x(x,t) = \int_0^t V_x(x,t,s)ds$$

och

$$v_{xx}(x,t) = \int_0^t V_{xx}(x,t,s)ds.$$

Då får vi att v uppfyller PDE:n (13), ty

$$\begin{aligned} v_{tt}(x,t) - c^2 v_{xx}(x,t) &= f(x,t) + \int_0^t V_{tt}(x,t,s)ds - c^2 \int_0^t V_{xx}(x,t,s)ds \\ &= f(x,t) + \int_0^t V_{tt}(x,t,s) - c^2 V_{xx}(x,t,s)ds \\ &= f(x,t) + 0 = f(x,t) \end{aligned}$$

och villkoren i (13), ty

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \int_0^0 V(x,t,s)ds = 0, \\ v_t(x,0) &= \int_0^0 V_t(x,t,s)ds = 0. \end{aligned}$$

Beviset är slutfört. □

Sats 3.10 och lösningsformeln för V ger oss att

$$v(x,t) = \int_0^t V(x,t,s)ds = \int_0^t \left(\frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y)dy \right) ds.$$

Minns att ursprungsproblemet (12) löses av $u(x,t) = w(x,t)+v(x,t)$. Därmed har vi att

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)ds + \int_0^t \left(\frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y)dy \right)$$

ger en lösning på det inhomogena vågekvationsproblemet (12).

Notera att den sista termen i lösningsformeln medför att beroendeområde för en punkt (x_0, t_0) består av den triangulära mängden

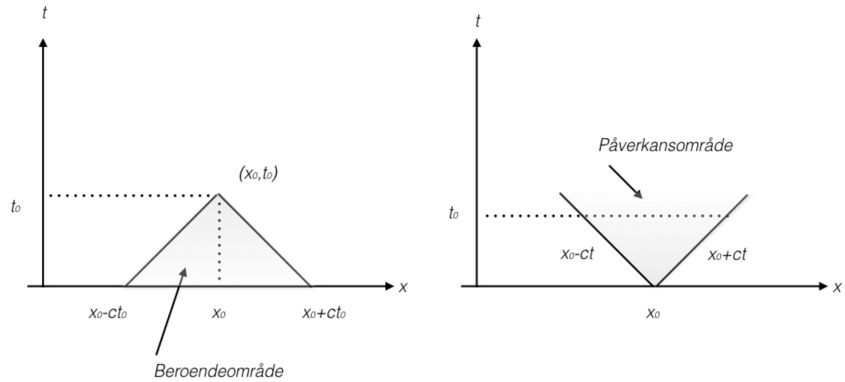
$$\{(x,t) : x_0 - c(t_0 - t) \leq x \leq x_0 + c(t_0 - t) \quad , 0 \leq t \leq t_0\}$$

och att påverkansområdet är identiskt med dito för motsvarande homogena ekvation (Figur 8).

Anmärkning 3.2. *Vi kan även använda Duhamels princip på ett begynnelse/randvädesproblem av Dirichlettyp, enligt [10]. Beroende och påverkansområden kommer vara samma som för det korresponderande homogena problemet*

4 Vågekvationen i $\mathbb{R}^3$

En tredimensionell vågekvation kan representera ljud- eller ljusvågor i ett tredimensionellt medium. Detta härleds i uppsatsens sista avsnitt.



Figur 8: Inhomogena ekvationens beroende- och påverkansområde

I detta avsnitt härleder vi, med [14, kap. 3.2.a–c] som främsta källa, lösningar till begynnelseproblem av Cauchytyp för den homogena vågekvationen i tre rumsdimensioner

$$\begin{cases} u_{tt}(\bar{x},t) - c^2\Delta u(\bar{x},t) = 0, & \bar{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \\ u(\bar{x},0) = g(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(\bar{x},0) = h(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Först inför vi några beteckningar som kommer användas flitigt.

Definition 4.1. *En punkt eller vektor i* $\mathbb{R}^3$ *betecknas* $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, *vi betecknar gradient med* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ *och Laplaceoperatorn med* $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)$.

Begreppet *sfäriskt medelvärde* kommer vara helt centralt i fortsättningen.

Definition 4.2 (Sfäriskt medelvärde i $\mathbb{R}^3$). *Låt* h *vara en kontinuerlig funktion* $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. *Låt* K *vara ett klot med centrum i punkten* $\bar{x}$ *och med radie* r. *Klotets yta betecknas* ∂K *och dess ytarea ges av* $4\pi r^2$. *Funktionens sfäriska medelvärde över ytarean för* K *betecknas* $M_h(\bar{x}, r)$ *och ges av*

$$M_h(\bar{x}, r) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial K} h(\bar{y})dS(\bar{y}) = \frac{1}{4\pi}\int_{|\bar{z}|=1} h(\bar{x} + r\bar{z})dS(\bar{z})$$

där $\bar{z}$ *är den sfäriska parameterframställningen av enhetsklotet och* dS *är ytelementet på sfären.*

Likheten i definitionen ges av sfärisk parameterframställning

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + r\sin\theta\cos\varphi \\ y_2 = x_2 + r\sin\theta\sin\varphi \\ y_3 = x_3 + r\cos\theta \end{cases}$$

där vi sätter

$$\begin{cases} z_1 = \sin\theta\cos\varphi \\ z_2 = \sin\theta\sin\varphi \\ z_3 = \cos\theta \end{cases}$$

och kan därmed se

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial K} h(\bar{y})dS(y) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} h(\bar{y})r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} h(\bar{y})\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_{|\bar{z}|=1} h(\bar{x}+r\bar{z})dS(\bar{z}).$$

Notera att $\lim_{r\to 0} M_h(\bar{x},r) = h(\bar{x})$, på grund av kontinuitet.

Vi använder nu sfäriskt medelvärde för att härleda den så kallade *Darboux-ekvationen* i tre dimensioner. Darbouxekvationen beskriver verkan av Laplace-operatorn på sfäriska medelvärden.

Derivera M_h med avseende på r. Funktionen h är kontinuerlig så vi kan derivera innanför integralerna och kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}M_h(\bar{x},r) &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\bar{z}|=1}\frac{\partial}{\partial r}h(\bar{x}+r\bar{z})dS(\bar{z}) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{|\bar{z}|=1}\frac{\partial h}{\partial h_1}\frac{\partial h_1}{\partial r}+\frac{\partial h}{\partial h_2}\frac{\partial h_2}{\partial r}+\frac{\partial h}{\partial h_3}\frac{\partial h_3}{\partial r}dS(\bar{z}) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{|\bar{z}|=1}\frac{\partial h}{\partial h_1}z_1+\frac{\partial h}{\partial h_2}z_2+\frac{\partial h}{\partial h_3}z_3dS(\bar{z}) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{|\bar{z}|=1}\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\frac{\partial}{\partial h_2},\frac{\partial}{\partial h_3}\right)h(\bar{x}+r\bar{z})\cdot(z_1,z_2,z_3)dS(\bar{z}) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{|\bar{z}|=1}\nabla h(\bar{x}+r\bar{z})\cdot\bar{z}dS(\bar{z})
\end{aligned}$$

Från definitionen kan vi byta integrationsområde till K, där $\bar{y} = \bar{x}+r\bar{z}$ och eftersom den utåtriktade enhetsnormalvektor på randen av K är $\frac{\bar{y}-\bar{x}}{r}$ kan vi applicera Gauss sats (divergenssatsen), [8, s. 368], vilket ger att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}M_h(\bar{x},r) &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\bar{z}|=1}\nabla h(\bar{x}+r\bar{z})\cdot\bar{z}dS(\bar{z}) \\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\int_{|\bar{y}-\bar{x}|=r}\nabla h(\bar{y})\cdot\frac{\bar{y}-\bar{x}}{r}dS(\bar{y}) \\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\int_{|\bar{y}-\bar{x}|<r}\Delta h(\bar{y})d\bar{y} = \frac{1}{4\pi r^2}\Delta_{\bar{x}}\int_{|\bar{y}-\bar{x}|<r}h(\bar{y})d\bar{y}.
\end{aligned}$$

