

SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Kägelsnitt och deras historia

av

Reza Karimian

2021 - No K2

Kägelsnitt och deras historia

Reza Karimian

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2021

Kägelsnitt och deras historia

REZA KARIMIAN

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare Torbjörn Tambour 2020

Sammanfattning

Kägelsnitt är kurvor som erhålls genom att skära en kon med ett plan som inte passerar genom konens topp. De viktigaste kägelsnitten är parabel, hyperbel och ellips. Cirkeln kan också erhållas som ett kägelsnitt, men i grekisk matematik definieras cirkeln vanligtvis på enklare sätt. Kägelsnitt studerades intensivt under hela den hellenistiska perioden, men särskilt av Apollonius av Perga. Den här uppsatsen handlar om kägelsnitt och har tre delar. Den första tar upp kägelsnittens historia. Den andra handlar om kurvornas geometri som den utvecklades av bland andra Apollonius och Dandelin. I den tredje delen använder jag analytisk geometri i teorin för kägelsnitt.

Abstract

Conic sections are curves obtained by cutting a cone with a plane that does not pass through the vertex of the cone. The principal conic sections are the parabola, the hyperbola, and ellipse. The circle can also be obtained as a conic section, but, in Greek mathematics, the circle is usually defined by simpler means. Conic sections were studied intensely throughout the Hellenistic period, but particularly by Apollonius of Perga, whose work *Conics* stands as one of the great works of all Greek mathematics.

Acknowledgements

I would like to thank my supervisor Torbjörn Tambour, for his help with the theory and for the many examples that he gave to help me to understand. I like to thank my student counsellor *Jennifer Chamberlain* and *Sara Woldegiorgis* for everything during my studies. I also like to thank *Dan Petersen* for his comments and suggestions on how to improve my thesis. In addition, a special thanks to *Niusha Karimian* for her encouragement. Finally, I would like to thank my kind wife, *Taraneh Akbari* for her motivation, support and always believing in me during my studies.

Innehåller

1. Inledning.....	4
2. Historia	5
3. Koner	7
4. Kägelsnitt	8
5. Apollonius beskrivning av kägelsnitt	10
6. Kordor, diametrar och axlar.....	16
7. Parabelns ekvation.....	19
8. Ellipsens ekvation	21
9. Hyperbelns ekvation	23
10. Brännpunkt, Styrlinje och Excentricitet	25
11. Dandelin-sfärer och brännpunkter.....	28
12. Referenslista	34

Inledning

Ett kägelsnitt är en kurva som uppkommer då en kon skärs av ett plan. Kägelsnitten studerades redan av antikens geometriker, den mest kände är troligen Apollonius som skrev om den i sitt arbete Konika. I den här uppsatsen börjar jag med att studera kurvorna med den klassiska geometris metoder för att sedan använda analytisk geometri.

Kägelsnitten delas in i tre typer nämligen ellipser, parabler och hyperbler. Alla tre typerna förekommer i fysiken; planeterna rör sig i ellipsformade banor kring solen, en boll som kastas rör sig längs en parabel och en partikel med positiv elektrisk laddning som närmar sig en annan positivt laddad partikel kommer att röra sig längs en hyperbel.

I analytisk geometri har linjer ekvationer av grad 1, medan kägelsnitten visar sig har ekvationer av grad 2. Exempelvis har ju cirkeln, som är ett exempel på en ellips, en ekvation av formen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Ett annat namn på kägelsnitt är koniska sektioner och jag kommer att använda båda benämningarna i uppsatsen.

Stora delar av kägelsnittsteorin härrör från Apollonius, som skrev om den i sitt stora arbete "Conica" omkring 200 f.Kr. Stilen i den påminner en del om Elementa.[1,7]

Historia



APOLLONIUS EUKLIDES ARKIMEDES DANDELIN KEPLER ISAAC NEWTON

(Figur)⁽²⁾

Omkring 200 f.Kr. levde en lärjunge till Arkimedes som hette Apollonius från Perga. Han hade ett intresse för geometri och beskrev ellipsens, parabelns och hyperbelns egenskaper. Han utgick från en cirkulär kon och undersökte de kurvor som uppstår då den skärs av ett plan i olika vinklar. Beroende på hur man skär konen får man en cirkel, en ellips, en hyperbel eller en parabel. Apollonius arbete resulterade i det verket koniska, Om koniska sektioner, i åtta delar.

Det bör dock nämnas att både Euklides och Menaichmos, som var elev till Platon, ägnade sig åt kägelsnitt. Euklides behandlade kägelsnitten i fyra böcker, som tyvärr försvunnit eller förstörts.

Troligen var Apollonius inte ute efter några som helst tillämpningar av dessa koniska sektioner, utan studerade dem av nyfikenhet och han anade nog aldrig att teorin skulle få stor betydelse inom astronomin, trots att han var intresserad även av detta.

(2) <https://sv.wikipedia.org/wiki/Euklides#/media/Fil:EuclidStatueOxford.jpg>

<https://www.slideshare.net/Stinaaknutsson/fysik-fakta-arkimedes>

https://en.wikipedia.org/wiki/Germinal_Pierre_Dandelin#/media/File:Dandelin.jpg

https://sv.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler#/media/Fil:Johannes_Kepler_1610.jpg

[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Sir_Isaac_Newton_\(1643-1727\).jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Sir_Isaac_Newton_(1643-1727).jpg)

<https://alchetron.com/Apollonius-of-Perga>

Det var mer än 1800 år senare, i början av 1600-talet, som Apollonius teori ledde till viktiga astronomiska upptäckter. Tysken Johannes Kepler (1589–1591) använde den danske astronomen Tycho Brahes (1546–1601) omfattande observationsmaterial och Apollonius arbete för att ställa upp sina tre lagar för planeternas rörelser. Den första säger att de rör sig i ellipsformade banor med solen i ena brännpunkten.

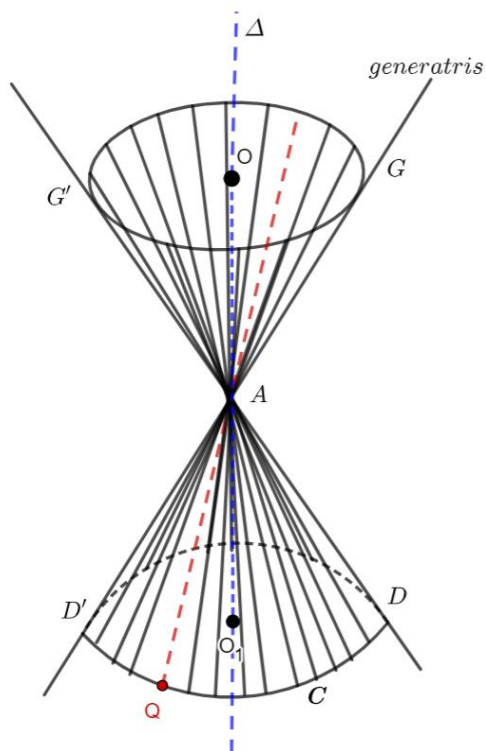
Senare samma århundrade införde René Descartes (1596–1650) och andra matematiker koordinatsystem och kunde då studera geometri algebraiskt och analytiskt. Koordinatsystem kunde nu både kända och okända geometriska figurer enkelt ritas och analyseras med hjälp av andragradsekvationer. Newton (1642–1727) visade sedan att en kropp som rör sig längs ett kägelsnitt påverkas av en kraft, omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet till ena brännpunkten, samt visade även att den omvända utsagan gäller.

En annan person som kan nämnas inom kägelsnittens område är Germain Pierre Dandelin. Han föddes nära Paris med fransk far och belgisk mor och studerade först i Gent och återvände sedan till Paris för att studera på École Polytechnique. Han blev sårad i strider under Napoleon. Han arbetade för utrikesministeriet under Lazare Carnot. Senare blev han medborgare i Nederländerna, professor i Belgien och sedan medlem av den belgiska armén. Han har gett namn åt Dandelins sfärer, Dandelins teorem i geometri och Dandelin – Graffs numeriska metod för lösning av algebraiska ekvationer.

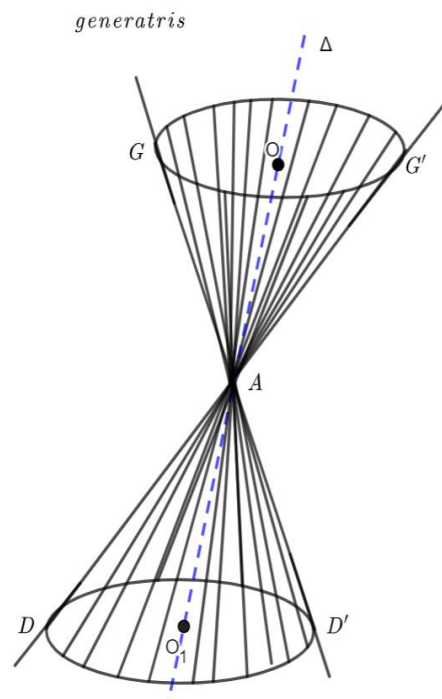
Koner

En kon kan definieras på följande sätt. Låt C vara en kurva i ett plan i rummet och A en punkt som inte ligger i kurvans plan. Låt Q vara en rörlig punkt på C . När Q rör sig längs C kommer linjen genom A och Q att alstra en yta som kallas en kon. I den här uppsatsen kommer C att vara en cirkel (figur 1a). Konens axel är linjen genom punkten A och medelpunkten i cirkeln C . Linjer som AG kallas *generatriser*. [4,9]

Om axeln är vinkelrät mot cirkelns plan får vi en rak (eller rät) cirkulär kon, annars sägs den vara sned. Apollonius utgick från en sned kon (figur 1b).



