

# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Matematisk biljard

av

**Albin Berg**

2021 - No K22



# Matematisk biljard

Albin Berg

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Sven Raum

2021



## **Sammanfattning**

Matematisk biljard är en idealisering av det fysiska spelet biljard. Det fysiska spelet som avgörs med fysiska lagar tillhörande gravitation, friktion och kollisioner bortses i denna uppsats. Redovisning av geometriska figurer där matematisk biljard utspelas, samt hur rörelsemönstret av biljardbollen förändras i vinklar vid en konstant hastighet. De geometriska figurer som undersöks är rektangel, cirkel och triangel. Periodiska banor i figurerna är något som särskilt undersöks. Vi kommer besvara frågor angående var biljardbollen kommer hamna och hur många studsar en boll genomför innan den hamnar i en specifik position.

## **Abstract**

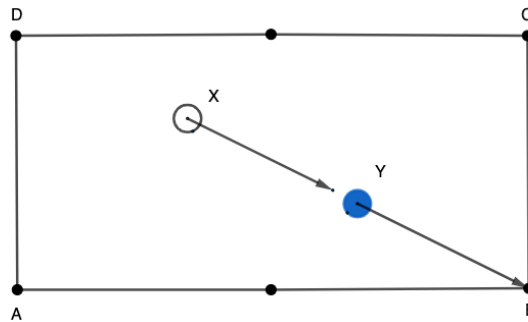
Mathematical billiards is an idealization of the physical game of billiards. The physical game that is decided by physical laws associated with gravity, friction and collisions is ignored in this essay. Presentation of geometric figures where mathematical billiards are shown, and we study how the movement pattern of the billiard ball changes at angles at a constant speed. The geometric shapes examined are rectangle, circle and triangle. Periodic trajectories in the figures are something that will be examined in particular. We will answer questions regarding where the billiard ball will end up and how many bounces a ball performs before it ends up in a specific position.

# Innehåll

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduktion</b>                         | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Historia</b>                             | <b>3</b>  |
| 2.1      | Hadamards biljard . . . . .                 | 4         |
| 2.2      | Lorentz gas . . . . .                       | 4         |
| <b>3</b> | <b>Matematisk biljard</b>                   | <b>5</b>  |
| 3.1      | Skillnaden gentemot reell biljard . . . . . | 5         |
| 3.2      | Periodiska banor . . . . .                  | 5         |
| 3.3      | Att veckla ut banor . . . . .               | 6         |
| <b>4</b> | <b>Geometrisk biljard</b>                   | <b>8</b>  |
| 4.1      | Rektangulär biljard . . . . .               | 8         |
| 4.2      | Cirkulär biljard . . . . .                  | 11        |
| 4.3      | Triangulär biljard . . . . .                | 20        |
| <b>5</b> | <b>Avslutande kommentarer</b>               | <b>29</b> |
| <b>6</b> | <b>Referenser</b>                           | <b>30</b> |

# 1 Introduktion

Matematisk biljard är ett mekaniskt sätt innehållande en boll och en viss figur av bord där beteendet av bollens banor undersöks. Fysiska påfrestningar som kraft och friktion bortses då matematisk biljard i det här fallet fokuserar på geometrin. Till skillnad mot reell biljard där vanligtvis boll  $X$  ska skjutas och kollidera med en annan boll  $Y$  så boll  $Y$  hamnar i ett hål.



Figur 1: Klassisk biljard

Matematisk biljard genomförs utan hål och det är ingen kollision mellan två bollar som behövs. Det är endast boll  $X$  som rör sig konstant över bordet.

Vi kommer titta på olika typer av periodiska banor, där bollen går från en startpunkt och efter ett antal kollisioner med bordets sidor återvänder till sin utgångspunkt. Vi kommer undersöka biljard i tre olika figurer, rektangel, cirkel och triangel. Samt visa olika exempel på räkningar som används beroende på vilket bord som används.

Tidigare studier av matematisk biljard så genomförs det med en biljardboll på ett bord  $Q$  av antingen slumpmässig eller bestämd form. Matematisk biljard kan även undersökas i flerdimensionell form även om jag kommer fokusera mest på det tvådimensionella fallet. Biljardbollens bana definieras av utgångsposition  $q \in Q$  och nuvarande rörelsevektor,  $v = v(0)$ . Absolutbeloppet av rörelsen på bollen  $v(t)$  under tiden  $t$  antas vara konstant. I fallet då bordet är bestående av kurvade sidor så ses vinklarna med hänsyn av tangenten. [5]

# 2 Historia

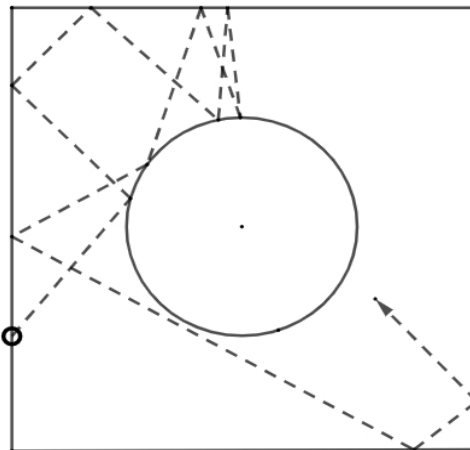
Över de senaste 40 åren har biljardteori sammankopplats med talteori (eller aritmetik), geometri, spektralteori, akustisk, optisk och många andra typer av genrer inom fysik. Det gör att matematisk biljard representerar en av de mest populära klasserna inom dynamiska system. Ett dynamisk system som matematisk biljard demonstrerar ett stort utbud av beteende så som vanlig, periodisk, kaotisk och mixad rumsdynamik. Beroende på hur bollens rörelsemönster ser ut. [2]

## 2.1 Hadamards biljard

År 1898 presenterades det tidigaste exemplet av kaotisk biljard som hade studerats för första gången. Det var Jacques Hadamard som studerade rörelsen av en fri partikel på en yta med negativ krökning, liknande en munk med hål i. Hadamard kunde visa att varje partikelbana rör sig ifrån varandra. Frank Steiner argumenterar för att Hadamards upptäckt var den allra första av ett kaotiskt dynamiskt system. Han påpekar också att upptäckten fick en stor spridning samt att idéerna övervägs i Albert Einsteins och Ernst Machs tänkande.[3]

## 2.2 Lorentz gas

Även känt som Sinai's biljard, en kvadrat där en centrerad skiva i mitten är borttagen. Det här presenterades av Yakov G. Sinai som ett exempel på samverkande Hamilton-system. Beteendet studerades genom att det var en stationär disk i mitten av kvadraten och en annan disk som var i rörelse. Genom att minska skivan i mitten så reducerades dynamiken mellan de två skivorna. Det Sinai lyckades med i den här presentationen var att visa det klassiska Boltzmann-Gibbs ensemblen<sup>1</sup> för en idealisk gas är det mest kaotiska Hadamard biljarden.[2]



Figur 2: Sinai biljard eller Lorentz gas

---

<sup>1</sup>Hur värmen fördelas i exempelvis ett bad när det fylls med både varmt och kallt vatten.



### 3 Matematisk biljard

#### 3.1 Skillnaden gentemot reell biljard

I jämförelse med reell biljard där vi behöver ta hänsyn till krafter som påverkar bollens bana, jag fokuserar istället på riktningen av bollen och hur den påverkas med konstant rörelser i olika riktningar. Vi bortser yttre faktorer som friktionskraft, hur bollens fart påverkas av studsar mot sidor av bordet och kollisioner med andra bollar. I reell biljard så kan du även påverka bollens rotation beroende på hur du träffar bollen du stöter iväg. Där vi till exempel kan träffa lågt på bollen för att den ska stanna upp snabbare efter en kollision eller träffa högt upp på bollen för att ge den en spinn framåt. Vi kan också träffa en boll på sidan som kommer påverka bollens spinn runt sin egen axel efter en kollision.

#### 3.2 Periodiska banor

Inom matematisk biljard så finns det olika typer av periodiska banor. Alltså där bollen har en och samma punkt som den startar från och återkommer till.