Vi beräknar integralen med sfäriska koordinaterna $0\le\rho\le r, 0\le\varphi\le 2\pi$ och $0\le\theta\le\pi$. Integrationsområdet som detta definierar kallar vi E. Det ger att

$$\frac{\partial}{\partial r}M_h(\bar{x},r) = \frac{1}{4\pi r^2}\Delta\int_{|\bar{y}-\bar{x}|<r} h(\bar{y})d\bar{y}$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\Delta\int_E h(x_1+\rho\sin\theta\cos\varphi, x_2+\rho\sin\theta\sin\varphi, x_3+\rho\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi d\rho$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\Delta\int_0^r \rho^2\left(\int_F h(x_1+\rho\sin\theta\cos\varphi, x_2+\rho\sin\theta\sin\varphi, x_3+\rho\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi\right)d\rho,$$

där $F = \{(\varphi,\theta) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Enligt definitionen av sfäriska medelvärden är integralen inom parantesen lika med $4\pi M_h(\bar{x},\rho)$. Då får vi

$$\frac{\partial}{\partial r}M_h(\bar{x},r) = \frac{1}{r^2}\Delta\int_0^r \rho^2 M_h(\bar{x},\rho)d\rho.$$

Vi multiplicerar med r^2, ger

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}M_h(\bar{x},r) = \Delta\int_0^r \rho^2 M_h(\bar{x},\rho)d\rho.$$

Derivera med avseende på r, ger med produktregeln och enligt regler för derivering under integraltecken att

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(M_h(\bar{x},r)) + 2r\frac{\partial}{\partial r}(M_h(\bar{x},r)) = \Delta r^2 M_h(\bar{x},r) + 0.$$

Dividera slutligen med r^2, vilket ger

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)(M_h(\bar{x},r) = \Delta M_h(\bar{x},r),$$

som är Darbouxekvationen i $\mathbb{R}^3$.

Anmärkning 4.1. *Motsvarande ekvation kan härledas för alla $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, se [14].*

Följande sats knyter ihop Darbouxekvationen med Cauchyproblemet.

Sats 4.1 (Euler-Darboux-Poisson-ekvationen)**.** *Om $u(\bar{x},t)$ är en lösning till problemet*

$$\begin{cases} u_{tt}(\bar{x},t) - c^2\Delta u(\bar{x},t) = 0, & \bar{x}\in\mathbb{R}^3, \quad t>0 \\ u(\bar{x},0) = g(\bar{x}), & \bar{x}\in\mathbb{R}^3 \\ u_t(\bar{x},0) = h(\bar{x}) & \bar{x}\in\mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{17}$$

så är $M_u(\bar{x},r,t)$ en lösning till problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u(\bar{x},r,t) - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M_u(\bar{x},r,t) = 0 \\ M_u(\bar{x},r,0) = M_g(\bar{x},r) \\ \frac{\partial}{\partial t}M_u(\bar{x},r,0) = M_h(\bar{x},r) \end{cases} \tag{18}$$

för $\bar{x}\in\mathbb{R}^3$, $r\in\mathbb{R}^+$ och $t\geq 0$.

Bevis. Betrakta $t \geq 0$ som en parameter. Vi får av definitionen av sfäriska medelvärdet, derivation under integraltecken och Darbouxekvationen att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(\bar{x}, r, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\bar{z}|=1} u_{tt}(\bar{x} + r\bar{z}, t) dS(\bar{z}) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\bar{z}|=1} c^2 \Delta u(\bar{x} + r\bar{z}, t) dS(\bar{z}) \\
&= \frac{1}{4\pi} c^2 \Delta \int_{|\bar{z}|=1} u(\bar{x} + r\bar{z}, t) dS(\bar{z}) = \frac{1}{4\pi} c^2 \Delta 4\pi M_u(\bar{x}, r, t) \\
&= c^2 \Delta M_u(\bar{x}, r, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(\bar{x}, r, t),
\end{aligned}$$

vilket visar att $M_u(\bar{x}, r, t)$ uppfyller PDE:n i (18). Även begynnelsevillkoren uppfylls, ty

$$\begin{aligned}
M_u(\bar{x}, r, 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\bar{z}|=1} u(\bar{x} + r\bar{z}, 0) dS(\bar{z}) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{|\bar{z}|=1} g(\bar{x} + r\bar{z}) dS(\bar{z}) = M_g(\bar{x}, r)
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} M_u(\bar{x}, r, 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\bar{z}|=1} u_t(\bar{x} + r\bar{z}, 0) dS(\bar{z}) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{|\bar{z}|=1} h(\bar{x} + r\bar{z}) dS(\bar{z}) = M_h(\bar{x}, r),
\end{aligned}$$

vilket bevisar satsen. □

Satsen indikerar att om vi kan hitta lösning till (18) så kan vi genom att låta r gå mot noll erhålla en lösning till (17).

Sats 4.2 (Kirchhoffs formel, se s. 87 [14]). *Om $g \in C^3$ och $h \in C^2$ så ges en C^2-lösning till (17) av*

$$u(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[t \iint_{|\bar{z}|=1} g(\bar{x} + ct\bar{z}) dS(\bar{z}) \right] + \frac{t}{4\pi} \iint_{|\bar{z}|=1} h(\bar{x} + ct\bar{z}) dS(\bar{z}).$$

Bevis. Multiplicera PDE:n i (18) med r, vilket för första termen ger att

$$r \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(\bar{x}, r, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r M_u(\bar{x}, r, t)).$$

Multiplikation av andra termen med r ger

$$rc^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(\bar{x}, r, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_u(\bar{x}, r, t)),$$

ty

$$
\begin{aligned}
c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_u(\bar{x},r,t)) &= c^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rM_u(\bar{x},r,t))\right) \\
&= c^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(M_u(\bar{x},r,t) + r\frac{\partial}{\partial r}M_u(\bar{x},r,t)\right) \\
&= c^2 \left(2\frac{\partial}{\partial r}M_u(\bar{x},r,t) + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}M_u(\bar{x},r,t)\right) \\
&= rc^2 \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{2}{r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) M_u(\bar{x},r,t).
\end{aligned}
$$

Då kan vi skriva om PDE:n i (18) som

$$
\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rM_u(\bar{x},r,t)) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_u(\bar{x},r,t)).
$$

För fix punkt $\bar{x}$ inför vi

$$
\begin{aligned}
&V^{\bar{x}}(r,t) = rM_u(\bar{x},r,t), \\
&V^{\bar{x}}(r,0) = rM_u(\bar{x},r,0) = rM_g(\bar{x},r) = G^{\bar{x}}(r), \\
&V_t^{\bar{x}}(r,0) = \frac{\partial}{\partial t} rM_u(\bar{x},r,0) = M_h r(\bar{x},r) = H^{\bar{x}}(r).
\end{aligned}
$$

Notera att $V^{\bar{x}}(0,t) = \lim_{r\to 0} rM_u(\bar{x},r,t) = 0$.

Vi kan då skriva (18) som endimensionell PDE på halvlinjen r med begynnelsevillkor och randvillkor

$$
\begin{cases}
V_{tt}^{\bar{x}}(r,t) - c^2 V_{rr}^{\bar{x}}(r,t) = 0, & r > 0, \qquad t > 0 \\
V^{\bar{x}}(r,0) = G^{\bar{x}}(r) & \\
V_t^{\bar{x}}(r,0) = H^{\bar{x}}(r) & \\
V^{\bar{x}}(0,t) = 0, & t \geq 0.
\end{cases}
$$

Enligt den tidigare genomförda endimensionella undersökningen (se Homogena vågekvationen på halvlinjen i $\mathbb{R}$) ges lösning av

$$
V^{\bar{x}}(r,t) = \begin{cases}
\frac{1}{2}\left[G^{\bar{x}}(r+ct) + G^{\bar{x}}(r-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} H^{\bar{x}}(s)ds, & \{(r,t) : r > ct, t > 0\} \\
\frac{1}{2}\left[G^{\bar{x}}(r+ct) - G^{\bar{x}}(ct-r)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{r+ct} H^{\bar{x}}(s)ds, & \{(r,t) : r < ct, t > 0\} \\
0, & \{(r,t) : r = ct, t > 0\}.
\end{cases}
$$

Nästa steg är att se vad som händer vid gränsövergång med r mot noll. Vi inser att för $t > 0$ så är formeln för $r < ct$ den relevanta lösningsformeln och vi är inte intresserade av nollösningen $V^{\bar{x}}(r,t) = 0$.