Figur 1a. Rak cirkulär kon

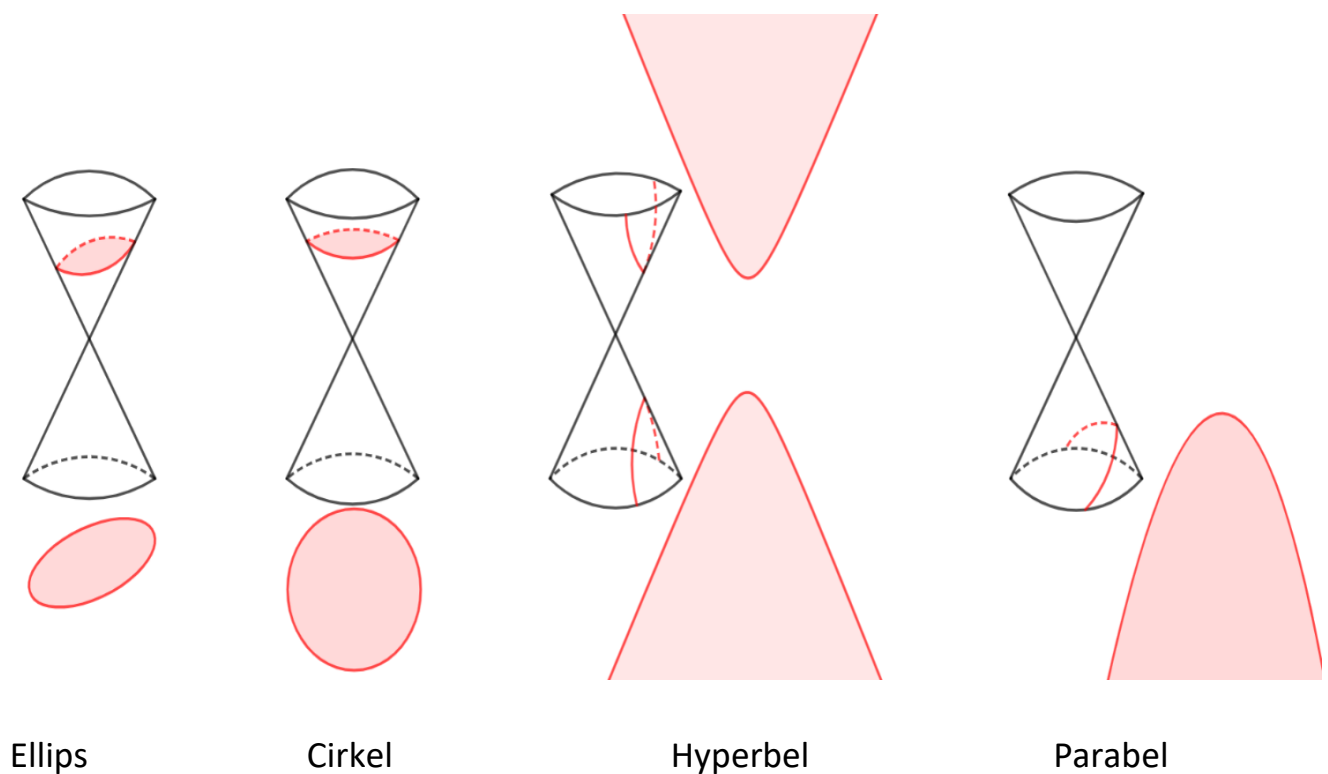


Figur 1b. Sned cirkulär kon

Kägelsnitt

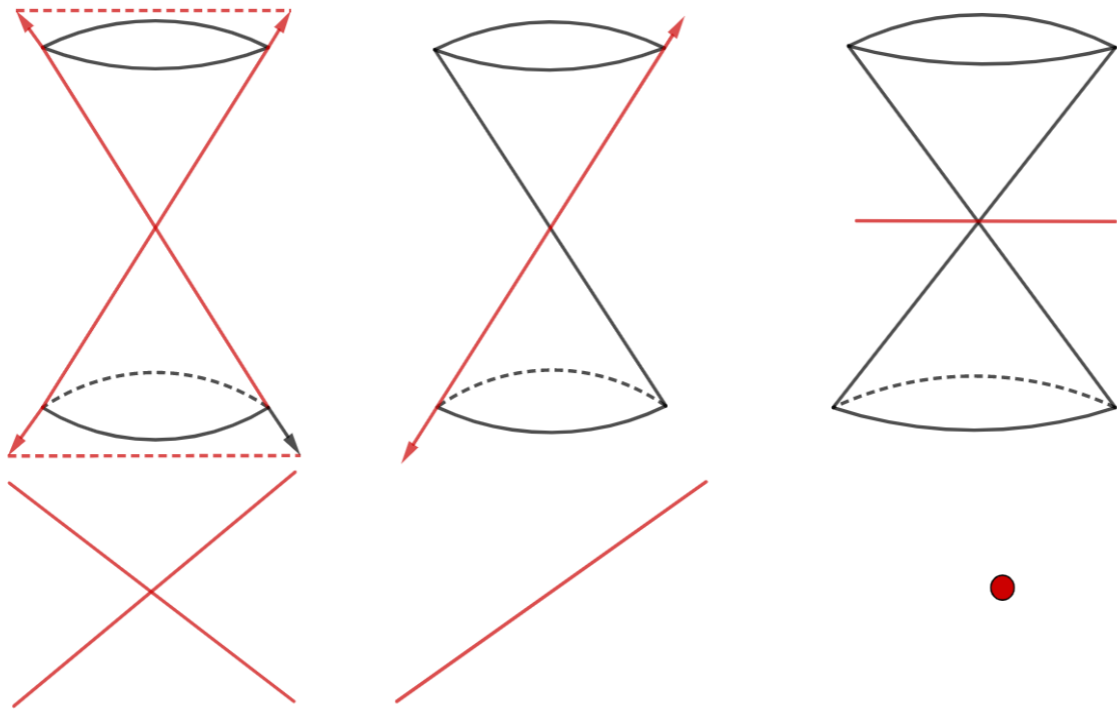
Ett kägelsnitt är en kurva som bildas då ett plan skär en kon. I en figur 2 ser man att det finns tre möjligheter. Om planet skär båda delarna av dubbelkonen, så kallas kurvan en hyperbel. Den består av två grenar. Om planet är parallellt med en generatris i konen, så är kurvan en parabel. I det tredje fallet, när planet bara skär ena delen av dubbelkonen och inte är parallellt med en generatris, så är kurvan en ellips (figur 2).

I det speciella fallet då det skärande planet vinkelrät mot konens axel, så är kurvan en cirkel, vilket vi ska bevisa senare [1, 2]



Figur 2

Om planet går genom konens spets, så kommer skärningen med konen att vara en punkt, en linje eller två linjer. De här urartningsfallen är inte intressanta och vi bortser från dem i fortsättningen. (Figur 3)



Två linjer

En linje

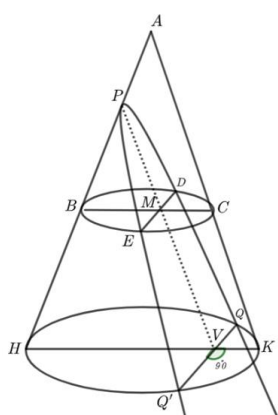
En punkt

Figur 3

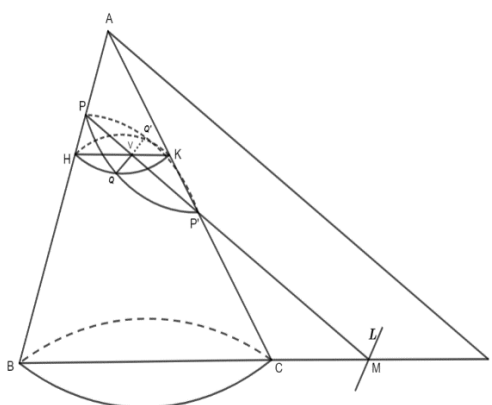
APOLLONIUS BESKRIVNING AV KÄGELSNIITT.

Nu ska vi titta på det mer generella fallet när konen inte nödvändigtvis är rät ut. Ett plan som är vinkelrät mot basen och innehåller konens axel kallas ett *axiellt plan*. I en rak kon finns det oändligt många axiella plan, men i en sned kon finns det bara ett. Eftersom ett axiellt plan måste innehålla både konens axel samt en normalvektor till basplanet. För en sned kon är normalvektorn linjärt oberoende från konens axel, så planet blir därmed unikt. Skärningen mellan ett axiellt plan och själva konen kallas en *axiell triangel*. Basen i den axiella triangeln är en diameter i bascirkeln. I figurerna nedan är ΔABC axiella trianglar.

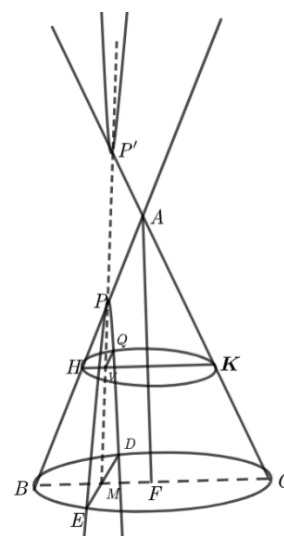
Den räta linjen PM är skärningslinjen mellan skärplanet Π och den axiella triangeln. Om PM är parallell med ena sidan av den axiella triangeln är skärningen en parabel. Om PM skär båda sidorna av den axiella triangeln är skärningen en ellips. Slutligen, om PM skär en sida av den axiella triangeln och den andra sidan som förlängs bortom A , är skärningen en hyperbel. Hyperbeln har två grenar eftersom Π skär båda delarna av konen [2,9,10]



Parabel

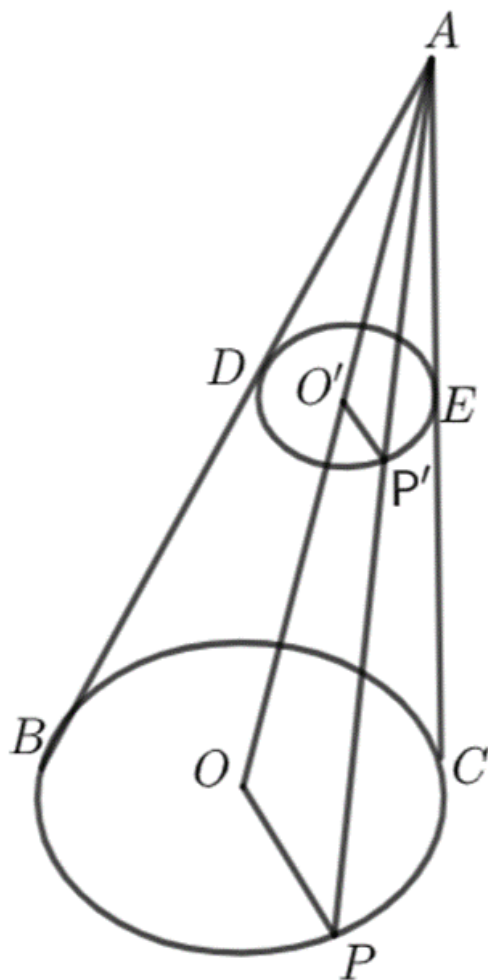


Ellips



Hyperbel

Sats 1. Skärningen mellan en kon och ett plan som är parallellt med konens bas är en cirkel.