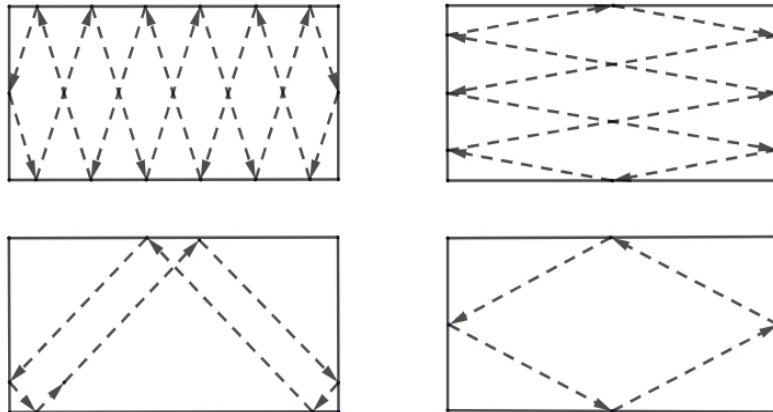
En bana kallas periodisk om det finns en punkt som bollen går igenom två gånger och har samma riktning. Derivatorna ska alltså vara detsamma i denna punkt.

Om banan beskrivs av en funktion

$$x : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

då kallas den periodisk om det finns  $0 \leq s < t$  så att

$$x(t) = x(s) \quad \text{och} \quad x'(t) = x'(s).$$



Figur 3: Olika typer av periodiska banor

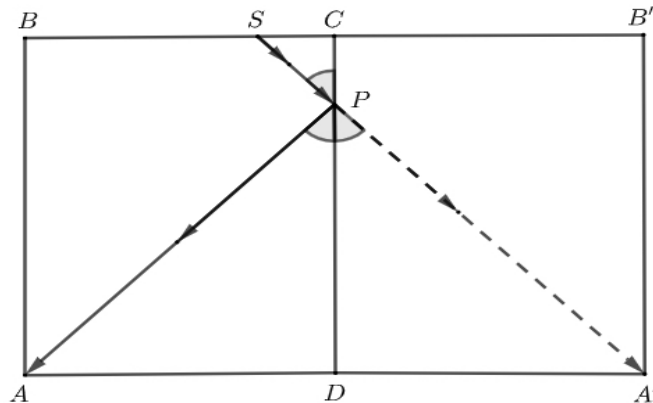
När man söker efter periodiska banor i matematisk biljard så är det viktigt att ha i åtanke precis som vi gick igenom innan, skillnaden gentemot reell biljard. Bollen skjuts iväg i en specifik vinkel och påverkas inte utav friktionskrafter och kollisioner. I varje kapitel om rektangulär, cirkulär och triangulär biljard, kommer jag undersöka och redovisa olika periodiska banor.

### 3.3 Att veckla ut banor

En stor del i bestämmandet av biljardbanor är att veckla ut banor från engelskan "unfolding trajectories". Genom att använda oss av veckla ut biljardbanor så kan vi observera banan av bollen i en rak linje, istället för att observera en enskild geometrisk figur. Detta underlättar proceduren att bestämma antalet studsar eller avgöra vilket hörn bollen hamnar i.

För att lättare förstå banan av en biljardboll så kan vi tänka oss att varje gång bollen träffar en kant så vecklar vi ut bordet genom att skapa en kopia jämsides kanten bollen träffat.

Utveckling av ett rektangulärt bord kan presenteras som följande<sup>2</sup>. Föreställ dig en rektangel  $ABCD$  som är spegelvänd mot sidan  $CD$ , vilket gör att vi får följande figur med  $A'$  och  $B'$ .

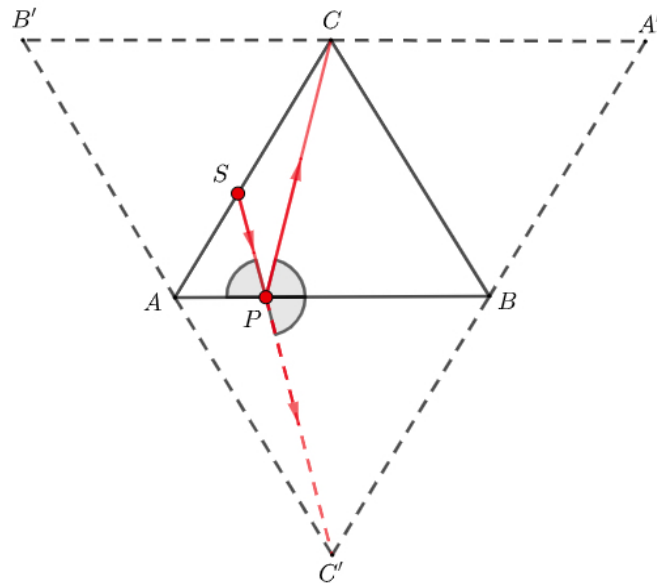


Figur 4: Veckla ut rektangulärt biljardbord

En boll startar  $S$  från slumpmässig position på linjen  $BC$ . Vi vill bestämma en punkt  $P$  på linjen  $CD$  så bollen studsar från  $P$  till hörnet  $A$ . Problemet kan vara ganska utmanande om vi inte vecklar ut biljardbordet. Precis som i figuren vecklar vi ut bordet. För att sedan hitta punkt  $P$  behöver vi korsa  $CD$  med  $SA'$ . För att beskriva banan i  $ABCD$  fortsätter vi in i  $CDB'A'$  med förståelse om att träffar vi punkt  $A'$  så är det samma som att träffa  $A$ . Reglerna för detta är lätta att se i sambanden med  $\angle A'PD$  och  $\angle APD$ .

<sup>2</sup><http://pi.math.cornell.edu/mec/Summer2009/Remus/lesson1.html>

Detsamma gäller för trianglar. En boll som startar  $S$  från en slumpmässig position på linjen  $AC$ . Vi ska bestämma en punkt  $P$  på sidan  $AB$  så att bollen hamnar i hörnet  $C$ . Problemet är utmanande om vi inte väljer att veckla ut bordet. Men eftersom vi vecklar ut bordet kan vi avgöra punkten  $P$  så att bollen hamnar i hörn  $C$ .



Figur 5: Veckla ut triangulärt biljardbord

## 4 Geometrisk biljard

### 4.1 Rektangulär biljard

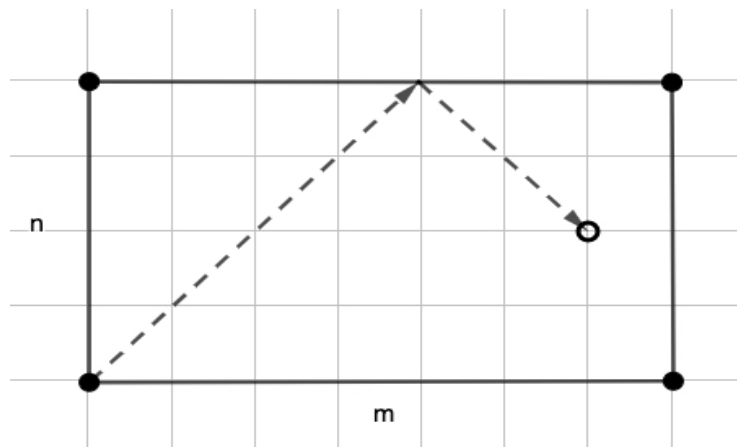
Föreställ dig ett rektangulärt bord med storlek  $m \times n$ , där  $m$  och  $n$  är sidornas längd i heltal. Bordet är utrustat med totalt fyra stycken fickor som bollen kan landa i, ett i varje hörn. Om en boll skjuts iväg från ett hörn med 45 grader så kommer bollen alltid studsas 45 grader på varje sida tills den landar i en hörnficka. [5]

Jag kommer besvara följande tre frågor:

-Kommer bollen alltid landa i en ficka eller kommer den studsas mot väggarna förevisgt?

-Hur många gånger kommer bollen studsas?

-Vilken ficka kommer bollen landa i?



Figur 6:

I figuren ovan så använder vi oss av 7x4 bord, banan visar att bollen kommer att studsas 9 gånger innan den landar i en ficka. Bollen kommer landa i den övre vänstra fickan. För att fortsätta besvara frågorna så formulerar vi en formel som avgör antalet studsar och avgör vilken ficka bollen landar i.

