SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Enkla kedjebråk och Pells ekvation

av

Christian Håkansson

2021 - No K46

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Enkla kedjebråk och Pells ekvation

Christian Håkansson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Håkan Granath

2021

Enkla kedjebråk och Pells ekvation

Christian Håkansson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Håkan Granath

2021

Sammanfattning:

Kedjebråken har en lång historia som sträcker sig tusentals år bakåt i tiden. Som för de flesta matematiska upptäckter är det svårt att ge en fullständig redogörelse för deras början. Det vi vet med säkerhet är att deras riktiga genombrott skulle dröja till omkring 1500-talets andra hälft och att intresset för dem fortsatte växa under 1600-talet. Flera välkända matematiker har haft stor betydelse för deras utveckling, däribland Leonard Euler, Johan Lambert och Joseph Louis Lagrange. Detta arbete kommer behandla enkla kedjebråk och deras koppling till de reella talen. Några av kedjebråkens viktiga egenskaper formuleras, bevisas och exemplifieras. Kedjebråken kommer slutligen användas för att lösa Pells ekvation.

Abstract:

The long history of continued fractions extends thousands of years back in time. Like most mathematical discoveries it is not easy to give a full account of their beginnings. What we know for certain is that their real breakthrough would not come until the second half of the 16^{th} century with a growing popularity during the 17^{th} century. Several well-known mathematicians have been of great importance for their development, including Leonard Euler, Johan Lambert and Joseph Louis Lagrange. In this thesis we will treat simple continued fractions and their connection to the real numbers. Some of the important properties of continued fractions are formulated, proved, and exemplified. As an application continued fractions will be used to solve Pell´s equation.

Innehåll

1 Inledning

I detta inledande avsnitt ska vi ge en kortare beskrivning av och exempel på vad kedjebråk är. Dessutom formulerar vi några av de viktiga definitioner och notationer som kommer vara användbara i senare avsnitt. Vi ska exempelvis definiera en användbar algoritm för att beräkna kedjebråk. Vidare ger vi en kort introduktion till kedjebråkens långa historia, där vi kommer nämna några viktiga nyckelpersoner och deras bidrag till kedjebråken som teori. Därefter följer en beskrivning av arbetets struktur.

1.1 Vad är kedjebråk?

År 1748 publicerades Leonard Eulers bok ”*Introductio in analysin infinitorum*” [3, kap.18], vilken innehöll en omfattande redogörelse av kedjebråken som teori. Med utgångspunkt från denna bok ska vi nu ge en beskrivning av vad kedjebråk är.

Kedjebråk syftar till bråk, sådana att nämnaren utgörs av en summa bestående av ett heltal och ett bråk, för vilket nämnaren till det bråket i sin tur utgörs av en summa bestående av ett heltal och ett bråk, och så vidare. Denna iterativa process kan antingen avstanna helt eller fortsätta i all oändlighet. Låt oss nu ge ett konkret exempel genom att först betrakta det rationella talet[1] $24/7$. Vi använder divisionsalgoritmen[2] så att vi får en heltalsdel och en restterm, sistnämnda uttryckt som ett rationellt tal. Därefter inverterar vi resttermen och utför division igen på nämnaren som även denna är ett rationellt tal. Genom att upprepa denna process flera gånger får vi således att

$$\frac{24}{7} = 3 + \frac{3}{7} = 3 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}.$$

Det slutliga uttrycket ovan kallas för ett *kedjebråk* och vi säger att talet $24/7$ har *kedjebråksutvecklingen* $3 + 1/(2 + 1/3)$.

Definition 1.1. Uttryck på formen

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 \ + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} \ + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{1.1}$$

där $n \in \mathbb{Z}^+$och $b_i = 1$ för $i = 1,2,3, \dots ,n - 1$ samt $a_1 \in \mathbb{Z}$ och $a_2, a_3, a_4, \dots, n, \in \mathbb{Z}^+$ kallas för *ändliga enkla kedjebråk.*

Definition 1.2. Uttryck på formen

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + . \ . \ .}}} \tag{1.2}$$

där $b_i = 1$ för $i = 1,2,3, \dots,$ och $a_1 \in \mathbb{Z}$ och $a_2, a_3, a_4, \dots, \in \mathbb{Z}^+$ kallas för *oändliga enkla kedjebråk.*

[1] Mängden av rationella tal är $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z}\ och\ b \neq 0\right\}$.

[2] Givet två heltal a och b, för vilket $b \neq 0$, finns det två entydigt bestämda heltal q och r sådana att $a = bq + r$ där $0 \leq r < |b|$.

Definition 1.3. Uttryck på formen

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \ . \ . \ .}}} \tag{1.3}$$

kallas för *generaliserade kedjebråk* där $a_1, a_2, a_3, \ldots$, respektive $b_1, b_2, b_3, \ldots$, i allmänhet kan vara vilka reella eller komplexa tal som helst. Antalet sådana termer kan vara antingen ändligt eller oändligt.

I detta arbete ska vi avgränsa oss till enkla kedjebråk och vi kommer se att oändliga enkla kedjebråk alltid är meningsfulla när vi behandlar konvergens. Oändliga enkla kedjebråk kommer visa sig vara viktiga i approximation av irrationella tal med rationella. I det inledande exemplet har vi sett att talet $24/7$ har en förhållandevis kort kedjebråksutveckling, men vi kommer se exempel på tal som har en mycket längre utveckling. För att spara utrymme inför vi därför beteckningarna

$$[a_1; a_2, a_3, \cdots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}, \tag{1.4}$$

respektive

$$[a_1; a_2, a_3, \cdots] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}, \tag{1.5}$$

där talen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kallas för kedjebråkets *partiella kvoter*.

1.2 Kedjebråksalgoritmen

Vi ska nu definiera en algoritm för att beräkna kedjebråk och som bygger på [2, kap. 4.0].

Definition 1.4. Låt $\beta = \beta_1$ vara ett reellt tal. Vi kan uttrycka β_1 på formen

$$\beta_1 = a_1 + \frac{1}{\beta_2},$$

där $a_1 = [\beta_1]$ och β_2 är ett reellt tal. Beteckningen $[\beta_1]$ betyder *heltalsdelen* av β_1, så med andra ord är a_1 det största heltal som är mindre än eller lika med β_1. Fortsätter vi på analogt sätt för β_2 och så vidare i säg n steg får vi att

$$\beta_2 = a_2 + \frac{1}{\beta_3},$$

där $a_2 = [\beta_2]$,

$$\vdots$$

$$\beta_n = a_n + \frac{1}{\beta_{n+1}},$$

där $a_n = [\beta_n]$.

Talet β kan därefter uttryckas på formen

$$\beta = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\beta_n}}} = [a_1, a_2, \cdots, \beta_n],$$

där β_n är ett reellt tal. Om β_n är ett heltal, så avstannar processen och β är rationellt. Om inget β_n är heltal så fortsätter processen och β är irrationellt.

1.3 Kedjebråkens historia

Detta avsnitt utgår från boken *History of Continued Fractions and Padé Approximants* [1] och ger en kortare introduktion till kedjebråkens historia.

Kedjebråken har en lång historia och som med många andra matematiska upptäcker finns det inget enkelt sätt att ge en fullständig redogörelse för deras ursprung. Vi finner spår av kedjebråken i exempel som sträcker sig tusentals år bakåt i tiden, och som matematiskt koncept förekommer de i både arabiska och grekiska matematiska skrifter. Det allra första och kanske viktigaste steget i utvecklingen av kedjebråken finner vi i det antika Grekland, omkring 300 f.Kr i och med Euklides algoritm[3], som algebraiskt kan konverteras och uttryckas som ett ändligt kedjebråk. Omkring 550 e.Kr använde den indiske astronomen och matematikern Aryabhata kedjebråken i ett tidigt försök att hitta den allmänna lösningen till en linjär obestämd[4] ekvation. Långt senare, under tidigt 1200-tal skrev den bereste italienske matematikern Leonardo Fibonacci boken *"Liber abaci"*, där han bland annat gjorde ett första försök till en generaliserad definition av kedjebråken.