Bevis. Vi betecknar som tidigare konens spets med A . Basen är cirkeln BC med medelpunkt O . Då är AO konens axel. Vi antar att konen skärs av ett plan DE som är parallellt med BC och betecknar skärningspunkten mellan axeln och DE med O' . Drag en generatris AP där P ligger i planet BC och beteckna dess skärningspunkt med DE med P' . Då är OP och $O'P'$ parallella eftersom de är skärningarna mellan planet som bestäms av triangel ΔAOP och BC respektive DE . Enligt topptriangelsatsen är trianglarna $\Delta AO'P'$ och ΔAOP likformiga så

$$\frac{|O'A|}{|OA|} = \frac{|O'P'|}{|OP|} ,$$

Alltså är \widehat{BPC} en cirkel, så $|OP|$ är konstant för alla positioner av P på kurvan och

Figur 4

förhållandet $\frac{|O'A|}{|OA|}$ är också konstant (Konens axel är konstant och oföränderlig).

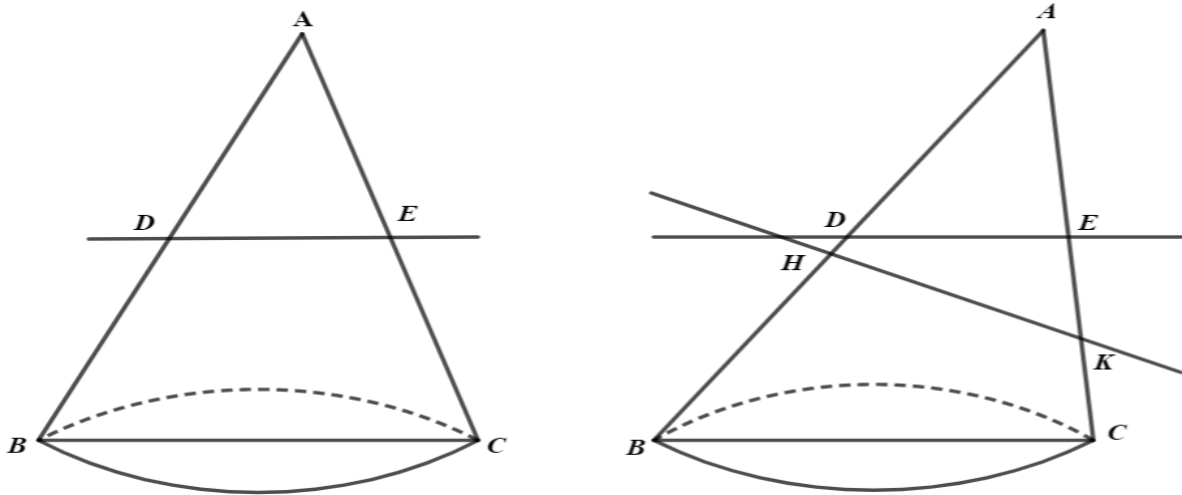
Så är $|O'P'|$ konstant för alla punkter på sektionen av ytan med planet DE .

Eftersom längden av OP är oberoende av var på cirkeln BC som P ligger, så är även längden av $O'P'$ konstant. Alltså är DE en cirkel (figur 4). [3,10]

Vi ska nu visa att om konen verkligen är sned, så finns det ytterligare ett plan som skär den längs en cirkel. För detta ändamål behöver vi fortsättningen förklara vad antiparallellt/subkonträrt plan är. Ett plan sägs vara subkonträrt (eller antiparallellt med konens bas) om det är vinkelrät mot det axiella planet

och skär den axiella triangeln längs en linje HK så att $\angle HKA = \angle ABC$. Om konen är rak, så är förstås ett subkonträrt plan parallellt med basen (figur 5).

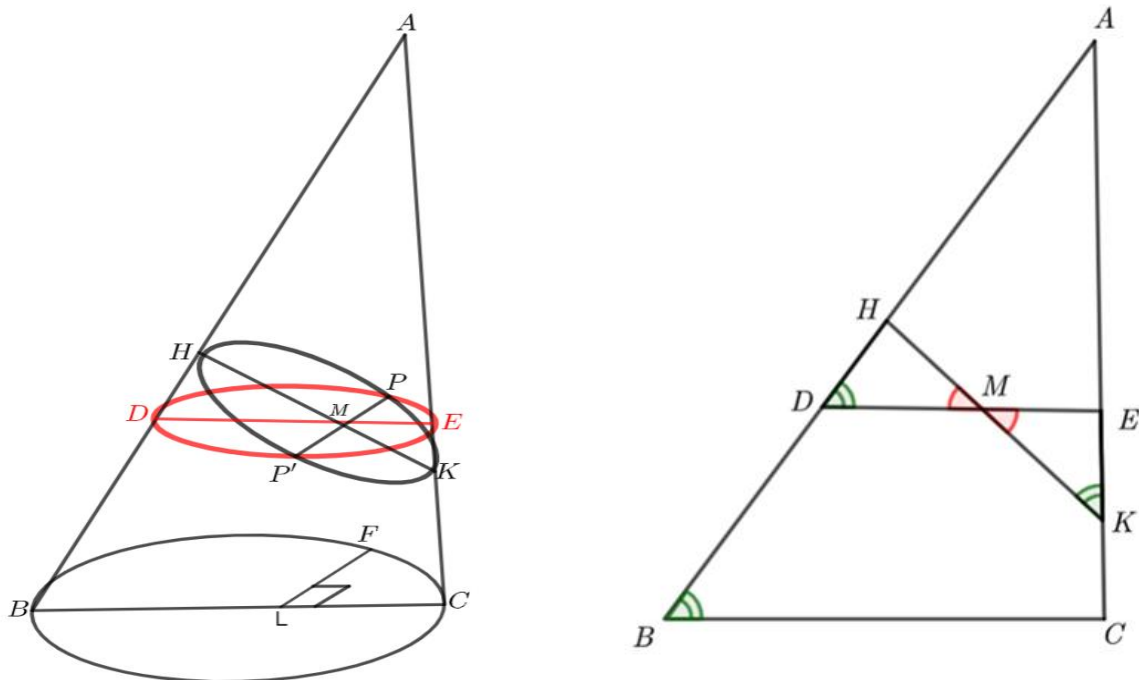
[9,10]



Figur 5

Sats 2. Skärningen mellan en kon och ett subkonträrt plan är en cirkel.

Bevis. Låt P vara en punkt på skärningen och Π ett plan som går genom P och är parallellt med konens bas. Skärningen mellan Π och konen är enligt sats 1 en cirkel (figur 6).[2,3,10]



Figur 6

Sträckan DE är skärningen mellan Π och den axiella triangeln ΔABC . Enligt alternatvinkelsatsen är $\angle ADE = \angle ABC$ så tredje likformighetsfallet ger att trianglarna ΔHDM och ΔEKM är likformiga. Alltså är

$$\frac{|DM|}{|KM|} = \frac{|HM|}{|EM|}$$

som ger $|DM| \cdot |EM| = |KM| \cdot |HM|$. Men om vi använder kordasatsen på cirkeln DPE så får vi $|DM| \cdot |EM| = |PM| \cdot |P'M|$, där P' är den andra skärningspunkten mellan PM och konen. Sträckan DE är en diameter i DPE varför $|PM| = |P'M|$. Vi har således visat att $|KM| \cdot |HM| = |PM|^2$, och vi ska visa att detta betyder att P ligger på en cirkel med diameter HK . I figur 7 är Q mittpunkten på $|HK|$, och $|PM|$ är vinkelrät mot $|KH|$. Vi ska beräkna $|PQ|$.

Så ger Pythagoras sats $|PQ|^2 = |PM|^2 + |MQ|^2$,

eller
$$|MQ|^2 = |PQ|^2 - |PM|^2. \tag{1}$$

Vi vet
$$|PM|^2 = |KM| \cdot |HM|, \tag{2}$$

och i figur7 $|MQ| = \underbrace{|KQ|}_{\frac{|KH|}{2}} - |KM|$ och $|MQ| = |HM| - \underbrace{|HQ|}_{\frac{|KH|}{2}}$,

så
$$|MQ|^2 = \left(\frac{|KH|}{2} - |KM|\right) \left(|HM| - \frac{|KH|}{2}\right),$$

senare
$$|MQ|^2 = \frac{|KH| \cdot |HM|}{2} - \frac{|KH|^2}{4} - |KM| \cdot |HM| + \frac{|KM| \cdot |KH|}{2} \tag{3}$$

Vi substituerar (2) och (3) i (1), så får vi

$$|PQ|^2 - |PM|^2 = \frac{|KH| \cdot |HM|}{2} - \frac{|KH|^2}{4} - |PM|^2 + \frac{|KM| \cdot |KH|}{2},$$

då
$$|PQ|^2 = \frac{|KH| \cdot |HM|}{2} - \frac{|KH|^2}{4} + \frac{|KM| \cdot |KH|}{2}. \tag{4}$$

Med hjälp av ett algebraiskt bevis kallar vi $QH = x$, $MQ = y$ så $KM = x - y$ sedan substituerar vi detta i ekvation (4) då får vi

$$|PQ|^2 = \frac{2x \cdot (x + y)}{2} - \frac{(2x)^2}{4} + \frac{2x \cdot (x - y)}{2},$$