Därmed är

$$
\begin{aligned}
u(\bar{x},t) &= \lim_{r\to 0} M_u(\bar{x},r,t) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} V^{\bar{x}}(r,t) \\
&= \lim_{r\to 0} \left(\frac{G^{\bar{x}}(r+ct) - G^{\bar{x}}(ct-r)}{2r} + \frac{1}{2cr}\int_{ct-r}^{r+ct} H^{\bar{x}}(s)ds\right).
\end{aligned}
$$

Gränsövergång för $G^{\bar{x}}$-termen. Variabelbytet, $\tau = ct - r$, kontinuerlig $G^{\bar{x}}$ och definition av derivata ger

$$\lim_{r\to 0} \frac{G^{\bar{x}}(r+ct) - G^{\bar{x}}(ct-r)}{2r} = \lim_{r\to 0} \frac{G^{\bar{x}}(\tau+2r) - G^{\bar{x}}(\tau)}{2r} = \frac{\partial}{\partial \tau} G^{\bar{x}}(\tau)$$

där vi efter gränsövergången har $\tau = ct$. Per tidigare definitioner av sfäriska medelvärden och variabelbyte åter till t ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} G^{\bar{x}}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\tau M_g(\bar{x},\tau)) &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\tau}{4\pi}\iint_{|\bar{z}|=1} g(\bar{x}+\tau\bar{z})dS(\bar{z})\right] \\
&= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{ct}{4\pi}\iint_{|\bar{z}|=1} g(\bar{x}+ct\bar{z})dS(\bar{z})\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\iint_{|\bar{z}|=1} g(\bar{x}+ct\bar{z})dS(\bar{z})\right].
\end{aligned}$$

Gränsövergång för $H^{\bar{x}}$-termen ger

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\frac{1}{2cr}\int_{ct-r}^{r+ct} H^{\bar{x}}(s)ds &= \frac{1}{c}H^{\bar{x}}(\tau) = \frac{1}{c}M_h\tau(\bar{x},\tau) \\
&= \frac{t}{4\pi}\iint_{|\bar{z}|=1} h(\bar{x}+ct\bar{z}dS(\bar{z}),
\end{aligned}$$

Därmed har visat att

$$u(\bar{x},t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\iint_{|\bar{z}|=1} g(\bar{x}+ct\bar{z})dS(\bar{z})\right] + \frac{t}{4\pi}\iint_{|\bar{z}|=1} h(\bar{x}+ct\bar{z})dS(\bar{z}),$$

ger en lösning till (17). □

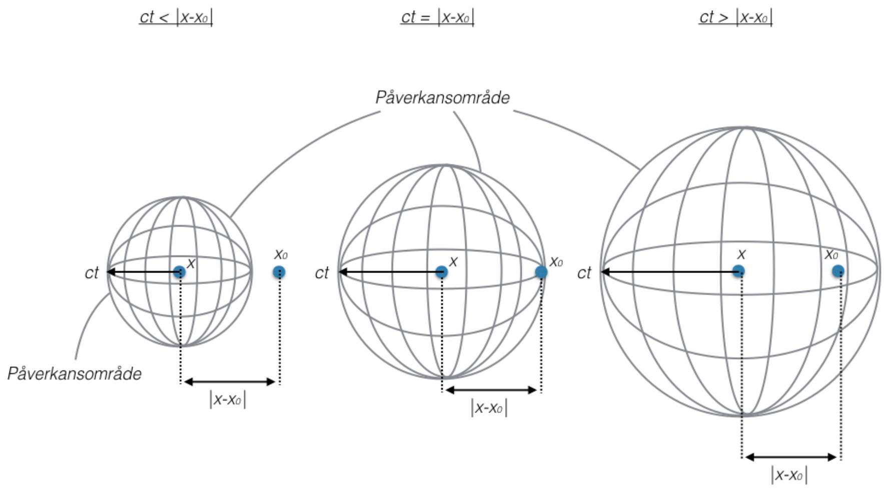
Kirchhoffs formel visar att lösningsvärdet i given punkt $u(\bar{x}_0,t_0)$ beror av begynnelsedata på randen av ett klot med centrum i $\bar{x}_0$ och med radien ct_0. Det vill säga att beroendeområdet består av mängden

$$\{\bar{x}\in\mathbb{R}^3 : |\bar{x}-\bar{x_0}| = ct_0\}.$$

Vi skriver påverkansområdet för $\bar{x_0}$ som unionen av alla sfärer

$$\{(\bar{x},t)\in\mathbb{R}^3\times(0,\infty) : |\bar{x}-\bar{x_0}| = ct, t>0\},$$

till vilka den initiala data hinner på tiden t. Initial data i punkten $(\bar{x}_0,0)$ fortplantar sig sfäriskt, liksom ytan på en ballong som blåses upp (Figur 9). Vi inser att påverkansområdet är en begränsad mängd för alla $t>0$, vilket implicerar att vågekvationen i $\mathbb{R}^3$ har ändlig fortplantningshastighet. Betrakta för fixt $t>0$ mängden $\{\bar{x}\in\mathbb{R}^3 : |\bar{x}-\bar{x_0}| > ct\}$. För alla dessa punkter är $u(\bar{x},t)$ ej påverkat



Figur 9: Påverkansområde i $\mathbb{R}^3$

av data från punkten $(\bar{x_0}, 0)$ och de kommer fortsätta vara opåverkade så länge som $t < \frac{|\bar{x}-\bar{x_0}|}{c}$.

En konsekvens av påverkansområdets natur är att vågsignaler färdas distinkt: en betraktare i punkten $\bar{x}$ i rummet upplever först inget, sedan vid exakt vid tidpunkten $t = \frac{|\bar{x}-\bar{x_0}|}{c}$ uppfattas signalen och därefter ingenting igen, se [22]. Fenomenet kallas för Huyghyens princip i stark form och gäller för vågekvation med udda $n \geq 3$. Detta sägs vara orsaken till att vi kan kommunicera med ljus och ljud i det fysiska rummet, se [2].

5 Vågekvationen i $\mathbb{R}^2$

Vågekvationen i två rumsdimensioner kan till exempel modellera vågor på en vattenyta eller ett vibrerande membran.

I denna sektion studerar vi den homogena vågekvationen med begynnelsevillkor av Cauchytyp i två dimensioner i rummet.

$$\begin{cases} u_{tt}(\bar{x}, t) - c^2 \Delta u(\bar{x}, t) = 0, & \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ u(\bar{x}, 0) = g(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(\bar{x}, 0) = h(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{19}$$

Definition 5.1. *En punkt eller vektor i $\mathbb{R}^2$ betecknas $\bar{x} = (x_1, x_2)$, vi betecknar gradient med $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ och Laplaceoperatorn med $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$.*

Vi använder en metod kallad som fritt översatt kallas *Hadamards nedstigning*. Namnet torde komma sig av principen att vi utgår från en lösning i tre dimensioner och sedan stiger ner till två dimensioner genom att integrera bort den tredje variabeln. Vi bevisar en sats från [14, s. 88].