Kedjebråkens riktiga genombrott skulle dröja till omkring 1500-talets andra hälft, i den italienska staden Bologna, då matematikern Rafael Bombelli visade en metod för att utveckla kvadratroten ur 13 och som med modern notation är helt ekvivalent med dess oändliga kedjebråksutveckling. Han baserade sitt arbete på bland annat Fibonacci, men också den kända persiske matematikern Al-Khowarizmi. Metoden användes också av den italienske matematikern och professorn Pietro Antonio Cataldi, i utvecklingen av kvadratroten ur 18. Cataldi var en av de första att utveckla kedjebråken som teori, den första att utveckla ett formellt symbolspråk för generaliserade kedjebråk och han visade också några av deras egenskaper.

Intresset för kedjebråken fortsatte växa under 1600-talet tack vare de två engelska matematikerna William Brouncker och John Wallis. Wallis var den första att använda den engelska benämningen ”continued fractions” och han använde kedjebråk för att exempelvis approximera kvoter med stora täljare och nämnare. I sitt arbete med de generaliserade kedjebråken visade han flera viktiga egenskaper, bland annat för konvergenter, ett begrepp vi ska redogöra för i avsnitt 2.3. År 1655 publicerades Wallis arbete ”Arithmetica infinitorum” där Brouncker omnämns med en metod för att kedjebråksutveckla talet $4/\pi$ och som utgick från Wallis tidigare arbete med att utveckla $4/\pi$ som en oändlig produkt.

Två år senare blev Brouncker och Wallis, vilket hörde tiden till, utmanade av den franske matematikern Pierre de Fermat att lösa den speciella diofantiska ekvationen $x^2 - dy^2 = 1$, för vilka x, y är heltal och d är ett givet heltal. Vi ska återkomma till denna ekvation i avsnitt 4. Brouncker använde också kedjebråk för att visa de tio första siffrorna i utvecklingen av talet π, vilket också intresserade den nederländske fysikern Christiaan Huygens, som senare använde kedjebråk i syfte att finna en bra utformning av kugghjul. Han blev den första att hitta ett praktiskt tillämpningsområde för kedjebråk i och med sin konstruktion av ett planetarium år 1682.

Under 1700-talet lades grunden för kedjebråken som modern teori, tack vare flera framstående matematiker, däribland Leonard Euler, Johan Heinrich Lambert och Joseph Louis Lagrange. År 1737 publicerades Eulers första arbete om kedjebråken och elva år senare hans bok "*Introductio in analysin infinitorum"*, vilken innehöll en ännu mer omfattande redogörelse för deras teori. Euler visade

[3] Euklides algoritm är en beräkningsmetod för att finna största gemensamma delare till två heltal a och b.
[4] En linjär ekvation med fler än en lösning kallas obestämd.

exempelvis att varje rationellt tal kan uttryckas som ett ändligt kedjebråk och att varje irrationellt tal har en oändlig kedjebråksutveckling. Euler uppmärksammade också att kedjebråken var viktiga i teorin för approximation av reella tal med rationella. Han härledde också kedjebråksutvecklingen av talet e och studerade även den ekvation som Fermat tidigare utmanat Brouncker och Wallis med. Euler tillskrev ekvationen den engelske matematikern John Pell, som själv aldrig arbetade med den nämnvärt. Ekvationen kallas därför allmänt för Pells ekvation.

Kollegan Lambert kedjebråksutvecklade bland annat funktionerna $\tan x$ samt $e^x + 1$ och visade att om x är ett nollskilt rationellt tal, så är $\tan x$ respektive e^x irrationella. Genom att visa irrationaliteten hos $\tan x$ kunde han också bevisa att talet π är irrationellt. Lagrange studerade också Pells ekvation och år 1766 gav han det första beviset för att ekvationen alltid har lösningar. Fyra år senare bevisade han även att kedjebråksutvecklingen av kvadratiska irrationella tal är periodiska. Under 1700-talets andra hälft publicerades de första matematiska uppslagsverken, däribland det mycket kända *"L'Encyclopedie"*, vilken innehöll ett avsnitt om kedjebråk. Spridningen av dessa uppslagsverk och annan matematisk litteratur bidrog i sin tur till kedjebråkens utbredning och över tid fick allt fler matematiker kunskap inom området. Under 1800-talet blev kedjebråk ett populärt ämne och matematiker världen över bidrog till dess utveckling och vidare tillämpning inom flera matematiska men också fysikaliska problem, vilket också Brezinski [1, kap.5.] ger många intressanta exempel på, men som inte ryms i detta avsnitt.

Kedjebråk ger oss ett alternativt sätt att representera reella tal och som i någon mening kan anses mer naturligt än motsvarande representation med decimaltal. Genom historien har kedjebråken och deras egenskaper visat sig användbara inom en rad olika områden. De utgör ett utmärkt verktyg i talteorin där de bland annat kan användas för att approximera irrationella tal med rationella och de spelar också en viktig roll i lösningen av en del diofantiska ekvationer, däribland Pells Ekvation. Intresset för kedjebråk har förstås varierat med tiden men de är fortfarande aktuella på sina håll, även i modern forskning. Kedjebråk som analytisk teori används bland annat inom det datorvetenskapliga området, i automat-teori och elektronik [1].

1.4 Arbetets struktur

Detta arbete kommer behandla enkla kedjebråk och Pells ekvation. Arbetet utgörs av grundläggande definitioner, begrepp och satser som sedan bevisas, följt av exempel som återanvänds i flera avsnitt. Arbetet är indelat i tre delar. I den första delen (avsnitt 2) ska vi redogöra för några av kedjebråkens viktiga egenskaper. Vi ska studera kopplingen mellan kedjebråk och de reella talen samt redogöra för begreppet konvergenter. Vidare ska vi också behandla konvergens och visa att kedjebråken är viktiga i teorin om approximation av reella tal med rationella. I den andra delen (avsnitt 3) ska vi bekanta oss med periodiska kedjebråksutvecklingar. Vi ska studera periodiska och rent periodiska kedjebråk och sedan redogöra för deras koppling till kvadratiska irrationella tal och reducerade kvadratiska irrationella tal. I den tredje delen (avsnitt 4) ska vi studera hur kedjebråk kan användas för att lösa Pells ekvation.

2. Kedjebråk och några egenskaper

I detta avsnitt ska vi titta närmare på kopplingen mellan kedjebråk och de reella talen samt redogöra för begreppet konvergenter som vi kommer ha användning av i efterföljande avsnitt. Avsnittet är indelat i fyra delavsnitt som i huvudsak bygger på böckerna ”*Continued fractions*” [5] och ”*An introduction to the theory of numbers*” [4]. Vi inleder med ett avsnitt om rationella tal och deras koppling till kedjebråk.

2.1 Ändliga kedjebråk och rationella tal

Vi ska nu visa att rationella tal kan uttryckas som ändliga enkla kedjebråk och att de har en nära koppling till Euklides algoritm. Sats och bevis som följer hämtas från [5, kap 1] och delen om Euklides algoritm bygger på [1, kap 1.1].

Sats 2.1. *Varje rationellt tal α kan uttryckas som ett enkelt ändligt kedjebråk. Omvänt gäller också att varje enkelt ändligt kedjebråk är ett rationellt tal.*

Bevis. Låt $\alpha = a/b$ vara ett rationellt tal där a och b är heltal och $b > 0$. Vi tillämpar nu kedjebråksalgoritmen på α. Vi börjar med att dividera a med b och skriver att

$$\alpha = \frac{a}{b} = a_1 + \frac{r_1}{b}, \qquad 0 \leq r_1 < b. \tag{2.1}$$

Om resttermen $r_1 = 0$ får vi att kedjebråksutvecklingen av talet α är heltalsdelen a_1. Om resttermen $r_1 \neq 0$ skriver vi (2.1) på formen

$$\alpha = \frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}, \qquad 0 < r_1 < b. \tag{2.2}$$

Vi dividerar talet b med r_1 och får att

$$\frac{b}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \qquad 0 \leq r_2 < r_1. \tag{2.3}$$

Om $r_2 = 0$ så avstannar processen och vi får att kedjebråksutvecklingen av α är

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2} = [a_1; a_2]. \tag{2.4}$$

Om talet $r_2 \neq 0$ så skriver vi (2.3) på formen

$$\frac{b}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, \qquad 0 < r_2 < r_1. \tag{2.5}$$