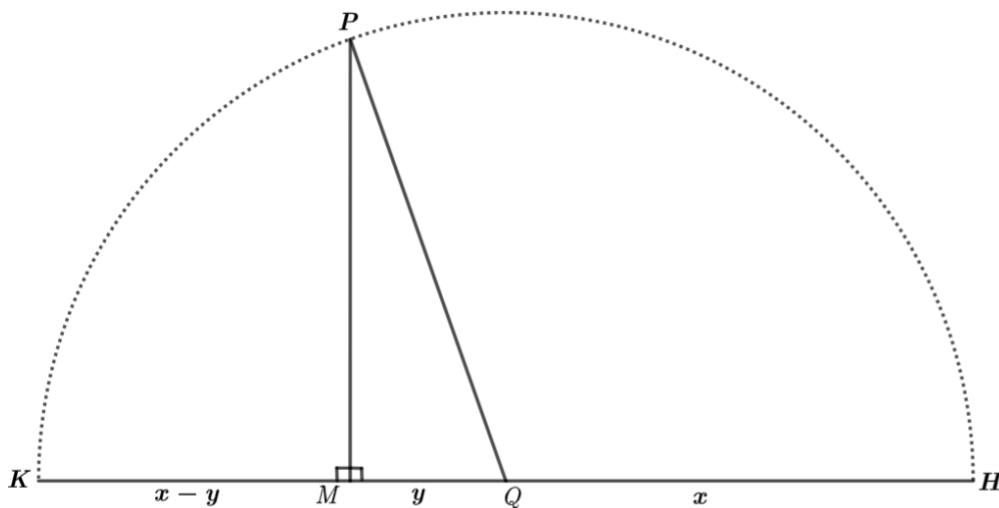
Senare $|PQ|^2 = x \cdot (x + y) - x^2 + x \cdot (x - y),$

eller $|PQ|^2 = x \cdot (x + y + x - y) - x^2 = x \cdot 2x - x^2,$

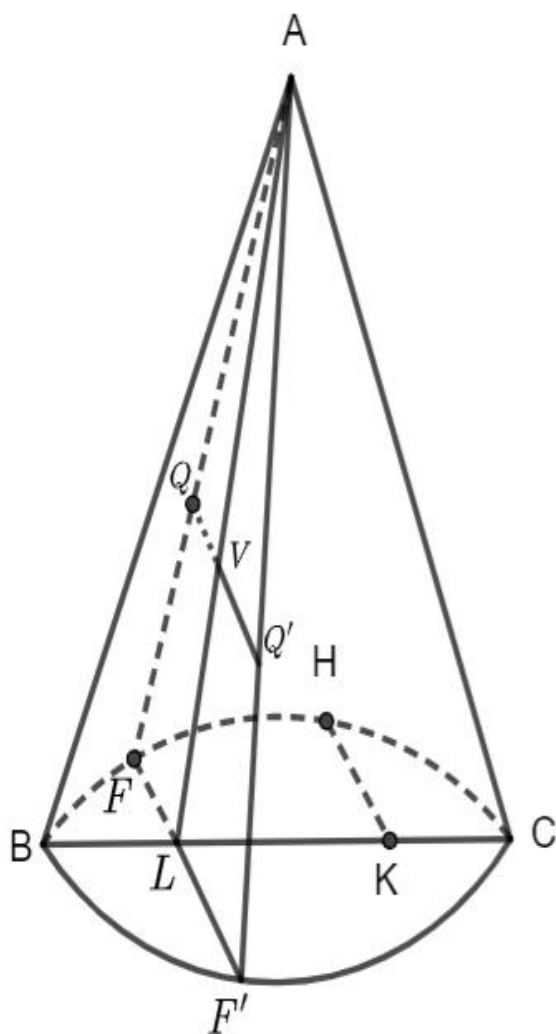
eller $|PQ|^2 = x^2$

slutligen får vi $|PQ| = x = \frac{KH}{2} = |KQ| = |HQ|,$

Vilket betyder P ligger på cirkeln med diameter KH . [1]



Figur 7



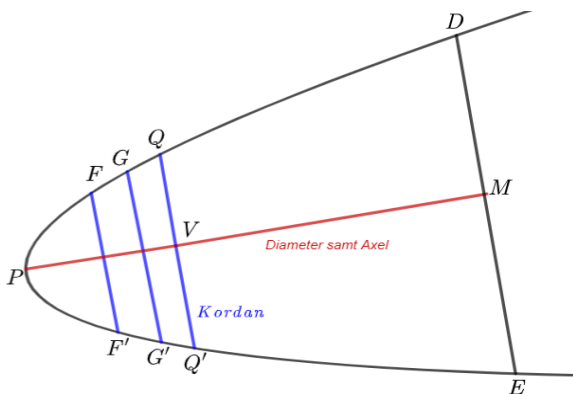
Figur 8

Ovan såg vi att M är mittpunkten på PP' . Detta kan generaliseras, låt ΔABC vara en axiell triangel i en kon och Π ett plan som går genom konens spets A och är vinkelrät mot det axiella planet. Beteckna skärningspunkterna mellan Π och konens bas med F och F' och skärningen mellan Π och diametern BC i bascirkeln med L . Då är FF' vinkelrät mot BC eftersom Π är vinkelrät mot det axiella planet, varför L är mittpunkten på FF' . Om Q och Q' är punkter på AF respektive AF' och sträckan QQ' skär AL i V , så följer av likformighet att V är mittpunkten på QQ' (figur 8)[3]

Kordor, diametrar och axlar

Sats 3. *Mittpunkterna på parallella kordor ligger på en linje, Vi ska visa Apollonius resultat i ett speciellt fall sådan att konen är en sned cirkulär kon.*

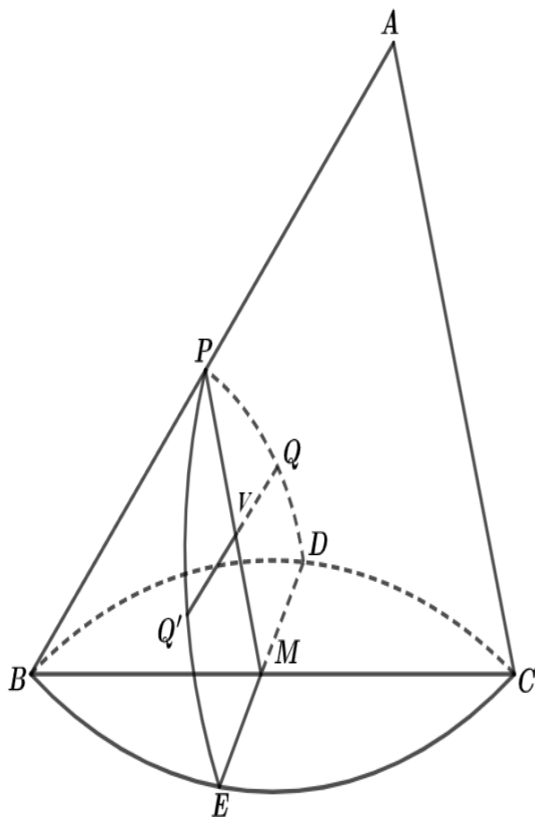
En linje som förbinder två punkter på ett kägelsnitt kallas en *korda*. En sådan linje kallas en *diameter* i kägelsnittet. I en cirkel är diametern vinkelrät mot motsvarande kordor. Men för ett allmänt kägelsnitt är det inte nödvändigt att diametern är vinkelrät mot kordan som den halverar.



Om en diameter av ett kägelsnitt är vinkelrät mot kordorna kallas diametern en *axel* för kägelsnitt.

Ett kägelsnitt kan ha en axel (parabel), två axlar (ellips och hyperbel) eller en oändlighet av axlar (cirkel).

Bevis. Låt en kon skäras av ett plan som inte passerar genom spetsen (A) utan



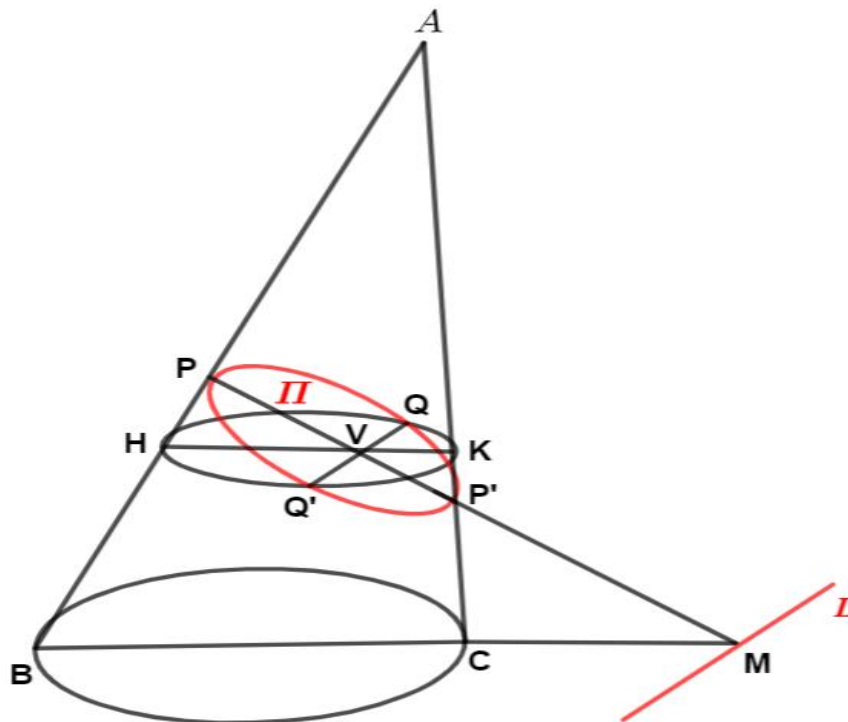
skär basplanet i en rät linje DE som är vinkelrät mot rät linje BC i den axiella triangel, och låt den resulterande kurvan vara DPE . Låt BC skära DME i M , så att M är DE :s mittpunkt. Skärningsplanet skär den axiella triangel planet ΔABC längs linjen PM . Låt Q vara en godtycklig punkt på skärningskurvan DPE förutom P och drag en linje från Q parallellt med DE som skär konen i en annan punkt Q' . Så halveras kordan QQ' av linjen PM . QQ' halveras med axial triangel ΔABC , eftersom konen är symmetrisk under spegling i axial triangel planet ΔABC , dessutom förklarade vi med föregående sidan. Således ser vi att alla kordor som är parallella med DE halveras av linjen PM .

Figur 9

När konen är rät cirkulär är alla axiella trianglar vinkelräta mot basen och följaktligen kommer diametern som erhålls som skärningslinjen med den axiella triangeln ΔABC att vara vinkelrät mot de kordor som den skär och kommer därför att vara en axel i kägelsnittet och kägelsnittet är symmetriskt med avseende på axeln (figur 9).[1,3,10]

Sats 4. Om en kon skärs av ett plan som är vinkelrät mot det axiella planet och skärningen är en cirkel, så är planet antingen parallellt eller antiparallellt med basen.

Bevis. Vi låter som vanligt ΔABC vara den axiella triangeln och betecknar det skärande planet med Π . Låt L vara skärningslinjen mellan Π och basplanet. Då är L vinkelrät mot BC . Vi betecknar skärningspunkterna mellan Π och den axiella triangeln med P och P' och låter M vara skärningspunkten mellan $|BC|$ och L . De tre punkterna P, P', M ligger i både axialplanet och Π och därför på en rät linje. Låt nu Q vara en punkt på skärningen mellan Π och konen och drag kordan QQ' parallellt med L . Om V är skärningspunkten mellan kordan och axialplanet då $|QV| = |Q'V|$. Eftersom PP' delar kordan QQ' på mitten, så är PP' en diameter i cirkeln (figur 10).[1,3,10]



Figur 10

Låt $HQKQ'$ vara det cirkulära avsnittet genom QQ' parallellt med basen.