Sats 5.1. *Om $g \in C^3$ och $h \in C^2$ så ges en C^2-lösning till (19) av*

$$u(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[2t \iint_{|\bar{z}|<1} \frac{g(x_1 + ctz_1, x_2 + ctz_2)}{\sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2}} dz_1 dz_2 \right]$$

$$+ \frac{t}{2\pi} \iint_{|\bar{z}|<1} \frac{h(x_1 + ctz_1, x_2 + ctz_2)}{\sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2}} dz_1 dz_2.$$

Bevis. Låt u uppfylla vågekvationsproblemet i tre dimensioner, enligt följande. Betrakta problemet

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(\bar{x}, t) - c^2 \Delta \tilde{u}(\bar{x}, t) = 0, & \bar{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \\ \tilde{u}(\bar{x}, 0) = \tilde{g}(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \tilde{u}_t(\bar{x}, 0) = \tilde{h}(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

där en lösning ges av Kirchhoffs formel

$$\tilde{u}(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[t \iint_{|\bar{z}|=1} \tilde{g}(\bar{x} + ct\bar{z}) dS(\bar{z}) \right] + \frac{t}{4\pi} \iint_{|\bar{z}|=1} \tilde{h}(\bar{x} + ct\bar{z}) dS(\bar{z}).$$

Sätt $x_3 = 0$ och definiera

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\bar{x}, t) = \tilde{u}(x_1, x_2, 0, t) &:= u(x_1, x_2, t), & t > 0, \\ \tilde{u}(\bar{x}, 0) = \tilde{g}(x_1, x_2, 0) &:= g(x_1, x_2), & t = 0, \\ \tilde{u}_t(\bar{x}, 0) = \tilde{h}(x_1, x_2, 0) &:= h(x_1, x_2), & t = 0. \end{aligned}$$

Betrakta integrationsytorna $|\bar{z}| = 1$ för integralerna i Kirchhoffs formel. Eftersom

$$|\bar{z}| = 1 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$$

kan vi definiera integrationsytan som halvklotsunionen $Y^+ \cup Y^-$ där

$$Y^+ = \{(z_1, z_2, z_3) : z_3 = \sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2}\}$$

och

$$Y^- = \{(z_1, z_2, z_3) : z_3 = -\sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2}\}.$$

Med dessa definitioner kan vi för två dimensioner skriva lösningsformeln

$$
\begin{aligned}
u(\bar{x},t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[t\int_{Y+} & g(x_1+ctz_1, x_2+ctz_2)dS(Y+)+ \\
& + t\int_{Y^-} g(x_1+ctz_1, x_2+ctz_2)dS(Y^-) + \\
& + \frac{t}{4\pi}\Bigg[\int_{Y+} h(x_1+ctz_1, x_2+ctz_2)dS(Y^+)+ \\
& + \int_{Y^-} h(x_1+ctz_1, x_2+ctz_2)dS(Y^-).
\end{aligned}
$$

Parameterframställ Y^+ med z_1 och z_2 som $Y^+ : \bar{r} = (z_1, z_2, \sqrt{1-z_1^2-z_2^2})$ där parameterytan är $z_1^2+z_2^2 < 1$. Enligt [8, s. 305] är i detta fall ytelementet $dS(Y^+) = |\bar{r}'_{z_1} \times \bar{r}'_{z_2}|dz_1dz_2$. Beräkna

$$
\begin{aligned}
\bar{r}'_{z_1} &= (1, 0, -\frac{z_1}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}), \\
\bar{r}'_{z_2} &= (0, 1, -\frac{z_2}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}),
\end{aligned}
$$

vilket ger

$$
\begin{aligned}
\bar{r}'_{z_1} \times \bar{r}'_{z_2} &= (-\frac{z_1}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}, -\frac{z_2}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}, 1), \\
|\bar{r}'_{z_1} \times \bar{r}'_{z_2}| &= \left(\left(\frac{z_1}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}\right)^2 + 1\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}.
\end{aligned}
$$

Då har vi att

$$
dS(Y^+) = |\bar{r}'_{z_1} \times \bar{r}'_{z_2}|dz_1dz_2 = \frac{1}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}dz_1dz_2
$$

med parameterytan $z_1^2+z_2^2 < 1 \Leftrightarrow |\bar{z}| < 1$. Integralen med avsende på Y^+ motsvaras därmed av integrering över enhetsskivan.

Motsvarande parameterframställning och beräkning för Y^- ger att även $dS(Y^-) = \frac{1}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}dz_1dz_2$ med parameterytan $|\bar{z}| < 1$. Detta medför att g-integralerna respektive h-integralerna kan summeras och lösningsformeln skrivas om så att

$$
\begin{aligned}
u(\bar{x},t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}&\left[2t\iint_{|\bar{z}|<1}\frac{g(x_1+ctz_1, x_2+ctz_2)}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}dz_1dz_2\right] \\
&+ \frac{t}{2\pi}\iint_{|\bar{z}|<1}\frac{h(x_1+ctz_1, x_2+ctz_2)}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}}dz_1dz_2.
\end{aligned}
$$

Satsen är bevisad. □

Formeln visar att lösningsvärdet i given punkt $u(\bar{x}_0, t_0)$ beror av begynnelsedata i en cirkelskiva med centrum $\bar{x}_0$ och med radien ct_0. Det vill säga beroendeområdet består av mängden

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : |\bar{x_0} - \bar{x}| < ct_0\}.$$

För alla värden $u(\bar{x}, t)$ som för ett fixt $t > 0$ ska påverkas av ett initialt värde från en punkt $\bar{x}_0$ gäller då att $|\bar{x}_0 - \bar{x}| \leq ct$. Det vill säga påverkansområdet av initial data från en punkt $\bar{x}_0$ är mängden

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2, t \geq 0 : |\bar{x} - \bar{x_0}| \leq ct\}.$$

Vi inser att påverkansområdet är en begränsad mängd för alla $t > 0$, vilket implicerar att vågekvationen i $\mathbb{R}^2$ har ändlig fortplantningshastighet. Betrakta för fixt $t > 0$ mängden $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : |\bar{x} - \bar{x_0}| > ct\}$. För alla dessa punkter är $u(\bar{x}, t)$ ej påverkat av data i punkten $\bar{x_0}$ och de kommer fortsätta vara opåverkade så länge som $t < \frac{|\bar{x} - \bar{x_0}|}{c}$.

Vågsignaler färdas inte distinkt i $\mathbb{R}^2$. En betraktare i punkten $\bar{x}$ i planet upplever först inget av en kommande vågfront, sedan vid vid tidpunkten $t = \frac{|\bar{x} - \bar{x_0}|}{c}$ upplevs vågen och därefter fortsätter rörelse i form av historiska störningar i all tid $t > \frac{|\bar{x} - \bar{x_0}|}{c}$, även om rörelsen ebbar ut med $t \to \infty$, se [22].

6 Energimetoder

I detta avsnitt introduceras begreppet energi för homogena vågekvationen. Vågekvationens energimängd visar sig under vissa förutsättningar vara konstant över tiden. Energiegenskapen använder vi för bevis av entydighet för C^2-lösningar.

Definition 6.1. *Betrakta en funktion $u(\bar{x}, t)$ Vi skriver funktionens energi vid tidpunkt t som*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_D (u_t(\bar{x}, t)^2 + c^2 |\nabla u(\bar{x}, t)|^2 d\bar{x}, \qquad D \subset \mathbb{R}^n.$$

Allmänt borde vi kunna förvänta oss att funktionens, i detta fall vågornas, energi $E(t)$ ökar (laddas), minskar (urladdas) eller är konstant över tiden.

I det följande ska visas att för lösningar från de explicita formler vi visat tidigare till den homogena vågekvationen i $\mathbb{R}^n$ med begynnelsedata av Cauchytyp gäller att energin är konstant, under förutsättning att datan har *kompakt stöd.*

Definition 6.2 (Kompakt stöd)**.** *Stödet för en kontinuerlig funktion är förslutningen av den mängd där den är skild från noll. En kontinuerlig funktion har kompakt stöd i $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ om den är noll utanför en kompakt mängd som omfattas av Ω, se [17, s. 8]. Mängden av kontinuerliga funktioner definierade i ett öppet sammanhängande område Ω vilkas stöd är en kompakt delmängd av Ω noteras $C_c(\Omega)$.*

Följande hjälpsats använder vi för vågekvationen i $\mathbb{R}^n$, där $n \geq 2$.

Lemma 6.1 (Partiell integration i flera variabler)**.** *Låt Ω vara en begränsad öppen delmängd av $\mathbb{R}^n$ där $\partial\Omega \in C^1$. Låt $\vec{F} = (F_1, ..., F_n)$ vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^n$ och v en funktion. Om $v, \vec{F} \in C^1(\Omega \cup \partial\Omega)$ då är*

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \vec{F} d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} (v\vec{F}) \cdot \vec{N} dS - \int_\Omega v(\nabla \cdot \vec{F}) d\bar{x}$$

där $\vec{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalvektorn på $\partial\Omega$.