Vi dividerar r_1 med r_2 och får att

$$\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2}, \qquad 0 \leq r_3 < r_2, \tag{2.6}$$

där vi fortsätter beräkningen om $r_3 \neq 0$. Vi drar slutsatsen att eftersom $r_1, r_2, r_3, \ldots \in \mathbb{Z}^+$[5] och $b > r_1 > r_2 > r_3$, bildar en avtagande sekvens, är det klart att vi finner ett n:te tal $r_n = 0$, för vilket processen avstannar. Vi kan därmed skriva det rationella talet α på formen

[5] *Mängden av positiva heltal* $\mathbb{Z}^+ = \{1,2, \ldots\}$

$$\alpha = \frac{a}{b} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_1}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_2}{r_1}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{r_3}{r_2}}}$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{r_n}{r_{n-1}}}}}}$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n].$$

Vi har visat att varje rationellt tal $\alpha = a/b$ där $b > 0$ kan uttryckas som ett *ändligt enkelt kedjebråk.* Att omvändningen gäller är uppenbart. ■

Lägg märke till att sättet som vi beräknar de partiella kvoterna på medför att kedjebråksutvecklingen av det rationella talet α till synes framstår unik. Dock ska sägas att kedjebråksutvecklingen av ett rationellt tal α faktiskt kan uttryckas på två olika sätt, eftersom den sista partiella kvoten a_n också kan skrivas på formen $a_n = (a_n - 1) + 1/1$ där $a_n > 1$ medför att

$$\alpha = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1,1].$$

Om $a_n = 1$ så kan vi skriva att $a_{n-1} + 1/a_n = a_{n-1} + 1$, vilket medför att

$$\alpha = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_{n-1} + 1].$$

Därmed kan alltså ett ändligt enkelt kedjebråk alltid uttryckas både med ett udda och ett jämnt antal partiella kvoter.

Euklides algoritm och kedjebråk

Euklides algoritm som tillskrivits den grekiske matematikern Euklides (ca. 306 f.Kr. - ca. 283 f.Kr) kan i någon mening anses utgöra en början på kedjebråkens historia. Kedjebråken har nämligen en nära koppling till Euklides algoritm.

Låt a och b vara två positiva heltal för vilket $a > b$. Inför sedan $r_1 = a$ och $r_2 = b$. I syfte att finna största gemensamma delare till talen a och b, utför vi Euklides algoritm. Vi får en sekvens av ekvationer på formen

$$r_1 = r_2 a_1 + r_3,$$

$$r_2 = r_3 a_2 + r_4,$$

$$\vdots$$

$$r_{n-1} = r_n a_{n-1} + r_{n+1},$$

$$r_n = r_{n+1} a_n + r_{n+2},$$

för vilka $r_1 > r_2 > \cdots > r_{n-1} > r_n > r_{n+1} > r_{n+2} = 0$ och $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{N}$.

Vidare kan ekvationerna i sekvensen ovan också skrivas på formen

$$\frac{r_1}{r_2} = a_1 + \frac{r_3}{r_2} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}},$$

$$\frac{r_2}{r_3} = a_2 + \frac{r_4}{r_3} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_4}},$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_{n-1} + \frac{r_{n+1}}{r_n} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_n}{r_{n+1}}},$$

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = a_n + \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}} = a_n + 0,$$

och vi får att

$$\frac{a}{b} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 \ + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} \ + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

där det slutliga uttrycket är ett ändligt enkelt kedjebråk. Under Euklides tid hade matematiken sin grund i geometrin. Talen a och b motsvarade därför längdsegment och därmed uttryckte inte Euklides algoritmen på det sätt vi gör idag. Det finns inte heller något som talar för att han använde kedjebråk [1, kap.1.1, s.4].

2.2 Oändliga kedjebråk och irrationella tal

I detta avsnitt ska vi titta närmare på kopplingen mellan kedjebråk och irrationella tal och vi bygger avsnittet på [5, kap.3]. I avsnitt 2.1 visade vi att kedjebråksutvecklingen av ett rationellt tal är ändlig. Alltså kan varje rationellt tal uttryckas som ett ändligt enkelt kedjebråk. Om vi på motsvarande sätt kedjebråksutvecklar ett irrationellt tal, vad kan vi då dra för slutsatser?

Låt β vara ett irrationellt tal. Vi sätter att $\beta_1 = \beta$ och tillämpar kedjebråksalgoritmen på β_1. Vi kan uttrycka β_1 på formen $\beta_1 = a_1 + (\beta_1 - a_1)$ där a_1 är det största heltal som är mindre än β_1, och följaktligen talet $(\beta_1 - a_1) < 1$ är ett irrationellt tal. Därefter uttrycker vi $(\beta_1 - a_1)$ på formen

$$(\beta_1 - a_1) = \frac{1}{\frac{1}{(\beta_1 - a_1)}} = \frac{1}{\beta_2},$$

där $\beta_2 = 1/(\beta_1 - a_1)$ är ett irrationellt tal som är större än 1. Vi kan nu skriva talet β_1 på formen

$$\beta_1 = a_1 + \frac{1}{\beta_2},$$

där $a_1 = [\beta_1]$ och $\beta_2 > 1$. Nu har vi ett uttryck för β_1 som liknar (2.4) i avsnitt 2.1.

Upprepas beräkningsprocessen fås

$$\beta_2 = a_2 + (\beta_2 - a_2) = a_2 + \frac{1}{\frac{1}{(\beta_2 - a_2)}} = a_2 + \frac{1}{\beta_3},$$

där $a_2 = [\beta_2]$ och $\beta_3 > 1$,

$$\beta_3 = a_3 + (\beta_3 - a_3) = a_3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{(\beta_3 - a_3)}} = a_3 + \frac{1}{\beta_4},$$

där $a_3 = [\beta_3]$ och $\beta_4 > 1$,

$$\vdots$$

$$\beta_{n-1} = a_{n-1} + (\beta_{n-1} - a_{n-1}) = a_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{(\beta_{n-1} - a_{n-1})}} = a_{n-1} + \frac{1}{\beta_n},$$

där $a_{n-1} = [\beta_{n-1}]$ och $\beta_n > 1$.

Kedjebråksutvecklingen av ett irrationellt tal β ges därmed av

$$\beta = \beta_1 = a_1 + \frac{1}{\beta_2} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\beta_3}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\beta_4}}} = \cdots \tag{2.7}$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\beta_n}}}},$$

där $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, är heltal och $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$, är irrationella tal som är större än 1. Vidare kallar vi talen β_i med $i \geq 1$ för de *fullständiga kvoterna* i kedjebråksutvecklingen av β. De tre punkterna i första raden (2.7) indikerar att vi fortsätter utvecklingen på samma sätt som tidigare. I avsnitt 2.1 såg vi att varje rationellt tal α kan uttryckas som ett ändligt enkelt kedjebråk. Antag att talet β kan uttryckas som ett ändligt enkelt kedjebråk, nämligen på formen $\beta = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$.

Enligt sats 2.1 är då β ett rationellt tal, vilket strider mot förutsättningen att ett irrationellt tal inte kan skrivas som en kvot av två heltal. Dessutom måste vi finna ett n:te heltal $a_n = \beta_n$ för att beräkningsprocessen ska ta slut, vilket inte är möjligt eftersom varje fullständig kvot β_i är ett irrationellt tal. Kedjebråksutvecklingen av ett irrationellt tal β är därmed oändlig och vi kan till β associera det oändliga kedjebråket $[a_1; a_2, a_3, \ldots]$. Att kedjebråket faktiskt representerar β kommer vi se i avsnitt 2.4, när vi behandlar konvergens. Vi ger nu ett enkelt exempel som illustrerar ovan resonemang.

Exempel 2.1 Kedjebråksutveckla det irrationella talet $\beta_1 = \sqrt{2}$.

Vi tillämpar kedjebråksalgoritmen på β_1:

$$\beta_1 = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2} - 1}} = 1 + \frac{1}{\beta_2},$$

där $1 = [\beta_1]$ och $\beta_2 = 1/\left(\sqrt{2} - 1\right) > 1$. Vidare kan β_2 skrivas på formen

$$\beta_2 = \frac{1}{\left(\sqrt{2} - 1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{2} - 1\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{2} + 1\right)} = \sqrt{2} + 1,$$

och vi får att

$$\beta_2 = (\sqrt{2}+1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 2 + \frac{1}{\beta_3},$$

där $2 = [\beta_2]$ och $\beta_3 = \sqrt{2}+1 > 1$.

