

SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Sturms oscillationssats och spektrum

av

Ela Palynskaya

2021 - No K1

Sturms oscillationssats och spektrum

Ela Palynskaya

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Pavel Kurasov

2021

Sturms oscillationssats och spektrum

Ela Palynskaya

Januari 2021

Abstrakt

Arbetet handlar om Sturm-Liouville egenvärdesproblem som har stor betydelse i fysik och matematik. Sturms oscillationssats och dess bevis diskuteras. Detta kommer att göras genom att förklara den bakgrundskunskap som behövs för Sturms oscillationssats. Som tillämpning löser vi Schrödingerekvationen för stegpotential och diskuterar dess spektrum.

Förord och tack

Detta arbete utgör ett examensarbete om 15 poäng vid matematiska institutionen på Stockholms Universitet.

Jag vill tacka min handledare Pavel Kurasov som föreslog ämnet och guidade mig genom arbetet. Jag vill även tacka Jonathan Rohleder som granskade arbetet och kom med bra återkoppling.

Innehåll

1 Introduktion	4
1.1 Historia.....	4
Sturm-Liouville Problem	5
2.1 Exempel på Sturm-Liouvilleekvationer.....	5
2.2 Sturm-Liouville ekvation.....	5
2.3 Sturm-Liouville randvärdesproblem.....	5
2.4 Randvillkor.....	6
2.5 Reguljärt SLP.....	7
2.6 Den svängade strängen eller separation av variabler	10
2.7 Sammanfattning.....	13
3 Ett exempel SLP med stegpotential	14
4 Oscillationsteori	38
4.1 Oscillation och Non-Oscillation.....	38
4.2 Prüfersubstitution.....	38
4.3 Sturms oscillationssats.....	40
4.4 Beviset av satsen 2.5.4.....	43
5 Betydelsen av Sturm-Liouville-teori	44

1 Introduktion

Bland alla de ordinära differentialekvationerna (ODE) finns det några ekvationer som är explicit lösbara, vilket innebär att lösningarna kan skrivas som en kombination av elementära funktioner. Dock är det välkänt att de flesta ordinära differentialekvationer inte är explicit lösbara så att vi inte uttrycka lösningar som elementära funktioner.

I det senare fallet, tack vare Sturm och Liouvilles bidrag, kan deras teori användas för att undersöka kvalitativa egenskaper hos lösningarna på några av de differentialekvationer som vi inte uttryckligen kan lösa.

I avsnitt 2 kommer vi att introducera Sturm-Liouville-egenvärdesproblem som en allmän klass av randvärdesproblem och tillhandahålla teorin som behövs för att lösa olika problem. I avsnitt 4 kommer vi att behandla Sturms oscillationssats och bakgrundkunskap som behövs. Vi bevisar även en sats, som gäller egenskaper av reguljära Sturm-Liouville-egenvärdesproblem. I avsnitt 3 kommer vi att hitta icke-triviala lösningar för Sturm-Liouville problem med stegpotential.

1.1 Historia

Sturm-Liouville-egenvärdeproblem formulerades oberoende för första gången på 1830-talet av Charles-François Sturm (1803 – 1855) och Joseph Liouville (1806 – 1882). De två franska matematikerna hade blivit vänner och publicerade tillsammans 1837 ett omfattande arbete om detta problem.

Sturm la fokus på egenskaperna hos egenvärden och beteende hos egenfunktionerna, medan Liouville fokuserade på utvidgningen av godtyckliga funktioner i termer av egenfunktioner.

Den första antydning till Sturm-Liouville-egenvärdesproblem fanns redan i början på 1700-talet som tydligt uppstod i studien av de vibrerande rörelserna i hängande kedjor av Taylor och Bernoulli. Detta ledde till antagandena om att det finns oänligt många lösningar till ekvationen och vilket tillstånd som helst i systemet kan uttryckas som en serie av funktioner.

Sturms och Liouvilles verk var en vändpunkt inom området av differentialekvationer, innan dess var fokus på att uttrycka alla lösningar. Nu blev man intresserad att visa satser om differentialekvationer utan att känna lösningarna.

Utvecklingen av Sturm-Liouville-problemet hände innan funktionalanalys utvecklades, som ägde rum i början av 1900-talet. Vid den tiden hade Schrödingers vågekvation införts. Återigen, med hjälp av metoden för separering av variabler, anlände matematikern John von Neumann (1903-1957) till ekvationen som vi idag kallar Sturm-Liouville-ekvation. Han var den första att hitta att funktionalanalys var det perfekta verktyget för att förstå Sturm-Liouville-egenvärdesproblem. Detta var den mest studerade och mest diskuterade partiella differentialekvation. Fram till idag, Sturm-Liouville-egenvärdesproblem är fortfarande ett utmanande matematiskt forskningsområde.

2 Sturm-Liouville-problem

2.1 Exempel på Sturm-Liouville-ekvationer

Det finns många ekvationer som omvandlas till ett Sturm-Liouville-egenvärdesproblem. Här är ett antal ”berömda” differentialekvationer, som kan representeras i SL-form:

$$\begin{aligned}x^2y'' - xy' + (x^2 - c^2)y &= 0 \text{ (Bessel),} \\(1 - x^2)y'' - 2xy' + c(c + 1)y &= 0 \text{ (Legendre),} \\(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y &= 0 \text{ (Chebyshev),} \\xy'' + (1 - x)y' + ay &= 0 \text{ (Laguerre),} \\xy'' - 2xy' + 2ny &= 0 \text{ (Hermite).}\end{aligned}$$

2.2 Sturm-Liouville-ekvation

En klassisk Sturm-Liouville-ekvation är en ordinär differentialekvation av andra ordningen med parameter λ av formen:

$$-[p(x)y']' + [q(x) - \lambda r(x)]y = 0. \quad (1)$$

Här är $y(x)$ en icke-trivial funktion eller kvantmekanisk vågfunktion av den fria variabeln x och λ är en spektral parameter eller *egenvärde*. Funktionerna $p(x)$, $q(x)$ och $r(x) > c > 0$ specificeras från början. Funktionen $r(x)$ kallas vikt- eller densitet-funktionen. I det enklaste fallet där alla koefficienter är kontinuerliga på det slutna intervallet $[a, b]$ och p har kontinuerlig derivata, kallas en funktion y en lösning om den är kontinuerlig på (a, b) och uppfyller ekvation (1). Om p , q och r uppfyller lämpliga villkoren kommer ekvationen att ha en familj av lösningar, kallade *egenfunktioner*, som motsvarar *egenvärde*.

Sturm - Liouville-problem (SLP, förkortat) består av två delar: den första delen handlar om att hitta sådana värden för parametern λ för vilka problemet har en icke-trivial lösning (inte identiskt noll); sådana värden kallas *egenvärden*. Den andra delen inkluderar bestämning lösningar som kallas *egenfunktioner*.

2.3 Sturm-Liouville-problem

Definition 2.1. Sturm-Liouville-problem består av den linjära differentialoperator (*Sturm-Liouville operator*) som har formen

$$L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y \quad i \quad J = (a, b), \quad a < x < b \quad (2)$$

och då gäller att Sturm-Liouville-ekvation (1) kan skrivas på formen

$$L[y] = \lambda y \quad (3)$$

med randvillkor

$$B_a[y] = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad B_b[y] = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (4)$$

där

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0 \text{ och } \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

En icke-trivialfunktion som löser (1), (3) med randvillkor (4) kallas **egenfunktion** och λ är motsvarande **egenvärde**.

Problemet med att hitta värden på λ för vilken det finns en icke-trivial lösning kallas **Sturm-Liouville-egenvärdesproblem**.

2.4 Randvillkor

För olika värden har vi speciella typer av randvillkor. Randvillkor för en lösning y av en ekvivalent ekvation (1) på intervallet $[a, b]$ klassificeras som **separerade** och **periodiska**.

Separerade randvillkor skrivs på formen

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

där $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, är konstanter samt $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ och $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. När båda uttrycken är lika med noll sägs randvillkoren vara homogena.

Dirichlet-Neumann-randvillkor

För fallet $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ samtidigt α_1 och β_1 är skild från 0, har vi vad som kallas *Dirichlet* randvillkor, där lösningen tar fasta värden på gränsen. Det uppkommer till exempel när vi vill se hur en vanlig sträng beter sig när den sätts i svängning, när strängens ändar är fastspända.

För fallet $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ samtidigt α_2 och β_2 är skild från 0 har vi *Neumann*-randvillkor. *Neumann*-randvillkor uppkommer bland annat när vi vill se hur samma sträng beter sig i svängning, när strängens ändar dinglar.

Randvillkoren för dessa två problem anges i separata punkter därför kallas de *separerade randvillkor*.

En annan typ av randvillkor som ofta förekommer är det **periodiska randvillkoret**, som skrivs på formen

$$y(a) = y(b),$$

$$y'(a) = y'(b).$$

De periodiska randvillkor är inte separerade så att problem som använder dessa villkor inte är "tekniskt" SL-problem och måste hanteras på ett annat sätt än problemen med separerade randvillkoren.

2.5 Reguljära Sturm-Liouville-problem

De mest vanliga typer av Sturm-Liouville-problem är reguljära. Vi kommer att diskutera mer detaljerat om den reguljära typen av Sturm-Liouville-problem. Detta är nödvändiga för att göra teorin så enkel som möjligt och det visar sig att dessa villkor gäller i många problem.

Definition 2.2. Ett reguljärt Sturm-Liouville-problem har formen

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + (q(x) - \lambda r(x))y = 0, & a < x < b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}, \quad (5)$$

där

$p(x), q(x), r(x), p'(x)$ är reella och kontinuerliga på intervallet $[a, b]$
 $0 < c < p(x), r(x) < C$ för alla x på intervallet $[a, b]$
 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ är konstanter
 α_1, α_2 är ej noll samtidigt (samma för β_1, β_2).

Vi noterar flera egenskaper hos reguljära Sturm-Liouville-problem.

Sats 2.5.1. *Alla egenvärden av reguljära Sturm-Liouville-problem är reella.*

Bevis. Anta att $\lambda \in \mathbb{C}$ är ett egenvärdet av reguljära Sturm-Liouville-problemet och låt y vara motsvarande egenfunktion. I så fall har vi

$$L[y] = \lambda y, \quad \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \quad (6)$$

Vi inför de komplexa konjugat och får:

$$L[\bar{y}] = \bar{\lambda} \bar{y}, \quad \alpha_1 \bar{y}(a) + \alpha_2 \bar{y}'(a) = 0, \quad \beta_1 \bar{y}(b) + \beta_2 \bar{y}'(b) = 0. \quad (7)$$

Från (2) har vi att

$$L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y$$

Vi multiplicerar $L[y] = \lambda y$ med \bar{y} och multiplicerar $L[\bar{y}] = \bar{\lambda} \bar{y}$ med y och subtraherar den från den andra. Då får vi följande:

$$- [p(y'\bar{y} - \bar{y}'y)]' = (\lambda - \bar{\lambda})y\bar{y}.$$

Vi integrerar det sista uttrycket och får att

$$- [p(y'\bar{y} - \bar{y}'y)] \Big|_a^b = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |y|^2 dx.$$

Vi noterar att VL av den sista ekvationen är lika med noll, pga $y(a) = y(b) = 0$ eller $y'(a) = y'(b) = 0$ som följer från homogena randvillkor från (6) och (7). Det följer att

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |y|^2 dx = 0.$$

Från definitionen av vanlig SLP vet vi att y som egenfunktion skiljer sig från noll, dvs integral av icke-negativ funktion är inte lika med noll. Därför är det enda sättet att tillfredsställa identiteten när $\lambda = \bar{\lambda}$, vilket innebär att λ är reelt, vilket bevisar satsen. ■

Sats 2.5.2. Antag att y_m och y_n är egenfunktioner som motsvarar distinkta egenvärden λ_m och λ_n . Då är y_m och y_n ortogonala på $[a, b]$ med avseende på viktfunktionen $r(x)$.
dvs

$$\int_a^b r(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0.$$

Bevis. Låt att

$$L[y_m] = \lambda_m y_m,$$

$$L[y_n] = \lambda_n y_n.$$

Som i föregående fall skriver vi SL-ekvationerna för funktionerna y_m och y_n , och multiplicerar en med y_n och vice versa och subtraherar en ekvation från en annan. Som resultat fås följande

$$- [p(y'_m y_n - y'_n y_m)]' = (\lambda_m - \lambda_n)r(x) y_m y_n.$$

Vi integrerar det sista uttrycket och får att

$$- [p(y'_m y_n - y'_n y_m)] \Big|_a^b = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx.$$

Vi noterar att VL av den sista ekvationen är lika med noll, pga homogena randvillkor från (6) och från (7). Från detta gäller att

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) y_m y_n dx = 0.$$

Vi vet att $\lambda_m \neq \lambda_n$ samtidigt $r(x) > 0$ enligt förutsättningar som gäller reguljära SLP (se (5)). Således $\int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0$, dvs $\langle y_m, y_n \rangle = 0$ vilket bekräftar ortogonalitet och vilket bevisar satsen. ■

Sats 2.5.3. För varje egenvärde λ_n motsvarar en unik funktion y_n med egenskaper hos reguljära SLP upp till en konstant eller egenfunktioner motsvarande olika egenvärden är linjärt oberoende. multipel.

