



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Cantormängders dimensioner

av

Jacob Gröning

2021 - No K27

Cantormängders dimensioner

Jacob Gröning

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Alan Sola

2021

Innehåll

1	Introduktion	1
2	Bakgrund	2
2.1	Mängdlära	2
2.2	Metrisk rum	4
2.3	Gränsvärden och derivatan	8
3	Fraktaler	12
4	Självliknande dimensionen	15
5	Låddimension	17
6	Hausdorffdimensionen	20
7	General Cantormängd	26
8	Diskussion	29
9	Litteratur	29

1 Introduktion

Vi lever i det 3-dimensionella rummet, den här uppsatsen är skriven på en 2-dimensionell yta med 1-dimensionella linjer och 0-dimensionella punkter. Objekt i dessa dimensioner är inte svåra att föreställa sig men objekt i högre dimensioner är något som de flesta av oss inte kan föreställa sig. Trots detta kan vi matematiskt beskriva objekt i högre dimensioner med hjälp av vektorer. För ett 4-dimensionellt objekt använder vi vektorer med fyra komponenter, för ett 5-dimensionellt använder vi vektorer med fem komponenter osv.

Det här sättet att beskriva dimension skulle kunna få en intet ont anande person att tro att dimension endast kan vara heltal. Men det visar sig att det finns mer komplicerade objekt vars dimension inte är heltal och inte ens rationella tal! Dessa objekt som existerar i icke-heltals dimensioner är fraktaler.

I den här uppsatsen kommer vi börja med att diskutera grundläggande analys från Rudin (1976). Därefter diskuterar vi vad en fraktal är och visar hur Cantormängden, von Kocks kurva och Sierpinski-triangeln konstrueras. Därefter går vi igenom tre olika definitioner på dimension. Först den självliknande dimensionen som är ganska intuitiv men väldigt begränsad. Sen går vi igenom låddimensionen. Sist går vi igenom Hausdorffdimensionen som är teoretiskt tung jämfört med de två andra definitionerna men existerar för många fler objekt än den självliknande dimensionen. Därefter visar vi att för varje tal mellan 0 och

1 finns det ett objekt med den självliknande dimensionen, låddimensionen och Hausdorffdimensionen. Sist avslutar vi uppsatsen med en diskussion om hur arbetet gått och eventuella vidare utvecklingar.

2 Bakgrund

I det här avsnittet ska vi diskutera grundläggande analys från kapitel 1, 2, 3 och 5 från Rudin (1976). Den första delen är från kapitel 1 och den diskuterar lite definitioner om mängder. I den andra delen kommer vi att diskutera några definitioner om metriska rum från kapitel 2 av Rudin. Den tredje delen kommer diskutera lite om gränsvärden från kapitel 3 och derivator från kapitel 5 av Rudin.

2.1 Mängdlära

Vi börjar med en definition som introducerar användbar notation.

Definition 2.1. Låt A vara en mängd. Om x är ett element i A betecknar vi det med $x \in A$ och om x inte är i A betecknar vi det $x \notin A$.

Mängden som inte innehåller något element heter den tomma mängden och betecknas \emptyset . I de fall en mängd har minst ett element är den icke-tom.

Låt A och B vara mängder. Om alla element av A är i B är A en delmängd av B och vi betecknar det $A \subset B$ eller $B \supset A$. Vi säger att A är en äkta delmängd om A och B inte är samma mängd.

Om $A \subset B$ och $B \subset A$ skriver vi $A = B$ om så inte är fallet skriver vi $A \neq B$.

Ofta är det bra att kunna säga vilket element som kommer före eller efter ett annat element i en mängd. Därför definierar vi ordning av mängder.

Definition 2.2. Låt S vara en mängd. En ordning på S betecknat med $<$ har två egenskaper

- (i) För varje $x \in S$ och $y \in S$ gäller endast ett av de följande påståenden

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

- (ii) För varje $x, y, z \in S$ om $x < y$ och $y < z$ då gäller det att $x < z$.

Notationen $x \leq y$ används för att visa att antingen gäller $x < y$ eller $x = y$ och analogt definieras \geq .

Med denna definition kommer definitionen för en ordnad mängd naturligt.

Definition 2.3. En ordnad mängd S är en mängd där det finns en ordning för alla element i S .

Två exempel på en ordnade mängder kan vara de rationella talen eller de reella talen med den vanliga ordningen. Ett exempel på en oordnad mängd kan vara de komplexa talen. Ordnade mängder är användbara eftersom man kan diskutera övre och undre gränser till delmängder av ordnade mängder.

Definition 2.4. Låt S vara en ordnad mängd och $E \subset S$. Om det finns ett $\beta \in S$ så att $x \leq \beta$ för alla $x \in E$ då säger vi att E är uppåt begränsad och β är en övre gräns. På ett analogt sätt definierar vi undre gräns.

Definition 2.5. Låt S vara en mängd, $E \subset S$ och E är uppåt begränsad. Antag att det existerar ett α så att

- (i) α är en övre gräns till E .
- (ii) om $\gamma < \alpha$ så är γ inte en övre gräns.

Då kallas α för supremum av E och det betecknas

$$\alpha = \sup E$$

Infimum av E definieras på ett analogt sätt och betecknas

$$\alpha = \inf E.$$

Vi vill också ha något sätt att kunna kombinera mängder. Vi definierar nu unionen och snittet av mängder från kapitel 2 av Rudin (1976).

Definition 2.6. Låt A och Ω vara mängder och anta att för varje element α i A associerar vi en mängd E_α som är en delmängd av Ω . Mängden A kallas för indexmängd.

Vi definierar nu *unionen* av mängden E_α som mängden S där $x \in S$ om och endast om $x \in E_\alpha$ för minst ett $\alpha \in A$. Notationen som används är

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$$

och om A består av heltal $1, 2, \dots, n$ används

$$S = \bigcup_{m=1}^n E_m$$

eller

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n.$$

I fallet då A är alla positiva heltal används

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$$

där ∞ betyder att det är unionen av en uppräknelig samling.

Snittet av E_α definieras som mängden P så att $x \in P$ om och endast om $x \in E_\alpha$ för alla α . Notationen vi använder är väldigt lik den för union,

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$$

om A består av heltal $1, 2, \dots, n$ skriver vi

$$P = \bigcap_{m=1}^n E_m = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$$

och om A är en uppräknelig samling skriver vi

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Längre fram i uppsatsen kommer vi att jobba med linjer av olika slag och därför är nästa definition bra för att precisera vad vi menar. Den här definitionen är inte från Rudin och är något vi själva väjer att definiera.

Definition 2.7. Intervall $[a, b]$ är de x sådana att $a \leq x \leq b$. Det öppna intervallet $]a, b[$ är de x sådana att $a < x < b$.

2.2 Metriska rum

Även om vi har en ordnade mängd har vi inte många antagande att jobba med. För att kunna ha fler användbara antagande för de mängder vi arbetar med väljer vi att definiera ett metriskt rum.

Definition 2.8. En mängd X vars element vi kallar för punkter är ett metriskt rum om för alla punkter $p, q \in X$ kan vi definiera en avstånds funktion $d(p, q)$ som är ett reellt tal så att

- (i) $d(p, q) > 0$ om $p \neq q$ och $d(p, q) = 0$ om och endast om $p = q$;
- (ii) $d(p, q) = d(q, p)$;
- (iii) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ för alla $r \in X$.

Med hjälp av avstånds funktionen kan vi klassificera punkter i ett metriskt rum och denna klassificering av punkter leder till att vi kan säga saker om det metriska rummet. Vi gör följande definition.

Definition 2.9. Låt X och E vara metriska rum så att $E \subset X$. Alla punkter som diskuteras nedan är i X om inte annat sägs.

- (a) En omgivning runt en punkt p är en mängd $N_r(p)$ så att $q \in N_r(p)$ om och endast om $d(p, q) < r$. r kallas för radien av $N_r(p)$.
- (b) En punkt p kallas för randpunkt av mängden E om alla omgivningar runt p innehåller punkter av E som inte är p .

- (c) Om p är en punkt i E men inte en randpunkt då kallas p för isolerad.
- (d) E kallas för sluten om alla randpunkter till E är en del av E .
- (e) En punkt p av E kallas för inre punkt om det finns ett r så att $N_r(p) \subset E$.
- (f) En mängd E kallas öppen om alla punkter i E är inre punkter.
- (g) Komplementet till en mängd E betecknas E^c och är alla punkter $x \in X$ så att $x \notin E$.
- (h) E kallas perfekt om E är sluten och alla punkter av E är randpunkter till E .
- (i) E är begränsad om det finns ett reellt tal M och en punkt $q \in X$ så att $d(p, q) < M$ för alla $p \in E$.
- (j) E är tät i X om varje punkt i X är en randpunkt av E eller dela av E (eller båda).