Använder vi kordasatsen på cirklarna HQK och PQP' , så får vi

$$|QV|^2 = |HV| \cdot |VK|,$$

och

$$|QV|^2 = |PV| \cdot |VP'|.$$

Då får vi

$$|HV| \cdot |VK| = |PV| \cdot |VP'|.$$

Det vill säga

$$\frac{|HV|}{|VP|} = \frac{|P'V|}{|VK|}.$$

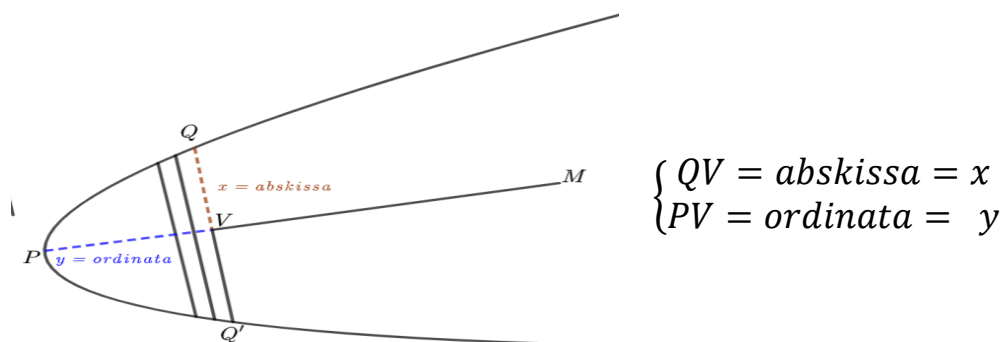
Enligt första likformighetsfallet är då trianglarna ΔVPH och $\Delta VKP'$ är likformiga, vilket speciellt betyder att $\angle PHV = \angle KP'V$ och Π är således antiparallellt med basen.

Fortsättningen i de återstående avsnitten undersöker vi karaktären hos kurvorna, sådan att

- I) De som sträcker sig till oändligheten,
- II) De som är ändliga men inte är cirklar.

Antag som vanligt att planet Π skär den cirkulära basen längs en linje L och att ΔABC är den axiella triangeln vars bas BC är en diameter i bascirkeln. Om Π och det axiella planet skär varandra längs linjen PM , där M ligger på L , är PM en diameter i kägelsnittet som delar alla kordor som är parallella med L på mitten.

Längden av sträckan QV kallas med klassisk terminologi *ordinata* och längden av PV *abskissa* (orden *abskissa* och *ordinata* användes förr i tiden i stället för x - och y -koordinat) figur 11.[1,3,10]



Figur 11

Parabelns ekvation

Vi kan nu härleda parabelns ekvation. Vi antar alltså att PM är parallell med sidan AC i den axiella triangeln. Låt Q vara en godtycklig punkt på kägelsnittet och dra kordan QQ' parallellt med DE . Skärningspunkten mellan QQ' och PM betecknas V och vi har tidigare visa att den är mittpunkten på QQ' (figur 12).

Dra en cirkel genom Q parallellt med konens bas och låt skärningspunkterna med den axiella triangeln vara H och K . Kordasatsen ger $|QV|^2 = |HV| \cdot |KV|$. Topptriangelsatsen använd två gånger ger $\Delta PHV \sim \Delta AHK \sim \Delta ABC$.

Av $\Delta PHV \sim \Delta ABC$

$$\frac{|HV|}{|PV|} = \frac{|BC|}{|AC|}, \quad (1)$$

och av $\Delta PHV \sim \Delta AHK$

$$\frac{|HK|}{|HV|} = \frac{|HA|}{|HP|},$$

vi får

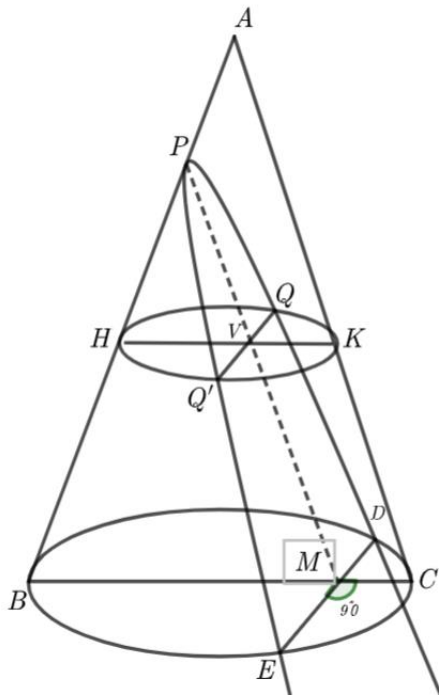
$$\frac{|HK| - |HV|}{|HV|} = \frac{|HA| - |HP|}{|HP|},$$

så

$$\frac{|VK|}{|HV|} = \frac{|PA|}{|HP|}, \text{ eller } \frac{|VK|}{|PA|} = \frac{|HV|}{|HP|}.$$

Slutligen av $\Delta PHV \sim \Delta ABC$

$$\frac{|VK|}{|PA|} = \frac{|BC|}{|AB|}. \quad (2)$$



Figur 12

Om vi multiplicerar de två likheterna (1) och (2), så får vi

$$\frac{|HV| \cdot |VK|}{|PV| \cdot |PA|} = \frac{|BC|^2}{|AB| \cdot |AC|}$$

som ger

$$\begin{aligned} |QV|^2 &= |HV| \cdot |VK| = \frac{|PA| \cdot |BC|^2}{|AB| \cdot |AC|} \cdot |PV| \\ &= p \cdot |PV| \end{aligned}$$

där

$$p = \frac{|PA| \cdot |BC|^2}{|AB| \cdot |AC|}$$

p kallas parabelns *parameter* som är konstant för p inte beror på punkten Q .

Sätter vi $x = |PV|$, $y = |QV|$, så känner vi igen ekvationen $y^2 = px$ från analytisk geometri.[1,3]

Ellipsens ekvation

Vi kan nu härleda ellipsens ekvation i en analytisk geometri

I figur 13 är AF parallell med PM och F ligger i basplanet. Vi har $\Delta HVP \sim \Delta BFA$ enligt tredje likformighetsfallet. Vidare är $\angle KP'V = \angle CAF$ och $\angle VKP' = \angle FCA$ enligt alternatvinkelsatsen, så tredje likformighetsfallet igen ger $\Delta VKP' \sim \Delta FCA$. Alltså är

$$\frac{|HV|}{|PV|} = \frac{|BF|}{|AF|} \text{ och } \frac{|VK|}{|P'V|} = \frac{|FC|}{|AF|}$$

och om vi multiplicerar de här två likheterna så får vi

$$|HV| \cdot |VK| = \frac{|BF| \cdot |FC|}{|AF|^2} \cdot |PV| \cdot |P'V|$$

Enligt kordasatsen är $|QV|^2 = |HV| \cdot |VK|$, varför

$$|QV|^2 = \frac{|BF| \cdot |FC|}{|AF|^2} \cdot |PV| \cdot |P'V|.$$

Vi sätter $x = |PV|$, $y = |QV|$, $b = |PP'|$ och $a = |PP'| \cdot |BF| \cdot |FC| / |AF|^2$ och får då ekvationen

$$y^2 = \frac{a}{b} \cdot x \cdot |P'V|,$$

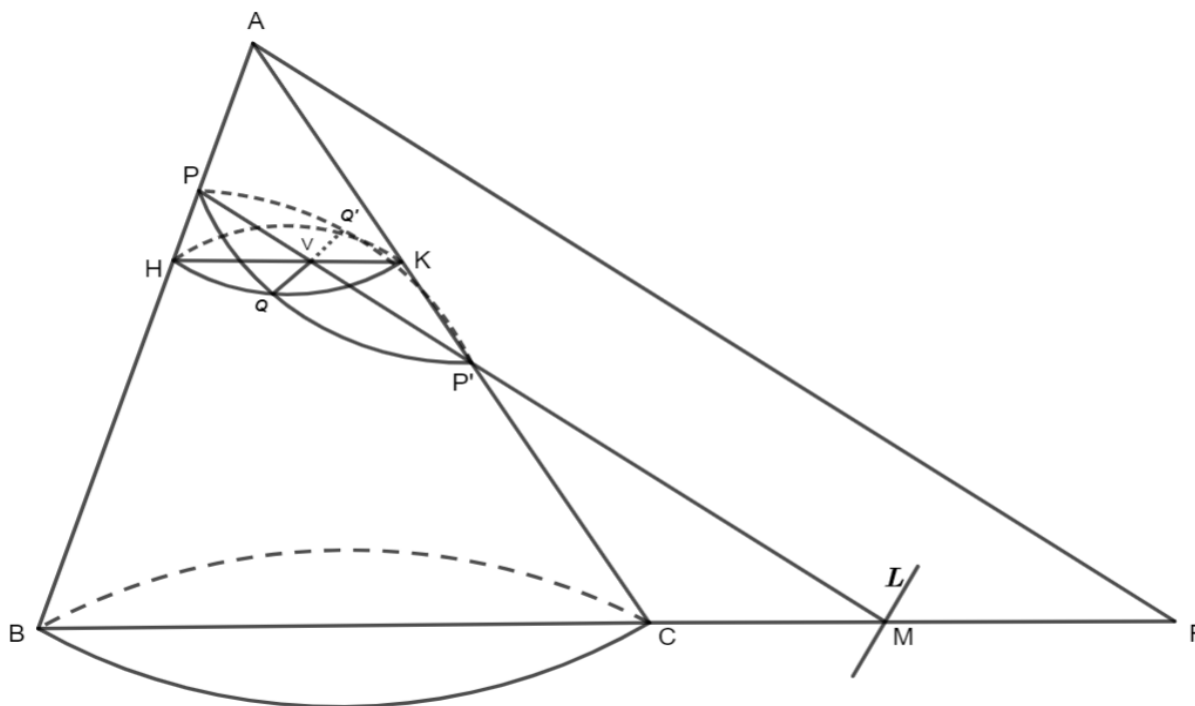
vilket

$$|P'V| = |PP'| - |PV| = (b - x)$$

$$y^2 = \frac{a}{b} \cdot x \cdot (b - x),$$

$$y^2 = ax - \frac{a}{b}x^2.$$

för ellipsen.[1,3]



Figur 13

I vissa fall kan vi stöta på en ekvation vars form inte är bekant för oss. I föregående avsnitt erhöll vi formeln för den elliptiska ekvationen enligt följande

$$y^2 = ax - \frac{a}{b}x^2,$$

Vi skriver om ekvationen på följande sätt

$$y^2 + \frac{a}{b}(x^2 - bx) = 0,$$

$$y^2 + \frac{a}{b}\left(x^2 - bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right) = 0,$$

$$y^2 + \frac{a}{b}\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{ab}{4},$$

med hjälp av ett variabelbyte $\left[\begin{array}{l} y \rightarrow Y \\ x \rightarrow \left(X - \frac{b}{2}\right) \end{array} \right]$ så får vi

$$Y^2 + \frac{a}{b}X^2 = \frac{ab}{4},$$

senare delar vi ekvationens både vänster och högerled med $\frac{ab}{4}$ då får vi

$$\frac{Y^2}{\frac{ab}{4}} + \frac{X^2}{\frac{b^2}{4}} = 1,$$

Om vi antar $\begin{cases} \frac{b}{2} = A \\ \frac{\sqrt{ab}}{2} = B \end{cases}$ slutligen får vi

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1.$$

Vilket är ellipsens standardekvation i en form som är bekant för oss. På liknande sätt kan vi hitta hyperbelns standard ekvation form i nästa avsnitt.