**Proposition 1.** *Ingen kantpunkt kan träffas två gånger*

*Bevis.* Anta att någon punkt faktiskt träffas två gånger. Då måste det vara något  $P$  som är första kantpunkten som blir träffad en andra gång. Låt  $Q$  vara den kantpunkt som träffas precis innan  $P$  träffas första gången. Låt  $R$  vara kantpunkten som träffas direkt efter  $P$  träffat kanten första gången.

När  $P$  kolliderar med kanten en andra gång måste ordningen vara  $Q \rightarrow P \rightarrow R$  eller  $R \rightarrow P \rightarrow Q$ .

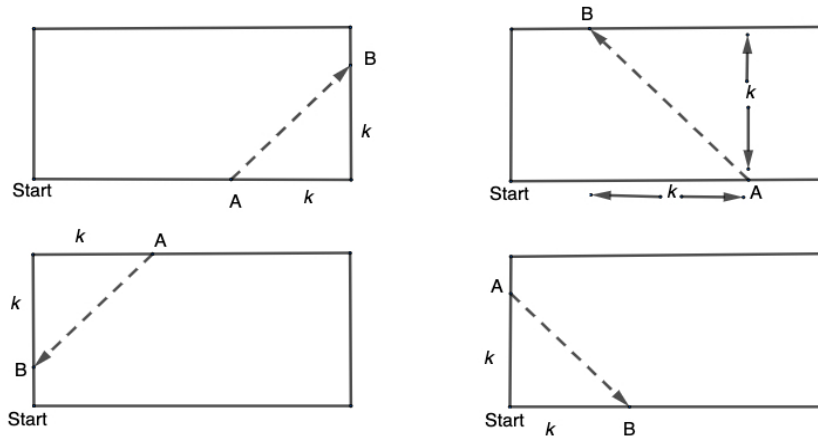
Första fallet så kan vi se att  $Q$  träffar en andra gång innan  $P$  träffar en andra gång. Andra fallet så träffar  $R$  en andra gång innan  $P$  gör det.

Det ger oss en motsägelse utifrån antagandet att  $P$  är första kantpunkten som träffas en andra gång.  $\square$

Att det är som mest  $2m + 2n - 4$  kantpunkter som bollen kan studsas mot är lätt att se. Bollen skjuts iväg med en vinkel 45 grader och kommer bibehålla samma vinkel genom hela bollbanan. Eftersom vi har  $m$  rutor horisontellt och  $n$  rutor vertikalt, varje ruta har två sidor vilket ses som punkter där bollen kan träffa. Bortfallet  $-4$  kommer utav att vi har fyra sidor med fyra hörn. I enlighet med Lemma, att bollen träffar varje punkt maximalt en gång. Således så kommer inte bollen på obestämd tid att fortsätta studsas utan tillslut hamna i en hörnficka.[5]

För att räkna ut antalet studsar som bollen kommer genomföra så kan vi använda oss av en övre gräns, två punkter med ett avstånd som representerar summan av det horisontella och vertikala distansen mellan de motstående punkterna. Exempelvis är de motstående hörnen av ett  $7 \times 4$  bord på en distans med 11 sektioner ifrån varandra.

Hur kommer då avståndet till startpositionen förändras när bollen går från en studs  $A$ , till en annan,  $B$ ?



Figur 7: Avstånd till startposition

Noterbart är att avståndet, som ökar eller minskar med  $2k$  om det inte är lika långt, när vi jämför avståndet från startpositionen till punkt  $A$  respektive punkt  $B$ . I följande theorem så kommer vi använda oss av och bevisa att just vid någon studs är avståndet till startpunkten lika långt.

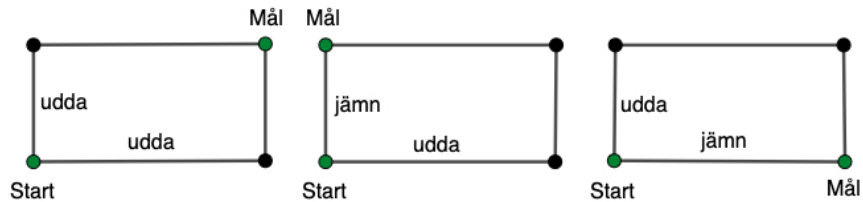
Föreställ att bordet  $m \times n$  är naturliga tal men relativt prima. I och med att problemet  $7 \times 4$  är ekvivalent med  $21 \times 12$ .

**Theorem 1.** Anta  $m$  och  $n$  är relativt prima. Det resulterar precis i att bollen kommer studsas exakt  $m + n - 2$  gånger innan bollen hamnar i en hörnficka.

*Bevis.* Totala längden av den horisontella färden av bollen från start till slut behöver vara en multipel av  $n$  och den totala bollbanan av vertikala behöver vara en multipel av  $m$ . Eftersom studsens vinkel är 45 grader kommer det implicera att det horisontella och vertikala avståndet är lika. Det medför att den horisontella färdens distans är en multipel av både  $m$  och  $n$  samt  $mn$ . Notera att den totala färden i horisontellt plan är åtminstone  $mn$  och därför måste bollen färdas från den ena vertikala kanten till motstående  $n$  gånger. [5]

Bollen träffar de vertikala kanterna åtminstone  $n - 1$  gånger innan bollen hamnar i ett hörn. Liknande med de horisontella kanterna, där träffar bollen kanterna  $m - 1$  gånger innan den når en hörnficka. Således träffas åtminstone en kant  $m + n - 2$  gånger. Av de  $2m + 2n - 4$  punkter där bollen studsar så är bara hälften på ett jämnt avstånd från startpositionen. Genom vår observation att alla punkter är på ett jämnt avstånd studsar bollen som mest  $m + n - 2$  gånger. Följaktligen studsar bollen  $m + n - 2$  gånger.  $\square$

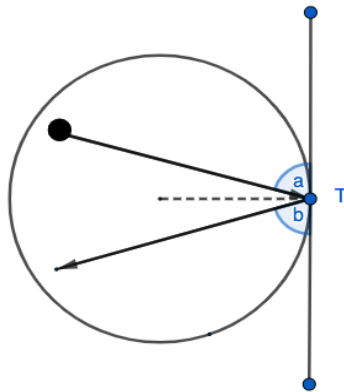
För att svara på den sista frågan angående vilken hörnficka bollen kommer hamna i så använder vi oss av Theorem 1 och resonemanget av jämna distanser. Om vi kallar slutpunkten för målet, så kommer målet inte vara detsamma som startpunkten och är på ett jämnt avstånd. Det följer direkt av målet är som i figurena nedan beroende på vilket fall vi har.



Figur 8: Bestäm hörnficka

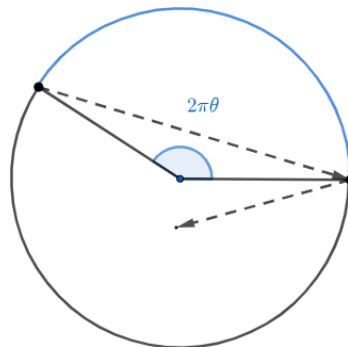
## 4.2 Cirkulär biljard

Vi antar att bordet är formad som en cirkel men reglerna förblir detsamma. En boll som träffar cirkeln från insidan vid en punkt T. Ta sedan tangenten till cirkeln vid den punkten. Den inkommande vinkeln, säg a, som banan gör med tangenten är lika med den utgående vinkeln, säg b, av samma linjer, som visas i figuren. [1]



Figur 9: Tangenten underlättar utgående vinkel.

En viktig del i redovisningen av cirkulär biljard är  $\theta$ . Theta är vinkeln som räknas ut genom att titta på avståndet från en studs till nästa, längs cirkelns båge. I en cirkel så använder vi oss av  $2\pi\theta$ .



Figur 10: Användning av  $\theta$

För att definiera avbildningen  $T_\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  som skapas i en cirkel. Så att:

$$T_\theta(x) = x + \theta(\text{mod}1),$$

där  $x \in [0, 1]$  och  $\theta \in \mathbb{R}$ . Första punkten betecknas av  $x$  och  $\theta$  betecknar vinkeln av rotationen längs cirkeln. Det gör att vi kan se antalet  $n$  upprepningar av avbildningen  $T_\theta$  som renderar till följande:

$$T_\theta^n(x) = x + n\theta(\text{mod}1).$$

**Theorem 2.** 1. Om  $\theta \in \mathbb{R}$  är ett rationellt tal, då är varje kartläggning av banan  $T_\theta(x)$  periodisk. Vidare, om  $\theta = \frac{p}{q}$  är reducerad så är längden av perioden likvärdig med  $q$ .