Så i fortsättningen är alla partiella kvoter $a_i = 2$ och alla fullständiga kvoter $\beta_i = \sqrt{2}+1$ där $i \geq 2$. Talet $\sqrt{2}$ kan alltså skrivas

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = \cdots,$$

där de tre punkterna i sista ledet indikerar att utvecklingen fortsätter på samma sätt i all oändlighet. Till talet $\sqrt{2}$ kan vi associera det oändliga kedjebråket $[1; 2,2, \dots]$, enligt tidigare resonemang.

2.3 Konvergenter

Vi ska nu redogöra för begreppet konvergenter och några tillhörande viktiga egenskaper som kommer visa sig användbara i kommande avsnitt. De definitioner, satser och bevis som följer bygger i huvudsak på [5, kap 1.5-1.6,] och [5, kap 3.4]. Vi börjar med att definiera begreppet konvergenter.

Definition 2.1

Betrakta ett oändligt enkelt kedjebråk på formen $[a_1; a_2, a_3, \dots]$ och definiera därefter talen $C_i = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_i]$ där $i = 1, 2, 3, \dots$. Talen C_i kallas för *konvergenter* tillhörande kedjebråket.

Konvergenten C_1 kan uttryckas på formen

$$C_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{x_1}{y_1},$$

där $x_1 = a_1$ och $y_1 = 1$. Vidare är konvergenten

$$C_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{x_2}{y_2},$$

där $x_2 = a_1 a_2 + 1$ och $y_2 = a_2$ och konvergenten C_3 kan i sin tur skrivas

$$C_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = a_1 + \frac{a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_2 a_3 + 1} = \frac{x_3}{y_3},$$

där $x_3 = a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1 = a_3 x_2 + x_1$ och $y_3 = a_2 a_3 + 1 = a_3 y_2 + y_1$.

Fortsätter vi på samma sätt för efterföljande konvergenter får vi följande sats.

Sats 2.3. *Låt x_i och y_i vara talföljder där de första värdena ges av*

$$x_{-1} = 0, \qquad y_{-1} = 1, \qquad x_0 = 1, \qquad y_0 = 0,$$

och

$$x_i = a_i x_{i-1} + x_{i-2} \qquad \text{och} \qquad y_i = a_i y_{i-1} + y_{i-2}, \tag{2.8}$$

för $i \geq 1$. Då gäller att varje konvergent

$$C_i = x_i / y_i. \tag{2.9}$$

Bevis. Vi visar detta med hjälp av induktion. Vi börjar med basfallet, för vilket $i = 1$ ger att

$$C_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{a_1 x_0 + x_{-1}}{a_1 y_0 + y_{-1}} = \frac{x_1}{y_1}.$$

Så konvergenten $C_1 = x_1/y_1$ satisfierar ekvationerna (2.8).

Vårt induktionsantagande är nu att det till och med något $i = k \geq 1$ gäller att konvergenten

$$C_k = \frac{x_k}{y_k} = \frac{a_k x_{k-1} + x_{k-2}}{a_k y_{k-1} + y_{k-2}}.$$

Vi visar att det då även gäller för $i = k + 1$ att konvergenten

$$C_{k+1} = \frac{a_{k+1} x_k + x_{k-1}}{a_{k+1} y_k + y_{k-1}} = \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}}.$$

Konvergenten C_k ges av

$$C_k = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}} = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k] = \frac{a_k x_{k-1} + x_{k-2}}{a_k y_{k-1} + y_{k-2}}. \qquad (2.10)$$

Vidare är konvergenten

$$C_{k+1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}} = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}].$$

Om vi använder ekvation (2.10), där vi kan betrakta a_k som en variabel, får vi att

$$C_{k+1} = \left[a_1; a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, \left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)\right] = \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) x_{n-1} + x_{n-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) y_{n-1} + y_{n-2}}.$$

Vi multiplicerar täljare och nämnare med a_{k+1} och får att

$$\frac{(a_{k+1} a_k + 1) x_{k-1} + a_{k+1} x_{k-2}}{(a_{k+1} a_k + 1) \mathrm{y}_{k-1} + a_{k+1} \mathrm{y}_{k-2}} = \frac{a_{k+1}(a_k x_{k-1} + x_{k-2}) + x_{k-1}}{a_{k+1}(a_k y_{k-1} + y_{k-2}) + y_{k-1}}.$$

Använd sedan att $x_k = a_k x_{k-1} + x_{k-2}$ samt $y_k = a_k y_{k-1} + y_{k-2}$ och vi får att

$$\frac{a_{k+1}(a_k x_{k-1} + x_{k-2}) + x_{k-1}}{a_{k+1}(a_k y_{k-1} + y_{k-2}) + y_{k-1}} = \frac{a_{k+1} x_k + x_{k-1}}{a_{k+1} y_k + y_{k-1}} = \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}}.$$

Därmed har vi med hjälp av induktionsprincipen bevisat satsen.

Om kedjebråket i stället är ändligt, nämligen på formen $[a_1; a_2, \dots, a_n]$, så gäller (2.9) för $1 \leq i \leq n$. ■

Vi ger nu ett enkelt exempel.

Exempel 2.2. Bestäm de första sex konvergenterna till kedjebråket $[1; 2,2,2, \dots]$, som vi tidigare associerade med kedjebråksutvecklingen av talet $\sqrt{2}$.

Vi beräknar x_i och y_i genom att använda de rekursiva ekvationerna i sats 2.3. Vi får först att

$$x_1 = a_1 x_0 + x_{-1} = 1 \cdot 1 + 0 = 1, \qquad y_1 = a_1 y_0 + y_{-1} = 1 \cdot 0 + 1 = 1,$$

följt av

$$x_2 = a_2 x_1 + x_0 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \qquad y_2 = a_2 y_1 + y_0 = 2 \cdot 1 + 0 = 2,$$

och sedan

$$x_3 = a_3 x_2 + x_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, \qquad y_3 = a_3 y_2 + y_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Fortsätter vi på samma sätt för $x_4, x_5, \dots$, respektive $y_4, y_5, \dots$, får vi alltså för $n \geq 1$ att $x_{n+1} = 2 \cdot x_n + x_{n-1}$ och $y_{n+1} = 2 \cdot y_n + y_{n-1}$, vilket innebär att vi enkelt får fler värden. De första sex konvergenterna till kedjebråket $[1; 2,2,2, \dots]$ ges alltså av

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = \frac{3}{2}, \qquad C_3 = \frac{7}{5}, \quad C_4 = \frac{17}{12}, \qquad C_5 = \frac{41}{29}, \qquad C_6 = \frac{99}{70}.$$

Vi ska återkomma till konvergenterna i exempel 2.2 lite senare. Med hjälp av sats 2.3 kan också följande sats formuleras.

Sats 2.4. *Om* x_i, y_i är som i *sats 2.3*, då gäller att

$$x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i = (-1)^i \tag{2.11}$$

där $i = 0,1,2, \dots$,

Bevis: För $i = 0$ respektive 1 får vi att

$$x_0 y_{-1} - x_{-1} y_0 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \ = 1 = (-1)^0,$$

$$x_1 y_0 - x_0 y_1 = a_1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 = (-1)^1.$$

Vi gör antagandet att (2.11) gäller för något $i = k \geq 1$. Enligt sats 2.3 har vi för $i = k + 1$ att $x_{k+1} = a_{k+1} x_k + x_{k-1}$ och $y_{k+1} = a_{k+1} y_k + y_{k-1}$. Vi kan därför uttrycka $x_{k+1} y_k - x_k y_{k+1}$ på formen

$$x_{k+1} y_k - x_k y_{k+1} = (a_{k+1} x_k + x_{k-1}) y_k - x_k (a_{k+1} y_k + y_{k-1})$$

$$= x_{k-1} y_k - x_k y_{k-1} = (-1) \cdot (x_k y_{k-1} - x_{k-1} y_k)$$

$$= (-1) \cdot (-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Vi har alltså visat att om $x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i = (-1)^i$ gäller för $i = k$ så gäller det även för $i = k + 1$. Så med hjälp av induktionsprinicipen har vi därmed bevisat satsen.■

Med utgångspunkt från sats. 2.4 kan vi också visa att varje par av tal x_i, y_i tillhörande konvergenten C_i inte har några gemensamma delare som är större än 1.