Innan bevisar vi satsen bör vi definiera Wronskian. *Definition 2.3* I matematik är Wronskian en determinant som introducerades av Józef Hoene-Wroński (1812). Den används i studien av differentialekvationer. Wronskian med två olika funktioner y_1 och y_2 är $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

Bevis. Låt y_1 och y_2 vara egenfunktioner som motsvarar egenvärden λ_n . Detta ger oss följande

$$L[y_1] = \lambda y_1,$$

$$L[y_2] = \lambda y_2.$$

Således

$$y_2(x)L[y_1(x)] - y_1(x)L[y_2(x)] = 0$$

eller

$$-y_2(x) \frac{d}{dx} [p(x)y_1'] + y_1(x) \frac{d}{dx} [p(x)y_2'] = 0.$$

Vi bryter ut $\frac{d}{dx} p(x)$ och får att

$$\frac{d}{dx} [p(x)((y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)))] = 0.$$

Detta innebär att

$$p(x)W(y_1, y_2)(x) = \text{const} = c$$

för alla $x \in [a, b]$. Dock Wronskianen av dessa funktioner är

$$W(y_1(a), y_2(a)) = y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a) = 0$$

eftersom y_1 och y_2 uppfyller samma randvillkor vid a . Alltså

$$W(y_1, y_2)(x) = 0$$

för alla x . Det följer att dessa två funktionerna måste vara linjärt beroende, dvs y_1 skiljer sig åt med en konstant multipel, vilket bevisar satsen. ■

Sats 2.5.4. *Det finns ett oändligt antal egenvärden λ_n som kan ordnas växande ordning:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

med $n \rightarrow \infty$ då $\lambda \rightarrow \infty$.

Beviset på denna sats är något mer avancerat än de tre ovanstående satserna och kommer att visas i avsnitt 4.

2.6 Den svängande strängen eller separation av variabler

Ljudet frambringas ur en gitarr genom att dess strängar försätts i små svängningar. Dessa svängningar fortplantas via gitarrlådan som tryckvågor genom luften. Här finns ett intressant problem i detta sammanhang, nämligen att bestämma hur strängens längd eller spänningsgrad påverkar den tonen vi får. För att undersöka detta ska vi bygga en enkel matematisk modell för den svängande strängen.

Vi kommer att diskutera transversella svängningar av en i ändpunkterna fixerad sträng. Transversella svängningar är sådana där varje punkt rör sig ortogonalt mot strängens viloriktning. För att strängen ska kunna komma i svängning krävs att den är elastisk. Dock antar vi att strängens inre spänning är konstant.

I det här exemplet kommer vi att visa hur SLP uppstår när vi betraktar små svängningar hos en masshomogen elastisk sträng rörlig med fastspända ändpunkter på inbördes avstånd l . Antag att strängen, då den sätts i svängning med liten amplitud, svänger i ett plan.

Låt $u(t, x)$ betecknar avvikelser från jämviktsläget av punkten x på strängen vid tidpunkten t och ändpunkterna $x = 0, x = l$. Här är funktionens $u(t, x)$, som motsvarar den partiella differentialekvationen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x}(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)), \quad (8)$$

där $p(x)$ är den positiva kontinuerlig deriverbara funktionen, som beskriver strängens elasticitet. De fixerade ändpunkterna $(0, l)$ ger att

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0 \quad \text{för alla } t. \quad (9)$$

Vi kommer att beskriva strängens läge och hastighet för att bestämma rörelsen vid tiden t . Då får vi följande:

$$u(0, x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad (10)$$

där $0 \leq x \leq l$ och f och g är givna funktioner som är lika med noll i ändpunkterna 0 och l .

Vi börjar med att söka lösningar till den partiella differentialekvationen med separerade variabler,

$$u(t, x) = \phi(t)y(x).$$

Vi noterar att $u(t, x)$ är skild från 0 enligt definition av vanlig SLP, således är $\phi(t)$ och $y(x)$ skilda från 0 .

Insättningen i (8) ger att

$$\phi''(t)y(x) = \phi(t)(p(x)y'(x))'.$$

Alltså

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \frac{(p(x)y'(x))'}{y(x)}.$$

Vi noterar att HL är oberoende av t , således även VL. Sen är VL oberoende av x , detta gäller även HL. Det följer att båda sidorna är konstanta, och lika med $-\lambda$. Alltså

$$\phi''(t) = -\lambda\phi(t) \quad (11)$$

och

$$(p(x)y'(x))' = -\lambda y(x). \quad (12)$$

Här är λ ett konstant vilket för att underlätta efterföljande beräkningar tar vi med ett minustecken utan att föreslå att tillskriva något till tecknet.

Antag i förutsättningen (vi antar att strängens inre spänning är konstant) $p(x) \equiv p_0 = \text{const}$. Ekvation (12) får formen

$$-p_0 y''(x) = \lambda y(x) \quad (13)$$

Vi hittar sådana värde för parametern λ , där ekvation (13) med randvillkoren

$$y(0) = y(l) = 0 \quad (14)$$

har icke-triviala lösningar.

Vi kommer att betrakta tre fall, när parametern λ är negativ, parametern är lika med noll eller positiv.

Fall 1: $\lambda < 0$. Allmänna lösningen till ekvation (13) kan skrivas med formeln:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{-\lambda}{p_0}} x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{p_0}} x}$$

Enligt randvilkoren får vi

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0.$$

$$y(l) = C_1 e^{\sqrt{\frac{-\lambda}{p_0}} l} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{p_0}} l} = 0.$$

Då följer att

$$C_1 = -C_2 \quad \text{och} \quad C_1 (e^{\sqrt{\frac{-\lambda}{p_0}} x} - e^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{p_0}} x}) = 0.$$

I vårt fall $\sqrt{\frac{-\lambda}{p_0}} x$ är reell och positiv på grund av

$$e^{\sqrt{\frac{-\lambda}{p_0}} x} - e^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{p_0}} x} \neq 0.$$

Så får vi

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0,$$

alltså

$$y(x) \equiv 0.$$

Problemet har inga icke-triviala lösningar.

Fall 2: $\lambda = 0$. I detta fall är allmän lösning av ekvationen (13) av formen

$$y(x) = C_1 x + C_2.$$

Randvilkoren ger

$$y(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$y(l) = C_1 l = 0,$$

alltså $C_1 = 0$. Det följer att problemet har inga icke-triviala lösningar.

Fall 3: $\lambda > 0$. (13) har trigonometriska lösningar

$$y(x) = C_1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{p_0}} x + C_2 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{p_0}} x.$$

Randvilkoren ger

$$y(0) = C_1 = 0,$$

$$y(l) = C_2 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{p_0}} l = 0.$$

Från detta gäller att

$$\sin \sqrt{\frac{\lambda}{p_0}} x = 0$$

eller

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l} \sqrt{p_0},$$

där n är heltal.

Anmärkning. Ur fysikens synvinkel är $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l} \sqrt{p_0}$ inget annat än frekvens och betecknas ω i fysiken.

Vi har ett oändligt antal egenvärden av Sturm-Liouville problem när

$$\lambda = \lambda_n = \frac{(\pi n)^2}{l^2} p_0.$$

Dessa egenvärden motsvarar ett oändligt antal egenfunktioner

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

där n är heltal.

För enkelhets skull antar vi förutsättningar att $l = \pi$. För givet $\lambda_n = p_0 n^2$ har vi icke-triviala lösningar av problem (13), som skrivs med formeln

$$y_n(x) = \sin nx.$$

Vi betraktar ekvation (11) genom att lösa denna för $\lambda = \lambda_n = p_0 n^2$ och får till resultat att $u(t, x) = \phi(t)y(x)$ måste ha formen

$$u_n(t, x) = (a_n \cos \sqrt{-\lambda} t + b_n \sin \sqrt{-\lambda} t) y_n(x),$$

där a_n, b_n är konstanter. Vi noterar att summan av sådana funktioner också löser differentialekvationer (8). Vår lösning blir:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \sqrt{-\lambda_n} t + b_n \sin \sqrt{-\lambda_n} t) y_n(x). \quad (15)$$

Vi har bortsett från konvergensfrågor och får att $u(t, x)$ är en lösning till ekvation (8) som satisfierar randvillkoren (10). Eftersom

$$u_n(0, x) = a_n y_n(x)$$

och

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(0, x) = \sqrt{-\lambda_n} b_n y_n(x)$$

innebär begynnelsevillkoren (12) att

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x), \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{-\lambda_n} b_n y_n(x). \quad (16)$$

Om koefficienterna a_n, b_n i (15) kan bestämmas så att villkoren (16) är uppfyllda blir funktionen $u(t, x)$ åtminstone en lösning till problemet (8), (9), (12).

Anmärkning. Skillnaden mellan en ton och buller är att den förra är en periodisk svängning. Funktionen u representerar en ton på grund av den är periodisk med frekvens $\omega = \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l} \sqrt{p_0}$. När man spelar en not "A" på en gitarr, blir frekvensen 440 Hz. Här kan man variera samtliga parametrar p_0 och l för att uppnå detta. Vi bestämmer p_0 genom att välja ut den av de sex strängarna vi ska spela på. Vi väljer l genom att bestämma var på strängen vi ska sätta fingret.

2.7 Sammanfattning

I avsnitt 2 visar vi att det finns ett oändligt antal av egenvärden λ_n sådana att randvärdeproblemet (13), (14) har icke-triviala lösningar $y_n(x)$ eller egenfunktioner när $\lambda = \lambda_n$ för något n .

Egenvärdena λ_n har att göra med strängens egenfrekvenser. Man brukar kalla mängden av egenvärden för spektrum på grund av analogin mellan mekaniska och elektromagnetiska svängningar. Huvudresultat i detta avsnitt att regulär funktion kan skrivas som en oändlig summa av egenfunktioner, kan uppfattas som en generalisering av spektralsatsen.

Fyra källor citeras i avsnitt 2: *Ordinära differentialekvationer* bok [1], *Equations of mathematical physics* bok [5], *Sturm oscillation and comparison theorems* bok [3] och Anders Källens website [4].

3 Ett exempel SLP med stegpotential

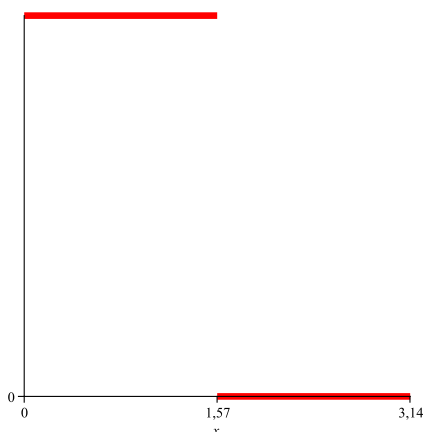
Vi kommer att studera följande Sturm-Liouville-problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [0, \pi], \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad (17)$$

med potential

$$q(x) = \begin{cases} a, & x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \end{cases}$$

där $a > 0$. Se figuren nedan.