2. Om  $\theta \in \mathbb{R}$  är ett irrationellt tal, då är varje kartläggning av banan  $T_\theta(x)$  tät i  $[0, 1]$ . Med andra ord, så att varje del av intervallet innehåller punkter av den här banan.[5]

*Bevis.* 1. Skriv  $\theta \in \mathbb{R}$  som  $\frac{p}{q}$  med  $p \in \mathbb{Z}$  och  $q \in \mathbb{N} > 0$  så att  $\text{sgd}(p, q) = 1$ . Det ger oss:

$$\begin{aligned} T_\theta^q(x) &= x + p\theta \pmod{1} \\ &= x + p \pmod{1} \\ &= x \pmod{1}. \end{aligned}$$

Om det finns  $n \in \mathbb{N}$  så att  $T_\theta^n(x) = x$ , då gäller

$$x = x + n\theta(\text{mod}1).$$

Det betyder att  $(x + n\theta) - x$  är ett heltal. Fortsättningsvis så gäller  $\frac{np}{q} \in \mathbb{Z}$ , då delar  $q$  naturliga talet  $n$ .

2. Först bevisar vi att alla bilderna av  $T_\theta^n(x)$  är olika. Anta att för två naturliga tal  $j$  och  $i$

$$T_\theta^j(x) = T_\theta^i(x).$$

Då ser vi att

$$x + j\theta = x + i\theta \pmod{1}.$$

Det är i sin tur ekvivalent med

$$(i - j)\theta \in \mathbb{Z}.$$

Vilket resulterar till  $i - j = 0$ , för att  $\theta$  är irrationell, så gäller  $i = j$ .

Dela in intervallet  $[0, 1]$  i  $n$  intervall, så att varje intervall har längden  $\frac{1}{n}$ . Vi vet att termerna

$$x, T_\theta(x), \dots, T_\theta^n(x)$$

är  $n + 1$  stycken och delas upp i  $n$  intervall. Alla termer är olika.



Det finns  $i \neq j$  så att

$$|T_\theta^i(x) - T_\theta^j(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Detta kan skrivas

$$\begin{aligned} & |T_\theta^{i-j}(x) - x| \\ &= |T_\theta^j(T_\theta^{i-j}(x) - x)| \\ &= |T_\theta^i(x) - T_\theta^j(x)| \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Men

$$T_\theta^{i-j}(x) \neq x.$$

Vi kan anta att

$$T_\theta^{i-j}(x) > x$$

genom att byta valen mellan  $i$  och  $j$ , om det behövs. Dessutom kan vi anta att  $x = 0$ , eftersom

$$\begin{aligned} & |T_\theta^{i-j}(x) - x| \\ &= |T_\theta^{i-j}(x - x)| \\ &= |T_\theta^{i-j}(0) - 0|, \end{aligned}$$

för att  $T_\theta(y) = T_\theta(0) + y \pmod{1}$  för alla  $y \in (0, 1)$ . Vi skriver

$$d = |T_\theta^{i-j}(x) - x| = |T_\theta^{i-j}(0)| \leq \frac{1}{n}.$$

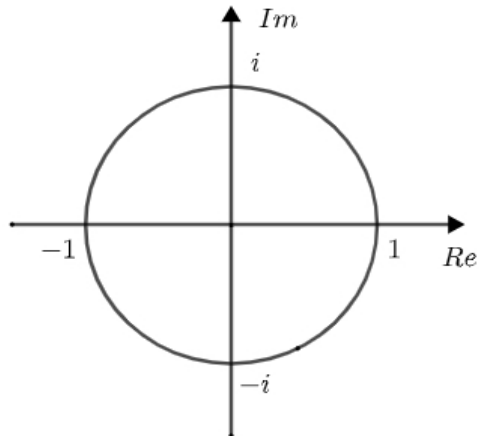
Det gör att punkterna

$$k \cdot d = T_\theta^{(i-j)k}(0)$$

ligger i banan av 0 för alla  $k \leq \frac{1}{d}$ . Det gör att banan är tät eftersom  $d$  är hur små som helst.  $\square$

En cirkel har en roterande symmetri. Det medför att biljardbollens bana helt bestäms med avseende på  $\theta$ . Om  $\theta$  är ett rationellt tal implicerar det att varje bana blir periodisk utifrån biljardbollens rörelsemönster. Dessutom om  $\theta = \frac{p}{q}$ , då är längden av den periodiska banan likamed  $q$ . Om  $\theta$  är ett irrationellt tal då implicerar det att varje bana är tät längs cirkeln.

Vi får införa det komplexa talplanet när det reella talplanet inte räcker till. Vi har x-axeln som representerar den reella delen ( $Re$ ) av talet  $z$  och y-axeln som representerar den imaginära ( $Im$ ) delen av talet.



Figur 11: Komplex talplan

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$$

Där  $i^2 = -1$ . För att räkna med hjälp av enhetscirkeln i ett komplext talplan så kan  $e^{i2\pi t}$  vara en funktion som används i intervallet  $[0,1)$

$$e^{i2\pi t} \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad \forall t.$$



Figur 12: Biljardbanans steg

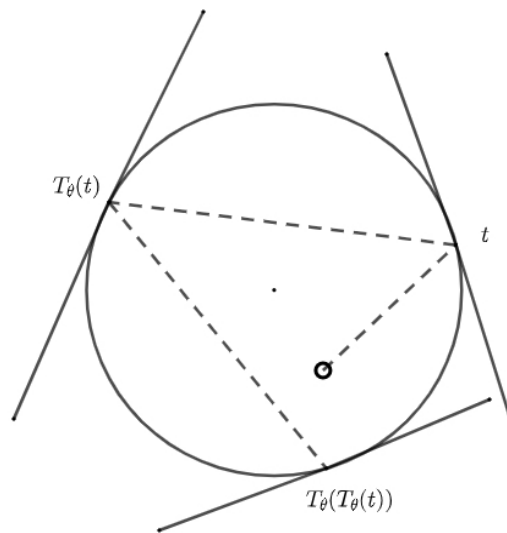
$$t \mapsto e^{2\pi i t} \in \mathbb{C}$$

$$[0, 1) \rightarrow z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1$$

För att förtydliga de olika stegen i det komplexa talplanet med hjälp av en cirkel så kan vi redovisa några exempel:

$$\begin{aligned}
 e^0 &= 1 \\
 e^{i\pi} &= -1 \\
 e^{i\frac{\pi}{2}} &= i \\
 e^{i\frac{3\pi}{2}} &= -i.
 \end{aligned}$$

Vi ska nu redovisa varför  $T_\theta$  är en bra modell för att visa dess påverkan i en cirkel.



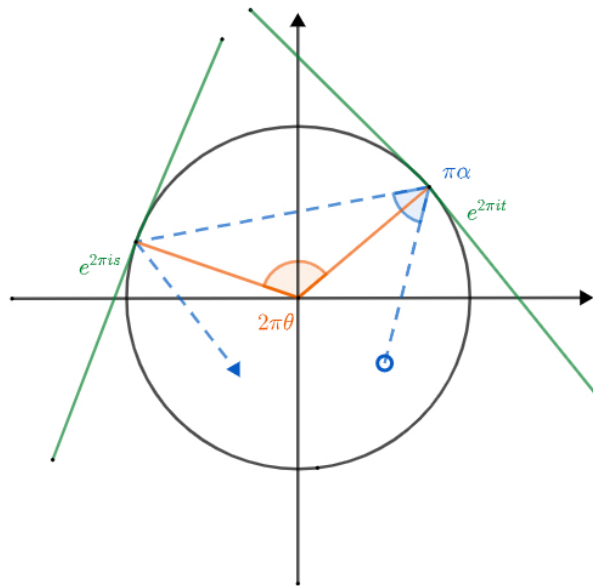
Figur 13:  $T_\theta$  beskriver punkterna som träffas i en bana.