Vi behöver också veta vad diametern av en mängd i ett metriskt rum är. Denna definition är inte från Rudin. Definitionen är baserad på konceptet av diameter i Falconer (2014).

Exempel 2.10. Låt E och X vara metriska rum så att $E \subset X$ och d är avståndsfunktionen för X . Vi definierar nu diametern av E som

$$|E| = \sup_{p, q \in E} d(p, q).$$

Vi går nu vidare till att diskutera kompakta mängder. Först behöver vi veta vad en övertäckning är för något.

Definition 2.11. En öppen övertäckning eller övertäckning av en mängd E i ett metriskt rum X är en samling $\{G_\alpha\}$ av öppna mängder i X så att $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

Vi definierar också en δ -täckning. Denna definition är inte från Rudin. Definitioner är baserad på δ -täckning från Falconer (2014).

Definition 2.12. Låt $\{V_\alpha\}$ vara en övertäckning över en mängd. Om det finns ett tal δ så att $|V_\alpha| < \delta$ säger vi att $\{V_\alpha\}$ är en δ -täckning.

Övertäckningar kommer vi använda mycket i uppsatsen så därför väljer vi att visa ett exempel på en övertäckning.

Exempel 2.13. Låt F vara det slutna intervallet mellan 0 och 1. Vi skulle kunna göra en övertäckning med de två öppna intervallen $U_1 =]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$ och $U_2 =]\frac{1}{3}, \frac{3}{2}[$ eftersom $F \subset U_1 \cup U_2$.

Vi visar också ett exempel på något som inte är en övertäckning.

Exempel 2.14. Låt F vara som i exempel 2.13. Något som inte är en övertäckning skulle kunna vara $U_1 =]0, \frac{1}{2}[$ och $U_2 =]\frac{1}{2}, 1[$. Vi har då att $F \not\subset U_1 \cup U_2$ eftersom $\{0, \frac{1}{2}, 1\} \in F$ men $\{0, \frac{1}{2}, 1\} \notin U_1 \cup U_2$.

Nu är vi redo att definiera vad en kompakt mängd är för något.

Definition 2.15. En delmängd K av ett metriskt rum X är kompakt om för varje övertäckning över K finns en ändlig delövertäckning. Man skulle kunna förklara den här definitionen som att om $\{G_\alpha\}$ är en övertäckning av K finns det ändligt många $G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}$ så att

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

Att en mängd är kompakt ger ofta många användbara konsekvenser. I vårt fall vill vi använda en sats som säger något om att en mängd är icke tom. Vi vill kunna vissa att mängder är icke tomma så att vi vet att när vi arbetar med en fraktal att vi inte har den tomma mängden. Innan vi visar denna sats så visar vi några andra satser som är användbara för att kunna av göra om en mängd är kompakt eller inte.

Sats 2.16. Låt X vara ett metriskt rum, K en kompakt delmängd till X och F en sluten delmängd till K . Vi har alltså

$$F \subset K \subset X.$$

Då gäller det att F är kompakt.

Bevis. Låt $\{V_\alpha\}$ vara en öppen täckning av F . Då får vi att

$$\Omega = F^c \cup \{V_\alpha\}$$

är en öppen täckning av K . Eftersom K är kompakt finns det en ändlig delmängd Φ av Ω så att Φ är en öppen täckning. Observera att F^c inte kan vara det enda elementet i Φ eftersom $F \subset K$. Om nu F^c är del av Φ får vi att $\Phi \setminus F^c$ är en ändlig öppen täckning av F . Om F^c inte är en del av Φ är Φ en ändlig övertäckning av F . \square

Sats 2.17. Om $\{I_n\}$ är en följd av intervall i \mathbb{R} så att $I_{n+1} \subset I_n$ då gäller det att

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

är icke tom.

Bevis. Låt I_n vara intervallet $[a_n, b_n]$ och E vara mängden av alla a_n . Eftersom E är begränsad av b_1 finns ett supremum av E och vi betecknar den med x . Låt nu n och m vara positiva heltal. Då gäller det att

$$a_n \leq a_{n+m} < b_{n+m} \leq b_m.$$

Detta betyder att $x \leq b_m$ för varje m . Nu eftersom x är supremum över alla a_n måste det gälla att $a_m \leq x$ och därmed är $x \in I_m$ för alla m . \square

Sats 2.18. Låt k vara ett positivt heltal och $\{I_n\}$ en följd av k -dimensionella rätblock så att $I_{n+1} \subset I_n$. Då gäller det att

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

är icke tom.

Bevis. Låt I_n vara alla punkter $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ så att

$$a_{n,j} \leq x_j \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, \dots),$$

och låt $I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$. Nu har vi att för varje j uppfyller $I_{n,j}$ kraven för sats 2.17 och därmed finns det tal x_j^* med $(1 \leq j \leq k)$ så att

$$a_{n,j} \leq x_j^* \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Om vi nu sätter $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$, då gäller det att $\mathbf{x}^* \in I_n$. \square

Även om dessa två satser inte säger något om en mängd är kompakt eller inte kan vi använda dem för att visa en väldigt kraftfull sats om vilka mängder som är kompakta.

Sats 2.19. Varje k -dimensionellt rätblock är kompakt.

Bevis. Låt I vara ett k -dimensionellt rätblock med punkterna $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ så att $a_j \leq x_j \leq b_j$ där $1 \leq j \leq k$. Sätt nu

$$\delta = \left(\sum_{j=1}^k (b_j - a_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Då kommer det gälla att $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \delta$ om $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$.

Vi gör nu ett motsägelseargument. Antag att det finns en öppen täckning $\{G_\alpha\}$ av I så att det inte finns en delmängd som täcker I . Sätt nu

$$c_j = \frac{a_j + b_j}{2}.$$

Då kommer intervallen $[a_j, c_j]$ och $[c_j, b_j]$ att begränsa 2^k k -dimensionella rätblock, kalla dem Q_i och deras union är I . Åtminstone en av dessa Q_i kan inte täckas

med en ändlig delmängd av $\{G_\alpha\}$ för att annars skulle vi kunna täcka I med en ändlig delmängd av $\{G_\alpha\}$. Välj en av dessa Q_i och kalla den för I_1 . Därefter fortsätter vi denna process med I_1 . Om vi fortsätter denna process får vi en följd $\{I_n\}$ med egenskaperna

- (a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$;
- (b) I_n täckes inte av någon ändlig delmängd av $\{G_\alpha\}$;
- (c) om $\mathbf{x} \in I_n$ och $\mathbf{y} \in I_n$, då $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 2^{-n}\delta$.

Enligt (a) och sats 2.18 finns den en punkt \mathbf{x}^* som ligger i varje I_n och då måste det finnas ett α så att $\mathbf{x}^* \in G_\alpha$. Nu eftersom G_α är öppen finns det ett r så att

$$|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}| < r$$

implicerar att $\mathbf{y} \in G_\alpha$. Om n är så stort att $2^{-n}\delta < r$ då kommer c att implicera att $I_n \subset G_\alpha$ vilket är en motsägelse mot b . \square

Nu kommer vi till satsen vi vill använda för att visa att mängder är icke tomma.

Sats 2.20. *Låt $\{K_\alpha\}$ vara en samling kompakta del mängder av ett metriskt rum X så att snittet av alla ändliga delmängder av $\{K_\alpha\}$ är icke-tom. Då gäller det att $\bigcap K_\alpha$ är icke tom.*

Bevis. Vi bevisar att detta är sant genom att anta att slutsatsen inte är sann och det ger oss en motsägelse. Fixera ett K_1 från $\{K_\alpha\}$ och låt $G_\alpha = K_\alpha^c$. Anta att ingen punkt av K_1 finns i alla K_α . Då kommer G_α att vara en övertäckning av K_1 och eftersom K_1 är kompakt finns det ändligt många index $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ så att $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$. Detta betyder att

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \dots \cap K_{\alpha_n}$$

är tom vilket är en motsägelse. \square

Den här satsen kan påminna mycket om sats 2.17 och sats 2.18. Den stora skillnaden är att följderna i frågan inte har något krav annat än att den är kompakt. I sats 2.17 måste det vara ett intervall och i sats 2.18 måste det vara ett k -dimensionellt rätblock.

2.3 Gränsvärden och derivatan

Senare i uppsatsen kommer vi att beräkna gränsvärden och därför tar vi den här biten för att definiera gränsvärden. Vi börjar med att definiera en talföljd vilket är från kapitel 2 av Rudin (1976).