Hyperbelns ekvation

Vi kan nu härleda hyperbelns ekvation. I figur 14 är AF parallell med PM och F ligger i basplanet. Vi tänker oss först att Q ligger på den nedre grenen av kurvan. Vi har $\Delta HVP \sim \Delta BFA$ enligt tredje likformighetsfallet. Vidare är $\angle KP'V = \angle CAF$ och $\angle VKP' = \angle FCA$ enligt alternativvinkelsatsen, så tredje likformighetsfallet igen ger $\Delta VKP' \sim \Delta FCA$. Alltså är

$$\frac{|HV|}{|PV|} = \frac{|BF|}{|AF|} \text{ och } \frac{|VK|}{|P'V|} = \frac{|FC|}{|AF|}$$

och om vi multiplicerar de här två likheterna så får vi

$$|HV| \cdot |VK| = \frac{|BF| \cdot |FC|}{|AF|^2} \cdot |PV| \cdot |P'V|$$

Enligt kordasatsen är $|QV|^2 = |HV| \cdot |VK|$, varför

$$|QV|^2 = \frac{|BF| \cdot |FC|}{|AF|^2} \cdot |PV| \cdot |P'V|.$$

Vi sätter $x = |PV|$, $y = |QV|$, $b = |PP'|$ och $a = |PP'| \cdot |BF| \cdot |FC| / |AF|^2$ och får då ekvationen

$$y^2 = \frac{a}{b} \cdot x \cdot |P'V|,$$

Nu är ju $|P'V| = |P'P| + |PV| = (b + x)$, så

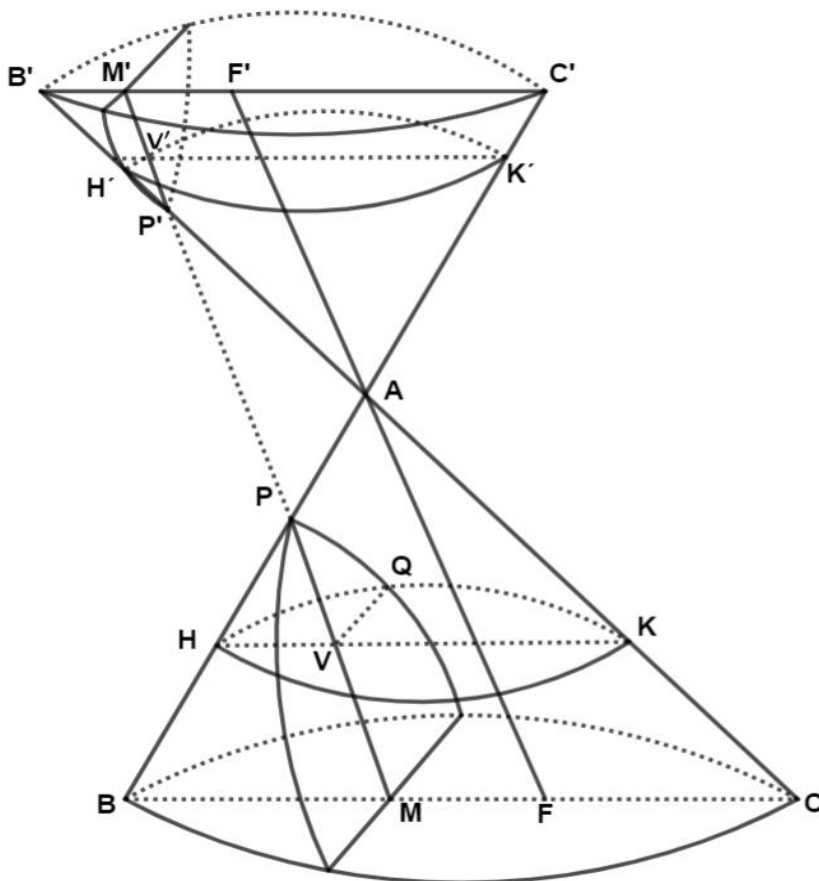
$$y^2 = \frac{a}{b} \cdot x \cdot (b + x) = ax + \frac{a}{b}x^2.$$

Om Q i stället ligger på den övre grenen, så får vi på samma sätt

$$|QV'|^2 = \frac{|BF| \cdot |FC|}{|AF|^2} \cdot |P'V'| \cdot |PV'|.$$

Vi sätter $x = |PV'|$, $y = |QV'|$ och får ekvationen [1,3]

$$y^2 = \frac{a}{b} \cdot x \cdot (x - b) = -ax + \frac{a}{b}x^2.$$



Figur 14

BRÄNNPUNKT, STYRLINJE OCH EXCENTRICITET

I figuren 15 har vi en rät cirkulär kon med spets O , med OV och OQ som generatriser. VQ är en diameter i den cirkulära basen. Planet UAP är vinkelrätt mot den axiella triangeln ΔOVQ och skär konen längs kurvan AP . Linjen AU är skärningen mellan planet UAP och det axiella planet. En sfär tangerar både konen och planet. Sfären tangerar konen längs en cirkel EFR och planet UAP i punkten S . Linjen EF är parallell med linjen QV och den skär UA i X . XK är en linje i planet UAP och är vinkelrät mot linjen UX . PN är vinkelrät mot AU i planet UAP och K är sådan att $PNXK$ är en rektangel.

Eftersom SP och PR är tangenter till sfären har vi $|SP| = |PR| = |EQ|$.
Eftersom också AS och AE är tangenter till sfären, så har vi $|AS| = |AE|$.
Eftersom trianglarna ΔAEX och ΔAQN är likformiga (Tredje likformighetsfallet vvv) har vi

$$\frac{|AQ|}{|AE|} = \frac{|AN|}{|AX|}$$

Låt oss kalla detta förhållande k . Då får vi

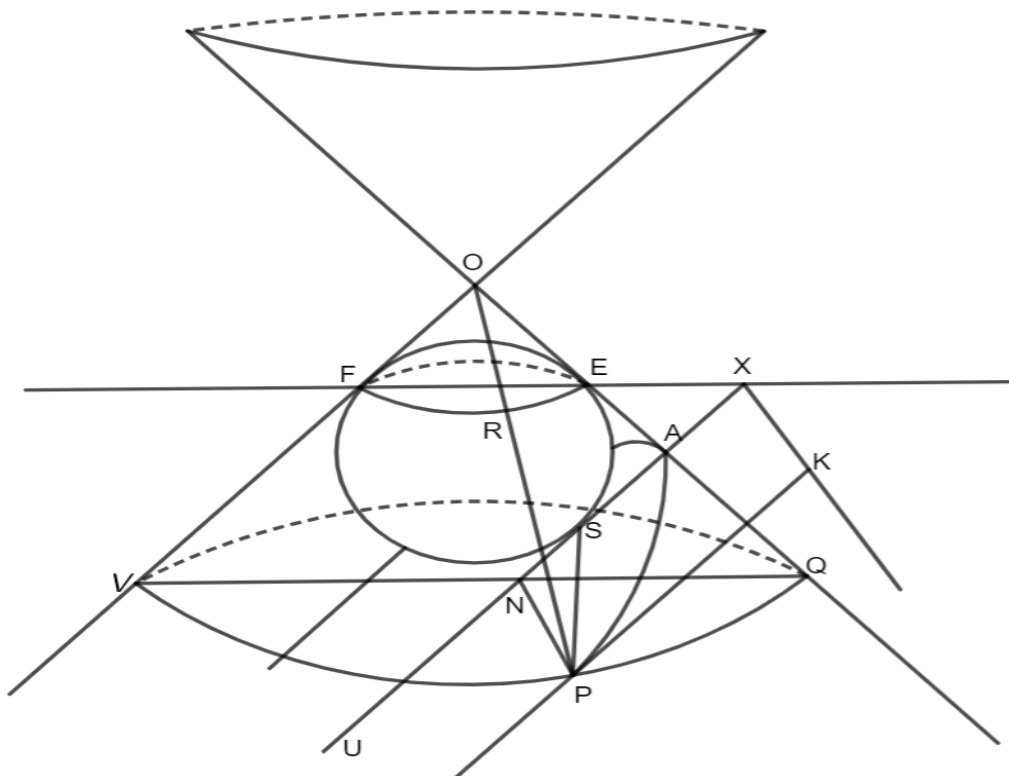
$$\frac{|EQ|}{|NX|} = \frac{|AE| + |AQ|}{|AX| + |AN|} = \frac{|AE| + k \cdot |AE|}{|AX| + k \cdot |AX|} = \frac{(1+k)|AE|}{(1+k)|AX|} = \frac{|AE|}{|AX|}$$

Eftersom $|EQ| = |SP|$, $|AE| = |SA|$ och $|NX| = |PK|$ så ger detta

$$\frac{|SP|}{|PK|} = \frac{|SA|}{|AX|}$$

Detta betyder att förhållandet $\frac{SP}{PK}$ är konstant när P rör sig längs kurvan.

Punkten S kallas brännpunkt och linjen XK kallas styrlinje. En annan karaktärisering av ett kägelsnitt är tydligen att det är mängden av alla punkter P sådana att förhållandet avståndet mellan P och en fix punkt S och avståndet mellan P och en fix linje är konstant.