Annan ordning:

$$e^{2\pi i(x+\theta)} = e^{2\pi ix} \cdot e^{2\pi i\theta}.$$

Om en boll börjar i cirkeln på så sätt att reflektionsvinkeln blir  $\pi\alpha$ , då beskrivs nästa punkt på cirkeln som träffas  $e^{2\pi it}$ ,  $t \in (0, 1)$  som  $s = t + (1 - \theta) \pmod{1}$ .

Nu ska vi argumentera för att visa att det stämmer. Vi antar att bollen reflekteras i vinkeln  $\pi\alpha$  där  $\alpha \in [0, 1)$ . Vi söker  $\theta \in [0, 1)$  så att nästa punkt som träffas efter  $x = e^{2\pi it}$  är  $y = e^{2\pi iT_\theta(t)}$ . Resonemanget illustreras i bilden nedan. Vi kan observera att summan av alla vinklar i triangeln, som beskrivs x, y och origo är  $\pi$ .



Figur 14: Bestäm  $\theta$

Observera att bollen som träffar cirkeln i

$$e^{2\pi it} = f(t)$$

och reflekteras med vinkeln  $\pi\alpha$  som nästa gång träffar punkten

$$e^{2\pi i(t + \frac{1-\alpha}{2})} = f(t + \frac{1-\alpha}{2}).$$

Då blir

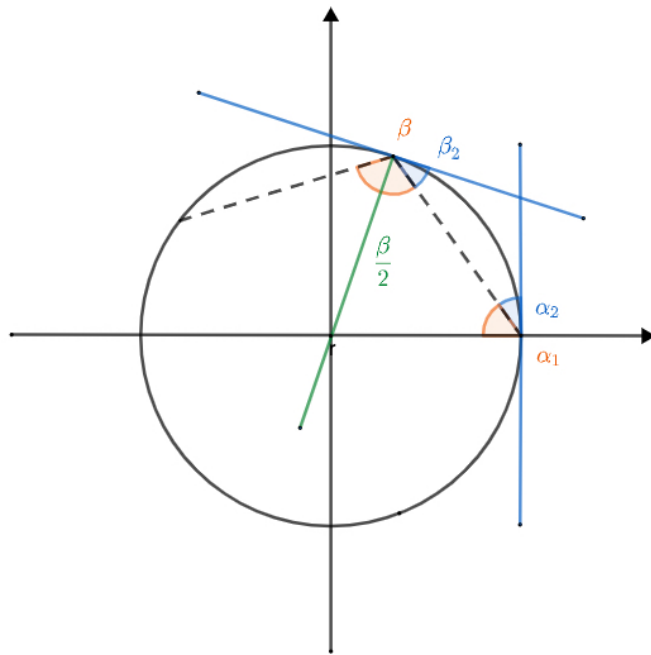
$$2\pi\theta = \pi - 2\frac{\pi\alpha}{2} = \pi - \pi\alpha = \pi(1 - \alpha).$$

Vinkelsumman i en triangel är  $180^\circ$  som i radianer är  $\pi$  vi ställer upp på följande sätt, vi antar att den blåa vinkeln är  $\alpha\pi$  och den sökta vinkeln i som är orange är  $2\pi\theta$  för att räkna ut  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \pi - 2\frac{\alpha\pi}{2} &= 2\pi\theta \\ \implies \pi(1 - \alpha) &= 2\pi\theta \end{aligned}$$

$$\implies \theta = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

För att visa varför rotationsavbildningen  $T_\theta$  modellerar punkterna som träffas på cirkeln, bevisar vi att reflektionsvinkeln inte förändras (se figur nedan). En boll skjuts iväg från punkt  $(1, 0)$  med en vinkel  $\theta = \alpha_1$ , som träffar en punkt på cirkeln och reflekterar i vinkel  $\beta$ . Denna vinkel bestäms med hjälp av  $\alpha_1$  och  $\alpha_2$ .



Figur 15: Reflektionsbilden förändras inte

Vi kan först observera

$$\beta = \pi - 2\beta_2.$$

För att uttrycka  $\beta$  med  $\alpha$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$$

För att den blå triangeln med vinklarna  $\alpha_2$  och  $\beta_2$  är en liksidig triangel, ser vi att

$$\beta_2 = \alpha_2$$

$$\beta = \pi - 2\alpha_2.$$

Detta visar att

$$\beta = 2\alpha_1.$$

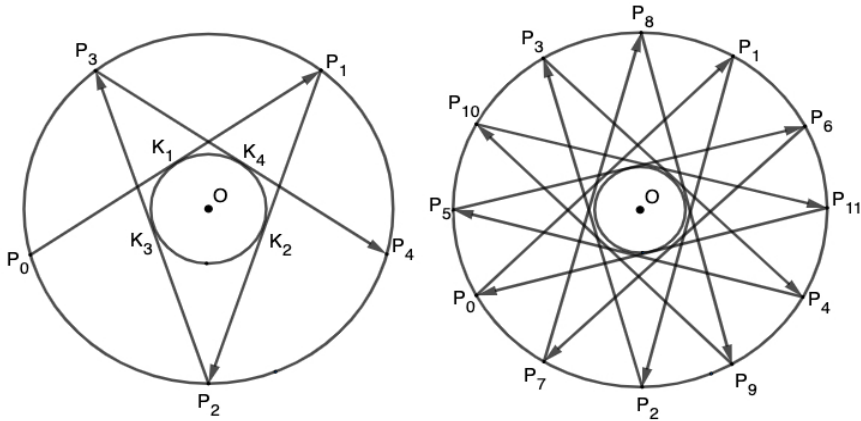
**Theorem 3.** En biljardbana i en cirkel kommer aldrig in i en koncentrisk cirkel, alla linjer tillhörande banan blir tangenter till den mindre cirkeln.

*Bevis.* Föreställ dig en biljardbana  $P_0P_1P_2\dots$  (ett polygon med hörnen  $P_0P_1P_2\dots$ ). Det följer av definitionen för banor[1]

$$\overline{P_0P_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \dots$$

Notera att för varje  $k = 1, 2, 3\dots$  blir trianglarna  $P_{k-1}OP_k$  och  $P_kOP_{k+1}$  lika. Eftersom de är likbenta med lika hörn i basen. Följdaktigen gäller det för alla hörn (se figuren nedan).

$$\angle P_0OP_1 = \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \dots$$



Figur 16: Banan kommer aldrig innanför den inre cirkeln

Fortsättningsvis, mittpunktsnormalen  $K_i$  av alla delar från banan är av samma mått till cirkelns mittpunkt. Vilket är lätt att se då de är placerade på samma sätt till mittpunkten  $O$ . Det gör att varje biljardbana är belägen i en cirkulär ring.[5]  $\square$

Vi ska nu redovisa en tillämpning av biljard som ställdes av Utkir Rozikov i boken *Mathematical Billiards*. En bok som givit mig mycket inspiration inom detta ämne. [5]

**Theorem 4.** För alla  $k \geq 1$  så finns det ett naturligt tal  $n$  så att  $0 < \sin(n) < 10^{-k}$ .

*Bevis.* Vi observerar att  $\sin(t) = \text{Im}(e^{2\pi it})$  för alla  $t \in \mathbb{R}$ . Det är därför vi kan lösa problemet genom att studera biljarden på enhetscirkeln, där bollen reflekteras med vinkel  $\pi - 1$ . Faktiskt visar beräkningen som vi gjorde tidigare att banan kan beskrivas med  $T_{\frac{1}{2\pi}}$ .