Definition 2.21. En talföljd är en funktion f definierad på mängden J av alla positiva heltal. När $f(n) = x_n$ för $n \in J$ brukar man beteckna talföljden f med $\{x_n\}$ eller x_1, x_2, \dots elementen i talföljden kallas för termer av talföljden. I det fall A är en mängd och $x_n \in A$ för alla n då säger vi att f är en följd i A . Ibland är det passande att ersätta J med alla icke-negativa heltal så att man börjar på 0 istället för 1.

Med hjälp av talföljder kan vi definiera gränsvärden. De två nästa definitionerna och den näst kommande satsen är från kapitel 3 av Rudin (1976).

Definition 2.22. En talföljd $\{p_n\}$ i ett metriskt rum X sägs konvergera om det finns en punkt $p \in X$ med egenskapen att för varje $\epsilon > 0$ finns det ett heltal N så att om $n \geq N$ har vi att $d(p_n, p) < \epsilon$ där d är distans funktionen för X . Om ett sådant här p finns säger vi att $\{p_n\}$ konvergerar till p och vi skriver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$$

eller $p_n \rightarrow p$ när $n \rightarrow \infty$. I det fall det inte finns ett sådant här p säger vi att följderna divergerar.

Vi visar nu en sats för att underlätta att beräkna gränsvärdet.

Sats 2.23. Låt $\{s_n\}$ och $\{t_n\}$ vara talföljder så att $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Då gäller det att

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = s + t;$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (cs_n) = cs, \lim_{n \rightarrow \infty} (c + s_n) = c + s, \text{ för alla konstanter } c;$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n t_n) = st;$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}, \text{ om } s_n \neq 0 \text{ för } n = 1, 2, \dots \text{ och } s \neq 0.$$

Bevis. Vi väljer att visa (c). De andra visas på ett liknande sätt. Först har vi att (b) ger att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n t_n) = st \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n t_n - st) = 0.$$

I beviset kommer vi att använda att

$$s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n) + s(t_n - t) + t(s_n - s).$$

Eftersom $s_n \rightarrow s$ och $t_n \rightarrow t$ när $n \rightarrow \infty$ betyder det att för varje $\epsilon > 0$ finns det N_1 och N_2 så att

$$n \geq N_1 \Rightarrow |s_n - s| < \sqrt{\epsilon}$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow |t_n - t| < \sqrt{\epsilon}.$$

Låt nu $N = \max(N_1, N_2)$. Detta ger att $n \geq N$ implicerar

$$|(s_n - s)(t_n - t)| = |s_n - s| \cdot |t_n - t| < \sqrt{\epsilon} \cdot \sqrt{\epsilon} = \epsilon.$$

Låt nu $n \geq N$, då får vi med hjälp av a och b följande beräkning

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n t_n - st) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s)(t_n - t) + s \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - t) + t \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s) < \epsilon + t\sqrt{\epsilon} + s\sqrt{\epsilon}. \end{aligned}$$

□

I uppsatsen kommer vi även att beräkna oändliga summor och därför definierar vi nu en serie.

Definition 2.24. Givet en följd $\{a_n\}$ använder vi notationen

$$\sum_p^q a_n \quad (p \leq q)$$

för summan $a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$. Till följderna $\{a_n\}$ associerar vi en annan följd $\{s_n\}$ där

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Vi säger nu att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

är en serie och s_n är en partialsumma. Om talföljden $\{s_n\}$ konvergerar till s säger vi att serien konvergerar och vi skriver

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Med hjälp av gränsvärden kan vi diskutera ett speciellt gränsvärde av funktioner nämligen derivatan. Den kommande definitionen och sats är från kapitel 5 av Rudin (1976).

Definition 2.25. Låt f vara definierad och reell värd på intervallet $[a, b]$. För varje $x \in [a, b]$ gör vi kvoten

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (a < t < b, t \neq x)$$

och definiera

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \phi(t)$$

förutsatt att det här gränsvärdet finns. Vi kallar $f'(x)$ för derivatan till $f(x)$ i punkten x .

Derivatan har många användningar men i den här uppsatsen vill vi använda den för att underlätta att beräkna gränsvärden med hjälp av följande sats.

Sats 2.26 (L'Hôpitals regel). *Låt f och g vara reell värda funktioner som är deriverbara på $]a, b[$ och $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in]a, b[$ och $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Antag nu att*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow A \text{ när } x \rightarrow a. \quad (2.1)$$

Om nu

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ och } g(x) \rightarrow 0 \text{ när } x \rightarrow a \quad (2.2)$$

eller

$$g(x) \rightarrow +\infty \text{ när } x \rightarrow a \quad (2.3)$$

då gäller det att

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow A \text{ när } x \rightarrow a. \quad (2.4)$$

Bevis. Vi börjar med fallet då $-\infty \leq A < +\infty$. Låt q och r vara reella tal så att $A < r < q$. Enligt (2.1) finns det en punkt $c \in]a, b[$ så att om $a < x < c$ måste vi ha att

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r.$$

Om $a < x < y < c$ då enligt medelvärdesatsen finns det en punkt $t \in]x, y[$ så att

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \quad (2.5)$$

Antag nu att (2.2) är sann. Om vi nu låter $x \rightarrow a$ i (2.5) får vi att

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q \quad (a < y < c). \quad (2.6)$$

Antag nu att (2.3) är sann. Om vi låter y vara fixt i (2.5) kan vi välja ett $c_1 \in]a, y[$ så att $g(x) > g(y)$ och $g(x) > 0$ om $a < x < c_1$. Om vi förlänger (2.5) med $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$ får vi

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (a < x < c_1). \quad (2.7)$$

Om vi nu låter $x \rightarrow a$ i (2.7) kommer (2.3) visa att det finns en punkt $c_2 \in]a, c_1[$ så att

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \quad (a < x < c_2).$$

I slutändan får vi att (2.6) och (2.7) visar att för varje q så att $A < q$ finns det en punkt c_2 så att $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ om $a < x < c_2$.

På samma sätt kan vi välja ett p så att $p < A$ och hitta en punkt c_3 så att

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (a < x < c_3).$$

och då följer (2.4) av dessa två påståenden. \square

3 Fraktaler

Det finns ingen tydlig definition av vad en fraktal är för något. Falconer ger en idé om varför det är så i inledningen av Falconer (2014). Falconer menar att man borde se definition av en fraktal på samma sätt som biologer ser på liv. I stället för en fast definition över vad liv är finns det några karakteristiska egenskaper och det som kallas för levande har de flesta av dessa egenskaper. För fraktaler formulerar Falconer denna lista

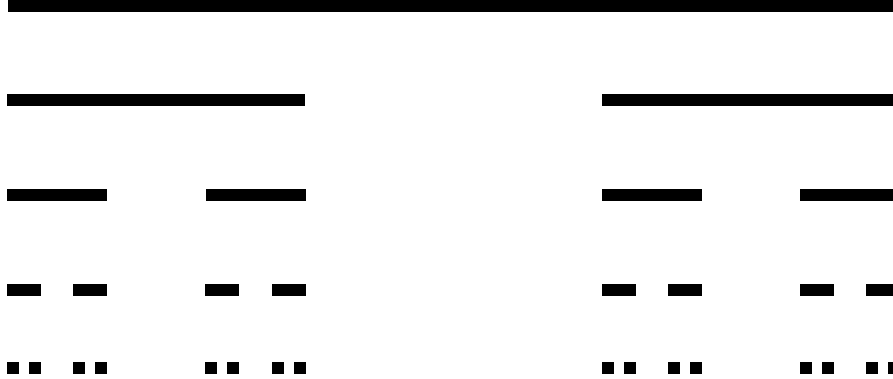
- (i) Fraktalen har fin struktur, alltså detaljer på godtyckligt liten skala.
- (ii) Fraktalen är för oregelbunden för att beskrivas med traditionell geometri, både lokalt och globalt.
- (iii) Ofta är fraktalen självliknande, kanske approximativt eller statistiskt.
- (iv) Normalt är 'fraktaldimensionen' större än den topologiska dimensionen.
- (v) I de intressanta fallen är fraktalen definierad på ett enkelt sätt, t.ex. rekursivt.

I den här texten kommer vi jobba med fraktaler som uppfyller alla dessa krav.