Följdsats 2.5. (Relativt prima). *För varje konvergent* $C_i = x_i / y_i$, *där* x_i, y_i *är som i sats 2.3, gäller för* $i \geq 1$ *att* $sgd(x_i, y_i) = 1$.

Bevis: Låt $s = sgd(x_i, y_i)$. Eftersom $x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i = (-1)^i = \pm 1$, så gäller att s också är en delare till $(-1)^i$, som endast har delarna ± 1. Alltså är $sgd(x_i, y_i) = 1$. ■

I avsnitt 2.1 visade vi att varje rationellt tal α kan uttryckas som ett ändligt enkelt kedjebråk på formen $\alpha = [a_1; a_2, \dots, a_n]$. Låt nu β vara ett irrationellt tal med beteckningar som i avsnitt 2.2 och som på motsvarande sätt kan uttryckas på formen

$$\beta = [a_1; a_2, \dots, a_{n-1}, \beta_n]$$

där $n \geq 1$ och $a_1, a_2, \dots$, är heltal och β_n är ett irrationellt tal.

Sats 2.6 *För varje* $i \geq 1$, *gäller att*

$$[a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \beta_i] = \frac{\beta_i x_{i-1} + x_{i-2}}{\beta_i y_{i-1} + y_{i-2}} \tag{2.12}$$

där talen $x_{-1}, x_0, x_1, \dots$, *och* $y_{-1}, y_0, y_1, \dots$, *är som i sats 2.3.*

Bevis: Beviset görs på samma sätt som i sats 2.3 för konvergenter. För $i = 1$ får vi att

$$\frac{\beta_1 x_0 + x_{-1}}{\beta_1 y_0 + y_{-1}} = \frac{\beta_1 \cdot 1 + 0}{\beta_1 \cdot 0 + 1} = \beta_1,$$

där $\beta_1 = \beta$ enligt (2.7). Så (2.12) gäller i fallet $i = 1$.

Vårt induktionsantagande är att (2.12) gäller för något $i = n \geq 1$. Vi visar att det då även gäller för $i = n + 1$ att

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, \beta_{n+1}] = \frac{\beta_{n+1} x_n + x_{n-1}}{\beta_{n+1} y_n + y_{n-1}}.$$

Eftersom $\beta_n = a_n + 1/\beta_{n+1}$ får vi att

$$\beta = [a_1; a_2, \dots, a_{n-1}, \beta_n] = \left[a_1; a_2, \dots, a_{n-1}, \left(a_n \ + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right]$$

$$= \frac{\left(a_n \ + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) x_{n-1} + x_{n-2}}{\left(a_n \ + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) y_{n-1} + y_{n-2}} = \frac{\beta_{n+1}(a_n x_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{\beta_{n+1}(a_n y_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} = \frac{\beta_{n+1} x_n + x_{n-1}}{\beta_{n+1} y_n + y_{n-1}}$$

och med hjälp av induktionsprincipen är därmed satsen bevisad. ■

2.4 Konvergens

Vi ska nu fortsätta behandla konvergenter tillhörande oändliga enkla kedjebråk. De satser, definitioner och bevis som används bygger på [5, kap 3.4,], [5, kap 3.6] samt [7, avsnitt 3] och [4, kap 7.3]. I avsnitt 2.3 bestämde vi de första sex konvergenterna tillhörande kedjebråket $[1; 2,2,2, \dots]$ som vi associerade med talet $\sqrt{2}$.

Låt oss åter betrakta dessa konvergenter. Vi skriver ut deras decimalform:

$$C_1 = [1] = 1 < \sqrt{2} \approx 1.41421356$$
$$C_2 = [1; 2] = \frac{3}{2} = 1.5 > \sqrt{2} \approx 1.41421356$$
$$C_3 = [1; 2,2] = \frac{7}{5} = 1.4 < \sqrt{2} \approx 1.41421356$$
$$C_4 = [1; 2,2,2] = \frac{17}{12} \approx 1.41666667 > \sqrt{2} \approx 1.41421356$$
$$C_5 = [1; 2,2,2,2] = \frac{41}{29} \approx 1.41379310 < \sqrt{2} \approx 1.41421356$$
$$C_6 = [1; 2,2,2,2,2] = \frac{99}{70} \approx 1.41428571 > \sqrt{2} \approx 1.41421356$$

Vi lägger nu märke till att konvergenterna med udda respektive jämnt index uppvisar intressanta mönster. Konvergenterna med udda index antar allt större värden som alla är mindre än $\sqrt{2}$, medan konvergenterna med jämnt index antar allt mindre värden som alla är större än $\sqrt{2}$. Låt oss undersöka dessa mönster närmare genom att betrakta det allmänna fallet, nämligen ett oändligt enkelt kedjebråk $[a_1; a_2, a_3, \dots]$ med tillhörande konvergenter $C_n = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_n]$ där $n \geq 1$.

Med utgångspunkt från sats 2.3 och sats 2.4 ska vi först studera differensen mellan två konvergenter.

Sats 2.7 *a) För $n \geq 2$ ges differensen mellan konvergenterna C_n och C_{n-1} av*

$$C_n - C_{n-1} = \frac{(-1)^n}{y_n y_{n-1}}, \tag{2.13}$$

och b) för $n \geq 3$ ges differensen mellan konvergenterna C_n och C_{n-2} av

$$C_n - C_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-1}}{y_n y_{n-2}}. \tag{2.14}$$

Bevis:
a). Enligt sats 2.4. har vi för $i = n \geq 2$ att $x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = (-1)^n$. Vi dividerar båda sidor med $y_n y_{n-1}$ och får att

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{y_n y_{n-1}},$$

där $x_n / y_n = C_n$ och $x_{n-1}/y_{n-1} = C_{n-1}$ och vi får därmed att

$$C_n - C_{n-1} = \frac{(-1)^n}{y_n y_{n-1}}. \qquad \blacksquare$$

b) Antag att $n \geq 3$. Vi kan uttrycka $C_n - C_{n-2}$ på formen

$$C_n - C_{n-2} = \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n-2}}{y_{n-2}} = \frac{x_n y_{n-2} - y_n x_{n-2}}{y_n y_{n-2}},$$

där $x_n = a_n x_{n-1} + x_{n-2}$ och $y_n = a_n y_{n-1} + y_{n-2}$ vilket ger

$$\frac{x_n y_{n-2} - y_n x_{n-2}}{y_n y_{n-2}} = \frac{(a_n\, x_{n-1} + x_{n-2}) y_{n-2} - (a_n\, y_{n-1} + y_{n-2}) x_{n-2}}{y_n y_{n-2}}$$

$$= \frac{a_n (x_{n-1} y_{n-2} - x_{n-2} y_{n-1})}{y_n y_{n-2}}.$$

Enligt sats 2.4 har vi för $i = n - 1$ att $x_{n-1} y_{n-2} - x_{n-2} y_{n-1} = (-1)^{n-1}$, vilket medför att

$$\frac{a_n (x_{n-1} y_{n-2} - x_{n-2} y_{n-1})}{y_n y_{n-2}} = \frac{a_n (-1)^{n-1}}{y_n y_{n-2}}.$$

Därmed har vi visat att

$$C_n - C_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-1}}{y_n y_{n-2}},$$

för alla $n \geq 3$. $\blacksquare$

Med hjälp av sats 2.7 ska vi nu visa några intressanta egenskaper hos konvergenter tillhörande oändliga enkla kedjebråk. Vi börjar med att betrakta (2.13) för $n \geq 2$. För jämna n skriver vi att $n = 2m$ där $m \geq 1$ och får att

$$C_{2m} - C_{2m-1} = \frac{(-1)^{2m}}{y_{2m}\, y_{2m-1}} = \frac{1}{y_{2m}\, y_{2m-1}} > 0, \tag{2.15}$$

vilket medför att $C_{2m-1} < C_{2m}$. För udda n skriver vi att $n = 2m + 1$ där $m \geq 1$ och får att

$$C_{2m+1} - C_{2m} = \frac{(-1)^{2m+1}}{y_{2m+1}\, y_{2m}} < 0, \tag{2.16}$$

vilket medför att $C_{2m+1} < C_{2m}$.