Med reflektionen  $\pi - 1$  och parametern

$$\frac{1 - \left(\frac{\pi-1}{\pi}\right)}{2} = \frac{1 - 1 + \frac{1}{\pi}}{2} = \frac{1}{2\pi}.$$

Banan som beskrivs av  $T_{\frac{1}{2\pi}}$  är tät eftersom  $\frac{1}{2\pi}$  är irrationell, vilket vi kan konstatera med theorem 2. Det gör att det finns ett stort  $n \in \mathbb{N}$ , så att  $T_{\frac{1}{2\pi}}(n)$  ligger i delen

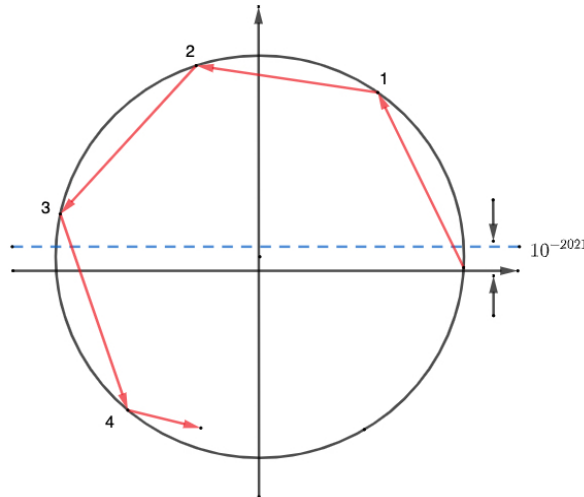
$$\{z \in S^1 \mid 0 < \text{Im } z < 10^{-k}\}.$$

Där

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

□

Beviset gäller för alla  $k \geq 1$ . I figuren nedan så har vi använt oss av ett  $k = \text{år} = 2021$  som ett exempel.



Figur 17: Biljard i en cirkel

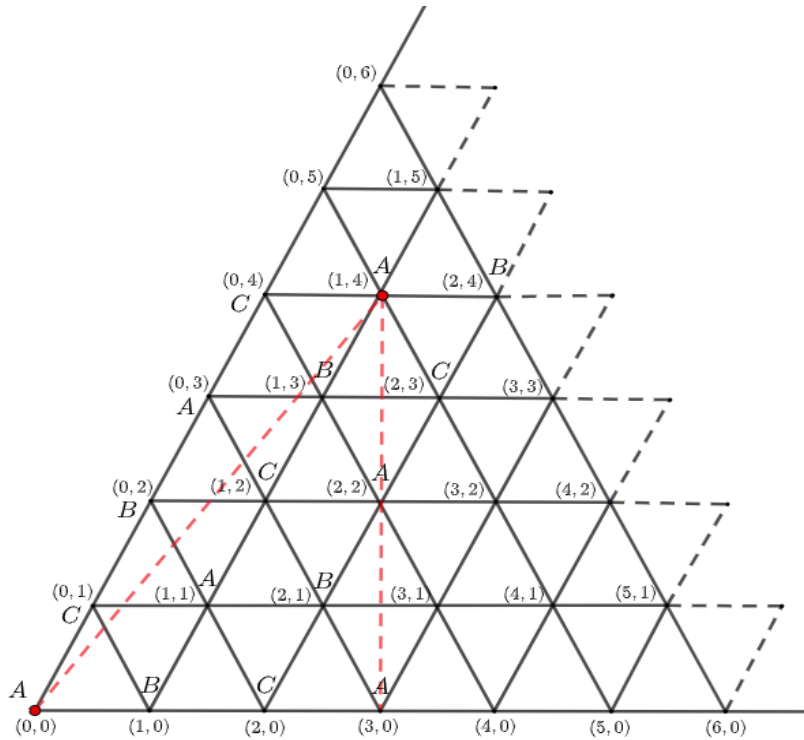
### 4.3 Triangulär biljard

Föreställ ett liksidigt triangulärt biljardbord och anta att en biljardboll börjar från ett hörn  $A$  av triangeln. Bollen skjuts iväg i en vinkel som gör att den studsar sju gånger och följer samma regler för biljard och återgår till det ursprungliga hörnet. Tänk också på att den inledande triangeln har hörn placerade vid  $A = (0,0)$ ,  $B = (1,0)$  och  $C = (0,1)$ , ett modifierat koordinatsystem som gör att triangeln blir liksidig, vilket visas i figuren nedan.

**Problem 1.** Hitta en vinkel så att bollen återvänder till sin ursprungliga position  $A$ .

**Lösning 1.**

För att kunna besvara problemet så behöver vi veckla ut bordet till och med ordning 6. Varje toppunkt för tessellationen<sup>3</sup> motsvarar en av de ursprungliga hörnen från det liksidiga biljardbordet. Exempelvis punkterna  $(0,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,3)$ ,  $(1,4)$ ,  $(2,2)$  toppunkt  $A$ . Punkterna  $(1,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(2,1)$  motsvarar toppunkt  $B$  och på samma sätt för  $C$ , som visas i figuren nedan.



Figur 18: Triangulär biljard, veckla ut.

<sup>3</sup>Tessellation är en utfyllnad av ett plan med geometriska figurer i ett mönster utan överlappningar eller mellanrum



Det är beroende av biljardbollens riktningen som avgör hur många studsar bollen genomför innan den återkommer till utgångspunkten. Genom att rita upp den här figuren så kan man avgöra hur många studsar bollen genomför innan den är tillbaka på utgångspunkten. Genom att räkna antalet tessellationer som den röda linjen passerar, det motsvarar antalet studsar. En bollbana som utgår från punkten A till en annan punkt A i det här fallet från (0,0) till (1,4), representerar att bollen återkommer till sin utgångspunkt efter ett antal studsar. Genom att beräkna antalet tessellationer som bollen skär så får vi reda på antalet studsar. I det här fallet är det 7 stycken.

För att beräkna vinkeln på bollen så tittar vi på den rätvinkliga triangeln med hörn (0,0), (1,4) och (3,0). Avståndet från (3,0) till (1,4) är exakt fyra gånger höjden i en liksidig triangel med längd 1. Det visar att längden är  $2\sqrt{3}$ . Basens längd mellan (0,0) och (3,0) är tre. Det gör att den sökta vinkeln är

$$\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 44.11^\circ.$$

Vi ska nu redovisa hur vi kan lösa följande nedstående problem.

**Problem 2.** 1. Finns det en annan vinkel som också löser problemet?

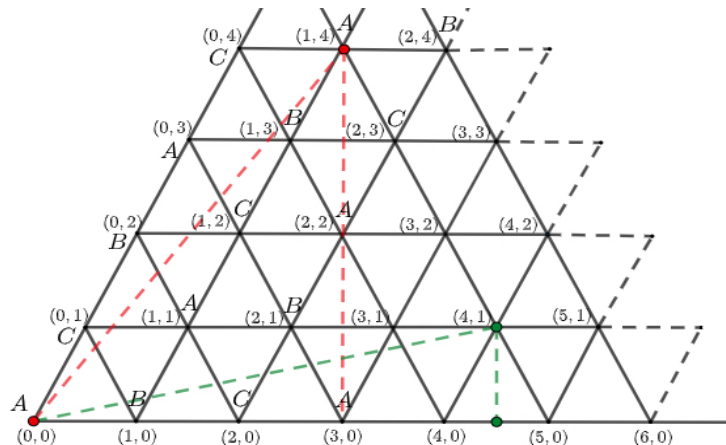
2. Finns det möjlighet att lösa problemet med 5 studsar?

3. Med vilka vinklar kommer bollen gå från startpunkt A till att avsluta i A?

Hur många studsar krävs?

**Lösning 2.**

1. Vi börjar med att söka punkter A med ett avstånd av 7 tessellationer. Vi finner punkten (4,1)



Figur 19: Triangulär biljard, en annan vinkel.

som är på ett avstånd av 7 tessellationer, alltså 7 studsar innan bollen återgår till sin utgångspunkt. Vi beräknar vinkeln.

$$H = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad B = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{9}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{36}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right) = 5.5^\circ.$$

2. Nej det finns ingen möjlighet att lösa problemet med 5 studsar. Om vi tittar på figuren så ser vi att det inte finns någon möjlighet att genomföra 5 tessellationer för att återkomma till  $A$ . De möjliga punkter som bollen kan ansluta till är  $(1, 3)$  och  $(3, 1)$ , vilket är hörn som motsvarar  $B$  och  $C$ .