Exempel 3.1. Den första fraktalen vi går igenom är Cantormängden. För att konstruera Cantormängden gör vi det rekursivt. Vi börjar med att låta E_0 vara intervallet mellan 0 och 1. För att sedan göra E_1 delar vi upp E_0 i tre lika stora bitar och tar bort mittenbiten. Detta betyder att $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. För att hitta E_2 upprepar vi denna process för varje intervall i E_1 . Så vi har att $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Vi definierar nu Cantormängden E som de punkterna som är i E_k för alla k . Formellt är detta

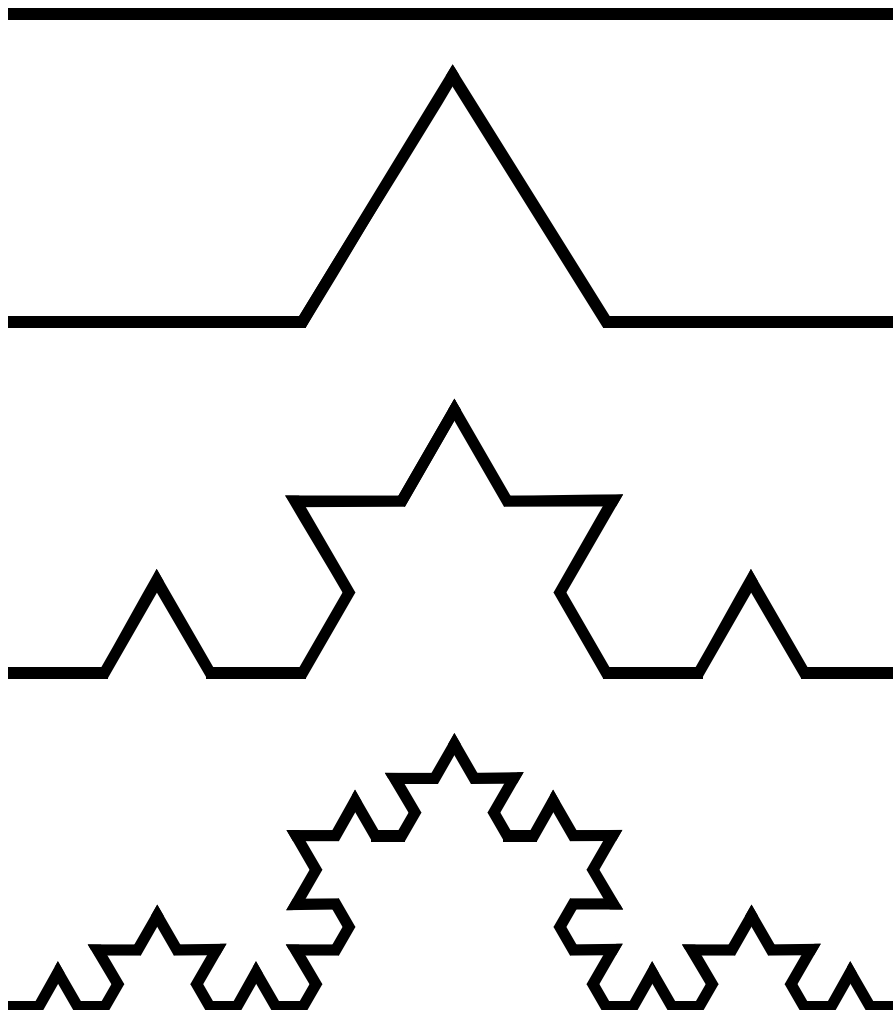
$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k.$$

Vi visar nu att den här definitionen ger något som är kompakt och icke-tomt. Vi börjar med att observera att Intervallet mellan 0 och 1 är ett 1-dimensionellt rätblock och därmed enligt sats 2.19 är det intervallet kompakt. Från konstruktionen av Cantormängden får vi att den är sluten och en delmängd till intervallet mellan 0 och 1. Därmed ger sats 2.16 att Cantormängden är kompakt. För att visa att Cantormängden är icke-tomt använder vi sats 2.20. Först noterar vi att alla E_k är en delmängd av intervallet mellan 0 och 1 och därmed kompakta med samma resonemang som ovan. Sedan observerar vi att varje ändligt snitt är icke tomt eftersom $E_{k+1} \subset E_k$ så då måste vi ha att varje ändligt snitt är den iteration med störst index. Därmed har vi uppfyllt kraven för sats 2.20 och därmed är Cantormängden icke-tomt.



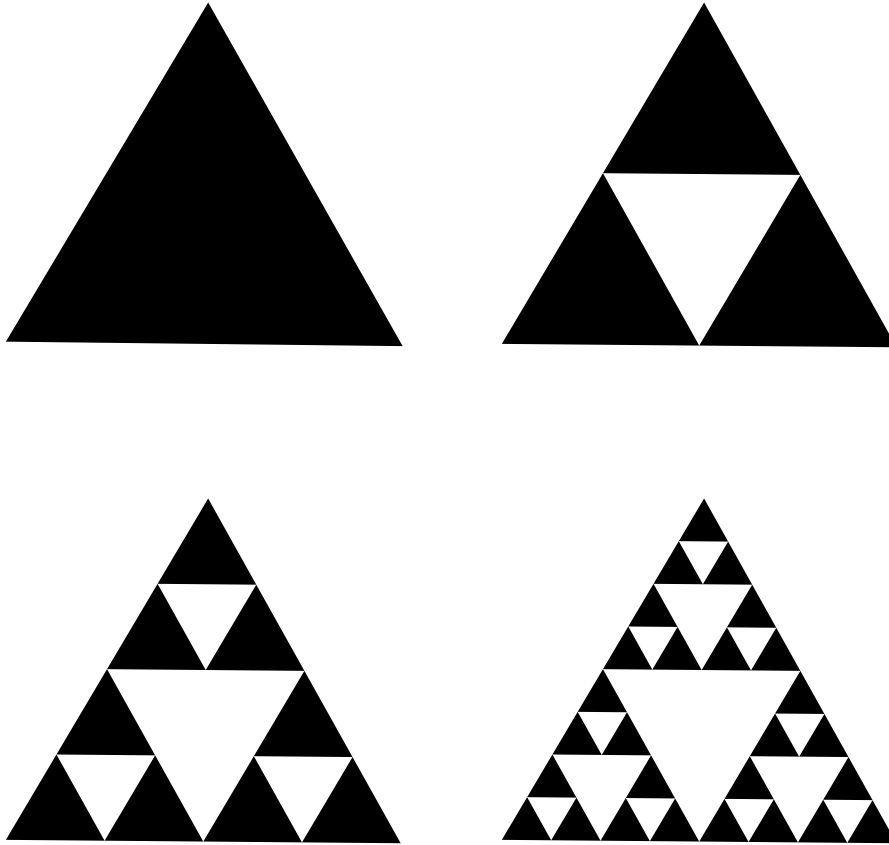
Figur 1: De 5 första iterationerna av Cantormängden.

Exempel 3.2. Det andra exemplet vi går igenom är Von Kochs kurva och den skapas på ett liknande sätt. Låt E_0 vara intervallet mellan 0 och 1. För att skapa E_1 delar vi upp E_0 i tre lika stora bitar och ersätter mittenbiten med två sidor av en liksidig triangel baserad på den borttagna biten. För att göra E_2 gör vi samma process på intervallen i E_1 . Så för att skapa E_k givet E_{k-1} delar vi upp varje intervall i E_{k-1} i tre lika stora bitar och byter ut mittenbiten mot två sidor i en liksidig triangel med samma sidlängd som den biten vi tog bort. Vi får nu att för stora k kommer skillnaden mellan E_k och E_{k-1} inte att vara väldigt stor och när k går mot oändligheten kommer E_k nå en gräns kurva E och det är denna som är von Kochs kurva.



Figur 2: De 4 första iterationerna av Von Kochs kurva.

Exempel 3.3. Det tredje exemplet och sista vi går igenom är Sierpinski-triangeln och den konstrueras också rekursivt. Låt E_0 vara den liksidiga triangeln med sidlängd 1. E_1 fås genom att ta bort en liksidig triangel från E_0 så att hörnen på den liksidiga triangeln är i mitten av sidorna på E_0 . För att få E_2 gör vi nu samma process som tidigare på de trianglarna som finns i E_1 . Med samma resonemang som när vi konstruerad von Kochs kurva får vi en gränskurva E som är Sierpinski-triangeln.



Figur 3: De 4 första iterationerna av Sierpinski triangeln.

4 Självlänkande dimensionen

Den första definitionen på dimension vi ska diskutera är den självlänkande dimensionen. Falconer diskuterar den självlänkande dimensionen i introduktionsdelen av Falconer (2014), vi följer samma logiska kedja som han gör.

Om vi tar ett intervall av längd 1 och skalar den med en faktor $\frac{1}{2}$ då behöver vi 2 sådana för att kunna göra ett intervall av längd 1. Nu frågar vi vilken potens D vi behöver för att $(2)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^D$ och det är $D = 1$. Det betyder att ett intervall av längd 1 har självlänkande dimension 1. Vi kan göra samma resonemang för en kvadrat. Ta en kvadrat av sidlängd 1 och skala den med en faktor $\frac{1}{2}$ och då behöver vi 4 sådana för att kunna göra en kvadrat med sidlängd 1. Igen frågar vi vilken potens D som löser $(4)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^D$ och det är $D = 2$. Alltså har en kvadrat med sidlängd 1 självlänkande dimension 2. På ett analogt sätt kan vi visa att en kub har självlänkande dimension 3.