Givna problemet kan vi reducera till att hitta två funktioner $y_1(x)$ och $y_2(x)$, som uppfyller ekvationer med villkor:

$$\begin{cases} (1a) & -y_1'' + ay_1 = \lambda y_1, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ (1b) & y_1(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2a) & -y_2'' = \lambda y_2, \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \\ (2b) & y_2(\pi) = 0, \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y_1(\frac{\pi}{2}) = y_2(\frac{\pi}{2}), \\ y_1'(\frac{\pi}{2}) = y_2'(\frac{\pi}{2}), \end{cases}$$

där villkoren (3) är transfervillkor som garanterar att funktionen är glatt i $\frac{\pi}{2}$. Det första villkoret säger att strängen har ingen språng i punkten $\frac{\pi}{2}$, det andra - att strängen inte är böjd vid punkten $\frac{\pi}{2}$. Villkoren $y_1(0) = 0$ och $y_2(\pi) = 0$ uttrycker att strängen är fixerad i ändarna.

För att lösa givna problemet kommer vi att betrakta fem fall, nämligen:

$$1) \lambda < 0, \quad 2) \lambda = 0, \quad 3) 0 < \lambda < a, \quad 4) \lambda = a, \quad 5) \lambda > a.$$

För vart och ett av dessa fall har lösningarna till ekvationerna olika form.

Fall 1: $\lambda < 0$.

I detta fall är båda rötter av karakteristiska ekvationer för differentialekvationer (1a) och (2a) reella och olika, pga allmän lösning kan skrivas på formen:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1 e^{-\sqrt{a-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{a-\lambda}x}, \\ y_2(x) &= C_3 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_4 e^{\sqrt{-\lambda}x}, \end{aligned}$$

där C_i är reela konstanter. Från villkoret (1b) får vi

$$y_1(0) = C_1 + C_2 = 0.$$

Från villkoret (2b) får vi

$$y_2(\pi) = C_3 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + C_4 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} = 0.$$

Villkoren (3) ger följande:

$$\begin{aligned} y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= C_1 e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_3 e^{-\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} + C_4 e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}}, \\ y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sqrt{a-\lambda} C_1 e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} + \sqrt{a-\lambda} C_2 e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} = \\ y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sqrt{-\lambda} C_3 e^{-\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} + \sqrt{-\lambda} C_4 e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Således får vi ett system med avseende på variabler C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_3 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + C_4 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \\ C_1 e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} = C_3 e^{-\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} + C_4 e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} \\ -\sqrt{a-\lambda} C_1 e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} + \sqrt{a-\lambda} C_2 e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{-\lambda} C_3 e^{-\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} + \sqrt{-\lambda} C_4 e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}}. \end{cases} \quad (18)$$

Detta system har en lösning $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, så har vi i det här fallet $y_1(x) \equiv 0$ och $y_2(x) \equiv 0$, dvs får vi triviala lösningen $y(x) \equiv 0$ av givna uppgiften. Vi letar efter λ så systemet (18) har icke-triviala lösningar.

Vi börjar med att lösa systemet (18). Från de två första ekvationerna kan vi C_2 och C_3 :

$$C_2 = -C_1,$$

$$C_3 = -C_4 e^{2\sqrt{-\lambda}\pi},$$

och ersätter dessa uttryck i den tredje och den fjärde ekvationerna:

$$\begin{cases} C_1 e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} - C_1 e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} = -C_4 e^{\sqrt{-\lambda}\frac{3\pi}{2}} + C_4 e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} \\ -\sqrt{a-\lambda} C_1 e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} - \sqrt{a-\lambda} C_1 e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-\lambda} C_4 e^{\sqrt{-\lambda}\frac{3\pi}{2}} + \sqrt{-\lambda} C_4 e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}}, \end{cases}$$

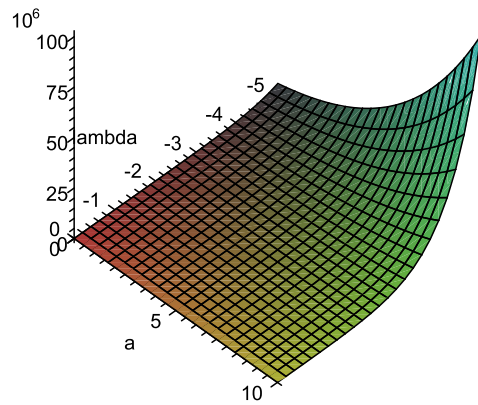
eller

$$\begin{cases} (e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}})C_1 + (e^{\sqrt{-\lambda}\frac{3\pi}{2}} - e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}})C_4 = 0 \\ -\sqrt{a-\lambda}(e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} + e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}})C_1 + \sqrt{-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{\sqrt{-\lambda}\frac{3\pi}{2}})C_4 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

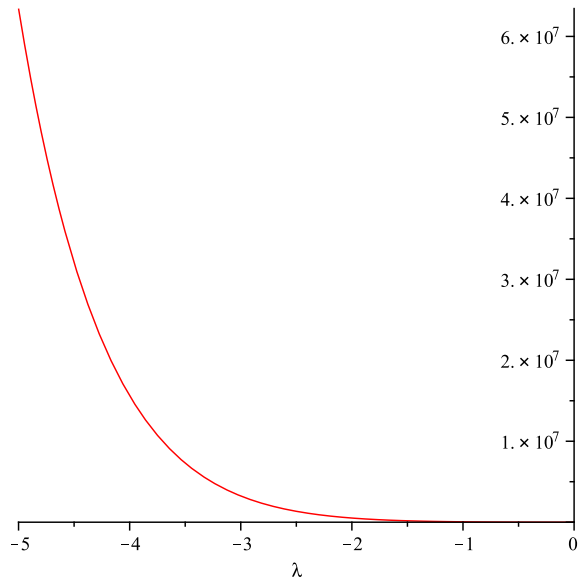
Enligt linjär algebra har systemet icke-triviala lösningar om determinanten för systemmatris är lika med noll.

$$\begin{aligned} D(\lambda, a) &= \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} & e^{\sqrt{-\lambda}\frac{3\pi}{2}} - e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} \\ -\sqrt{a-\lambda}(e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}}) & -\sqrt{-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}\frac{3\pi}{2}} + e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}}) \end{vmatrix} \\ &= -\sqrt{-\lambda}(e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}})(e^{\sqrt{-\lambda}\frac{3\pi}{2}} + e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}}) \\ &\quad + \sqrt{a-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}\frac{3\pi}{2}} - e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}})(e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}}). \end{aligned}$$

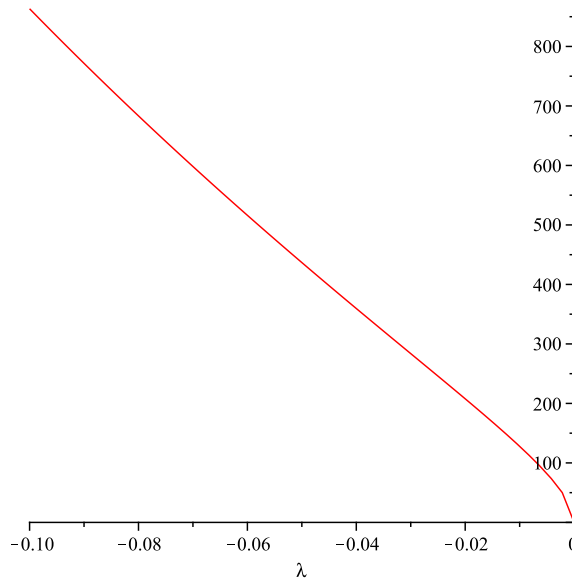
Vi noterar att lösningen av ekvationen $D(\lambda, a) = 0$ ($\lambda < 0$, $a > 0$) är omöjlig i en uttrycklig form. Systemet (19) via användning av datorprogram Maple kan inte heller hitta någon numerisk lösning. För att bekräfta att systemet (19) inte har icke-triviala lösningar ritar vi grafen $D(\lambda, a)$. Se figuren nedan.



För $a = 1$ får vi följande snitt $D(\lambda, 1)$ av yta:



Vi ritat snittet i en större skala för att bekräfta att det inte finns rötter nära noll ($a=1$).



Grafen visar att ekvationen $D(\lambda, a) = 0$ har inga lösningar för $\lambda < 0$ och $a > 0$. Då har systemet (19) en unik lösning $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, och det finns inga icke-triviala lösningar på problemet (17) för $\lambda < 0$.

Fall 2: $\lambda = 0$.

Ekvationen (1a) får form $-y_1'' + ay_1 = 0$, således blir den allmän lösning

$$y_1(x) = C_1 e^{-\sqrt{a}x} + C_2 e^{\sqrt{a}x}.$$

Från villkor (1b) fås

$$C_1 + C_2 = 0,$$

således $C_1 = -C_2$, alltså

$$y_1(x) = -C_2 e^{-\sqrt{a}x} + C_2 e^{\sqrt{a}x}.$$

Ekvationen (2a) får form $-y_2'' = 0$, således allmän lösning blir

$$y_2(x) = C_3 + C_4 x.$$

Från villkor (2b) fås:

$$C_3 + C_4 \pi = 0,$$

således $C_3 = -C_4 \pi$, alltså

$$y_2(x) = -C_4 \pi + C_4 x.$$

Enligt villkor (3) har vi systemet

$$\begin{cases} -C_2 e^{-\sqrt{a} \frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\sqrt{a} \frac{\pi}{2}} = -C_4 \pi + C_4 \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{a} C_2 e^{-\sqrt{a} \frac{\pi}{2}} + \sqrt{a} C_2 e^{\sqrt{a} \frac{\pi}{2}} = C_4, \end{cases}$$

eller

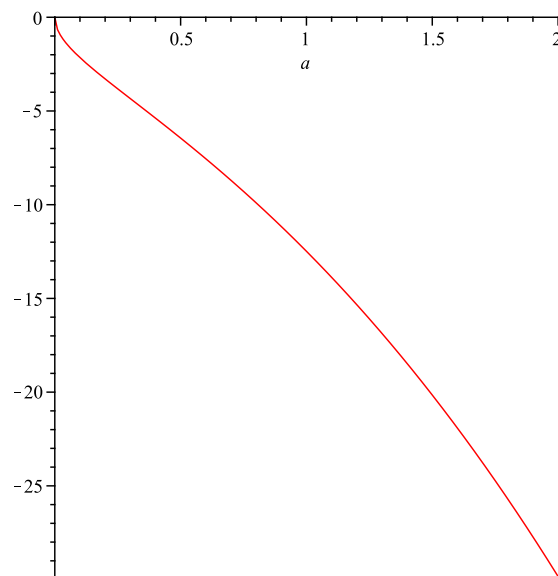
$$\begin{cases} (e^{\sqrt{a}\frac{\pi}{2}} - e^{-\sqrt{a}\frac{\pi}{2}})C_2 + \frac{\pi}{2}C_4 = 0 \\ \sqrt{a}(e^{-\sqrt{a}\frac{\pi}{2}} + e^{\sqrt{a}\frac{\pi}{2}})C_2 - C_4 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Systemet (20) har inga icke-triviala lösningar eftersom determinant av systemmatris är skild från noll:

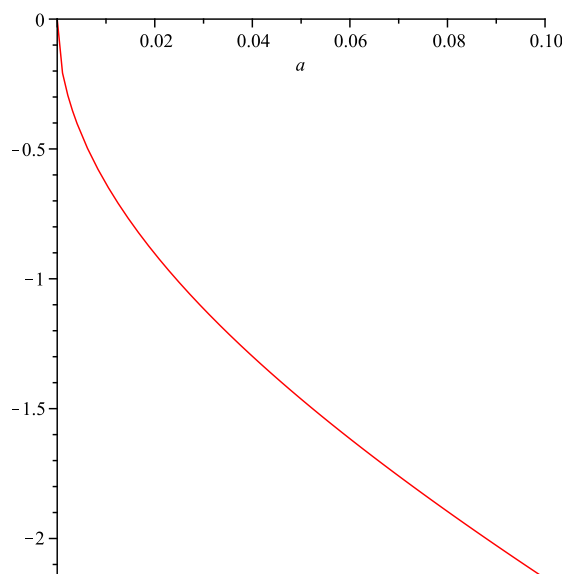
$$\begin{aligned} D(0, a) &= \begin{vmatrix} (e^{\sqrt{a}\frac{\pi}{2}} - e^{-\sqrt{a}\frac{\pi}{2}}) & \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{a}(e^{-\sqrt{a}\frac{\pi}{2}} + e^{\sqrt{a}\frac{\pi}{2}}) & -1 \end{vmatrix} \\ &= -(e^{-\sqrt{a}\frac{\pi}{2}} - e^{\sqrt{a}\frac{\pi}{2}}) - \frac{\pi}{2}\sqrt{a}(e^{-\sqrt{a}\frac{\pi}{2}} + e^{\sqrt{a}\frac{\pi}{2}}) \neq 0 \end{aligned}$$

för $a > 0$.