3. Hörn som motsvarar  $A$  är

$$(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 3), (0, 6), (3, 0), (6, 0), (1, 4), (4, 1), (5, 2), (2, 5) \text{ osv}$$

Vi kan konstatera att punkterna

$$(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) \text{ osv}$$

är av samma vinkel. Detsamma gäller för punkterna som går längs x-axeln och y-axeln, vilket även representerar det maximala vinkelspannet som bollen kan skjutas iväg i. Vi ställer upp på följande sätt

$$k, l, m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} k(1, 1) + l(3, 0) + m(0, 3) \\ = (k + 3l, k + 3m) \end{aligned}$$

Höjden som representeras av y-axeln skrivs

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (k + 3m)$$

Sedan x-axeln som skrivs

$$(k + 3l)$$

Detta ger oss

$$\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(k + 3m)}{k + 3l}\right).$$

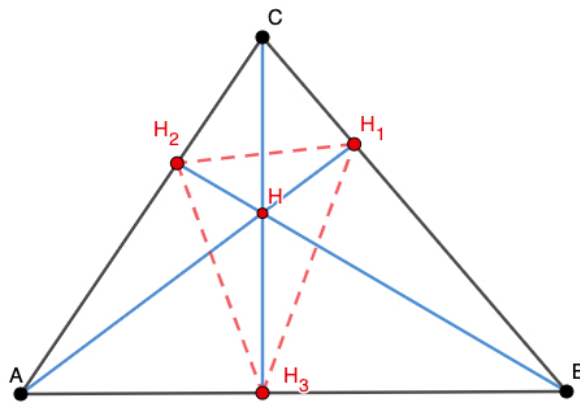
Nästa problem gäller periodiska banor på ett triangulärt biljardbord som ska vara minimal.

**Problem 3.** Vilken är den kortaste periodiska banan som finns i ett triangulärt bord?

Förklaring av begrepp som används i lösningen:

1. *Akut triangel:* En triangel med alla hörn mindre än 90 grader. Exempelvis  $\triangle ABC$  i figuren nedan.

2. *Ortiska triangeln:* För en given triangel  $ABC$  med hörnen  $\triangle H_1H_2H_3$  som en inskriven triangel representerar ändpunkter för höjderna i  $\triangle ABC$ , kallas för en ortisk triangel. De tre linjerna  $\overline{AH_1}$ ,  $\overline{BH_2}$ ,  $\overline{CH_3}$  har sambandet i den ortiska triangelns medelpunkt där de tre bisektriserna skär varandra i  $H$ .<sup>[4]</sup>



Figur 20: Begreppsförklaring

3. *Inskrivna triangeln:* I en given triangel kan man alltid konstruera en inskriven triangel så att den inskrivna triangelns hörn är placerade på de tre sidorna av den yttre triangeln.

### Lösning 3.

En boll måste alltid studsas minst tre gånger, eftersom den inte kan studsas med en vinkel av 90 grader i en triangel. Vi undersöker periodiska banor med tre studsar. Längden av banan är likamed omkretsen av den inskrivna triangeln. Detta följer av att vi ställer oss själva ytterligare två frågor:

1. Vilken är den inskrivna triangelns minimala omkrets?
2. Kan denna triangel realiseras som banan av en biljardboll?

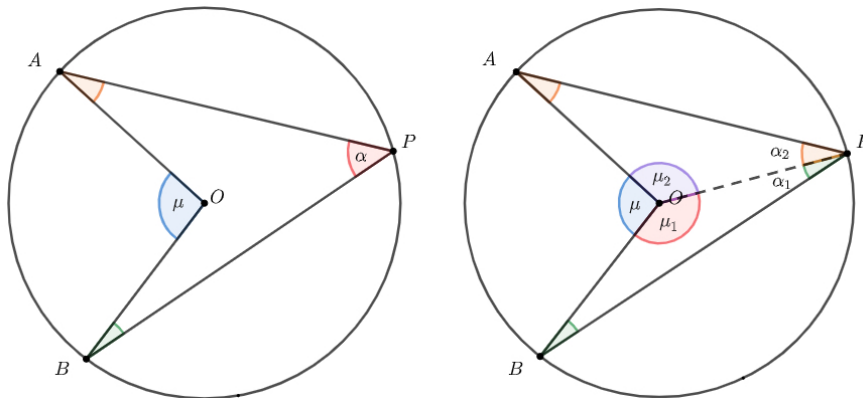
För att besvara första frågan, kommer vi ihåg den inskrivna triangeln där vi ska finna den minimala omkretsen. Det finns alltid en minsta inskrivna triangel som konstrueras i Fagnanos problem<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Fagnano's problem, som inom geometrin är ett optimeringsproblem som introducerades år 1775 av Giovanni Fagnano

Fagnanos triangel konstrueras genom att dra rätvinkliga höjder från triangelns tre sidor. Utifrån dessa punkter så konstrueras en inskriven triangel. Den ortiska triangeln, med hörn vid baspunkterna för den angivna triangelns höjder, har den minsta omkretsen av alla trianglar som är inskrivna i en akut triangel. Därav är det lösningen till Fagnano's problem.

För att kunna redovisa beviset av den andra frågan om detta är en möjlig biljardbana för en boll, så ska vi visa att punkterna P, Q, R är delade av en bisektris. En bisektris delar en vinkel mitt itu och medför att vinkeln bollen har när den träffar punkten är densamma när den lämnar. Först då kan vi dra slutsatsen att Fagnanos triangel är en bana för en biljardboll. Det är tillräckligt att undersöka  $\angle QPR$ . För beviset så behöver vi tre stycken lemma.

**Lemma 1.** Om  $A, B, P$  är punkter på en cirkel så att  $A$  och  $B$  är på ena sidan och  $P$  är på motsatt sida. Sträckorna konstrueras  $\overline{AP}$ ,  $\overline{PB}$ ,  $\overline{BO}$  och  $\overline{OA}$  enligt figuren nedan så medför det att  $\mu = 2\alpha$ .



Figur 21:  $\mu = 2\alpha$

*Bevis.* Vi börjar med att observera figuren till vänster. Utifrån den ska vi redovisa att  $\mu = 2\alpha$ . Vi redovisar det genom att dra en sträcka  $\overline{OP}$ . Vilket leder till att  $\alpha$  delas i två och bildar  $\alpha_1$  och  $\alpha_2$ . Detta resulterar till att triangeln  $BPO$  blir likbent eftersom vinkeln  $B$  blir lika stor som  $\alpha_1$ . Vi kan även observera att  $\mu_1 = \pi - 2\alpha_1$  med hjälp av den likbenta triangeln.

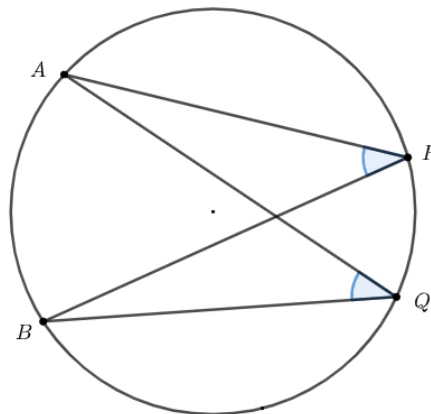
Samma argument tillämpas på  $\alpha_2$  och  $\mu_2$  och det leder till att vi drar slutsatsen

$$\begin{aligned}
\mu &= 2\pi - \mu_1 - \mu_2 \\
&= 2\pi - (\pi - 2\alpha_1) - (\pi - 2\alpha_2) \\
&= 2(\alpha_1 + \alpha_2) \\
&= 2\alpha.
\end{aligned}$$

□

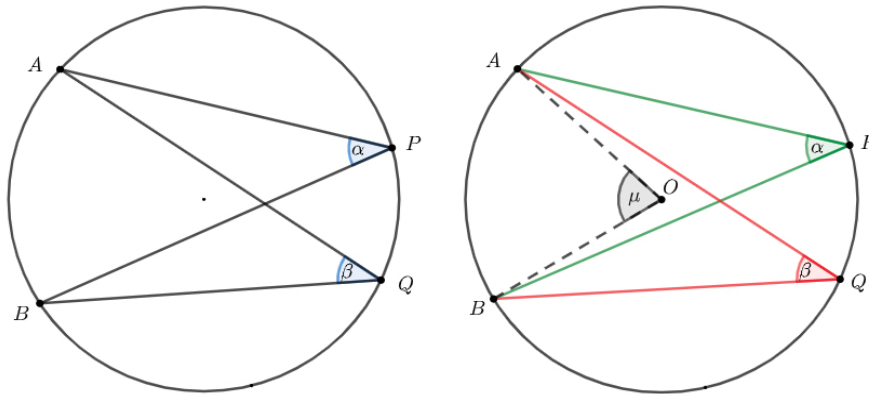
**Lemma 2.** Om  $A, B, P, Q$  är punkter på en cirkel så att  $P, Q$  delar samma del av bågen på cirkeln mellan  $A$  och  $B$ . Då gäller

$$\angle APB = \angle AQB.$$



Figur 22: Hur bevisar vi  $\angle APB = \angle AQB$ ?