Vidare betraktar vi (2.14) för $n \geq 3$. För jämna n skriver vi att $n = 2m + 2$ där $m \geq 1$ och får att

$$C_{2m+2} - C_{2m} = \frac{a_{2m+2}(-1)^{2m+1}}{y_{2m+2}y_{2m}} < 0, \tag{2.17}$$

vilket medför att $C_{2m+2} < C_{2m}$. För udda n skriver vi att $n = 2m + 1$ där $m \geq 1$ och får att

$$C_{2m+1} - C_{2m-1} = \frac{a_{2m+1}(-1)^{2m}}{y_{2m+1}y_{2m-1}} > 0, \tag{2.18}$$

vilket medför att $C_{2m+1} > C_{2m-1}$.

Vi har därmed visat att konvergenter med udda index bildar en växande följd

$$C_1 < C_3 < C_5 < \cdots < C_{2m-1} < C_{2m+1}, \tag{2.19}$$

och konvergenter med jämnt index bildar en avtagande följd

$$C_2 > C_4 > C_6 > \cdots > C_{2m} > C_{2m+2}. \tag{2.20}$$

Genom att kombinera olikheterna i (2.16) och (2.18) ovan får vi för $m \geq 1$ att

$$C_{2m-1} < C_{2m+1} < C_{2m} .$$

Sammantaget ger det oss den växande följden

$$C_1 < C_3 < C_5 < \cdots < C_{2m+1} < C_{2m} < \cdots < C_6 < C_4 < C_2. \tag{2.21}$$

Vi ser att varje konvergent med udda index är mindre än varje konvergent med jämnt index. Speciellt ligger varje konvergent C_n med $n \geq 3$ mellan konvergenterna C_1 och C_2 som därför utgör en nedre respektive övre begränsning. Konvergenter med udda respektive jämnt index konvergerar således mot ett gränsvärde $g_{\text{Ö}} \leq C_2$ respektive $g_N \geq C_1$, enligt principen om monoton konvergens [6, kap.2, s.137]. Men eftersom $C_1, C_3, C_5, \ldots$, är mindre än varje $C_2, C_4, C_6 \ldots$, så är gränsvärdet $g_{\text{Ö}}$ också det. På samma sätt är gränsvärdet g_N större än varje $C_1, C_3, C_5, \ldots$, eftersom $C_2, C_4, C_6, \ldots$, är det.

Låt oss nu titta närmare på vad som händer med konvergenter C_{2m-1} och C_{2m} när m växer.

Sats 2.8 *Varje oändligt enkelt kedjebråk konvergerar mot ett gränsvärde som är större än varje konvergent med udda index och mindre än varje konvergent med jämnt index.*

Bevis: Låt $[a_1; a_2, a_3, \ldots]$ vara ett oändligt enkelt kedjebråk med konvergenter $C_i = [a_1; a_2, a_3, \ldots, a_i]$. Enligt sats 2.3 har vi för $i = n \geq 1$ att

$$y_1 = a_1\, y_0 + y_{-1} = 1,$$

$$y_2 = a_2\, y_1 = a_2 \cdot 1 = a_2$$

$$y_3 = a_3\, y_2 + y_1 = a_3 \cdot a_2 + 1,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} = a_{n-1}\, y_{n-2} + y_{n-3}$$

$$y_n = a_n\, y_{n-1} + y_{n-2} = a_n\,(a_{n-1}\, y_{n-2} + y_{n-3}) + y_{n-2},$$

där $a_n \epsilon\, \mathbb{Z}^+$ för $n \geq 2$ och $y_n \epsilon\, \mathbb{Z}^+$ för $n \geq 1$. Observera att vi får den växande följden

$$y_1 = 1 \leq y_2 < y_3 < \cdots < y_{n-1} < y_n,$$

vilket i sin tur medför

$$y_2y_1 < y_3y_2 < y_4y_3 < y_5y_4 < \cdots < y_ny_{n-1}. \tag{2.22}$$

Ersätt sedan n med $2m$ där $m \geq 1$ och vi får enligt (2.13) att

$$C_{2m} - C_{2m-1} = \frac{(-1)^{2m}}{y_{2m}y_{2m-1}} = \frac{1}{y_{2m}y_{2m-1}} > 0.$$

När m växer så medför det enligt (2.22) att $y_{2m}y_{2m-1}$ också växer, vilket innebär att när $m \to \infty$ så medför det att $1/y_{2m}y_{2m-1} \to 0$. Vi kan därför skriva att

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m} - \lim_{m\to\infty} C_{2m-1} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{y_{2m}y_{2m-1}} = 0.$$

Detta medför att $\lim_{m\to\infty} C_{2m} = \lim_{m\to\infty} C_{2m-1}$. Eftersom $\lim_{m\to\infty} C_{2m} = g_N$ och $\lim_{m\to\infty} C_{2m-1} = g_{Ö}$ har vi alltså att $g_N = g_{Ö}$. Vi betecknar detta gemensamma gränsvärde $g = g_N = g_{Ö}$. Därmed har vi för g att

$$g = g_N > C_{2m-1} \qquad \text{och} \qquad g = g_{Ö} < C_{2m}. \tag{2.23}$$

Så med andra ord har vi att

$$C_1 < C_3 < C_5 < \cdots < C_{2m-1} < g < C_{2m} < \cdots < C_6 < C_4 < C_2, \tag{2.24}$$

och därmed är satsen bevisad. ■

Med sats 2.8 bevisad kan vi nu formulera nedan definition.

Definition 2.2 Ett oändligt enkelt kedjebråk $[a_1; a_2, a_3, \dots]$ har ett värde g, vilken definieras som

$$g = \lim_{m\to\infty} C_m = \lim_{m\to\infty} [a_1; a_2, a_3, \dots, a_m],$$

vilket existerar enligt sats 2.8.

Till ett tal g kan vi alltså associera ett oändligt kedjebråk. I avsnitt 2.2 hävdade vi att ett kedjebråk på formen $[a_1; a_2, a_3, \dots]$ representerar ett irrationellt tal. I satsen som följer ska vi visa detta.

Sats 2.9 *Varje oändligt enkelt kedjebråk representerar ett irrationellt tal.*

Bevis: Vi sätter att kedjebråket $[a_1; a_2, a_3, \dots] = g$. Från olikheten (2.24) kan utläsas att

$$C_{2m} > g > C_{2m-1}$$

vilket medför att

$$C_{2m} - C_{2m-1} > g - C_{2m-1} > 0.$$

Enligt (2.13) i sats 2.7 får vi för $n = 2m$ att

$$C_{2m} - C_{2m-1} = \frac{(-1)^{2m}}{y_{2m}\, y_{2m-1}} = \frac{1}{y_{2m}\, y_{2m-1}} > g - C_{2m-1} > 0. \tag{2.25}$$

Eftersom $C_{2m-1} = x_{2m-1}/y_{2m-1}$ kan vi uttrycka (2.25) på formen

$$\frac{1}{y_{2m}\, y_{2m-1}} > g - \frac{x_{2m-1}}{y_{2m-1}} > 0 \qquad \text{vilket medför att} \qquad \frac{1}{y_{2m}} > y_{2m-1} \cdot g - x_{2m-1} > 0.$$

Antag att g är ett positivt rationellt tal, nämligen att $g = x/y$ där $x, y \in \mathbb{Z}^+$. Vi får då att

$$\frac{1}{y_{2m}} > y_{2m-1} \cdot \frac{x}{y} - x_{2m-1} > 0,$$

och vidare att

$$\frac{y}{y_{2m}} > y_{2m-1} \cdot x - x_{2m-1} \cdot y > 0 \tag{2.26}$$

där $y_{2m-1} \cdot x - x_{2m-1} \cdot y$ är ett positivt heltal. Lägg märke till att när m växer så gör även y_{2m} det. Vi kan alltså välja m tillräckligt stort så att y blir mindre än y_{2m}. Med andra ord så att $y/y_{2m} < 1$. Men då uppstår en motsägelse i (2.26) och därför kan inte g vara ett rationellt tal. Alltså är g irrationellt.■

Vi ger nu ett enkelt exempel.