Detta bekräftar även grafen av funktionen $D(0, a)$ för $a > 0$. Se figuren nedan.



Vi ritat snittet i större skalan för att bekräfta att det inte finns rötter nära noll.



Således har problemet (17) inga icke-triviala lösningar för $\lambda = 0$.

Fall 3: $0 < \lambda < a$.

I detta fall är rötter av karakteristiska ekvationen för differentialekvationer (1a) reella och för (2a) är komplexa och olika, pga allmän lösning skrivs på formen:

$$y_1(x) = C_1 e^{-\sqrt{a-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{a-\lambda}x},$$

$$y_2(x) = C_3 \cos \sqrt{\lambda}(x - \pi) + C_4 \sin \sqrt{\lambda}(x - \pi).$$

Från villkoren (1b) fås att

$$y_1(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

då $C_1 = -C_2$ alltså

$$y_1(x) = -C_2 e^{-\sqrt{a-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{a-\lambda}x}.$$

Från villkoren (2b) fås att

$$y_2(\pi) = C_3 \cdot 1 + C_4 \cdot 0 = 0,$$

då $C_3 = 0$, alltså

$$y_2(x) = C_4 \sin \sqrt{\lambda}(x - \pi).$$

Enligt villkor (3) har vi systemet

$$\begin{cases} y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_2 e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_4 \sin \sqrt{\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \\ y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 \sqrt{a-\lambda} e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} + C_2 \sqrt{a-\lambda} e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} = y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_4 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right), \end{cases}$$

eller

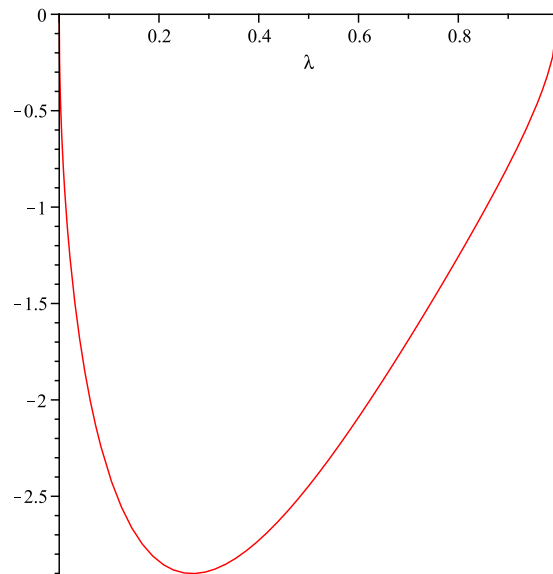
$$\begin{cases} C_2(e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}}) + C_4 \sin \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = 0 \\ C_2\sqrt{a-\lambda}(e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} + e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}}) - C_4\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Determinanten av systemmatris är:

$$D(\lambda, a) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} & \sin \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} \\ \sqrt{a-\lambda}(e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} + e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}}) & -\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} \end{vmatrix}$$

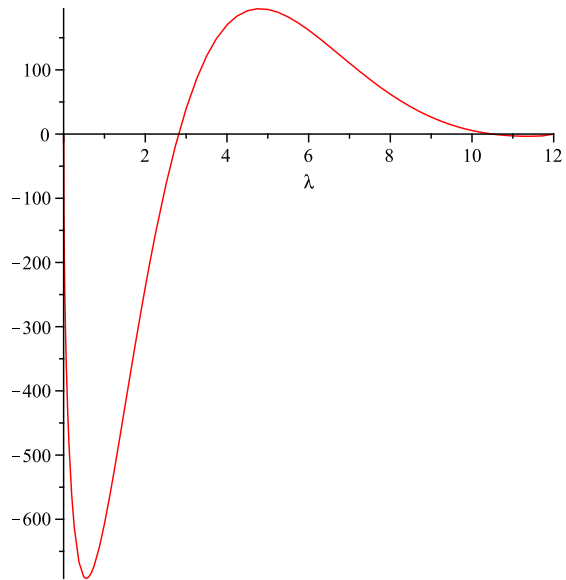
$$= -\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} - e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}}) \cos \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} - \sqrt{a-\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} (e^{\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}} + e^{-\sqrt{a-\lambda}\frac{\pi}{2}}).$$

Vi ritar en graf av funktion $D(\lambda, a)$ för $\lambda > 0$ och $a = 1$. Vi noterar att systemet har inga icke-triviala lösningar eftersom determinant av systemmatris (21) är skild från noll.

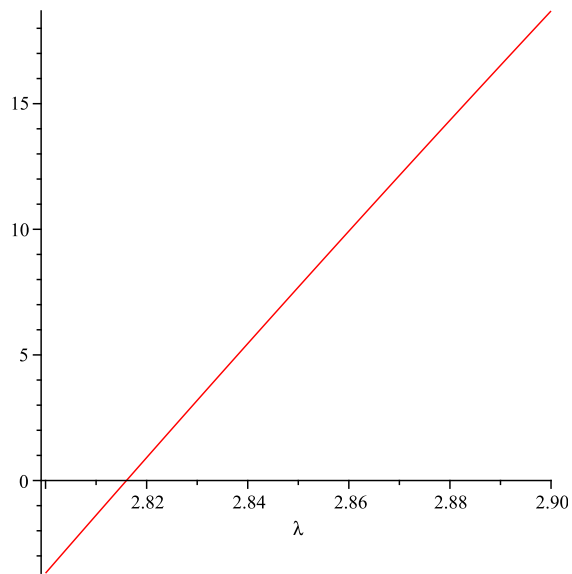


Figuren ovan visar graf till funktionen $D(\lambda, 1)$.

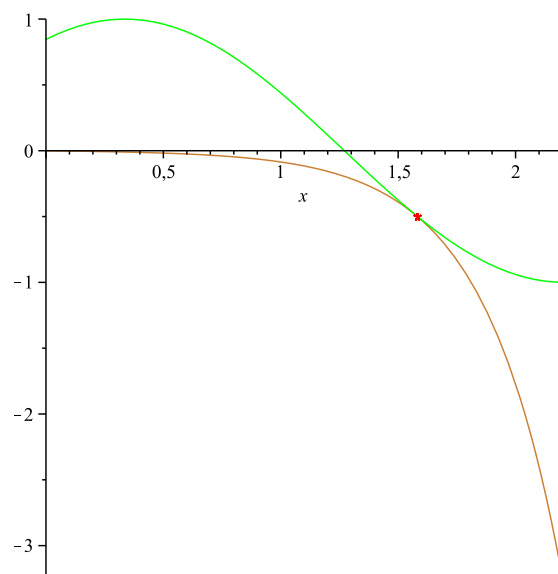
Dock för tillräckligt stora a finns det redan värden λ , vid vilka $D(\lambda, a) = 0$. Till exempel har vi två egenvärden för $a = 12$:



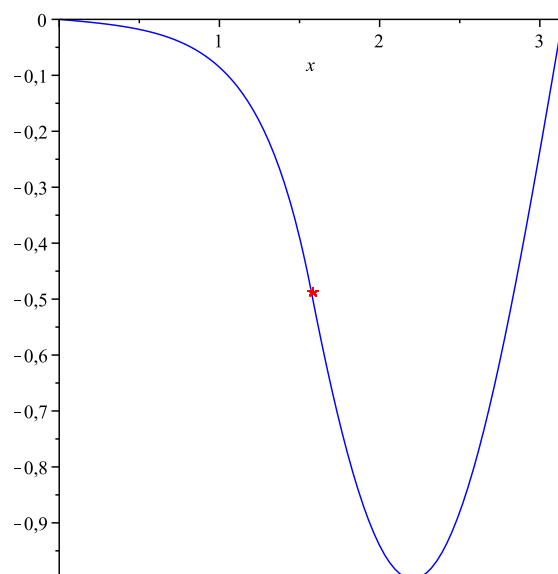
Det första egenvärdet är $\lambda_1 \approx 2.82$ (grafnen $D(\lambda, 12)$ för $\lambda \in [2.8, 2.9]$ se nedan):



Grafer för motsvarande lösning av problemet (17) har följande former:

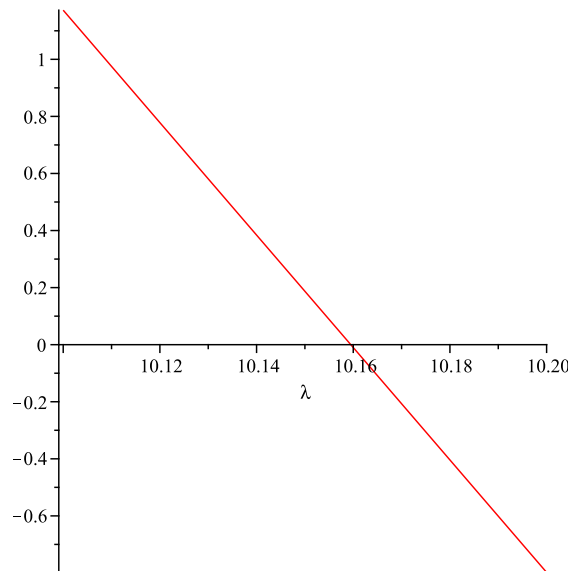


Den orange grafen (exponent) motsvarar $y_1(x)$, den gröna (oscillerande) motsvarar $y_2(x)$, den röda kärnan har koordinater där $x = \frac{\pi}{2}$.

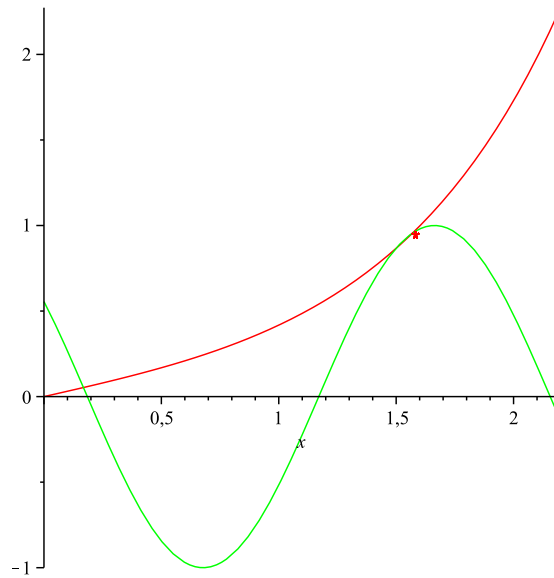


Vi noterar att funktioner $y_1(x)$ (exponent) och $y_2(x)$ (oscillerande) bildar en glatt funktion vid punkten $\frac{\pi}{2}$, dvs är den motsvarande lösningen $y(x)$ av Sturm-Liouville problemet vid punkten $\frac{\pi}{2}$ kontinuerligt direverbara.