*Bevis.* För att kunna bevisa  $\angle APB = \angle AQB$  så använder vi oss av Lemma 1. I detta fall så har vi fyra punkter på en cirkel vilket gör att vi tittar på en av punkterna  $P$  och  $Q$  i taget. Vinklarna sätter vi till  $\alpha$  respektive  $\beta$  och observerar förhållandet till origo med vinkel  $\mu$ . Genom att konstruera figuren till höger så kan vi följa sambandet med Lemma 1.



Figur 23:  $\angle APB = \angle AQB$

Följdaktningen ser vi att  $\mu = 2\alpha$  och  $\mu = 2\beta$ . Som leder till att

$$2\alpha = 2\beta$$

$$\alpha = \beta.$$

Vilket avslutar beviset då vi visat att

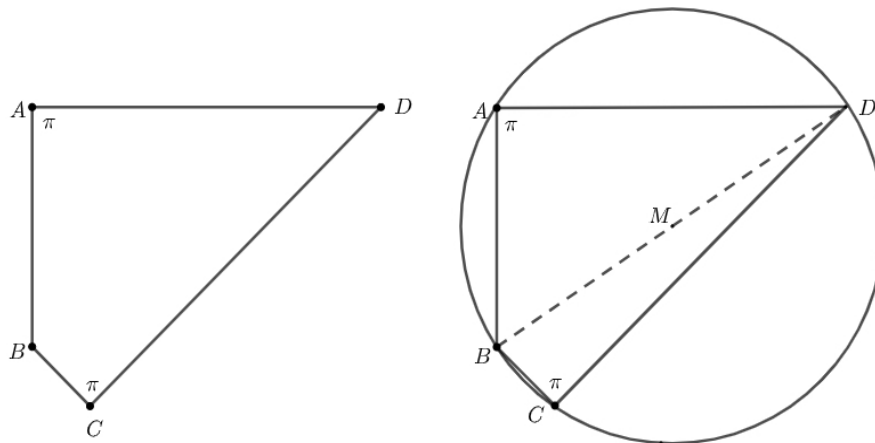
$$\angle APB = \angle AQB.$$

□

**Lemma 3.** Om  $A, B, C, D$  är hörnpunkter av en fyrhörning som har minst två rätvinkliga hörn som är motstående varandra, då ligger punkterna på en cirkel.  
*Exempelvis*

$$\angle BAD = \angle BCD,$$

då finns det en cirkel som punkterna  $A, B, C, D$  ligger på.

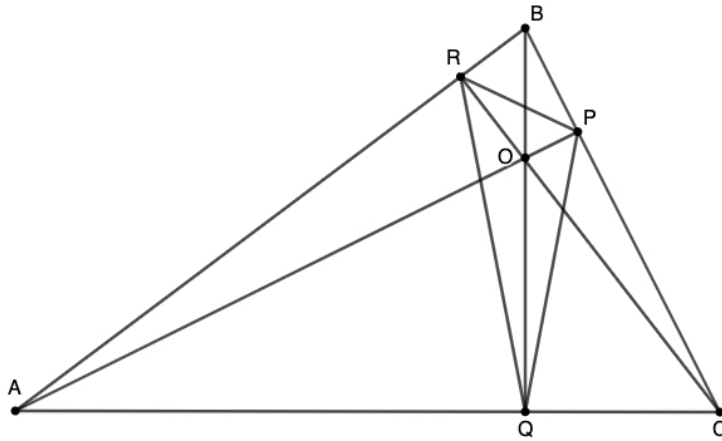


Figur 24: Skapa en cirkel runt en fyrhörning med två motstående räta vinklar

*Bevis.* En fyrhörning som uppfyller kraven för Lemma 3, med två motstående räta vinklar delas in i två rätvinkliga trianglar  $BDA$  och  $DBC$  kan man använda Thales sats<sup>5</sup>. Om  $M$  är mittpunktsnormalen av sträckan  $\overline{BD}$ , då ligger punkterna  $B, D, A$  på halvcirkeln med centrum  $M$ . På samma sätt ligger  $D, B, C$  på halvcirkeln med samma centrum. Alltså ligger  $A, B, C, D$  på cirkeln med centrum  $M$ .  $\square$

<sup>5</sup>Thales sats säger att om en sida i en triangel ligger längs en cirkels diameter, och omm det tredje hörnet också ligger på cirkeln, så är vinkeln vid det tredje hörnet en rät vinkel.

Vi kan nu komplettera lösningen till problem 3 genom att visa att vinklarna i Fagnanos biljard delas av bisektriser.



Figur 25: Fagnano's biljard

Fyrhörningen  $BPOR$  har två rätvinkliga hörn,  $\angle BRO = \angle BPO = \frac{\pi}{2}$ . Som gör att de ligger på en cirkel i enlighet med lemma 3. Det betyder att

$$\begin{aligned}\angle APR &= \angle OPR \\ &= \angle OBR \\ &= \angle QBA\end{aligned}$$

i enlighet med lemma 3.

På samma sätt ser vi att  $\angle APQ = \angle ACR$ . Det är nu tillräckligt att visa  $\angle ACR = \angle QBA$ .

Både  $\angle ACR$  och  $\angle QBA$  ligger i en rätvinklig triangel som omfattar vinkel  $\angle BAC$  också. Då gäller

$$\angle ACR = \frac{\pi}{2} - \angle BAC = \angle QBA.$$

Det gör denna periodiska sträcka till en möjlig biljardbana då punkterna  $R$ ,  $P$  och  $Q$  har samma vinkel när de träffar sidorna av den yttre triangeln som när de studsar därifrån. Vilket löser problemet.



## 5 Avslutande kommentarer

I detta arbete har jag redovisat hur man kan arbeta med geometri i form av matematisk biljard. Jag har lyft historiker som började se mönster i dynamiska system, där just matematisk biljard är en av de populäraste klasserna. Jag läser till Ämneslärare i ämnena idrott och matematik. Jag har alltid tyckt att matematik varit ett roligt ämne, dels på grund av logiken men även för att det alltid finns mycket mer att undersöka. Med examensarbetet såg jag möjligheten att göra ett arbete som bidrar till min kunskap men även som ett material till min lärargärning. Jag tror mycket på att lära ut till elever med hjälp av praktiska exempel som många kan relatera till. Många skolor har fritidsgårdar och bortsett pingsbord så finns det ofta ett eller flera biljardbord där. Även om inte alla elever spelat biljard så är de något de kan relatera till.

I mitt examensarbete har jag verkligen fått djupdyka för att förstå matematiken. Vilket i skolan inte hör till vanligheten, då man ofta förklarar att så här är det och det lämnar många elever fundersamma. För att undvika att elever blir fundersamma som kanske inte besitter den teoretiska förmågan så kan praktiska hjälpmedel bidra till en större förståelse.

Slutligen vill jag tacka min handledare Sven Raum för hans stora tålamod och positiva engagemang. Sven har gett mig god vägledning och varit en mycket bra handledare.

## 6 Referenser

- [1] Billiards and puzzles. (2009) *Cornell Department of Mathematics* Hämtad (2021-02-02) från <http://pi.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/Remus/index.html>
  
- [2] Dynamical billiards (2020-12-05). *Wikipedia*. Hämtad 2021-02-10 från [https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical\\_billiards](https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_billiards)
  
- [3] Hadamard's dynamical system (2020-12-12). *Wikipedia*. Hämtad 2021-02-10 från [https://en.wikipedia.org/wiki/Hadamard%27s\\_dynamical\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Hadamard%27s_dynamical_system)
  
- [4] Orthic triangle. (2021-03-22). *WolframMathworld* Hämtad 2021-03-01 från <https://mathworld.wolfram.com/OrthicTriangle.html>
  
- [5] Rozikov, U.(2019).*An Introduction to Mathematical Billiards*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.