Bevis. Använd identiteten $\nabla \cdot (v\vec{F}) = v(\nabla \cdot \vec{F}) + \nabla v \cdot \vec{F}$, se [17, s.12]. Då har vi att

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \vec{F} d\bar{x} = \int_\Omega \nabla \cdot (v\vec{F}) d\bar{x} - \int_\Omega v(\nabla \cdot \vec{F} d\bar{x}).$$

Divergenssatsen på första termen i högerledet ger

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \vec{F} d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} (v\vec{F}) \cdot \vec{N} dS - \int_\Omega v(\nabla \cdot \vec{F}) d\bar{x},$$

vilket bevisar Lemmat. □

Sats 6.2. *Om $u(\bar{x}, t)$ är en C^2-lösning och denna lösning ges av någon av de explicita formlerna visade i sats 3.2 (d'Alemberts formel), sats 4.2 (Kirchhoffs formel) och sats 5.1 (formel för $\mathbb{R}^2$) av Cauchyproblemet*

$$\begin{cases} u_{tt}(\bar{x}, t) - c^2 \Delta u(\bar{x}, t) = 0, & \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ u(\bar{x}, 0) = g(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^n \\ u_t(\bar{x}, 0) = h(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

där $n = 1, 2, 3$ och $g, h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ så är $E'(t) = 0$, så energin $E(t) = konstant$.

Vi påminner om att vi tidigare motiverat att vågekvationen har ändlig fortplantningshastighet. Detta implicerar att om stödet för $t = 0$ är mängden $\{x \in \mathbb{R}^n : |\bar{x}| \leq a\}$ så gäller för varje fixt värde på $t > 0$ att $u = 0$ för värden i mängden $\{x \in \mathbb{R}^n : |\bar{x}| > a + ct\}$. För varje $t > 0$ kan vi bilda ett sammanhängande begränsat öppet område $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sådant att funktionens stöd blir helt inneslutet i Ω. Vidare, om u är kontinuerligt deriverbar har även de partiella derivatorna och därmed energiintegranden kompakt stöd.

Bevis. Låt $n = 1$. Per definition är energin för u

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}^2 + c^2 \frac{\partial u}{\partial x}^2 \right) dx.$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx.$$

Partialintegrera den andra termen

$$2c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx = 2c^2 \left(\left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx \right)$$

Av kompakt stöd och begränsad fortplantningshet har vi att termen

$$\lim_{a\to\infty}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{-a}^{a}=0,$$

det vill säga att denna term försvinner och kvar får vi att

$$\begin{aligned}E'(t)&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2c^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}u_t\left(u_{tt}-c^2u_{xx}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}u_t(0)dx=0\end{aligned}$$

och satsen är bevisad för $n=1$.

Låt $n=2$. Då skriver vi energin som

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(u_t^2+c^2u_{x_1}^2+c^2u_{x_2}^2\right)dx_1dx_2.$$

Derivering ger

$$E'(t)=\int_{\mathbb{R}^2}u_tu_{tt}+c^2u_{x_1}u_{tx_1}+c^2u_{x_2}u_{tx_2}d\bar{x}.$$

$$E'(t)=\int_{\Omega}u_tu_{tt}+c^2u_{x_1}u_{tx_1}+c^2u_{x_2}u_{tx_2}d\bar{x}.$$

Definiera ett vektorfält $\vec{F}=(u_{x_1},u_{x_2})$ och tillämpa partiell integration i flera variabler, enligt lemma 6.1 så att

$$\begin{aligned}E'(t)&=\int_{\Omega}u_tu_{tt}+c^2u_{x_1}u_{tx_1}+c^2u_{x_2}u_{tx_2}d\bar{x}\\&=\int_{\Omega}u_tu_{tt}+c^2\left[\nabla u_t\cdot\vec{F}\right]d\bar{x}\\&=\int_{\Omega}u_tu_{tt}+c^2\left[\nabla\cdot(u_t\vec{F})-u_t(\nabla\cdot\vec{F})\right]d\bar{x}\\&=\int_{\Omega}u_tu_{tt}d\bar{x}+c^2\int_{\partial\Omega}u_t\vec{F}\cdot\vec{N}dS-c^2\int_{\Omega}u_t(\nabla\cdot\vec{F})d\bar{x}\\&=\int_{\Omega}u_tu_{tt}d\bar{x}+c^2\int_{\partial\Omega}u_tu_{x_1}N_1dS+c^2\int_{\partial\Omega}u_tu_{x_2}N_2dS-\\&-c^2\int_{\Omega}u_tu_{x_1x_1}d\bar{x}-c^2\int_{\Omega}u_tu_{x_2x_2}d\bar{x}=\\&=\int_{\Omega}u_tu_{tt}d\bar{x}+0+0-c^2\int_{\Omega}u_tu_{x_1x_1}+u_tu_{x_2x_2}d\bar{x}\\&=\int_{\Omega}u_t(u_{tt}-c^2\Delta u)d\bar{x}=0,\end{aligned}$$

Där termerna på randen försvinner på grund av kompakt stöd och begränsad fortplantningshastighet. Satsen är därmed bevisad för $n = 2$.

Beviset för $n = 3$ genomförs analogt med två dimensioner och utlämnas därför. □

Anmärkning 6.1. *Satsen gäller även för $n \geq 3$. [14, s. 91]*

Energiintegraler ska vi nu använda för att visa att det existerar som mest en unik lösning av klass C^2 till ett rand-/begynnelsevärdesproblem för vågekvationen i $\mathbb{R}^n$, under följande förutsättningar, se [4, s. 83 och s. 51].

Låt $U \subset \mathbb{R}^n$, med en slät rand ∂U. Sätt $U_T = \Omega \times (0, T], \Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$, där $\bar{U}_T = U_T \cup \partial U$ och $T > 0$.

Betrakta rand/begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{tt}(\bar{x}, t) - c^2 \Delta u(\bar{x}, t) = f, & \bar{x}, t \in U_T \\ u(\bar{x}, t) = g, & \bar{x}, t \in \Gamma_T \\ u_t(\bar{x}, 0) = h, & \bar{x} \in U \end{cases} \tag{20}$$

Sats 6.3. *Det existerar som mest en funktion $u \in C^2(\bar{U}_T)$ som löser (20), se [4, s. 83].*

Bevis. Antag att u_1 och u_2 bägge två är C^2 och löser (20). Definiera $w(\bar{x}, t) = u_1 - u_2$ som på grund av linjäritet löser

$$\begin{cases} w_{tt}(\bar{x}, t) - c^2 \Delta w(\bar{x}, t) = 0, & \bar{x}, t \in U_T \\ w(\bar{x}, t) = 0, & \bar{x}, t \in \Gamma_T \\ w_t(\bar{x}, 0) = 0, & \bar{x} \in U \end{cases}$$

Energi för w i U skriver vi per definitionen som

$$E_w(t) = \frac{1}{2} \int_U w_t(\bar{x}, t)^2 + c^2 |\nabla w(\bar{x}, t)|^2 d\bar{x}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Vi deriverar med avseende på t. Då får vi

$$\begin{aligned} E_w'(t) &= \int_U w_t w_{tt} + c^2 (w_{x_1} w_{tx_1} + w_{x_2} w_{tx_2} + ...) d\bar{x} \\ &= \int_U w_t w_{tt} + c^2 (\nabla w \cdot \nabla w_t d\bar{x}) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Definiera $\vec{F} = \nabla w$ och tillämpa partiell integration i flera variabler, enligt lemma 6.1. Då får vi

$$\begin{aligned} E_w'(t) &= \int_U w_t w_{tt} + c^2 (\vec{F} \cdot \nabla w_t) d\bar{x} \\ &= \int_U w_t w_{tt} d\bar{x} + c^2 \int_{\partial U} w_t \vec{F} \cdot \vec{N} dS - c^2 \int_U w_t (\nabla \cdot \vec{F}) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Andra termen är noll, ty $w = 0$ och därmed $w_t = 0$ på $\partial U \times [0, T]$. Då har vi

$$\begin{aligned} E_w'(t) &= \int_U w_t w_{tt} - c^2 w_t (\nabla \cdot \nabla w) d\bar{x} \\ &= \int_U w_t w_{tt} - c^2 w_t \Delta w d\bar{x} = 0. \end{aligned}$$

Vi har $E_w(0) = 0$, ty $w_t(\bar{x}, 0) = 0$ och $w = 0$ på Γ_T, vilket ger $E_w(t) = 0$. För $t > 0$ gäller då att

$$\begin{cases} w_t = 0 \\ |\nabla w| = 0, \end{cases}$$

vilket innebär att $w = \phi(\bar{x})$, där ϕ är en funktion. Då får vi villkoret

$$|\nabla w| = |\nabla \phi(\bar{x})| = 0,$$

vilket betyder att $w = \phi(\bar{x}) = konstant$. Denna är noll, ty $w(\bar{x}, 0) = 0$. Därmed gäller att $w = u_1 - u_2 = 0$ i U_T. $\square$

Minns från sektion om vågekvationen i en dimension på ett intervall att vi påstod att C^2-lösning med variabelseparation och parallellogrammetod representerarde samma unika lösning till ett Cauchyproblem med randvillkor av Dirichlettyp. Vi visar detta med ett exempel.