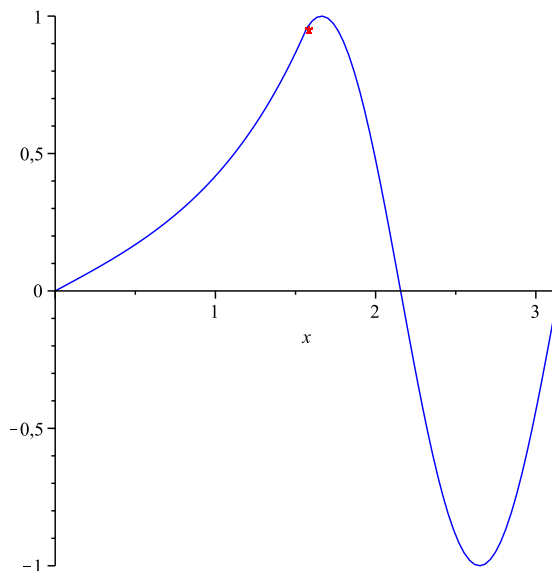
Det andra egenvärdet $\lambda_2 \approx 10.16$ (grafnen $D(\lambda, 12)$ för $\lambda \in [10.1, 10.2]$) kan uppskattas för följande graf:



Grafer till motsvarande lösning av Sturm-Liouville problemet har följande form:



Den orange grafen (exponent) motsvarar $y_1(x)$, den gröna (oscillerande) motsvarar $y_2(x)$, den röda kärnan har koordinater där $x = \frac{\pi}{2}$.



Vi noterar att när värdena på a ökar, ökar antalet av egenvärden.

Fall 4: $\lambda = a$.

I detta fall skrivs ekvationen (1a) på formen $-y_1'' = 0$; allmän lösning är

$$y_1(x) = C_1 + C_2x.$$

För ekvationen (2a) som $-y_2'' = ay$ har vi följande allmän lösning

$$y_2(x) = C_3 \cos \sqrt{a}(x - \pi) + C_4 \sin \sqrt{a}(x - \pi).$$

Från villkoren (1b) följer att $y_1(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 0$, alltså $C_1 = 0$. Således

$$y_1 = C_2x,$$

$$y_1' = C_2.$$

Från villkoren (2b) följer att $y_2(\pi) = C_3 \cdot 1 + C_4 \cdot 0 = 0$, alltså $C_3 = 0$. Således

$$y_2 = C_4 \sin \sqrt{a}(x - \pi),$$

$$y_2' = C_4 \sqrt{a} \cos \sqrt{a}(x - \pi).$$

Enligt villkoren (3) har vi ett system för att beräkna C_2 och C_4 :

$$\begin{cases} y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 \frac{\pi}{2} = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_4 \sin \sqrt{a}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \\ y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 = y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_4 \sqrt{a} \cos(\sqrt{a}\frac{\pi}{2} - \pi), \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} C_2 \frac{\pi}{2} + C_4 \sin \sqrt{a} \frac{\pi}{2} = 0 \\ C_2 - C_4 \sqrt{a} \cos \sqrt{a} \frac{\pi}{2} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Determinant av systemmatris (14) skrivs på formen:

$$\begin{aligned} D(a, a) &= \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & \sin \sqrt{a} \frac{\pi}{2} \\ 1 & -\sqrt{a} \cos \sqrt{a} \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = -\frac{\pi}{2} \sqrt{a} \cos \sqrt{a} \frac{\pi}{2} - \sin \sqrt{a} \frac{\pi}{2} \\ &= -\sqrt{\frac{\pi^2}{4} a + 1} \left(\frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{a}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} a + 1}} \cos \sqrt{a} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} a + 1}} \sin \sqrt{a} \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\sqrt{\frac{\pi^2}{4} a + 1} \left(\sin \phi \cos \sqrt{a} \frac{\pi}{2} + \cos \phi \sin \sqrt{a} \frac{\pi}{2} \right) = -\sqrt{\frac{\pi^2}{4} a + 1} \sin \left(\phi + \sqrt{a} \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

där

$$\phi = \arcsin \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{a}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} a + 1}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} a + 1}}.$$

Determinanten är lika med noll om

$$\sin \left(\phi + \sqrt{a} \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

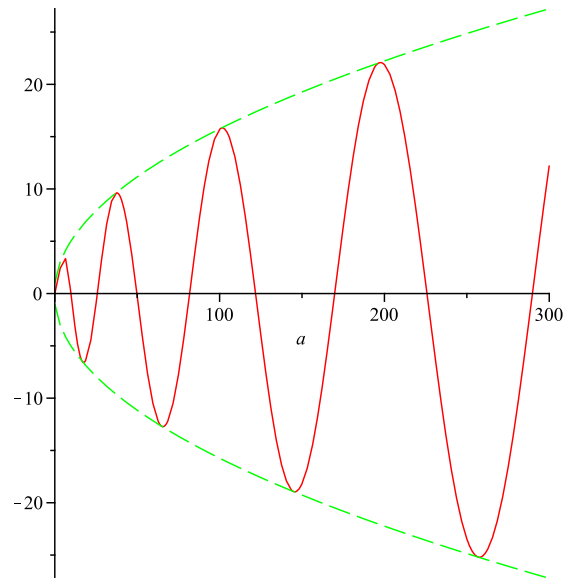
eller

$$\phi + \sqrt{a} \frac{\pi}{2} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Således har systemet (22) icke-triviala lösningar när

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} a + 1}} + \sqrt{a} \frac{\pi}{2} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

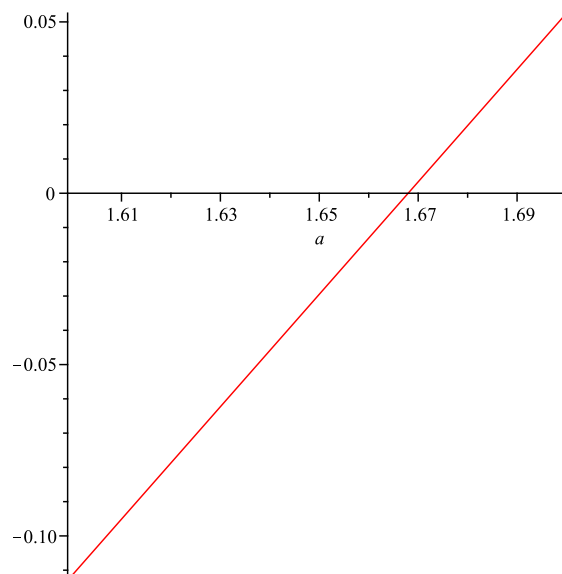
Vi noterar att ekvationen $D(a, a) = 0$ har oändligt många positiva rötter, samt att ekvationen har oändligt många negativa rötter, men vi är intresserade endast av rötterna $a > 0$. De rötterna är "nästan" periodiska, viss icke-periodicitet uppstår på grund av termen ϕ , som är beroende från a . På grund av koefficienten $\sqrt{\frac{\pi^2}{4} a + 1}$ framför sinus påminner grafen till funktionen $D(a, a)$ om en expanderande sinusfunktion, begränsad av en parabel. Se figuren nedan.



Således bestäms egenvärdena för motsvarande Sturm-Liouville problem för $\lambda = a$ från villkoret

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}\lambda + 1}} + \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vi kommer att bestämma hur de funktionerna ser ut genom att rita grafen $D(a, a)$ i en större skala och vi letar efter en approximation till den minsta positiva roten: $a \approx 1.67$ (grafens till motsvarande funktion för $a \in [1.6, 1.7]$ visas i figuren nedan):



Från ekvation (22) uttrycker vi C_2 och får att

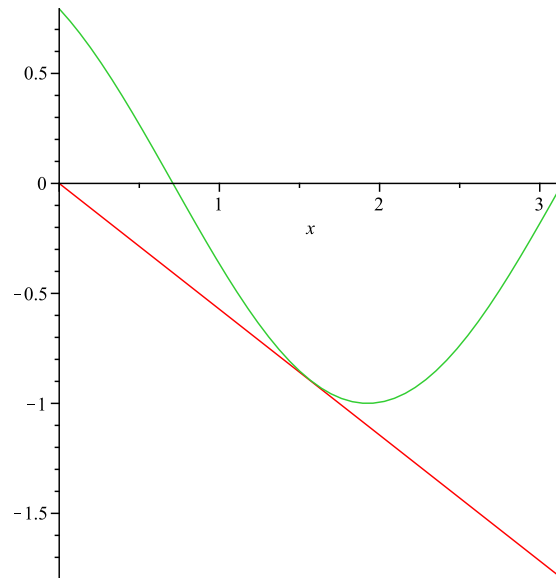
$$C_2 = C_4 \sqrt{a} \cos \sqrt{a} \frac{\pi}{2}.$$

Således får vi lösningen till problemet på formen:

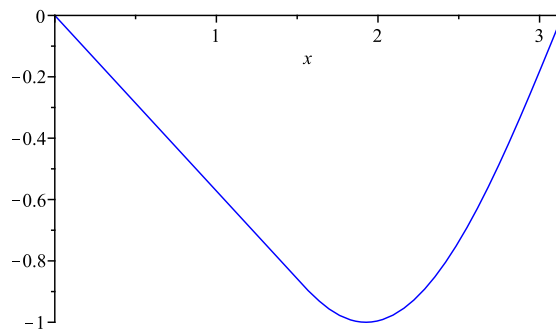
$$y(x) = \begin{cases} (C_4 \sqrt{a} \cos \sqrt{a} \frac{\pi}{2}) x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ C_4 \sin \sqrt{a}(x - \pi), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

där $C_4 \neq 0$ är ett godtyckligt reellt tal.

Vi kommer att rita grafer när $a = 1.67$ och $C_4 = 1$.

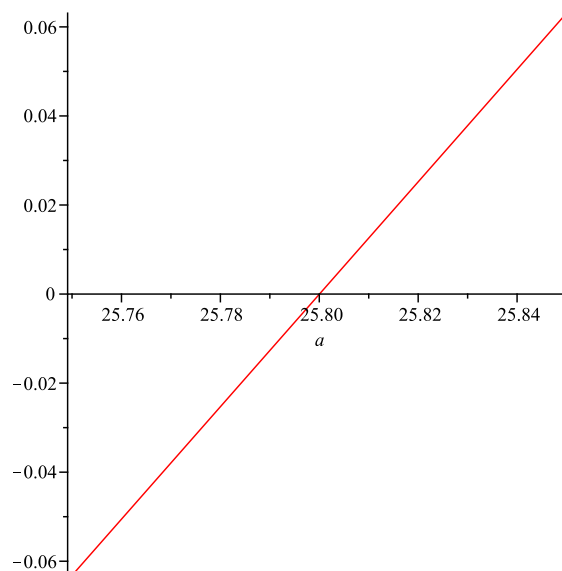


Den orange grafen (räta linjen) motsvarar $y_1(x)$, den gröna (sinusfunktion) motsvarar $y_2(x)$.

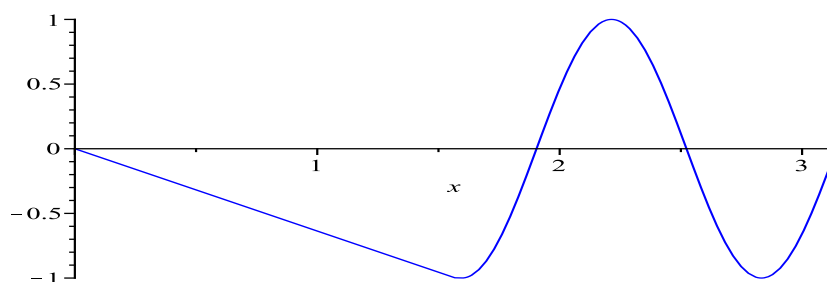


Med hjälp av graferna får vi ett visuellt bevis att den räta linjen och sinusfunktion vid den punkten $\frac{\pi}{2}$ bildar en glatt funktion, dvs i den punkten är $y(x)$ kontinuerligt differentierbara.

På liknande sätt ritas vi grafer för roten när $a \approx 25.8$. Se figuren nedan.



Grafen till motsvarande lösning av Sturm-Liouville problemet har följande form:



Fall 5: $\lambda > a$.