Tyvärr så kan man inte alltid definiera den självliknande dimensionen. Om vi tar en cirkel med radie 1 och sedan en cirkel radie $\frac{1}{2}$ och frågar hur många cirklar med radie $\frac{1}{2}$ behövs för att göra en cirkel med radie 1 så finns inget uppenbart svar och därför kan vi inte definiera den självliknande dimensionen för cirklar. Vi kan nu ge en definition på den självliknande dimensionen.

Definition 4.1. Låt F vara en mängd i planet. Om det finns en mängd $\Omega = \{U_i\}_{i=0}^N$ som uppfyller följande krav.

- (i) F är unionen av alla mängder i Ω .
- (ii) Snittet av någon delsamling av Ω är alltid tom eller innehåller endast randpunkter från mängderna i delsamlingen.
- (iii) Varje U_i har samma geometri som F fast skalad med en faktor $\delta > 0$.

Då har F den självliknande dimensionen

$$\frac{-\ln(N)}{\ln(\delta)}.$$

Vi använder nu den här definitionen för att formalisera beräkningarna vi gjorde för att få den självliknande dimensionen av ett intervall. Beräkningarna för en kvadrat och en kub är analoga.

Exempel 4.2. Låt F vara ett intervall av sidlängd 1. Skalar vi F med en faktor $\frac{1}{2}$ behöver två sådana för att göra F . Detta ger

$$\frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\ln(2)}{-\ln(2)} = 1.$$

Även om vi inte alltid kan definiera den självliknande dimensionen kan vi definiera den för fraktalerna vi definierat.

Exempel 4.3. Cantormängden kan vi skala med en faktor $\frac{1}{3}$ och med två sådana kan vi göra Cantormängden igen. Det betyder att Cantormängden har den självliknande dimensionen

$$\frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

Exempel 4.4. Von Koch kurvan är gjord av 4 kopior av sig själv skalade med en faktor $\frac{1}{3}$. Detta ger att den självliknande dimensionen av von Koch kurva är

$$\frac{-\ln(4)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}.$$

Exempel 4.5. Slutligen är Sierpinski triangeln gjord av 3 kopior av sig själv skalade med faktorn $\frac{1}{2}$ och därmed har den självliknande dimensionen

$$\frac{-\ln(3)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}.$$

5 Låddimension

Ett sätt att definiera dimension är med låddimensionen. Falconer (2014) gör detta i kapitel 2 och i det här avsnitet kommer definitioner och begrep från Falconer (2014) om inte annat sägs.

Låt F vara en delmängd av planet och $\delta > 0$. Sedan betecknar vi det minsta antalet mängder som behövs för att göra en δ -täckning över F med $N_\delta(F)$. Falconer förklarar sedan att dimensionen av F ska reflekteras i hur $N_\delta(F)$ växer när δ går mot 0. Det här betyder att om $N_\delta(F)$ följer någon form av potenslag alltså

$$N_\delta(F) \simeq c\delta^{-s}$$

för några positiva konstanter c och s då säger vi att F har låddimension s . Vi kan nu lösa ut s och vi får

$$s \simeq \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} + \frac{\ln(c)}{\ln(\delta)}.$$

Tar vi nu gränsvärdet då δ går mot 0 så kommer den andra termen att försvinna. Vi får

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)}.$$

Vi ger nu en formellare definition av låddimensionen.

Definition 5.1. Låt F och $N_\delta(F)$ vara som ovan. Vi definiera nu den övre och undre låddimensionen som

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)}$$

respektive

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)}.$$

Om dessa två nu är samma så definieras deras gemensamma värde som låddimensionen av F

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)}.$$

Falconer pekar sedan ut en intressant konsekvens av denna definition nämligen att

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F)\delta^s \rightarrow \infty \quad \text{om } s < \dim_B F$$

och

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F)\delta^s \rightarrow 0 \quad \text{om } s > \dim_B F$$

Falconer ger inget bevis för dessa gränsvärden men vi kan ge en idé om varför det här är sant. Om $s < \dim_B F$ finns det ett tillräckligt litet δ så att det finns ett $\epsilon > 0$ så att $s = \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} - \epsilon$. Speciellt gäller det då att

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F)\delta^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F)\delta^{\frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} - \epsilon} =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F) \cdot \frac{1}{N_\delta(F)\delta^\epsilon} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^\epsilon} = \infty.$$

Det andra gränsvärdet kan vi visa på ett analogt sätt.

Falconer visar sedan ett antal ekvivalenta definitioner till den vi redan har av låddimensionen. Vi väljer att visa en av dem.

Lemma 5.2. *När vi beräknar den över och den undre låddimensionen så är de ekvivalent att låta $N_\delta(F)$ vara det minsta antalet mängder för att göra en δ -täckning över F och låta $N'_\delta(F)$ vara antalet rutor i ett rutnät med rutor av sid längd δ som täcker F .*

Bevis. Vi gör Falconers bevis för fallet då F är en delmängd av planet. Låt $N_\delta(F)$ vara det minsta antalet mängder med diameter δ som behövs för att täcka F och låt $N'_\delta(F)$ vara antalet rutor i ett rutnät där rutorna har sidlängd δ som täcker F . Eftersom de $N'_\delta(F)$ stycken rutorna har diameter $\delta\sqrt{2}$ ger de en övertäckning av F . Detta betyder att

$$N_{\delta\sqrt{2}}(F) \leq N'_\delta(F).$$

Nu behöver vi veta hur många rutor av sidlängd δ vi behöver som mest för att täcka en mängd av diameter δ . Den mängden i planet med diameter δ som har störst area är en cirkel med diameter δ . Vi behöver som mest 9 rutor av diameter δ för att täcka en cirkel med diameter δ . Ett fall som ger att vi behöver 9 rutor skulle vara om vi placerade centrum av cirkel på centrum av en ruta. Detta ger att

$$N'_\delta(F) \leq 9N_\delta(F).$$

Nu kombinerar vi dessa olikheter och delar med $-\ln(\delta)$. Vi får

$$\frac{\ln(N_{\delta\sqrt{2}}(F))}{-\ln(\delta\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2})} \leq \frac{N'_\delta(F)}{-\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(9) + \ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)}$$

och tar vi det undre gränsvärdet när $\delta \rightarrow 0$ får vi

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_{\delta\sqrt{2}}(F))}{-\ln(\delta\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2})} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N'_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)}$$

vilket visar att den undre låddimensionen är den samma oavsett om vi tar $N_\delta(F)$ eller $N'_\delta(F)$. För att visa att den övre låddimensionen är den samma tar vi det övre gränsvärdet i stället för det undre gränsvärdet. \square

Nu gör vi ett exempel på hur man kan beräkna låddimensionen av ett intervall.

Exempel 5.3. Låt F vara ett intervall med längd 1. Vi vill nu hitta det minsta antalet mängder med diameter δ som täcker F . Vi får att

$$N_\delta(F) = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil$$

där hakparenteserna betecknar avrundat uppåt till närmaste heltal. Vi kan nu beräkna den övre och den undre låddimensionen. Vi får

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\lceil \frac{1}{\delta} \rceil)}{-\ln(\delta)} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1}{\delta} + 1)}{-\ln(\delta)} = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{\delta + \delta^2}}{-\frac{1}{\delta}} = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \delta} = 1$$

och

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\lceil \frac{1}{\delta} \rceil)}{-\ln(\delta)} \geq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1}{\delta})}{-\ln(\delta)} = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\delta}}{-\frac{1}{\delta}} = 1$$

i båda dessa beräkningar har vi använt oss av L'Hôpitals regel. Detta ger oss att

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{N_\delta(F)}{-\ln(\delta)} = 1.$$

Alltså har ett intervall av längd 1 låddimension 1.

Det är värt att notera att den här beräkningen är oberoende av längden på intervallet. Skulle vi gjort det här för ett intervall av längd ℓ skulle vi ha haft

$$N_\delta(F) = \left\lceil \frac{\ell}{\delta} \right\rceil$$

och sedan hade beräkningarna varit analoga.

Vi visar nu Falconers beräkning av låddimensionen av Cantormängden.