Exempel 2.3 Bestäm det tal som det oändliga kedjebråket $[1; 1,1, \ldots]$ representerar.

Sätt att g är det tal som kedjebråket representerar och vi kan skriva att

$$g = [1; 1,1, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} = 1 + \frac{1}{g} = \frac{g+1}{g},$$

vilket medför att

$$g^2 - g - 1 = \left(g - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$$

och att

$$g = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Eftersom kedjebråksutvecklingen är positiv är det irrationella tal som kedjebråket representerar alltså $(1 + \sqrt{5})/2$. Detta tal är allmänt känt som *gyllene snittet.* Intressant är att om vi använder rekursionen i sats 2.3 så får vi för $i \geq 3$ att $x_i = x_{i-1} + x_{i-2}$ och $y_i = y_{i-1} + y_{i-2}$, nämligen *Fibonnacis talföljd*.

På motsvarande sätt som i exempel 2.3 visas enkelt att kedjebråket $[1; 2,2, \ldots]$ representerar talet $\sqrt{2}$, som vi hävdade i avsnitt 2.2. Vi ställer oss nu frågan, kan två distinkta oändliga enkla kedjebråk representera samma irrationella tal? I satsen som följer visar vi att det inte är möjligt.

Sats 2.10 *Två distinkta oändliga enkla kedjebråk konvergerar mot olika värden.*

Bevis: Låt $[a_1; a_2, a_3, \ldots]$ och $[b_1; b_2, b_3, \ldots]$ vara två oändliga enkla kedjebråk där $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ och $a_i, b_i \in \mathbb{Z}^+$ för $i \geq 2$. Vi antar att de konvergerar mot samma värde:

$$[a_1; a_2, a_3, \ldots] = [b_1; b_2, b_3, \ldots] = g.$$

Enligt olikheten (2.24) har vi att $C_1 < g < C_2$ där konvergenterna $C_1 = a_1$ och $C_2 = a_1 + 1/a_2$. Vi kan därför skriva att $a_1 < g < a_1 + 1/a_2$ där $1/a_2 \leq 1$ så $0 < g - a_1 < 1$. Eftersom g är ett irrationellt tal, så måste $a_1 = [g]$. På samma sätt får vi att $b_1 = [g]$ och därmed att $a_1 = b_1 = [g]$ och vi kan skriva att

$$[a_1; a_2, a_3, \ldots] = [a_1; g_1] \qquad \text{respektive} \qquad [b_1; b_2, b_3, \ldots] = [b_1; g_1]$$

där $g_1 = [a_2, a_3, \ldots] = [b_2, b_3, \ldots]$. Upprepas processen så får vi att $a_k = b_k$ för alla $k \geq 1$. Vi drar slutsatsen att två distinkta oändliga enkla kedjebråk konvergerar mot olika värden.■

2.5 Approximation av irrationella tal med rationella

I avsnitt 2.4 visade vi att det tal som ett oändligt enkelt kedjebråk representerar är irrationellt. Nu ska vi visa att oändliga enkla kedjebråk är användbara när det kommer till approximation av irrationella tal med rationella. Vi ska nämligen visa att konvergenter i någon mening bildar en följd av de bästa rationella approximationerna till ett irrationellt tal. Avsnittet bygger på [5, kap. 3.7] och efterföljande satser och bevis utgår från [4, kap. 7.5].

Låt β vara ett irrationellt tal med kedjebråket $[a_1; a_2, a_3, \ldots]$ och tillhörande konvergenter $C_n = x_n/y_n$ där $n \geq 1$. Konvergenter C_n med udda respektive jämnt n bildar en växande respektive avtagande följd som båda konvergerar mot samma värde. Eftersom β har en oändlig kedjebråksutveckling medför det också ett oändligt antal konvergenter C_n. Alltså borde vi kunna välja C_n godtyckligt nära β. I nästa sats får vi en uppfattning om hur nära $C_n = x_n/y_n$ kommer talet β.

Sats 2.11 *För varje $n \geq 1$ gäller att*

$$\left|\beta - \frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{1}{y_n y_{n+1}}.$$

Bevis: Enligt sats 2.6 har vi för $i = n+1$ att

$$\beta = [a_1, a_2, \dots, a_n, \beta_{n+1}] = \frac{\beta_{n+1}x_n + x_{n-1}}{\beta_{n+1}y_n + y_{n-1}}.$$

Enligt sats 2.4 gäller för $i = n$ att $x_n y_{n-1} - x_{n-1}y_n = (-1)^n$ och vi får därmed att

$$\left|\beta - \frac{x_n}{y_n}\right| = \left|\frac{\beta_{n+1}x_n + x_{n-1}}{\beta_{n+1}y_n + y_{n-1}} - \frac{x_n}{y_n}\right| = \left|\frac{-(x_n y_{n-1} - x_{n-1}y_n)}{y_n(\beta_{n+1}y_n + y_{n-1})}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{y_n(\beta_{n+1}y_n + y_{n-1})}\right|$$

$$= \frac{1}{y_n(\beta_{n+1}y_n + y_{n-1})}.$$

Eftersom $\beta_{n+1} > a_{n+1}$ så följer att $y_n(\beta_{n+1}y_n + y_{n-1}) > y_n(a_{n+1}y_n + y_{n-1})$ och vi får att

$$\frac{1}{y_n(\beta_{n+1}y_n + y_{n-1})} < \frac{1}{y_n(a_{n+1}y_n + y_{n-1})} = \frac{1}{y_n y_{n+1}},$$

där $y_{n+1} = a_{n+1}y_n + y_{n-1}$ och vi har visat att $|\beta - x_n/y_n| < 1/y_n y_{n+1}$. ■

Med hjälp av sats 2.11 ska vi nu visa att dessa konvergenter utgör allt bättre rationella approximationer till det irrationella talet β.

Sats 2.12 *Varje konvergent $C_n = x_n/y_n$ är en bättre approximation till ett irrationellt tal β än föregående konvergent $C_{n-1} = x_{n-1}/y_{n-1}$. Med andra ord gäller att $|\beta - C_n| < |\beta - C_{n-1}|$, för $n \geq 2$.*

Bevis: Vi visar först att $|\beta y_n - x_n| < |\beta y_{n-1} - x_{n-1}|$. Därefter visar vi att detta medför olikheten

$$|\beta - C_n| < |\beta - C_{n-1}|.$$

Enligt sats 2.6 har vi för $i = n$ att

$$\beta = [a_1, \dots, a_{n-1}, \beta_n] = \frac{\beta_n x_{n-1} + x_{n-2}}{\beta_n y_{n-1} + y_{n-2}},$$

där $\beta_n = a_n + 1/\beta_{n+1}$ och $a_n = [\beta_n]$. Detta medför att $a_n + 1 > \beta_n$ och i sin tur att

$$\beta_n y_{n-1} + y_{n-2} < (a_n + 1)y_{n-1} + y_{n-2}. \tag{2.27}$$

Enligt sats 2.3 har vi för $i = n$ att $y_n = a_n y_{n-1} + y_{n-2}$ och olikheten (2.27) kan skrivas

$$\beta_n y_{n-1} + y_{n-2} < y_n + y_{n-1}. \tag{2.28}$$

För $i = n+1$ har vi att $y_{n+1} = a_{n+1}y_n + y_{n-1}$, vilket medför att

$$y_n + y_{n-1} \leq a_{n+1}y_n + y_{n-1} = y_{n+1}. \tag{2.29}$$

Vi har alltså att $\beta_n y_{n-1} + y_{n-2} < y_{n+1}$ och enligt sats 2.6 får vi för $i = n$ att

$$\left|\beta - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\right| = \left|\frac{-(x_{n-1}y_{n-2} - x_{n-2}y_{n-1})}{y_{n-1}(\beta_n y_{n-1} + y_{n-2})}\right| = \frac{1}{y_{n-1}(\beta_n y_{n-1} + y_{n-2})} > \frac{1}{y_{n-1}y_{n+1}}.$$

Multiplicera sedan båda sidor med y_{n-1} och vi får att $|\beta y_{n-1} - x_{n-1}| > 1/y_{n+1}$. Från sats 2.11 följer också att $1/y_{n+1} > |\beta y_n - x_n|$ och därför kan vi skriva att

$$|\beta y_{n-1} - x_{n-1}| > \frac{1}{y_{n+1}} > |\beta y_n - x_n|. \tag{2.30}$$

Vi visar nu att (2.30) medför olikheten $|\beta - C_n| < |\beta - C_{n-1}|$. Eftersom $y_n \geq y_{n-1}$ får vi att

$$|\beta - C_n| = \frac{1}{y_n}|\beta y_n - x_n| < \frac{1}{y_n}|\beta y_{n-1} - x_{n-1}| \leq \frac{1}{y_{n-1}}|\beta y_{n-1} - x_{n-1}| = |\beta - C_{n-1}|. \tag{2.31}$$

Därmed har vi visat att $|\beta - C_n| < |\beta - C_{n-1}|$. Alltså är varje konvergent C_n en bättre approximation till ett irrationellt tal β än föregående konvergent C_{n-1}. ■

Vidare visar vi att av alla rationella tal med nämnare mindre än eller lika med y_n, så är konvergenten $C_n = x_n/y_n$ i någon mening den bästa approximationen av ett irrationellt tal β.