I detta fall är båda rötter av karakteristiska ekvationer för differentialekvationer (1a) och (2a) komplexa och olika, pga allmän lösning skrivs på formen:

$$y_1(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda - a} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda - a} x,$$

$$y_2(x) = C_3 \cos \sqrt{\lambda} (x - \pi) + C_4 \sin \sqrt{\lambda} (x - \pi).$$

Som tidigare använder vi villkor 1(b) och 2(b) för att konstatera att $C_1 = C_3 = 0$. Således

$$y_1(x) = C_2 \sin \sqrt{\lambda - a} x,$$

$$y_2(x) = C_4 \sin \sqrt{\lambda} (x - \pi).$$

Villkoren (3) ger

$$\begin{cases} y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 \sin \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} = y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_4 \sin \sqrt{\lambda} \left(-\frac{\pi}{2}\right), \\ y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\lambda - a} C_2 \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} = y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\lambda} C_4 \cos \sqrt{\lambda} \left(-\frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Således får vi systemet med avseende på variabler C_2, C_4 :

$$\begin{cases} C_2 \sin \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} + C_4 \sin \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sqrt{\lambda - a} C_2 \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} - \sqrt{\lambda} C_4 \cos \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Determinanten av systemmatris (23) är

$$\begin{aligned} D(\lambda, a) &= \begin{vmatrix} \sin \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} & \sin \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{\lambda - a} \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} & -\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} \\ &= -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} \cdot \cos \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} - \sqrt{\lambda - a} \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} \cdot \sin \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vi kommer att undersöka beteende $D(\lambda, a)$ för tillräckligt stora λ .

För $\lambda \gg a$ har vi $\sqrt{1 - \frac{a}{\lambda}} \approx 1$, således

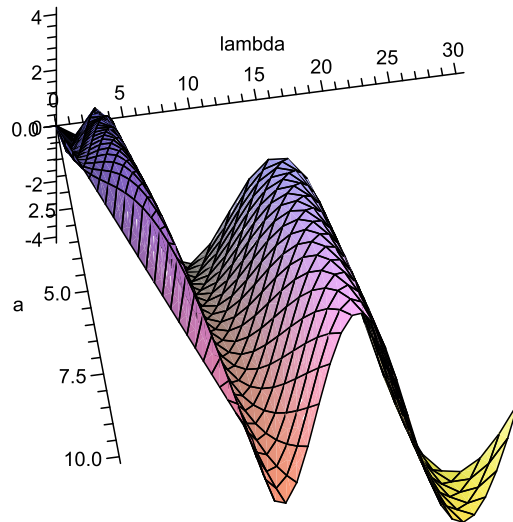
$$\begin{aligned} D(\lambda, a) &= -\sqrt{\lambda} \left(\sin \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} \cdot \cos \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} + \sqrt{1 - \frac{a}{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} \cdot \sin \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} \right) \\ &\approx -\sqrt{\lambda} \sin \left((\sqrt{\lambda - a} + \sqrt{\lambda}) \frac{\pi}{2} \right) = -\sqrt{\lambda} \sin \left(\sqrt{\lambda} \left(\sqrt{1 - \frac{a}{\lambda}} + 1 \right) \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\sqrt{\lambda} \sin \left(\sqrt{\lambda} (1 + 1) \frac{\pi}{2} \right) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \pi). \end{aligned}$$

Således har ekvationen $D(\lambda, a) = 0$ för tillräckligt stora n lösningar, som ligger nära

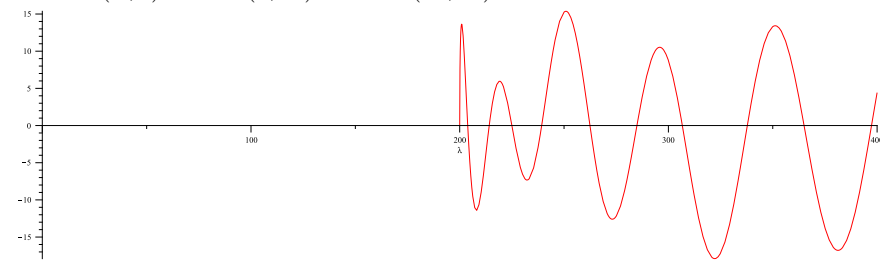
$$\lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{Z},$$

vilket matchar egenvärden av Sturm-Liouville-problem för $a = 0$.

Dock kan vi inte bestämma hur funktionen $D(\lambda, a)$ beter sig när värden av λ är nära a , vilket visas i följande grafen.

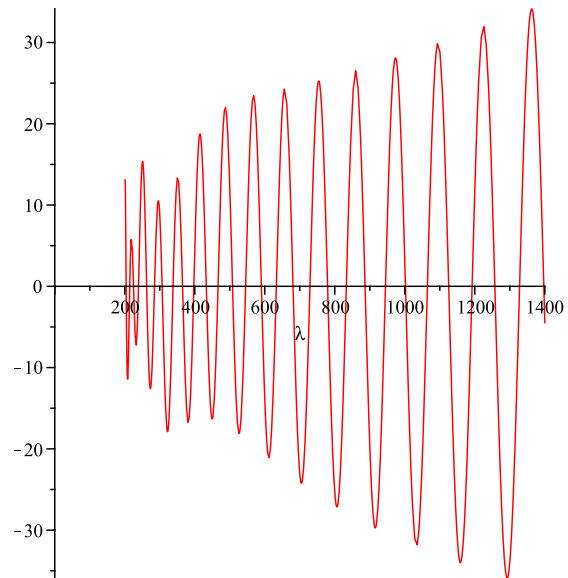


Grafen $D(\lambda, a)$ för $a \in (0, 10)$ och $\lambda \in (10, 30)$. se ovan.

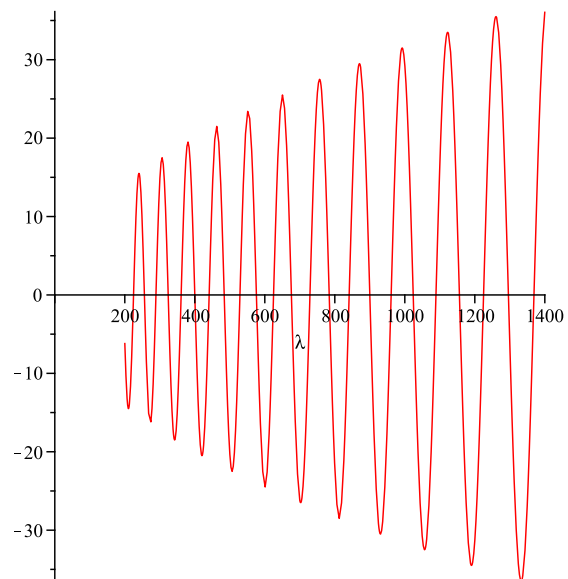


Figuren ovan visar grafen $D(\lambda, 200)$ för $\lambda \in (200, 400)$.

Vi noterar att vi får "nästan periodicitet" av egenvärdena för $\lambda \gg a$. Detta bekräftar grafen $D(\lambda, 200)$ för $\lambda \in (0, 1400)$. Se figuren ovan.



Graf till $y = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} \cdot \cos \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2} - \sqrt{\lambda - a} \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2} \cdot \sin \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2}$ se ovan.



Graf till $y = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi$ se ovan.

Vi letar efter egenvärdena λ_1 och λ_2 för $a = 10$ och bildar motsvarande lösningar.

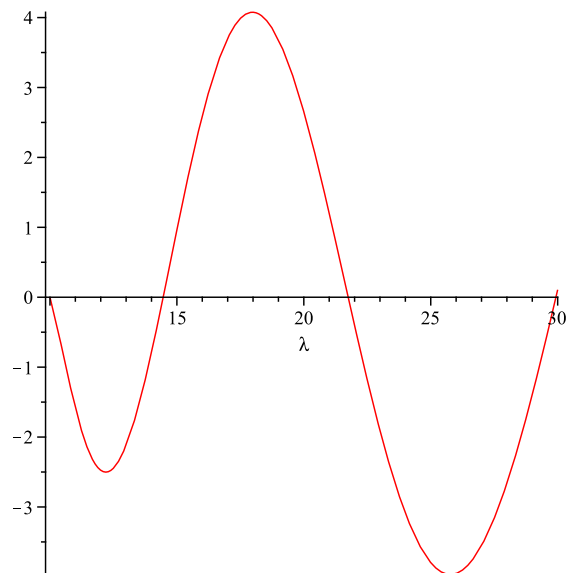
Från den första ekvation av systemet (23) uttrycker vi C_2 och får

$$C_2 = -\frac{C_4 \sin \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2}}{\sin \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2}}.$$

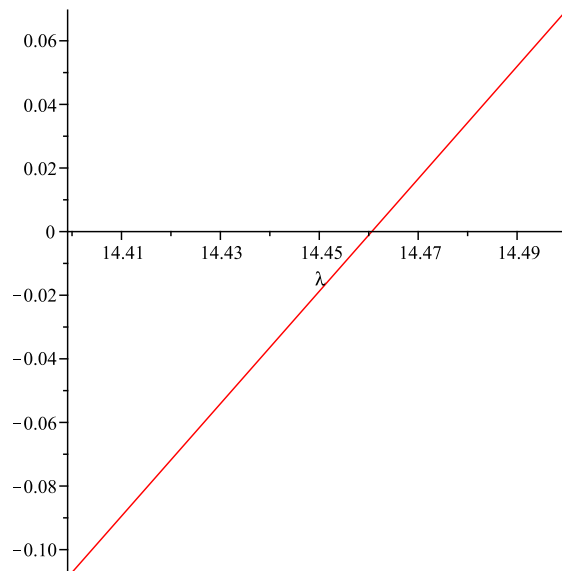
Således får vi lösningen till problemet på formen:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{C_4 \sin \sqrt{\lambda} \frac{\pi}{2}}{\sin \sqrt{\lambda - a} \frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{\lambda - a} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ C_4 \sin \sqrt{\lambda} (x - \pi), & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

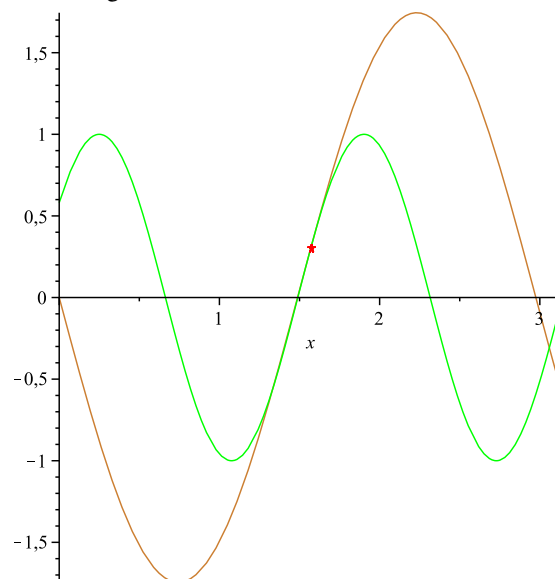
Se grafer $D(\lambda, 10)$ nedan.

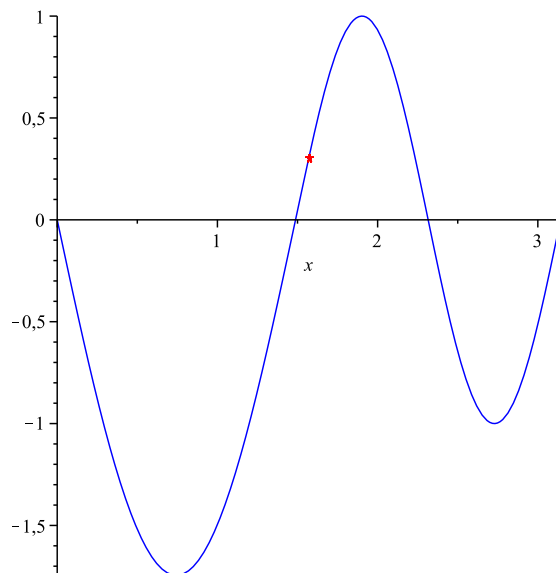


För att hitta egenvärden λ_1 ritas vi grafen $D(\lambda, 10)$ i en större skala och ser att det första egenvärdet är $\lambda_1 \approx 14,46$



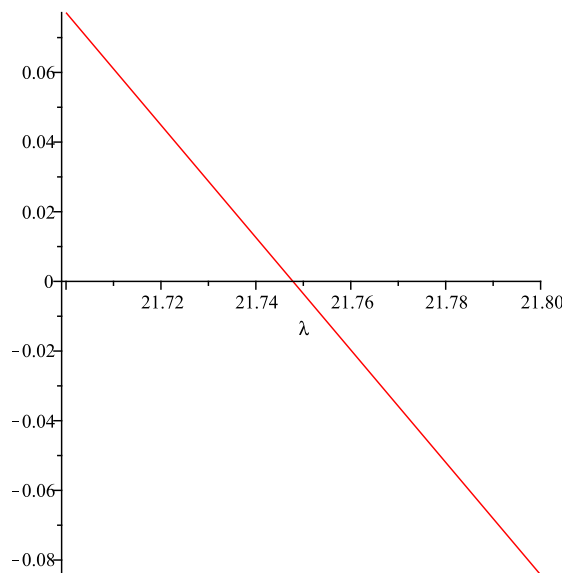
Grafer för motsvarande lösning av Sturm-Liouville problem för $\lambda_1 \approx 14,46$ och $C_4 = 1$ visas i figurer nedan.