Exempel 5.4. Låt F beteckna Cantormängden. Om $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ då kommer de 2^k nivå- k intervallen av E_k av längd 3^{-k} utgöra en δ -täckning av F . Detta ger att om $N_\delta(F)$ är det minsta antalet mängder som behövs för att täcka F gäller det att $N_\delta(F) \leq 2^k$. Från definition 5.1 får vi

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^k)}{-\ln(3^{-k+1})} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln(2)}{(k-1) \ln(3)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

Vi har också att avståndet mellan alla nivå- k intervall är åtminstone 3^{-k} . Vilket ger att alla intervall av längd δ med $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ täcker som mest ett nivå- k intervall av längd 3^{-k} som använts i konstruktionen av F . Det finns totalt 2^k sådana intervall så det behövs åtminstone 2^k intervall av längd δ för att täcka F . Alltså $N_\delta(F) \geq 2^k$. Detta ger

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^k)}{-\ln(3^{-k-1})} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln(2)}{(k+1) \ln(3)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

Därmed har Cantormängden låddimension $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

6 Hausdorffdimensionen

Falconer definierar Hausdorffdimensionen i kapitel 3 av Falconer (2014) och i det här avsnittet kommer definitioner och begrepp från Falconer (2014) om inte annat sägs. Vi börjar med en definition.

Definition 6.1 (Hausdorffinhålllet). Låt $s > 0$, $F \subset \mathbb{R}^n$ för något $n \in \mathbb{N}$ och $\delta > 0$. Vi definierar nu Hausdorffinhålllet av F som

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ är en } \delta\text{-övertäckning av } F \right\}.$$

Falconer benämner inte det här infimumet för någonting men vi har valt den här terminologin för att enkelt kunna referera till den. Namnet är baserat på terminologin av samma infimum i kapitel 1 av Bishop och Peres (2016).

För att illustrera Hausdorffinhålllet gör vi två exempel.

Exempel 6.2. För det första exemplet låter vi F vara ett intervall av längd 1, $s = \frac{1}{2}$ och $\delta = \frac{1}{n}$ för något positivt heltal n . Nu kan vi för alla $\epsilon > 0$ täcka F i n stycken öppna intervall av diameter $\frac{1}{n}$ och en av längd ϵ och beräkna summan

$$\sum_{i=0}^n |U_i|^{\frac{1}{2}} = n\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\epsilon} = \sqrt{n} + \sqrt{\epsilon}.$$

Vi vill nu visa att infimum av den här summan är $H_\delta^s(F)$.

Antag att $\{V_i\}_{i=0}^m$ är en annan övertäckning så att vi har m_1 stycken mängder med diameter $\frac{1}{n}$ och m_2 stycken med diameter strikt mindre än $\frac{1}{n}$ och m_2 är minst 2. Vi observera nu att eftersom $\{V_i\}_{i=0}^m$ är en övertäckning av ett intervall av längd 1 måste summan av diametrarna vara större än 1. Vi har alltså

$$\sum_{i=0}^m |V_i| > 1. \quad (6.1)$$

Vi observera också att om V_i har positive diameter som är strikt mindre än $\frac{1}{n}$ är det ekvivalent med

$$\frac{1}{|V_i|} > n. \quad (6.2)$$

Med (6.1) och (6.2) kan vi göra följande beräkning

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \sqrt{|V_i|} &= \sum_{i=0}^{m_1} \sqrt{|V_i|} + \sum_{i=0}^{m_2} \sqrt{|V_i|} = \sum_{i=0}^{m_1} \frac{|V_i|}{\sqrt{|V_i|}} + \sum_{i=0}^{m_2} \frac{|V_i|}{\sqrt{|V_i|}} > \\ &> \sum_{i=0}^{m_1} \sqrt{n} \cdot |V_i| + \sum_{i=0}^{m_2} \sqrt{n} \cdot |V_i| = \sqrt{n} \left(\sum_{i=0}^{m_1} |V_i| + \sum_{i=0}^{m_2} |V_i| \right) = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{n} \cdot \sum_{i=0}^m |V_i| > \sqrt{n} \cdot 1 = \sqrt{n}.$$

Nu eftersom ϵ är godtycklig kan vi alltid välja ϵ så att

$$\sum_{i=0}^m \sqrt{|V_i|} > \sum_{i=0}^n \sqrt{|U_i|}$$

för alla övertäckningar $\{V_i\}_{i=0}^m$. Vi får nu

$$H_\delta^s(F) = \inf(\sqrt{n} + \sqrt{\epsilon}) = \sqrt{n}$$

Exempel 6.3. För det andra exemplet låter vi F och δ vara som i det tidigare exemplet och $s = 2$. Vi hittar nu en övre gräns av Hausdorffinnehållet av F . Vi kommer se senare att även om vi inte har ett explicit uttryckt för Hausdorffinnehållet så kommer det här sättet att hitta en övre gräns vara tillräckligt för att beräkna Hausdorffdimensionen.

Låt $\{U_i\}_{i=0}^n$ vara en övertäckning av F så att vi använder så få mängder som möjligt för att täcka F . Vi får då att

$$n = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil.$$

Om det är så att $\frac{1}{\delta}$ är ett heltal skulle vi sätta $n = \frac{1}{\delta} + 1$ eftersom att vi behöver en extra bit så att alla andra bitar kan överlappa varandra. I detta fallet blir beräkningarna analoga till om $n = \lceil \frac{1}{\delta} \rceil$. Låt nu

$$\Omega = \sum_{i=0}^n |U_i|^2.$$

Från vårt krav på övertäckningen får vi nu att.

$$\Omega = \sum_{i=0}^n |U_i|^2 \leq \sum_{i=0}^n \delta^2 = n\delta^2 = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil \delta^2 < \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right) \delta^2 = \delta + \delta^2.$$

Nu observera vi att

$$\Omega \subset \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ är en } \delta\text{-övertäckning av } F \right\}$$

vilket betyder att

$$H_\delta^s(F) \leq \Omega \leq \delta + \delta^s.$$

Med hjälp av Hausdorffinnehållet kan vi göra en till definition.

Definition 6.4. Med samma förutsättningar som i definition 6.1 får vi att det s -dimensionella Hausdorffmättet definieras som

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F).$$

Detta gränsvärde finns för alla mängder $F \subset \mathbb{R}^n$ eftersom när δ minskar kommer Hausdorffinnehållet av F att öka eller förbli oförändrat. Det här betyder också att gränsvärdet kan vara 0 eller ∞ .

Innan vi räknar ut det s-dimensionella Hausdorffmättet för några mängder så visar vi ett lemma.

Lemma 6.5. *Låt $s > 0$, F ett intervall av längd ℓ , $\delta > 0$ och $\delta' = \frac{\ell}{n}$ för något positivt heltal n . Då gäller det att*

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\delta'}^s(F).$$

Bevis. För varje δ kan vi välja ett n_1 så att $\delta < \delta_1 = \frac{\ell}{n_1}$. Vilket ger att

$$\{\delta\text{-övertäckningar av } F\} \subseteq \{\delta_1\text{-övertäckningar av } F\}.$$

Detta ger nu att

$$\left\{ \sum_{i=0}^n |U_i|^s : U_i \text{ är en } \delta\text{-täckning} \right\} \subseteq \left\{ \sum_{i=0}^n |U_i|^s : U_i \text{ är en } \delta_1\text{-täckning} \right\}$$

vilket betyder att

$$\inf \left\{ \sum_{i=0}^n |U_i|^s : U_i \text{ är en } \delta\text{-täckning} \right\} \geq \inf \left\{ \sum_{i=0}^n |U_i|^s : U_i \text{ är en } \delta_1\text{-täckning} \right\}$$

och med definition 6.1 får vi att

$$H_{\delta_1}^s(F) \leq H_\delta^s(F).$$

Vi kan nu välja $n_2 \in \mathbb{N}$ så att $\frac{\ell}{n_2} = \delta_2 \leq \delta$ och på analogt sätt få

$$H_\delta^s(F) \leq H_{\delta_2}^s(F).$$

Totalt har vi då att

$$H_{\delta_1}^s(F) \leq H_\delta^s(F) \leq H_{\delta_2}^s(F).$$

Om vi nu låter $n_1 \rightarrow \infty$ betyder det att $\delta_1 \rightarrow 0$ vilket ger att

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} H_{\delta_1}^s(F) \leq \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} H_\delta^s(F) \leq \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} H_{\delta_2}^s(F)$$

som är ekvivalent med

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} H_{\frac{\ell}{n_1}}^s(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow \infty} H_\delta^s(F) \leq \lim_{n_2 \rightarrow \infty} H_{\frac{\ell}{n_2}}^s(F).$$

Nu observerar vi att vi måste ha att

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} H_{\delta_1}^s(F) = \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} H_{\delta_2}^s(F)$$

eftersom i båda fallen kommer diametern på övertäckningarna att gå mot 0. Då har vi att

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} H_\delta^s(F) = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} H_{\frac{\ell}{n_2}}^s(F).$$

□

Vi beräknar nu två exempel på s -dimensionella Hausdorffmått.