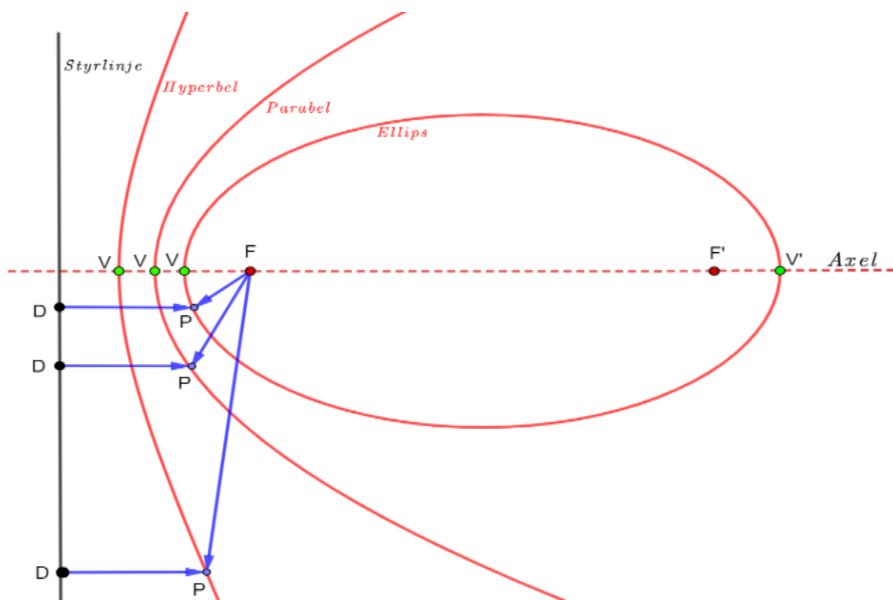
Figur 15

Ett kägelsnitt kan karakteriseras som en uppsättning punkter vars avstånd från en fast punkt varierar i ett konstant förhållande med deras avstånd från en fast linje som inte passerar genom den fasta punkten. Den fasta punkten kallas brännpunkt, den fasta linjen styrlinje och det konstanta förhållandet excentriciteten för ett kägelsnitt. Observera också att excentriciteten kan vara mindre än ett, lika med ett eller större än ett, enligt vinkel $\angle ANQ$ är mindre än vinkel $\angle OVQ$, lika med vinkel $\angle OVQ$ eller större än vinkel $\angle OVQ$. Med andra ord, om skärningsplanet är parallellt med generatoren OV så är excentriciteten

lika med ett. Om detta plan skär båda generatorerna OV och OQ mot samma sida av O och inte är parallellt med PQV är excentriciteten mindre än ett. Om planet skär generatorer OV och OQ på motsatta sidor om Q , är excentricitet större än ett.[3]

Excentriciteten betecknas som e , så har vi

$$e = \frac{PF}{PD}$$



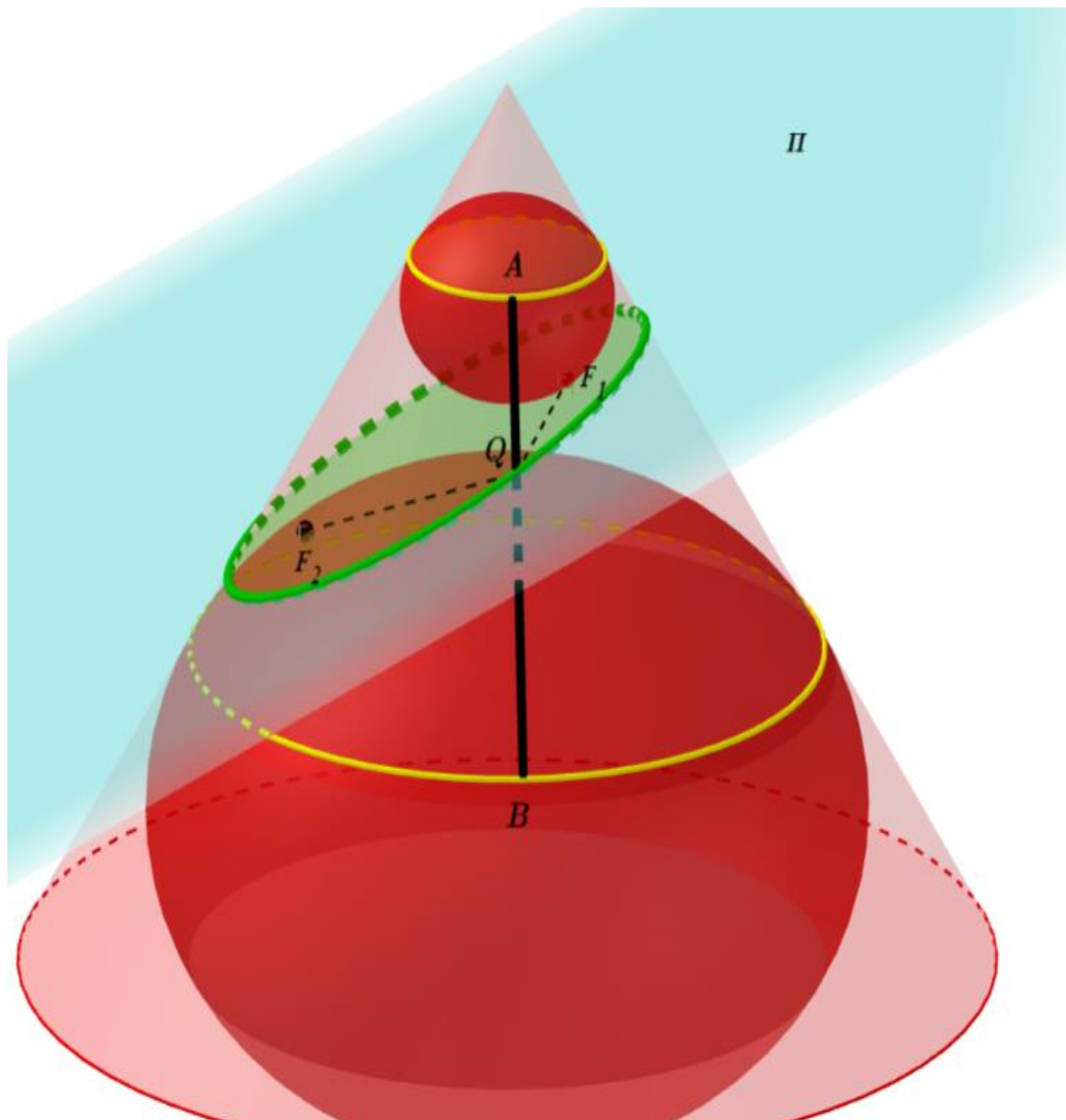
för parabel= 1,

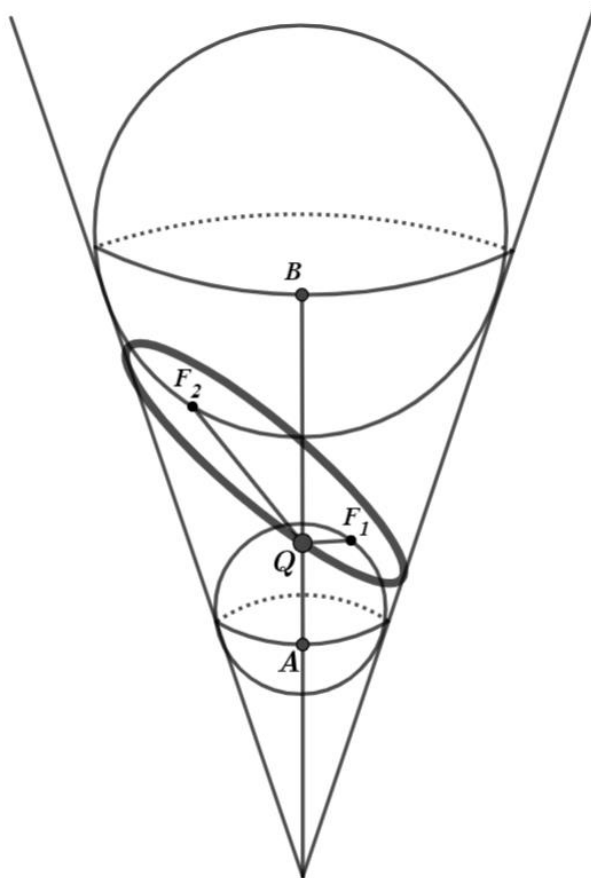
för ellips < 1,

för hyperbel >1.

Dandelin-sfärer och brännpunkter

Sats 5. Ellipsen är mängden av alla punkter vilkas avstånd till två givna punkter har en konstant summa. De två givna punkterna kallas ellipsens brännpunkter.





Figur 16

Bevis. Vi antar att ett plan Π skär en kon så att skärningen är en ellips. Inuti konen placerar vi en sfär ovanpå planet och en under så att de båda tangerar planet och konen. Tangeringspunkterna med planet betecknar vi F_1 och F_2 . Sfärerna tangerar konen längs cirklar. Låt Q vara en punkt på ellipsen och drag en generatris genom den. (figur 16)

Beteckna skärningspunkterna mellan generatrisen och tangeringscirklarna med A och B . Eftersom alla tangenter från en punkt till en sfär är lika långa, så gäller att

$$|QA| = |QF_1| \text{ och } |QB| = |QF_2|,$$

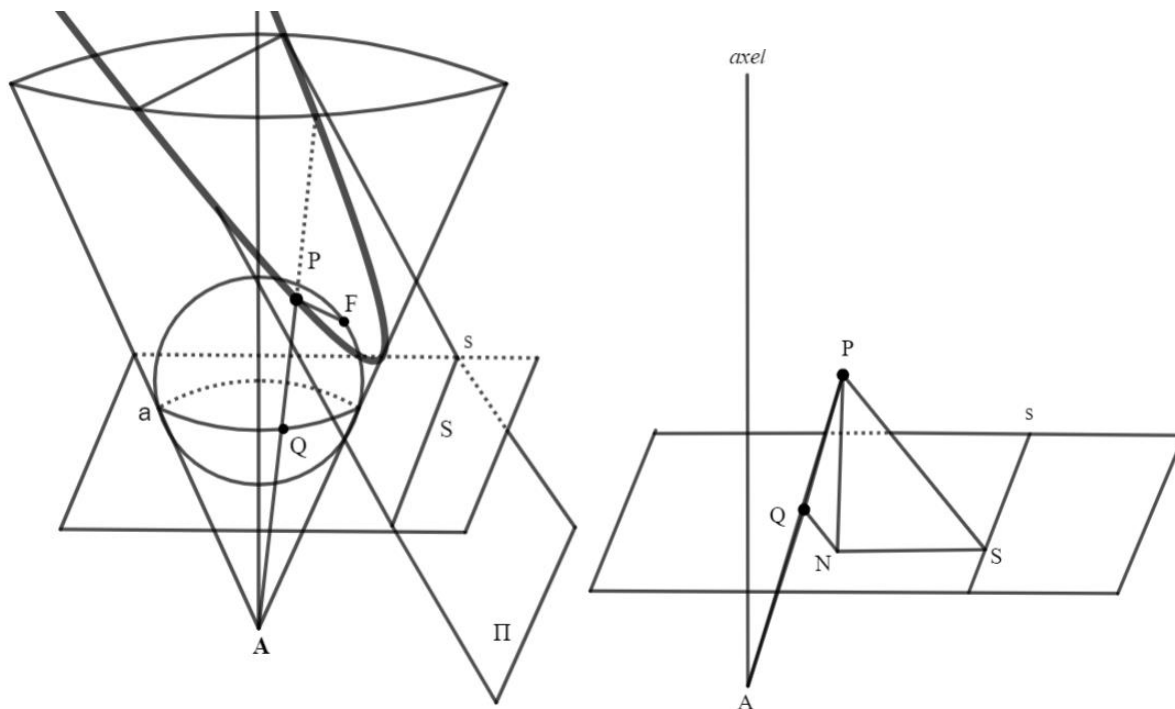
alltså är

$$|QF_1| + |QF_2| = |QA| + |QB|,$$

vilket är avståndet mellan tangeringscirklarna och oberoende av Q .