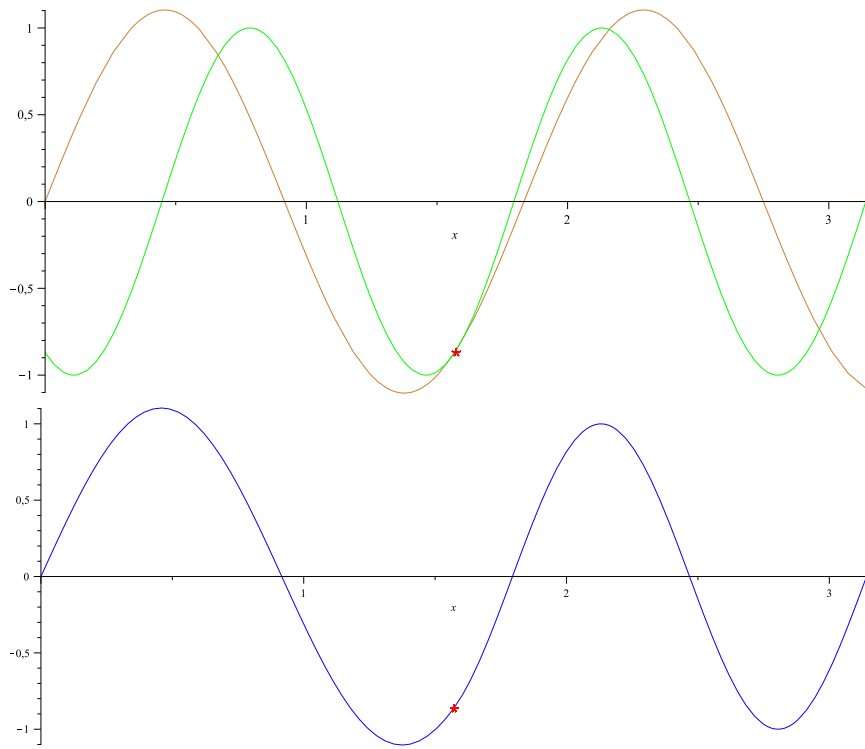


Med hjälp av graferna får vi ett visuellt bevis att de två sinusfunktioner som motsvarar $y_1(x) = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}}{\sin\sqrt{\lambda-a}\frac{\pi}{2}}\sin\sqrt{\lambda-ax}$ och $y_2 = \sin\sqrt{\lambda}(x-\pi)$ vid den punkten $\frac{\pi}{2}$ bildar en glatt funktion, dvs i den punkten är $y(x)$ kontinuerligt differentierbara.

På liknande sätt ritar vi grafer för $\lambda_2 \approx 21.75$. Se figurer nedan.



Grafer för motsvarande lösning av Sturm-Liouville problem för $\lambda_2 \approx 21.75$ har följande form:



Således får vi icke-triviala lösningar för stegpotential av problemet (17) för fall 3, där $1 < \lambda < a$, för fall 4, där $\lambda = a$ och för fall 5, där $\lambda > a$.

4 Oscillationsteori

4.1 Oscillation och Non-Oscillation

I detta avsnitt kommer vi att studera ekvationens oscillationsegenskaper. Vi börjar med att definiera begreppet oscillation.

Definition 4.1 Oscillation och Non-Oscillation. Låt $-[p(x)y']' + [q(x) - \lambda r(x)]y = 0$ i $J = (a, b)$, $a < x < b$ hålla. Då kallas randpunkten a oscillerande om det finns en icke-trivial lösning y som har en noll i intervallet (a, c) för varje c i intervallet J . På samma sätt är b oscillerande om det finns icke-trivial lösning som har noll i intervallet (c, b) för varje c i intervallet J . Genom Sturms separationssats, om en icke-trivial lösning har den här egenskapen vid punkt a eller b så har alla icke-triviala lösningar har den här egenskapen. Därför är svängning en egenskap för ovanstående ekvationen och beror inte på någon partikulär lösning. En randpunkt är icke-oscillerande om den inte är oscillerande.

4.2 Prüfersubstitution

Alla satser som vi använder i avsnitt 4 citeras: *Ordinära differentialekvationer* bok [1]. Innan vi går vidare med Sturms oscillationssats kommer vi att utveckla och använda de så kallade Prüfersubstitution för att studera ekvation av formen

$$y'' + q(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (24)$$

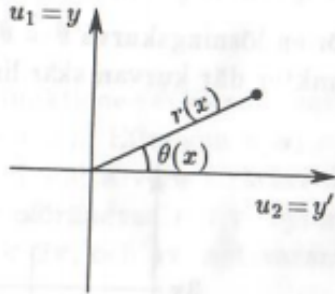
Ekvationen (24) kan vi normalt inte lösa explicit, men vi kan göra vissa kvalitativa uttalanden om dess lösningar genom att betrakta motsvarande första ordningens system:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -q(x)u_1, \end{cases}$$

där $u_1 = y$, $u_2 = y'$. Vi inför polära koordinater i u_2u_1 -planet, med andra ord inför vi **Prüfersubstitution** och får att

$$\begin{cases} u_2(x) = r(x) \cos \Theta(x) \\ u_1(x) = r(x) \sin \Theta(x). \end{cases}$$

Se figuren nedan.



Prüfersubstitution definierar bara $\Theta(x)$ så när som på en multipel av 2π . Om man emellertid för en given lösning till (24) fixerar ett värde på $\Theta(a)$ där $\Theta(a)$ är kontinuerlig, så blir $\Theta(x)$ en entydig funktion av x .

För en icke-triviala lösning $y(x)$ är $r(x) \neq 0$ för varje $x \in [a, b]$ därför $r(x)^2 = y(x)^2 + y'(x)^2$. Vi noterar att $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ om $r(x_0) = 0$ för något x_0 . Detta innebär att för en ekvation av andra ordningen skulle vara att $y(x) \equiv 0$ på grund av entydigheten hos begynnelsevärdesproblemet.

För en lösning $y(x)$ till (24) har vi att $y(x) = 0$. Det följer att $u_1(x) = 0$ alltså $\sin \Theta(x) = 0$ alltså $\Theta(x) = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Antag att $\cos \Theta(x) \neq 0$. Då fås att $\tan \Theta(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$.

Vi deriverar $\tan \Theta(x)$ med avseende på x och får följande:

$$\frac{d\Theta}{dx} \frac{1}{\cos^2 \Theta} = \frac{y'y' - yy''}{y^2} = \frac{\cos \Theta \cos \Theta - q(x) \sin \Theta (\cos \Theta)'}{\cos^2 \Theta} = \frac{\cos^2 \Theta + q(x) \sin^2 \Theta}{\cos^2 \Theta},$$

således

$$\Theta'(x) = \cos^2 \Theta(x) + q(x) \sin^2 \Theta(x). \quad (25)$$

Vi noterar att om $\cos \Theta = 0$, då blir $\sin \Theta \neq 0$ och (25) följer genom derivation av $\cot \Theta(x)$. Vidare kommer vi använda ekvation (25).

Vi skall använda den ekvationen för att hantera lösningarna till $y(x) = 0$, dvs (25) inte innehåller $r(x)$. Vi löser direkt ut ett nollställe, dvs $\theta(x) = n\pi$, således

$$\Theta'(x) = 1 > 0.$$

Det följer att lösningskurva $\Theta = \Theta(x)$ är strängt växande i de punkter där kurvan skär linjerna $\Theta = n\pi$.

Vi kommer att tillämpa reguljära Sturm-Liouville-egenvärdesproblemet för att bevisa Sturms oscillationssats.

Vi börjar med att hitta lösningar till egenvärdesproblemet:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad B_y = 0. \quad (26)$$

Från (24) gäller att

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad B_y = 0. \quad (27)$$

Prüfersubstitution ger oss att ekvation (25) skrivs på formen

$$\Theta'(x) = \cos^2 \Theta(x) + (\lambda - q(x)) \sin^2 \Theta(x). \quad (28)$$

Enligt separerade randvillkoren har vi

$$B_1 y \equiv b_{11} y(a) + b_{21} y'(a) = 0 \quad (29)$$

och

$$B_2 y \equiv b_{12} y(b) + b_{22} y'(b) = 0. \quad (30)$$

Anta att $b_{11} \neq 0$, då villkoren (28) är ekvivalent med

$$\tan \Theta(a) = \frac{y(a)}{y'(a)} = -\frac{b_{21}}{b_{11}}.$$

Vi inför ett tal γ som är ekvivalent med följande villkor

$$\tan \gamma = -\frac{b_{21}}{b_{11}}, \quad 0 \leq \gamma < \pi.$$

Randvillkoret (29) kan då formuleras:

$$\Theta(a) = \gamma.$$

När $b_{11} = 0$ får vi att $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

På likande sätt skriver vi randvillkoret (30):

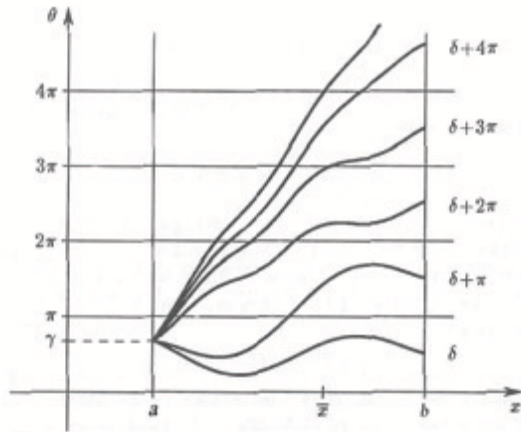
$$\tan \Theta(b) = \frac{y(b)}{y'(b)} = -\frac{b_{22}}{b_{12}}.$$

Det följer att

$$\Theta(b) = \sigma + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

Vi noterar att σ är givet tal där $0 < \sigma \leq \pi$.

Betekna med $\Theta(x, \lambda)$ den entydigt bestemda lösning till ekvation (27), som satisfierar begynnelsevillkor $\Theta(a, \lambda) = \gamma$. Funktion $y(x)$ som motsvarar (26) har lösningar till SL-problemet (25) om och endast om $\Theta(x, \lambda)$ punkten b uppfyller villkoret (31) för $n \in \mathbb{Z}$.



Som vi noterade ovanstående kan kurvan $\Theta(x, \lambda)$ skära endast linierna $\Theta = \pi n$, där $n \in \mathbb{Z}$ närlifån. Dessutom kräver att $n \geq 0$ i (31). Då gäller att egenfunktion $y(x, \lambda)$ sådan att motsvarande $\Theta(x, \lambda)$ satisfierar $\Theta(b, \lambda) = \sigma + n\pi$ har n nollställen i (a, b) på grund av $\Theta(x, \lambda)$ blir en multipel av πn gånger i (a, b) .

Med hjälp av Sturms oscillationssats visar vi hur $\Theta(x, \lambda)$ beror på parameter λ .