Exempel 6.6. Låt F vara som i exempel 6.2 och $s = \frac{1}{2}$. Vi vill nu beräkna det s -dimensionella Hausdorffmättet av F . Eftersom att $s < 1$ får vi att Hausdorfffinnehållet är det samma som i exempel 6.2. Detta ger följande beräkning

$$H^{\frac{1}{2}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Exempel 6.7. Ta F som tidigare och låt $s = 2$. Vi får en övre gräns för Hausdorfffinnehållet av F från exempel 6.3. Vilket ger

$$H^2(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta + \delta^2 = 0.$$

Vi observera nu att $H^2(F) \geq 0$ eftersom att H_δ^2 är ett infimum över summor som endast har positiva termer. Detta ger att

$$H^2(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^2(F) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Totalt har vi nu att

$$0 \leq H^2(F) \leq 0$$

vilket betyder att

$$H^2(F) = 0.$$

För att definiera Hausdorffdimensionen behöver vi några observationer till. Falconer noterar att om $\{U_i\}_{i=0}^n$ är en δ -täckning över F och $\delta < 1$ så är $H_\delta^s(F)$ icke -växande med s . Detta innebär att om $t > s$ så har vi att

$$H_\delta^s(F) \geq H_\delta^t(F)$$

Det här är för att om $\delta < 1$ så måste vi ha att $|U_i| < 1$ för alla i . Om nu $t > s$ så har vi att

$$|U_i|^s \geq |U_i|^t$$

för alla i . Vilket ger att

$$|U_1|^s + \dots + |U_n|^s \geq |U_1|^t + \dots + |U_n|^t$$

och detta visar det vi ville visa.

Därefter gör Falconer följande beräkning, återigen med $t > s$,

$$\sum_{i=0}^n |U_i|^t \leq \sum_{i=0}^n |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=0}^n |U_i|^s$$

och om vi tar infimum över detta får vi att

$$H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F).$$

Om vi nu låter $\delta \rightarrow 0$ ser vi att om $H^s(F) < \infty$ så kommer $H^t(F) = 0$. Det här betyder att om vi gör en graf med $H^s(F)$ på y-axeln och s på x-axeln så kommer grafen vara ∞ tills den för något värde på s gör ett hopp och detta värde på s är det som kallas för Hausdorffdimensionen och den betecknas $\dim_H F$.

Vi gör nu ett enkelt exempel på hur man kan beräkna Hausdorffdimensionen hos en mängd.

Exempel 6.8. Vi vill nu beräkna Hausdorffdimensionen för ett intervall F med längd 1. Vår intuition säger att ett intervall borde ha dimensionen 1 så vi vill visa att även $\dim_H F = 1$. Vi låter återigen $\delta = \frac{1}{n}$. Vi börjar med fallet då $s < 1$.

Först hittar vi $H_\delta^s(F)$. Vi kan täcka F med n stycken öppna intervall av diameter δ och ett öppet intervall av diameter ϵ för något godtyckligt $\epsilon > 0$. Då har vi att

$$\sum_{i=0}^n |U_i|^s = n \left(\frac{1}{n}\right)^s + \epsilon^s = n^{1-s} + \epsilon^s.$$

Låt nu $\{V_i\}_{i=0}^m$ vara en annan övertäckning med m_1 stycken mängder av diameter $\frac{1}{n}$ och m_2 stycken mängder av diameter strikt mindre än $\frac{1}{n}$ och $m_2 \geq 2$. Då har vi att

$$\sum_{i=0}^m |V_i| > 1 \tag{6.3}$$

och

$$\frac{1}{|V_i|} > n. \tag{6.4}$$

Med (6.3) och (6.4) får vi nu att

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m |V_i|^s &= \sum_{i=0}^{m_1} |V_i|^s + \sum_{i=0}^{m_2} |V_i|^s = \sum_{i=0}^{m_1} \frac{|V_i|}{|V_i|^{1-s}} + \sum_{i=0}^{m_2} \frac{|V_i|}{|V_i|^{1-s}} > \\ &> \sum_{i=0}^{m_1} n^{1-s} |V_i| + \sum_{i=0}^{m_2} n^{1-s} |V_i| > n^{1-s} \sum_{i=0}^m |V_i| > \\ &> n^{1-s} \cdot 1 = n^{1-s}. \end{aligned}$$

Eftersom att ϵ återigen är godtycklig kan vi för varje övertäckning $\{V_i\}_{i=0}^m$ välja ϵ så att

$$\sum_{i=0}^m |V_i|^s > \sum_{i=0}^n |U_i|^s.$$

Vilket betyder att $H_\delta^s(F) = \inf(n^{1-s} + \epsilon^s) = n^{1-s}$. Vi får nu det s dimensionella Hausdorffmättet genom

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} n^{1-s} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-s} = \infty.$$

Nu gör vi fallet då $s > 1$. Som i exempel 6.3 hittar vi en övre gräns av Hausdorffinnehållet för F . Låt $\{U_i\}_{i=0}^n$ vara en övertäckning av F så att vi använder så få mängder som möjligt för att täcka F . Vi får då att

$$n = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil.$$

Återigen får vi att om $\frac{1}{\delta}$ är ett heltal sätter vi $n = \frac{1}{\delta} + 1$ och får analoga beräkningar som nedan. Låt nu

$$\Omega = \sum_{i=0}^n |U_i|^s.$$

Från vårt krav på övertäckningen får vi nu att.

$$\Omega = \sum_{i=0}^n |U_i|^s \leq \sum_{i=0}^n \delta^s = n\delta^s = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil \delta^s < \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right) \delta^s = \delta^{s-1} + \delta^s.$$

Nu observera vi att

$$\Omega \subset \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ är en } \delta\text{-övertäckning av } F \right\}$$

vilket betyder att

$$H_{\delta}^s(F) \leq \Omega \leq \delta^{s-1} + \delta^s.$$

För det s -dimensionella Hausdorffmålet observerar med samma argument som i exempel 6.7 måste det vara större än 0. Med vår övregräns för Hausdorffinnehållet och för att $s > 1$ får vi nu att

$$H^s(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{s-1} + \delta^s = 0$$

och därmed

$$H^s(F) = 0.$$

Detta betyder att en för ett intervall F av längd 1 så gör det s -dimensionella Hausdorffmålet ett hopp vid $s = 1$ och därmed måste vi ha $\dim_H F = 1$.

Den här beräkningen är oberoende av längden på intervallet. Hade vi gjort den här beräkningen för ett intervall av längd ℓ hade vi satt

$$\delta = \frac{\ell}{n}$$

och sedan gjort analoga beräkningar.

I exempel 6.8 beräknade vi Hausdorffdimensionen genom att beräkna Hausdorffinnehållet och sedan det s -dimensionella Hausdorffmålet men det är inte det enda sättet att göra det på. Eftersom Hausdorffdimensionen är det värdet på s då det s -dimensionella Hausdorffmålet hoppar från ∞ till 0 är det också det enda värdet på s då det s -dimensionella Hausdorffmålet kan vara något annat än ∞ eller 0. Falconer använder sig av det här för att beräkna Hausdorffdimensionen av Cantormängden. Vi visar hans beräkning nedan.

Exempel 6.9. För notations skull låter vi F beteckna Cantormängden och vi kallar intervallen som bygger upp E_k i konstruktionen av F för *nivå- k intervall*. Detta ger att E_k består av 2^k nivå- k intervall där varje intervall har längd 3^{-k} . Genom att ta dessa intervall som en övertäckning av E_k får vi att

$$H_{3^{-k}}^s(F) \leq 2^k 3^{-ks} = 1$$

för $s = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$. Vilket ger att

$$H^s(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} H_{3^{-k}}^s(F) \leq 1.$$

För att visa den övre gränsen $H^s(F) \geq \frac{1}{2}$ visar vi att

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s} \quad (6.5)$$

för alla övertäckningar $\{U_i\}$ av F . Det räcker att låta $\{U_i\}$ bestå av intervall och genom att göra dem lite större och med kompaktheten av F behöver vi bara verifiera (6.5) om $\{U_i\}$ är en ändlig samling av slutna delintervall av $[0, 1]$. För varje U_i , låt k vara det heltalet så att

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Då kan U_i vara över som mest ett nivå- k intervall eftersom mellanrummet mellan nivå- k intervallen är minst 3^{-k} . Om $j \geq k$ då, per konstruktion, kommer U_i ligga över som mest

$$2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$$

nivå- j intervall av E_j . Välj nu j stort nog så att $j^{-(j+1)} \leq |U_i|$ för alla U_i . Då kommer $\{U_i\}$ ligga över 2^j intervall av längd 3^{-j} . Detta ger att om vi räknar intervallen får vi $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ vilket reduceras till (6.5).