Punkterna F_1 och F_2 kallas ellipsens *brännpunkter* och sfärerna *Dandelin-sfärer*. [1,4,6]

Sats 6. Parabeln är mängden av alla punkter i ett plan vilkas avstånd till en given punkt och en given rät linje är lika.



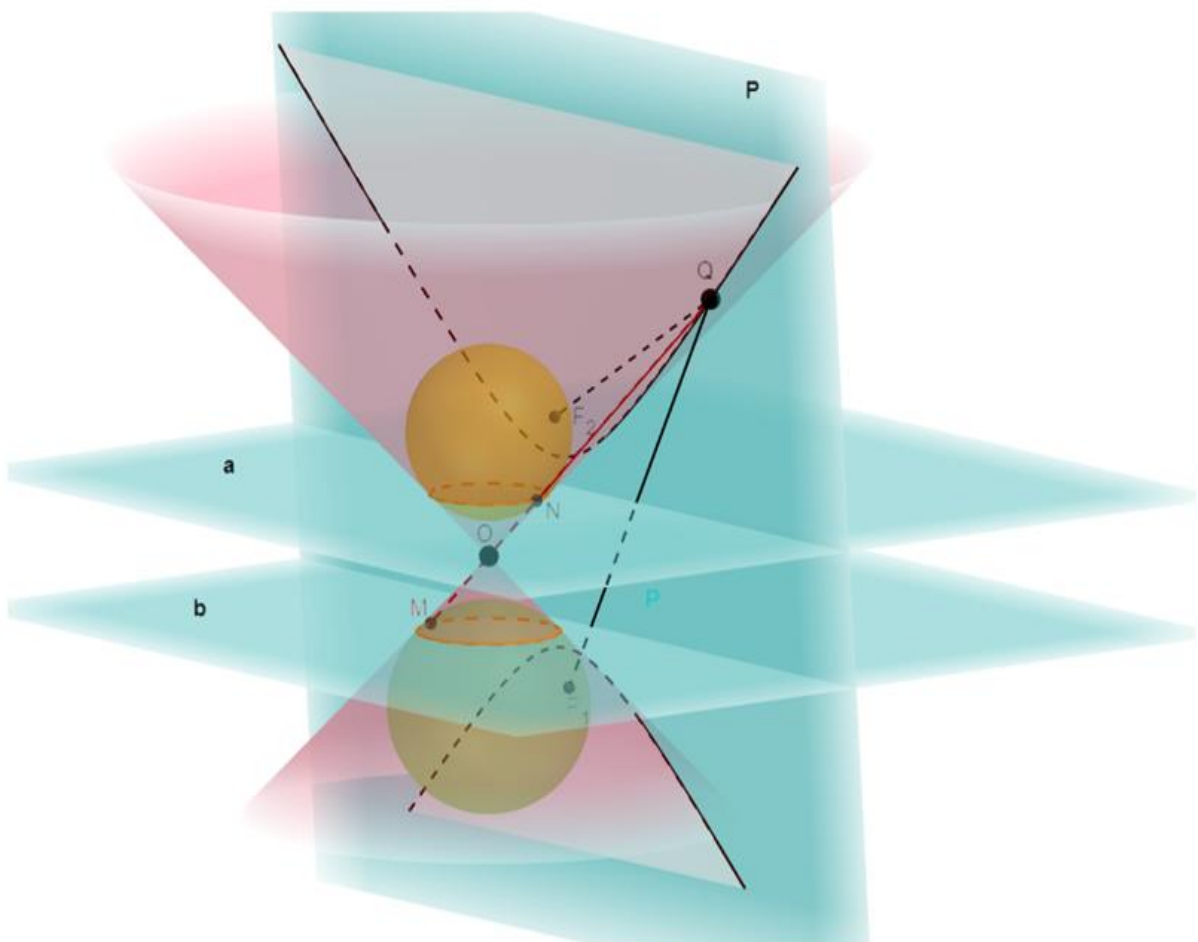
Bevis. Vi antar att ett plan Π skär en kon så att skärningen är en parabel. Inuti konen placerar vi en sfär så att den tangerar planet och konen.

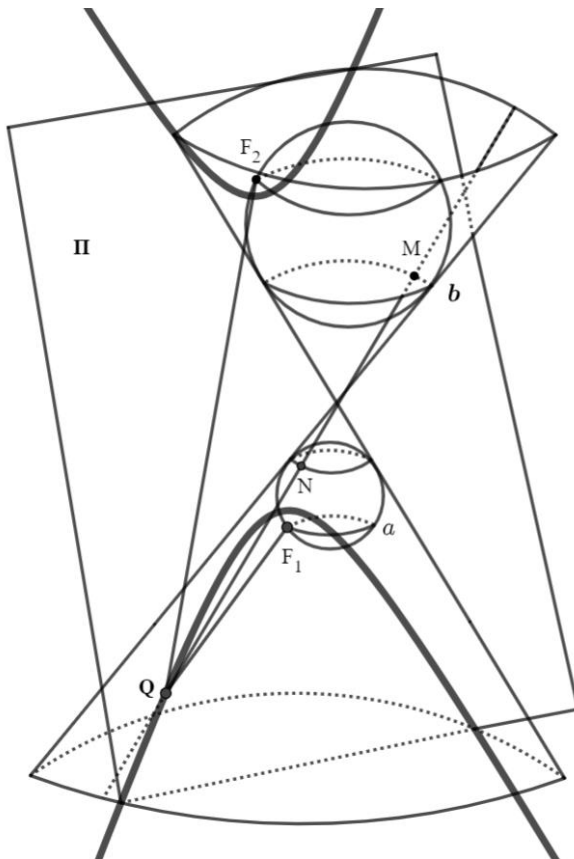
Tangeringspunkterna med planet betecknar vi F . Sfären tangerar konen längs cirkeln (a). Låt P vara en punkt på parabeln och drag en generatris genom den. Beteckna skärningspunkten mellan generatrisen och tangeringscirkel med Q . I den vänstra figuren är P en punkt på parabeln och *Dandelin-sfären*. Tangerar parabelns plan i brännpunkten F . Eftersom PF och PQ är tangenter till sfären så är $|PF| = |PQ|$. I den högra figuren har jag ritat ut punkterna P och Q samt planet genom den cirkel där sfären tangerar konen. Jag har projicerat P rätvinkligt både på detta plan och på styrlinjen och fått punkterna N respektive S . Eftersom PS är parallell med en generatris till konen så bildar PS och PQ

samma vinkel med PN , som är parallell med konens axel. Härav följer att trianglarna ΔPNQ och ΔPVS är kongruenta. Alltså är $|PS| = |PQ| = |PF|$.

Den givna punkt F kallas brännpunkt och den givna linje S är styrlinje. [1,4,6]

Sats 7. Hyperbel är mängden av alla punkter vilkas avstånd till två givna punkter har en konstant skillnad. De två givna punkterna kallas hyperbelns brännpunkter.





Figur17

Bevis. Vi antar att ett plan Π skär en dubbelkon i både konerna så att skärningen är en hyperbel. Inuti varje kon placerar vi en sfär en i över konen b och den andra i nedre konen a båda tangerar planet och konen. Tangeringspunkterna med planet betecknar vi F_1 och F_2 . Sfärerna tangerar konen längs cirklar. Låt Q vara en punkt på hyperbeln och drag en generatris genom den (figur 17).

Beteckna skärningspunkterna mellan generatrisen och tangeringscirklarna med M och N . Eftersom alla tangenter från en punkt till en sfär är lika långa, så gäller att

$$|QN| = |QF_1| \text{ och } |QM| = |QF_2|,$$

alltså är

$$|QF_2| - |QF_1| = |QM| - |QN| = |MN|,$$

vilket är avståndet mellan tangeringscirklarna och oberoende av Q .

Punkterna F_1 och F_2 kallas hyperbelns *brännpunkter* och sfärerna *Dandelinsfärer*. [1,4,6]

Referenslista

[1] Anders Tengstrand, (2004, 321) Åtta kapitel om geometri.

[2] Victor Katz (1998, 900) A History of Mathematics.
Page: 114-125

[3] T. L HEATH, M.A., (1896, 255), APOLLONIUS OF PERGA, TREATISE ON CONIC SECTIONS EDITED IN MODERN NOTATION WITH INTRODUCTIONS INCLUDING AN ESSAY ON THE EARLIER HISTORY OF THE SUBJECT, CAMBRIDGE: AT THE UNIVERSITY PRESS. Page: 180–194.
<https://www.wilbourhall.org/millionbookspdfs/treatiseonconics00apolrich.pdf> Page: 180–194.

[4] W. H. BESANT Sc. D. F.R.S. (1895, 367) CONIC SECTIONS TREATED GEOMETRICALLY, CAMBRIDGE.
<https://www.gutenberg.org/files/29913/29913-pdf.pdf> Page 149- 165 and 204

[5] Figurer: Jag har skapat figurerna med Geogebra. <https://www.geogebra.org/u/karimiaan51>

[6] <https://gachesehid.com/wp-content/uploads/2019/07/34-Conic-Section.pdf> (persiana språk)

[7] Conic section, (2020, 20 September). I Wikipedia. Hämtad 2020-12-14

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section.

[9] <https://www.youtube.com/watch?v=hr8Q8HsISFU&t=7s>.
Besökt: 2020-12-10.

[10] <https://www.youtube.com/watch?v=dQDQLaPW36o&t=1583s>.
Besökt: 2020-12-10.

Vi vill rekommendera nedanstående källor till mer information

[11] Howard D. Curtis, (2014, 768) Orbital Mechanics for Engineering Students. Fourth Edition Sebastian Rene Morales, <https://doi.org/10.1016/C2011-0-69685-1>

[12] Sharma, (2005, 200), Text Book of Conic Section-Discovery.