Exempel 6.1. *Vi visar att om u(x,t) är en C^2-lösning av cauchyproblemet med randvillkor av Dirichlettyp*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < l \quad , t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & 0 < x < l \\ u_t(x,0) = h(x), & 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{21}$$

så är u unik.

Antag att u_1 och u_2 bägge två är C^2 och löser (21). Låt $w(\bar{x}, t) = u_1 - u_2$. Då gäller

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - c^2 w_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < l \quad , t > 0 \\ w(\bar{x},0) = 0, & 0 < x < l \\ w_t(\bar{x},0) = 0, & 0 < x < l \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

Beräkna

$$\begin{aligned} E_w'(t) &= \int_0^l w_t u_{tt} + c^2 w_x w_{tx} dx = \int_0^l w_t u_{tt} dx + c^2 \left([w_t w_x]_0^l - \int_0^l w_t u_{xx} dx \right) \\ &= \int_0^l w_t u_{tt} dx + c^2 \left(0 - \int_0^l w_t w_{xx} dx \right) = \int_0^l w_t (w_{tt} - c^2 w_{xx}) dx = 0. \end{aligned}$$

Då är $E_w(t) = E_w(0) = 0$. För $t > 0$ gäller då från definitionen av energi att

$$\begin{cases} w_t = 0 \\ w_x = 0, \end{cases}$$

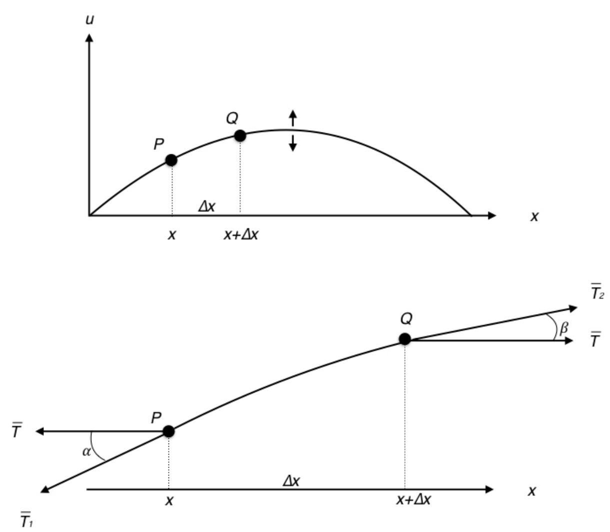
vilket ger att $w(x,t) =$ konstant. Denna är noll, ty $w(\bar{x}, 0) = 0$. Därmed gäller att $w = u_1 - u_2 = 0$.

7 Vibrerande strängar, ljus och ljud

Vi ska se hur den fysikaliska motiveringen ser ut för vågekvationen i $\mathbb{R}$ som modell för en vibrerande sträng och i $\mathbb{R}^3$ som modell för spridning av ljus och ljud.

7.1 Vibrerande sträng

Antag att en vibrerande sträng är fäst i punkterna $x = 0$ och $x = l$. Definiera funktionen $u(x,t)$ som strängens vertikala förflyttning från x-axeln vid given position x och tidpunkt t. Punkterna P och Q är två godtyckliga tätt placerade punkter på strängen (Figur 10).



Figur 10: Vibrerande sträng

Vi antar att: Strängens massa per längdenhet är konstant $\rho(x)$. Strängen är perfekt elastisk och inget motstånd mot böjning existerar. Gravitationen kan ignoreras. Fästpunkterna är fixerade. Den horisontella förflyttningen av strängen är noll eller så liten att den kan negligeras. Kurvans lutning är liten, det vill säga $|u(x,t)|$ är litet.

Summan av den horisontella kraften i bägge ändar är noll. Vi kallar den horisontella kraften en ände för $\bar{T}$ och skriver $\bar{T} = \bar{T}_1 \cos\alpha = \bar{T}_2 \cos\beta$. Vidare enligt fysikalisk lag är summan av den *vertikala* krafterna

$$\sum \bar{F}_{vertikal} = ma_{vertikal}$$

där a är accelleration och m är massa.

Observera att Δx i detta avsnitt betecknar en sträcka i x, inte Laplaceoperatorn. I vår modell av strängen mellan punkterna P och Q är då

$$\begin{aligned} m &= \rho\Delta x = \rho(x+\Delta x) - \rho(x), \\ a_{vertikal} &= u_{tt}(x,t). \end{aligned}$$

Samtidigt stipulerar modellen att

$$\sum \bar{F}_{vertikal} = \bar{T}_2 \sin\beta - \bar{T}_1 \sin\alpha,$$

så i vår modell av strängen mellan punkterna P och Q har vi att

$$\bar{T}_2 \sin\beta - \bar{T}_1 \sin\alpha = \rho\Delta x u_{tt} \Leftrightarrow \frac{\bar{T}_2 \sin\beta - \bar{T}_1 \sin\alpha}{\bar{T}} = \frac{\rho\Delta x}{\bar{T}} u_{tt}.$$

Vi skriver om vänsterledet så att

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T}_2 \sin\beta - \bar{T}_1 \sin\alpha}{\bar{T}} &= \frac{\bar{T}_2 \sin\beta}{\bar{T}_2 \cos\beta} - \frac{\bar{T}_1 \sin\alpha}{\bar{T}_1 \cos\alpha} \\ &= u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t). \end{aligned}$$

Alltså är

$$u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t) = \frac{\rho\Delta x}{\bar{T}} u_{tt}.$$

Division med $\frac{1}{\Delta x}$ ger att

$$\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{\bar{T}} u_{tt}.$$

Låt $\Delta x \to 0$ så för fixt t ser vi att

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\rho}{\bar{T}} u_{tt} \Leftrightarrow u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0$$

där $c^2 = \frac{\bar{T}}{\rho}$. Därmed har vi, enligt [12] motiverat att vågekvationen $u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0$ kan fungera som en matematisk modell för en vibrerande sträng.

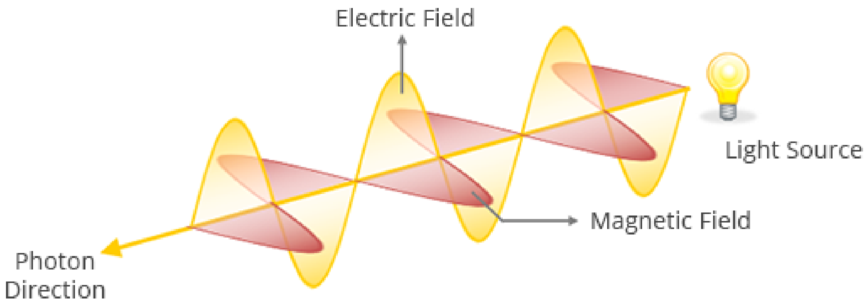
7.2 Ljus

Vi härleder ljusets spridning i vakuum med utgångspunkt i arbetet [14, kap. 3.5a, A2b].

Vi Acceptera utan vidare motivering att spridning av ljusstrålning i vakum ges av nedanstående version av *Maxwells ekvationer*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = c(\nabla \times \vec{H}) & (1) \\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = -c(\nabla \times \vec{E}) & (2) \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 & (3) \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 & (4) \end{cases}$$

där $\vec{E}$ och $\vec{H}$ är vektorvärda funktioner $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ som representerar ett elektriskt fält respektive ett magnetiskt fält. Konstanten c är lika med ljusets hastighet. Se illustration i Figur 11, [1].