4.3 Sturms oscillationssats

Sats 4.1. (Sturms oscillationssats.) För lösningarana $\Theta(x, \lambda)$ till ekvation (28) med $\Theta(a, \lambda) = \gamma$ samt funktionen p är kontinuerlig gäller, om x är fixt i intervallet $a < x < b$:

- $\Theta(x, \lambda) \rightarrow \infty$ då $\lambda \rightarrow \infty$,
- $\Theta(x, \lambda) \rightarrow 0$ då $\lambda \rightarrow -\infty$,
- $\Theta(x, \lambda)$ är en strängt växande funktion av λ ,
- $\Theta(x, \lambda)$ är en kontinuerlig funktion av λ .

Bevis För beviset använder vi Sturms jämförelsesats .

Sats 4.2. (Sturms jämförelsesats.) Låt u och v vara icke-triviala lösningar till differentialekvationerna

$$u'' + q_1(x)u = 0$$

respektive

$$v'' + q_2(x)v = 0$$

i intervallet $[a, b]$. Antag att funktionerna q_1 och q_2 är kontinuerliga och att

$$q_1(x) \geq q_2(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Antag vidare att $v(a) = v(b) = 0$. Då gäller något av följande alternativ:

- funktionen $u(x)$ har ett nollställe i det öppna intervallet (a, b) ,
- $q_1(x) \equiv q_2(x)$ och $u(x)$ är en multipel av $v(x)$.

Anmärkning. Vi tänker på fallen $q_1(x) \equiv q_1$ konstant och $q_2(x) \equiv q_2$ konstant. Om $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ är u och v sinusfunktion med frekvens $\sqrt{q_1}$ respektive $\sqrt{q_2}$. Om $q_1 > q_2$ kommer $u(x)$ att oscillera snabbare än $v(x)$.

Vi utelämnar bevis av sats 4.2 och återvänder till beviset av Sturm's oscillationssats.

a) Vi börjar med att skaffa \bar{x} , som är godtyckligt i $(a, b]$ och sätta $J = [a, \bar{x}]$. Vi inför talet η sådant att

$$\eta = \lambda - \sup q(x), \quad x \in J.$$

Vi noterar att för stora λ är $\eta > 0$. Låt funktionen u vara en lösning till ekvationen

$$u'' + (\lambda - q(x))u = 0$$

som uppfyller randvillkoret (29) i a , samtidigt som hör till $\Theta(x, \lambda)$. Låt v är en lösning till ekvation

$$v'' + \eta v = 0.$$

Vi överväger följande fall: enligt sats 4.2. har v och u ett stort antal nollställen i J om η är stort. Då följer att Θ måste vara stort. Vi väljer för en mer exakt analys att

$$v(x) = \sin \sqrt{\eta}(x - a).$$

Således när $v(x) = 0$, alltså $\sqrt{\eta}(x - a) = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Låt m vara ett givet godtyckligt heltal, och skaffar stort λ sådan att

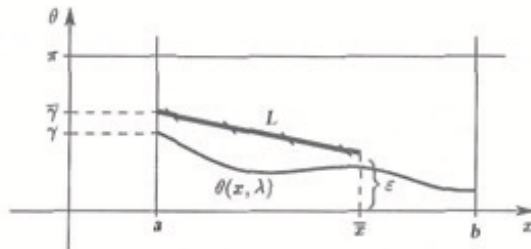
$$\sqrt{\eta}(\bar{x} - a) \geq m\pi.$$

Således har v minst $m + 1$ nollställen i J . Enligt sats 4.2. följer att u har minst m nollställen i J . Då måste funktionen $\Theta(x, \lambda)$ skära minst m linjer $\Theta = \pi n$ för $x \in J$, dvs $\Theta \geq m\pi$. Det följer att $\Theta(x, \lambda) \rightarrow \infty$ då $\lambda \rightarrow \infty$.

b) Enligt våra anteckningar gäller att $\Theta(x, \lambda) > 0$ för alla $x \in J$. Vi har från beviset för a) \bar{x} och J . Låt ε vara ett givet tal där $0 < \varepsilon < \gamma$. Vi väljer $\bar{\gamma}$ så att $\gamma < \bar{\gamma} < \pi$. Låt L vara en linje mellan punkterna $(a, \bar{\gamma})$ och (\bar{x}, ε) . Då blir riktningskoefficient

$$\rho = \frac{\varepsilon - \bar{\gamma}}{\bar{x} - a}.$$

Vi kommer att visa att kurvan $\Theta = \Theta(x, \lambda)$ ligger under L om λ är stort negativt. Det följer att $x \in J$ om λ är tillräckligt stort negativt. Vi gör detta genom att visa att lösningskurva till (28) som skär L måste ligga uppförån.



Vi börjar med att betrakta HL i (28) om (x, Θ) är en punkt på L och λ är tillräckligt stort negativt. Det följer att

$$\cos^2 \Theta(x) + (\lambda - q(x))y \sin^2 \Theta(x) \leq 1 + (\lambda + \sup |q(x)|) \sin^2 \varepsilon \leq \rho.$$

För stort negativt λ är $\Theta'(x) < \rho$ om $(x, \Theta(x)) \in L$. En kurva som skär L lutar brantare än L i skärningspunkten. Således skär kurva $\Theta = \Theta(x, \lambda)$ med $\Theta(a, \lambda) = \gamma$ aldrig linjen L .

Det följer att

$$0 \leq \Theta(\bar{x}, \lambda) < \varepsilon$$

om λ är stort negativt, som krävdes att bevisa.

För att bevisa c) använder en sats som är nödvändig för detta.

Sats 4.3. Antag att $f(t, x)$ är kontinuerlig i strimman (t, x) ; $t_0 \leq t \leq t_1$ och uppfyller Lipschitzvillkor

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad (t, x), (t, y) \in \Omega$$

i en omgivning av varje punkt där. Låt $x(t)$ och $y(t)$ satisfiera

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

respektive

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

då $t_0 \leq t \leq t_1$. Då gäller

$$i) x(t_0) = y(t_0) \implies x(t) \leq y(t) \text{ då } t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$ii) x(t_0) < y(t_0) \implies x(t) < y(t) \text{ då } t_0 \leq t \leq t_1.$$

Vi utelämnar beviset av satsen 4.3 och återkommer till beviset av Sturms oscillationssats del c).

c) Antag $\lambda_1 < \lambda_2$. Sätt $f_1(x, \Theta) = \cos^2 \Theta + (\lambda_1 - q(x)) \sin^2 \Theta$. Då är

$$\Theta'(x, \lambda_1) = f_1(x, \Theta(x, \lambda_1))$$

$$\Theta'(x, \lambda_2) \geq f_1(x, \Theta(x, \lambda_2)).$$

Av sats 4.3 följer att

$$\Theta(x, \lambda_1) \leq \Theta(x, \lambda_2)$$

för alla $x \in [a, b]$.

Om här råder likhet för något \bar{x} följer av sats 4.3 att det gäller likhet för alla $x \in [a, \bar{x}]$. Då är $\Theta'(x, \lambda_1) = \Theta'(x, \lambda_2)$ för dessa x . Ur differentialekvationerna (28) för de här funktionerna följer att $\lambda_1 = \lambda_2$. På så sätt visade vi att $\lambda \mapsto \Theta'(x, \lambda)$ är en strängt växande funktion.

d) Låt $(\lambda_j)_1^\infty$ vara en följd av tal som konvergerar mot λ då $j \rightarrow \infty$. Då gäller att

$$\cos^2 \Theta + (\lambda_j - q(x)) \sin^2 \Theta \rightarrow \cos^2 \Theta + (\lambda - q(x)) \sin^2 \Theta \quad j \rightarrow \infty$$

likformig på $[a, b] \times \mathbb{R}$.

För beviset d) skall vi använda

Sats 4.4. Antag att $f(t, x)$ är kontinuerlig i $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ och uppfyller Lipschitzvillkoret).

och att $f_k(t, x)$, $k = 1, 2, \dots$ är kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt mot f i Ω då $k \rightarrow \infty$. Låt $x(t)$ och $x_k(t)$, $t \in J$ vara lösningar till

$$x' = f(t, x) \quad \text{respektive} \quad x'_k = f_k(t, x_k)$$

i Ω , sådana att $x_k(t_0) \rightarrow x(t_0)$ då $k \rightarrow \infty$. Då konvergerar $x_k(t)$ likformigt mot $x(t)$ på varje kompakt delintervall av J .

Från satsen 4.4 följer att

$$\Theta(x, \lambda_j) \rightarrow \Theta(x, \lambda), \quad j \rightarrow \infty \quad (32)$$

dvs likformig på $[a, b]$, vilket visar att $\Theta(x, \lambda)$ är en kontinuerlig funktion av λ . ■

4.4 Beviset av satsen 2.5.4

Tack vare oscillationsteori har vi tillräckligt information om egenvärden och egenfunktioner för att bevisa **sats 2.5.4**. Vi använder (32) och formulerar **sats 2.5.4** enligt följande

Problemet (26), med separerade randvillkor, har en strängt växande följd av egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ med $\lambda_n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$.

Bevis. Enligt beteckningar som definerade vi tidigare talen λ_n (talen λ_n är egenvärdena till $-y'' + q(x) = \lambda y$, $B_y = 0$) genom med hjälp av villkoret

$$\Theta(b, \lambda_n) = \sigma + (n - 1)\pi.$$

Av Sturms oscillationssats följer att ekvation $\Theta(b, \lambda) = c$ har en entydig lösning λ för varje $c > 0$. Vi noterar att λ_n är egenvärden till (26). Således växer λ_n mot ∞ då $n \rightarrow \infty$. ■

5 Betydelsen av Sturm-Liouville-teori

Sturms största bidrag är utan tvekan studier av andra ordningens differentialekvationer som nu kallas Sturm-Liouville problem. Hans matematiskt djupaste resultat är Oscillation och Jämförelse satser. Resultataten publicerades 1898 men används fortfarande inom teori för ordinära differentialekvationer.

I matematiken är Sturm-Liouville problem eller egenvärdesproblem en viss klass av ordinära differentialekvationer tillsammans med extra så kallades randvillkor. Differentialekvationer beskriver hur energi eller värme sprider sig i rummet. Randvillkor behövs för att garantera att energi inte lämnar systemet. Sådana ekvationer förekommer både i klassisk fysik (t.ex. termisk ledning) och kvantmekanik (t.ex. Schrödingerekvationen).

I dessa problem måste man avgöra om förutsättningarna som gäller vanlig SLP stämmer med vår fysiska intuition. För att göra det måste vi undersöka nollställena till lösningar av en differentialekvation. Lösning av Sturm-Liouville problem som har formen

$$-(p(x)y')' + q(x)y - \lambda r(x) = 0, \quad a < x < b$$

och undersökning av deras egenskaper kan vara väldigt svårt, om inte p och q är konstanter.

När vi betraktar kvalitativ teori om Sturm-Liouville problem, så är vi intresserade av att svara på följande frågor:

- Hur ofta oscillerar en lösning i ett intervall (a, b) , dvs. hur många nollställen har den?
- Hur många maxima och minima finns det mellan ett par närliggande nollställen?
- Vad händer med nollställerna när man ändrar på $q(x)$ och $p(x)$?

Lyckligtvis kan man svara på frågorna med hjälp av oscillationsatserna, som vi har beskrivit. Vi kan också förstå hur lösningarna beter sig när inga explicita formler finns.

References

- [1] Karl Gustav Andersson och Lars-Christer Böiers. *Ordinära differentialekvationer*. Studentlitteratur:57-63,172-212, 1992.
- [2] Arne Persson och Lars-Christer Böiers. *Analys i en variabel*. Studentlitteratur, Lund, 2001.
- [3] Barry Simon. *Sturm oscillation and comparison theorems..* (English) [*Sturms oscillation och jämförelsesatser*]. Sturm-Liouville theory, 29–43, Birkhäuser, Basel, 2005.
- [4] Anders Källen: Varför låter musikinstrument så olika?, <http://www.ctr.maths.lu.se/matematiklth/personal/andersk/webbok/Funktionsserier/musik.pdf>
- [5] Tihonov, A. N.; Samarskiĭ, A. A.. *Equations of mathematical physic*. Third corrected and augmented edition Izdat. "Nauka", Moscow:87-94, 1966.