7 General Cantormängd

Idén för att kunna skapa en fraktal med en given dimension är att använda Cantormängden med parameter λ . Falconer diskuterar denna mängd kort i kapitel 4 av Falconer (2014). Den mängden konstrueras på samma sätt som Cantormängden men istället för att ta bort $\frac{1}{3}$ från varje intervall tar man bort andelen λ från varje intervall. Vi observerar att vi inte kan ta bort hela andelen av intervallet då det skulle ge en tom mängd och vi kan inte heller ta bort inget då det skulle ge oss samma intervall hel tiden och därför har vi att $0 < \lambda < 1$. Vi börjar med att observera att vi kan visa att Cantormängden med parameter λ är icke-tom och kompakt med analoga argument som de vi använde i del 2 för att visa att Cantormängden är kompakt.

Vi visar nu att givet ett tal D mellan 0 och 1 kan vi hitta ett λ så att den motsvarande Cantormängden med parameter λ har självliknande dimension D ,

låddimensionen D och Hausdorffdimension D . Vi följer den ordningen som vi presenterat dimensionerna i. Alltså börjar vi med den självliknande dimensionen.

Lemma 7.1. *Cantormängden med parameter λ kommer att ha den självliknande dimensionen*

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1 - \lambda)} \quad (7.1)$$

och $0 < D < 1$.

Bevis. Vi visar detta genom att beräkna den självliknande dimensionen för Cantormängden med parameter λ och observera att den är det samma som (7.1).

I iteration 0 av konstruktionen har vi ett intervall av längd 1. I steg 1 av konstruktionen har vi 2 intervall av längd $\frac{1-\lambda}{2}$. Det här betyder att Cantormängden med parameter λ är gjord av 2 kopior av sig självt skalade med faktorn $(\frac{1-\lambda}{2})^{-1}$. Detta ger att Cantormängden med parameter λ har dimension

$$\frac{-\ln(2)}{\ln((\frac{1-\lambda}{2})^{-1})} = \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1 - \lambda)}.$$

Nu behöver vi visa gränserna för dimensionen. Eftersom att $0 < \lambda < 1$ får vi att

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1 - \lambda)} < \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1 - 1)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1$$

och

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1 - \lambda)} > \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1 - \lambda)} = 0.$$

□

För att bevisa att Cantormängden med parameter λ har den ovanstående dimensionen som låddimension och Hausdorffdimensionen så generaliserar vi exempel 5 respektive exempel 6.9.

Lemma 7.2. *Låt F beteckna Cantormängden med parameter λ . Då gäller det att*

$$\dim_B F = \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1 - \lambda)}.$$

Bevis. Om $(\frac{1-\lambda}{2})^{-k} < \delta \leq (\frac{2}{1-\lambda})^{-k+1}$ då kommer de 2^k nivå- k intervallen av E_k av längd $(\frac{2}{1-\lambda})^{-k}$ utgöra en δ -täckning av F . Detta ger att om $N_\delta(F)$ är det minsta antalet mängder som behövs för att täcka F gäller det att $N_\delta(F) \leq 2^k$. Från definition 5.1 får vi

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^k)}{-\ln((\frac{2}{1-\lambda})^{-k+1})} =$$

$$= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln(2)}{(k-1) \ln\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1-\lambda)}.$$

Vi har också att alla intervall av längd δ med $\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^{-k-1} \leq \delta < \left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^{-k}$ täcker som mest ett nivå- k intervall av längd $\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^{-k}$ som använts i konstruktionen av F . Det finns totalt 2^k sådana intervall så det behövs åtminstone 2^k intervall av längd δ för att täcka F . Alltså $N_\delta(F) \geq 2^k$. Detta ger

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B F &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln(\delta)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^k)}{-\ln\left(\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^{-k-1}\right)} = \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln(2)}{(k+1) \ln\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1-\lambda)}. \end{aligned}$$

□

Lemma 7.3. Låt F beteckna Cantormängden med parameter λ . Då gäller det att

$$\dim_H F = \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1-\lambda)}.$$

Bevis. Låt $\delta = \frac{2}{1-\lambda}$ och $s = \frac{\ln(2)}{\ln(2) - \ln(1-\lambda)}$. Vi har att E_k består av 2^k nivå- k intervall där varje intervall har längd δ^{-k} . Genom att ta dessa intervall som en övertäckning av E_k får vi att $H_{\delta^{-k}}^s(F) \leq 2^k \delta^{-ks} = 1$ för $s = \frac{\ln(2)}{\ln(\delta)}$. Vilket ger att

$$H^s(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} H_\delta^s(F) \leq 1.$$

För att visa den övre gränsen $H^s(F) \geq \frac{1}{2}$ visar vi att

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = \delta^{-s} \quad (7.2)$$

för alla täckningar $\{U_i\}$ av F . Det räcker att låta $\{U_i\}$ bestå av intervall och genom att göra dem lite större och med kompaktheten av F behöver vi bara verifiera (7.2) om $\{U_i\}$ är en ändlig samling av stängda delintervall av $[0, 1]$. För varje U_i , låt k vara det heltalet så att

$$\delta^{-(k+1)} \leq |U_i| < \delta^{-k}.$$

Då kan U_i vara över som mest ett nivå- k intervall eftersom mellanrummet mellan nivå- k intervallen är minst δ^{-k} . Om $j \geq k$ då, per konstruktion, kommer U_i ligga över som mest

$$2^{j-k} = 2^j \delta^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$$

nivå- j intervall av E_j . Välj nu j stort nog så att $j^{-(j+1)} \leq |U_i|$ för alla U_i . Då kommer $\{U_i\}$ ligga över 2^j intervall av längd δ^{-j} . Detta ger att om vi räknar intervallen får vi $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ vilket reduceras till (7.2). □

I kapitel 4 av Falconer (2014) visas ett bevis för en mycket generellare Cantormängd. I det beviset används massdistribution och eftersom det är för avancerat för den här uppsatsen har vi valt att inte ha med det beviset. Trots detta så stämmer vårt resultat överens med Falconers resultat.

8 Diskussion

Under arbetets gång gjordes det ett försök att beräkna Hausdorffdimensionen av Cantormängden genom att först hitta Hausdorffinnehållet för Cantormängden. I slutändan blev detta för komplicerat och jag är inte säker på om det ens är möjligt. Idén var att först beräkna Hausdorffinnehållet för varje iteration av Cantormängden. Problemet som uppstod var att ju fler iterationer man behövde täcka desto mindre behövde diametern på mängderna man täckte med bli. Om man lät diametern på mängderna man täckte med vara $\delta = \frac{1}{n}$ behövde man visa att det gällde att

$$H^s \left(\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\frac{1}{n}}^s \left(\bigcap_{k=0}^n E_k \right).$$

Det skulle vara intressant att undersöka mer om det finns något sätt att beräkna Hausdorffdimensionen för Cantormängden genom Hausdorffinnehållet eller visa att det är omöjligt.

Jag visade bara att man kan skapa fraktaler med dimension mellan 0 och 1 för de tre olika dimensionerna som diskuterats. Det skulle vara intressant att undersöka om det är möjligt att göra fraktaler med vilken dimension som helst större än 0. I kapitel 7 av Falconer (2014) diskuteras produkter av fraktaler. Bland annat visas det att under vissa förutsättningar gäller det att

$$\dim_H(E \times F) = \dim_H(E) + \dim_H(F) \quad (8.1)$$

där E och F är fraktaler och \times menar den cartesiska produkten. Jag valde att inte diskutera detta i den här uppsatsen eftersom beviset kräver många andra satser som använder för avancerade tekniker för nivån på den här uppsatsen. Falconer använder bland annat massfördelning för att visa att (8.1) stämmer. Som vidare utveckling av det här arbetet skulle det vara intressant att undersöka möjligheten av att ta den cartesiskaprodukten av två fraktaler för att kunna skapa fraktaler med vilken dimension som helst större än 0.

I arbetet användes Cantormängden i många beräkningar. Detta beror på att Cantormängden är ganska enkel att arbeta med då den är definierad som ett snitt av intervall. Det skulle vara intressant att göra liknande beräkning som de vi gjorde på Cantormängden på Von Kochs kurva eller Sierpinskiatriangeln och undersöka om man kan göra någon generalisering av dessa för att kunna manipulera deras dimension.

Slutligen vill jag ge ett stort tack till Alan Sola för hans handledning och rådgivning.

9 Litteratur

Rudin, Walter (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill Education.

Falconer, Kenneth (2014). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* (3rd ed.). John Wiley and Sons.

Bishop, Christopher and Peres, Yuval (2017). *Fractals in Probability and Analysis*. Cambridge University Press.