Figur 11: Ljusvågor

Beräkning av rotationen på vänsterledet av (1) och insättning av $\nabla \times \vec{E}$ från (2) ger

$$\nabla \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H}.$$

Beräkning av rotationen på högerledet av (1) ger vidare att

$$\begin{aligned} \nabla \times (c(\nabla \times \vec{H})) &= c(\nabla \times (\nabla \times \vec{H})) = c(\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \Delta\vec{H}) \\ &= c(0 - \Delta\vec{H}) = -c\Delta\vec{H}, \end{aligned}$$

ty identiteten $\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \Delta\vec{V}$, se [14, s. 414] och ekvation (4). Ekvation (1) är därmed ekvivalent med PDE för vektorvärd funktion $\vec{H}(\bar{x}, t)$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = -c\Delta\vec{H} \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} - c^2\Delta\vec{H} = \vec{0}$$

Antag att begynnelsevillkoren

$$\begin{cases} \vec{E}(\bar{x},0) = \vec{E}_0(\bar{x}) \\ \vec{H}(\bar{x},0) = \vec{H}_0(\bar{x}), \end{cases}$$

gäller. Med (2) får vi

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(\bar{x},0) = -c(\nabla \times \vec{E}(\bar{x},0)) = -c(\nabla \times \vec{E}_0(\bar{x})).$$

Nu kan vi skriva (1) som ett begynnelsevärdesproblem för PDE:n

$$\begin{cases} \vec{H}_{tt} - c^2\Delta\vec{H} = \vec{0}, & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad t > 0 \\ \vec{H}(\bar{x},0) = \vec{H}_0(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{H}_t(\bar{x},0) = -c(\nabla \times \vec{E}_0(\bar{x})), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{22}$$

Definiera

$$\vec{H} = (H_1(\bar{x},t), H_2(\bar{x},t), H_3(\bar{x},t)$$

där $H_i(\bar{x},t) : \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Skriv (22) på kolonnvektorform (observera att sista kolonnvektorn representerar uträkning av $\nabla \times \vec{E}_0$)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} H_{1tt} \\ H_{2tt} \\ H_{3tt} \end{pmatrix} - c^2 \begin{pmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} H_1(\bar{x},0) \\ H_2(\bar{x},0) \\ H_3(\bar{x},0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{0_1}(\bar{x}) \\ H_{0_2}(\bar{x}) \\ H_{0_3}(\bar{x}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} H_{1t}(\bar{x},0) \\ H_{2t}(\bar{x},0) \\ H_{3t}(\bar{x},0) \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} E_{0_3x_2}(\bar{x}) - E_{0_2x_3}(\bar{x}) \\ E_{0_1x_3}(\bar{x}) - E_{0_3x_1}(\bar{x}) \\ E_{0_2x_1}(\bar{x}) - E_{0_1x_2}(\bar{x}) \end{pmatrix} \end{cases}$$

och inse att (22) är ekvivalent med ett system av tre begynnelsproblem för tre PDE med avseende på H_1, H_2 respektive H_3 som var och ett kan lösas med Kirchhoffs formel (givet uppfyllda differentierbarhetsvillkor). Motsvarande härledning till tre andra lösbara begynnelsproblem kan på samma sätt även göras för (2) och $\vec{E}$. Därmed har vi visat att Maxwells ekvationer kan delas upp i ekvationssystem där vågekvationen är applicerbar, med andra ord att vågekvationen i tre dimensioner kan appliceras på ljusets spridning i vakuum.

Anmärkning 7.1. *I fallet med ljusspridning i icke-vakum så behöver vi tillföra elektrisk laddningsdensitet $\rho(\bar{x},t)$ och en fysikalisk konstant σ beroende av mediet in i Maxwells ekvationer på följande sätt*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = c(\nabla \times \vec{H}) - 4\pi\sigma\vec{E} \\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = -c(\nabla \times \vec{E}) \\ \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad . \end{cases}$$

Omskrivningar och beräkningar analogt med vakuum-fallet ger att första ekvationen kan skrivas som begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \vec{H}_{tt} - c^2\Delta\vec{H} = -4\pi\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}, & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad t > 0 \\ \vec{H}(\bar{x}, 0) = \vec{H}_0(\bar{x}), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{H}_t(\bar{x}, 0) = -c(\nabla \times \vec{E}_0(\bar{x})), & \bar{x} \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

se[14, kap. 3.5a, A2b]. Detta beskriver en så kallad dämpad vågekvation med en term som verkar så att vågorna avtar. Eftersom teorin för hantering av dämpad vågekvation inte gås igenom i detta arbete hänvisas intresserade läsare till [14, kap. 4.4].

7.3 Ljud

Vi härleder ljudets spridning med hänisning till [14, kap. 3.5b, A2c] och [19, kap. 1].

Betrakta en vätska med ett stabilt viloläge. Vid en liten störning kommer vätskans partiklar att vibrera/svänga kring detta läge.

Ljudets fortplanting i luft kan beskrivas som denna typ av partikelförflyttningar. Dessa kan i sin tur beskrivas i termer av ett hastighetsfält $\vec{u} = [u_1(\bar{x}, t), u_2(\bar{x}, t), u_3(\bar{x}, t)]$ och en densitetsfunktion $\rho(\bar{x}, t)$. Vi bortser från temperatur och viskositet. Vi antar att fältet och densitetsfunktionen är tillräckligt många gånger kontinuerligt deriverbara för våra kommande räknesyften.

Vi antar att trycket är en slät funktion som beror av ρ så att $p = p(\rho)$. Vilket ger att

$$\nabla p = p'(\rho)\nabla\rho,$$

ty kedjeregeln ger för komponenterna i gradienten $i = 1, 2, 3$ att

$$\frac{\partial}{\partial x_i} p(\rho(\bar{x}, t)) = p'(\rho)\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(\bar{x}, t).$$

Därmed ska fältet och densiteten uppfylla Eulers ekvationer för konservering av momentum respektive massa i följande form

$$\begin{cases} \rho\left[\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}\right] + p'(\rho)\nabla\rho = \vec{0} & (1) \\ \rho_t + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0 & (2). \end{cases}$$

Vi gör följande antaganden om jämviktsläget (betecknas med index 0):

$$\begin{aligned} \rho_0 &= konstant > 0 \\ \vec{u}_0 &= \vec{0} \\ p_0 &= p(\rho_0). \end{aligned}$$

Betrakta nu en ytterst liten störning från jämviktsläget. Eulers ekvationer gäller fortsatt, men är svåra att finna lösningar till eftersom de bland annat inte är linjära [14]. Därför ska vi för $t > 0$ göra om dessa till linjära approximationer.

Låt $\epsilon > 0$ vara tillräckligt litet. Taylorutveckla ρ för $\epsilon \to 0$

$$\rho = \rho_0 + \hat{\rho}\epsilon + \frac{\hat{\rho}'\epsilon^2}{2!} + ...$$

där $\hat{\rho}$ motsvarar ρ' för $\epsilon = 0$. Vi ignorerar alla termer med grad större än ett och vi har ett approximativt linjärt samband för mycket små ϵ

$$\rho \approx \rho_0 + \hat{\rho}\epsilon.$$

Insättning av denna linjära approximation i första termen i (2) ger

$$\rho_t = 0 + \epsilon\hat{\rho}_t.$$

Låt vidare $\vec{u} = \epsilon\vec{v}$ där $\vec{v} = [v_1(\bar{x}, t), v_2(\bar{x}, t), v_3(\bar{x}, t)]$ Vi sätter in i andra termen i (2), vilket ger

$$\nabla \cdot (\rho\vec{u}) = \nabla \cdot (\rho_0 + \epsilon\hat{\rho})\epsilon\vec{v} \approx \nabla \cdot (\epsilon\rho_0 v_1, \epsilon\rho_0 v_2, \epsilon\rho_0 v_3) = \epsilon\rho_0\nabla \cdot \vec{v},$$

där vi negligerar ϵ^2-termer som uppstår i beräkningar av vektorkomponenterna. Vi kan nu skriva en linjär approximation av (2) för liten avvikelse från jämviktsläge som

$$\hat{\rho}_t + \rho_0\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

där ϵ har förkortats bort.

Vi vänder oss till ekvation (1) och på liknande sätt som ovan med insättning och negligering av andragradstermer beräknar

$$\begin{aligned}
\vec{u}_t &= \epsilon\vec{v}_t, \\
(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} &= (\epsilon\vec{v} \cdot \nabla)\epsilon\vec{v} = \epsilon^2 v_1\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_1} + \epsilon^2 v_2\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_2} + \epsilon^2 v_3\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3} \approx \vec{0}, \\
\nabla\rho &= \nabla(\rho_0 + \hat{\rho}\epsilon) = \frac{\partial\rho_0}{\partial x_1} + \epsilon\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial x_1} + ... = 0 + \epsilon\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial x_1} + ... = \epsilon\nabla\hat{\rho}, \\
p'(\rho) &= p'(\rho_0 + \epsilon\hat{\rho}).
\end{aligned}$$

Vi kan nu skriva en linjär approximation av (1) för liten avvikelse från jämviktsläge som

$$\begin{aligned}
&\epsilon(\rho_0 + \epsilon\hat{\rho})\vec{v}_t + p'(\rho_0 + \epsilon\hat{\rho})\epsilon\nabla\hat{\rho} = (\rho_0 + \epsilon\hat{\rho})\vec{v}_t + p'(\rho_0 + \epsilon\hat{\rho})\nabla\hat{\rho} \\
&= \rho_0\vec{v}_t + p'(\rho_0)\nabla\hat{\rho} = \vec{0}, \qquad \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Ersätt $\hat{\rho}$ med ρ och $\vec{v}$ med $\vec{u}$, definiera $p'(\rho_0) := c_0^2$ och skriv linjära Eulerekvationerna

$$\begin{cases} \rho_0\vec{u}_t + c_0^2\nabla\rho = \vec{0} & (3) \\ \rho_t + \rho_0\nabla \cdot \vec{u} = 0 & (4). \end{cases}$$

Vi kan skriva systemet (3) och (4) som en ekvation med ρ genom att derivera (4) med avseende på t så att

$$\rho_{tt} + \rho_0\nabla \cdot \vec{u}_t = 0,$$

ta divergensen ($\nabla\cdot$) för (3) och dividera med ρ_0 som ger att

$$\nabla \cdot \vec{u}_t = -\frac{c_0^2}{\rho_0}\Delta\rho$$

som vid insättning i (4) ger

$$\rho_{tt} - c_0^2\Delta\rho = 0.$$

som vi ser är är en vågekvation för ρ.

Det återstår att härleda vågekvationen för hastighetsfältet $\vec{u}$. Vi antar att fältet $\vec{u}$ är ett potentialfält, vilket ofta är fallet när viskositeten kan negligeras, enligt [19].

Definition 7.1 (Potentialfält)**.** *Ett fält $\vec{u}$ som i hela sin definitionsmängd kan skrivas*

$$\vec{u} = \nabla\phi$$

för någon funktion ϕ, kallas för ett potentialfält.

Vi sätter in potentialen i (3), vilket ger

$$\rho_0\nabla\phi_t + c_0^2\nabla\rho = \vec{0}$$

som är ekvivalent med

$$\rho_0\phi_t + c_0^2\rho = 0.$$

Derivering med avseende på t ger att

$$\rho_0\phi_{tt} + c_0^2\rho_t = 0.$$

Vi sätter in potentialen i (4) vilket ger att

$$\rho_t = -\rho_0\nabla\cdot\nabla\phi = -\rho_0\Delta\phi$$

som vi sätter in i omskrivningen av (3). Då får vi

$$\phi_{tt} - c_0^2\Delta\phi = 0$$

vilket visar att ϕ uppfyller vågekvationen. Tag gradient på ekvationen ovan. Då får vi

$$\nabla\phi_{tt} - c_0^2\nabla\Delta\phi = \vec{0},$$

vilket är ekvivalent med

$$\nabla\phi_{tt} - c_0^2\Delta\nabla\phi = \vec{0},$$

vlket inses genom beräkning av $\nabla\Delta\phi$ på komponentnivå. Återinsättning, $\vec{u} = \nabla\phi$ ger

$$\vec{u}_{tt} - c_0^2\Delta\vec{u} = \vec{0}$$

som är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} u_{1tt} - c_0^2 \Delta u_1 = 0 \\ u_{2tt} - c_0^2 \Delta u_2 = 0 \\ u_{3tt} - c_0^2 \Delta u_3 = 0. \end{cases}$$

Det visar sig alltså att vågekvationen kan stå modell för utbredningen av en liten rubbning av hastighetsfältet $\vec{u}$. Därmed har vi härlett att de linjariserade Eulerekvationerna och kan med givna antaganden och approximationer hävda att vågekvationen kan appliceras på ljusets utbredning.

Referenser

[1] Bigshotcamera.com. *Wave nature of light.* URL: `http://www.bigshotcamera.com/learn/lcd-display/polarization`.

[2] Peter Constantin. *The wave equation.* URL: `https://web.math.princeton.edu/~const/wave.pdf`.

[3] William P. Crummett och Gerald F. Wheeler. "The Vibrating String Controversy". I: *Am. J. Phys.* 55(1) (1987), s. 33–37.

[4] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998. ISBN: 0821807722.

[5] Denise Gutermuth. *Picard's Existence and Uniqueness Theorem.* URL: `https://ptolemy.berkeley.edu/projects/embedded/eecsx44/lectures/Spring2013/Picard.pdf`.

[6] Anders Holst. *Fourieranalys.* 2014. URL: `https://docplayer.se/114697130-Fourieranalys-anders-holst.html`.

[7] Arne Persson Lars-Christer Böiers. *Analys i en variabel.* Studentlitteratur, 2010. ISBN: 9789144067650.

[8] Arne Persson Lars-Christer Böiers. *Analys i två variabler.* Studentlitteratur, 2005. ISBN: 9789144038698.

[9] Julie Levandosky. *2 First-Order Equations: Method of Characteristics.* URL: `https://web.stanford.edu/class/math220a/handouts/firstorder.pdf`.

[10] Julie Levandosky. *5 Wave Equation in R.* URL: `https://web.stanford.edu/class/math220a/handouts/waveequation1.pdf`.

[11] Julie Levandosky. *6 Wave Equation on an Interval: Separation of Variables.* URL: `https://web.stanford.edu/class/math220a/handouts/waveequation2.pdf`.

[12] Christopher Lum. *Derivation of the 1D Wave Equation.* URL: `https://www.youtube.com/watch?v=IAut5Y-Ns7g`.

[13] Andrzej Szulkin och Martin Tamm. *Analytiska funktioner, likformig konvergens och potensserier.*

[14] Robert C. McOwen. *Partial Differential Equations.* Pearsson Education, Inc., 2003. ISBN: 0130093351.

[15] Artem S. Novozhilov. *7 Solving the wave equation. Some extensions.* 2020. URL: `https://www.ndsu.edu/pubweb/~novozhil/Teaching/483%20Data/07.pdf`.

[16] Enders A. Robinson. "History of the wave equation and transforms in engineering". I: *Review ofProgress in Quantitative Nondestructive Evaluation* 9 (1990), s. 29.

[17] Sandro Salsa. *Partial Differential Equations in Action From Modelling to Theory.* Springer-Verlag Italia, 2008. ISBN: 9788847007512.

[18] Walter A. Strauss. *Partial Differential Equations chapter 4*.

[19] Bengt O. Enflo Lars H. Söderholm. *Partial Differential Equations with Applications to Wave Theory*. URL: https://www.mech.kth.se/~lhs/PDE_wave.pdf.

[20] Alberto Torchinsky. "The Fourier Transform and the Wave Equation". I: *The American Mathematical Monthly* 118 (2011), s. 599–609.

[21] Eric Weisstein. *Mathworld*. URL: https://mathworld.wolfram.com.

[22] Baisheng Yan. *Lecture Notes for Partial Differential Equations I*. 2016. URL: https://users.math.msu.edu/users/yanb/yan-lecture.pdf.