Sats 2.13. *Om h/k är ett rationellt tal där $k \geq 1$ sådant att $|\beta - h/k| < |\beta - x_n/y_n|$ för något $n \geq 2$, då gäller att $k > y_n$. I själva verket gäller att om $|\beta k - h| < |\beta y_n - x_n|$ för något $n \geq 1$ då är $k \geq y_{n+1}$.*

Bevis: Först visar vi att det andra påståendet medför det första. Antag att det första påståendet är falskt, nämligen att det finns ett tal h/k med $|\beta - h/k| < |\beta - x_n/y_n|$ och att $k \leq y_n$. Multiplicera därefter dessa två olikheter och vi får att

$$k \cdot \left|\beta - \frac{h}{k}\right| < y_n \cdot \left|\beta - \frac{x_n}{y_n}\right|,$$

vilket i sin tur medför att $|\beta k - h| < |\beta y_n - x_n|$. Men enligt satsens andra påstående ska detta medföra att $k \geq y_{n+1}$. Eftersom $y_{n+1} > y_n$ för $n \geq 2$ får vi en motsägelse och alltså gäller att $k > y_n$.

Vi visar nu att om $|\beta k - h| < |\beta y_n - x_n|$ för något $n \geq 1$ då är $k \geq y_{n+1}$. Vi antar motsatsen, det vill säga att om $|\beta k - h| < |\beta y_n - x_n|$ så är $k < y_{n+1}$ för något $n \geq 1$. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} h = ax_n + bx_{n+1} \\ k = ay_n + by_{n+1} \end{cases} \tag{2.32}$$

med variablerna a och b. Låt oss skriva om (2.32) på matrisform

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} \\ y_n & y_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Från sats 2.4 har vi för $i = n + 1$ att $x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^{n+1}$. Genom att ta determinanten av koefficientmatrisen ovan får vi att

$$x_n y_{n+1} - x_{n+1}y_n = -(x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}) = -(-1)^{n+1} = \pm 1.$$

Eftersom determinanten är nollskild är matrisen inverterbar. Vidare löser vi ekvationen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} \\ y_n & y_{n+1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} y_{n+1} & -x_{n+1} \\ -y_n & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} y_{n+1}h - x_{n+1}k \\ -y_n h + x_n k \end{pmatrix}$$

och vi ser att

$a = \pm(y_{n+1}h - x_{n+1}k)$ respektive $b = \pm(-y_n h + x_n k)$.

Med andra ord är a och b heltal. Vi ska nu visa att a och b är nollskilda heltal.

Om $a = 0$ får vi att $h = bx_{n+1}$ och $k = by_{n+1}$ vilket medför att

$hy_{n+1} = bx_{n+1}y_{n+1}$ respektive $kx_{n+1} = bx_{n+1}\, y_{n+1}$.

Med andra ord är $hy_{n+1} = kx_{n+1}$ och $y_{n+1} \mid kx_{n+1}$. Vidare vet vi att $SGD(x_{n+1}, y_{n+1}) = 1$ och då måste $y_{n+1} \mid k$, vilket inte är möjligt då vi antagit att $k < y_{n+1}$ och därför kan inte $a = 0$.

Om $b = 0$ får vi att $h = ax_n$ och $k = ay_n$ .Vi får då att

$$|\beta k - h| = |\beta a y_n - a x_n| = |a||\beta y_n - x_n| < |\beta y_n - x_n|$$

där alltså $|a| < 1$. Eftersom a är ett heltal, så är detta endast möjligt om $a = 0$. Men vi har redan visat att $a \neq 0$. Alltså har vi visat att a och b är nollskilda heltal. Vi ska nu visa att a och b har olika tecken. Enligt (2.32) har vi att $k = ay_n + by_{n+1}$ vilket medför att

$$ay_n = k - by_{n+1}. \tag{2.33}$$

Antag att b är ett positivt heltal. Givet antagandet att $k < y_{n+1}$ får vi att $k < y_{n+1} \leq by_{n+1}$, vilket medför att $ay_n = k - by_{n+1} < 0$ och eftersom y_n är ett positivt heltal måste a vara ett negativt heltal. Om b är ett negativt heltal får vi att $by_{n+1} < 0$, vilket medför att $ay_n = k - by_{n+1} > 0$ och alltså är $a > 0$. Därmed har vi visat att a och b har olika tecken. I avsnitt 3.4 redogjorde vi för att värdet på β ligger mellan konvergenter $C_n = x_n/y_n$ och $C_{n+1} = x_{n+1}/y_{n+1}$.

För udda n får vi att $C_n < \beta < C_{n+1}$ och för jämna n att $C_n > \beta > C_{n+1}$. För udda n har vi därför att

$$\frac{x_n}{y_n} < \beta < \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$$

vilket medför att $x_n < \beta y_n$ respektive $x_{n+1} > \beta y_{n+1}$. Detta medför att $\beta y_n - x_n > 0$ och $\beta y_{n+1} - x_{n+1} < 0$. Omvänt gäller för jämna n. Eftersom a och b har olika tecken följer att $a \cdot (\beta y_n - x_n)$ och $b \cdot (\beta y_{n+1} - x_{n+1})$ har samma tecken och därför kan vi skriva att

$$|\beta k - h| = |\beta(ay_n + by_{n+1}) - (ax_n + bx_{n+1})|$$

$$= |a(\beta y_n - x_n) + b(\beta y_{n+1} - x_{n+1})| > |a(\beta y_n - x_n)|$$

$$= |a| \cdot |(\beta y_n - x_n)| \geq |(\beta y_n - x_n)|.$$

Vi har alltså visat att om $|\beta k - h| \geq |(\beta y_n - x_n)|$ så gäller att $k < y_{n+1}$, en motsägelse till vårt antagande och satsen är bevisad.■

Genom att ersätta n med $n + 1$ i sats 2.7 och sats 2.12, får vi tillsammans med sats 2.11 att

$$|\beta - C_{n+1}| < \frac{1}{2y_{n+1}y_n} < |\beta - C_n| < |C_{n+1} - C_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{y_{n+1}y_n}\right| = \frac{1}{y_{n+1}y_n} < \frac{1}{y_n^2},$$

eftersom $y_n < y_{n+1}$. Vi har alltså olikheten $|\beta - C_n| < 1/y_n^2$ som gäller för alla $n \geq 2$.

Vi ska nu formulera en sats som kommer visa sig vara användbar i avsnitt 4, när vi söker heltalslösningar till Pells ekvation.

Sats 2.14. *Låt β vara ett positivt irrationellt tal. Om det finns ett rationellt tal h/k där $k \geq 1$ och $sgd(h, k) = 1$, sådant att*

$$\left|\beta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{2k^2}$$

då är h/k en konvergent i kedjebråksutvecklingen av β.

Bevis: Låt x_n/y_n där $n \geq 1$ vara konvergenter i kedjebråksutvecklingen av β. Antag sedan att h/k inte är en konvergent. Vi vet att $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots,$ bildar en växande följd av positiva heltal. För något tal n finner vi ett tal k, sådant att $y_n \leq k < y_{n+1}$. Eftersom $k < y_{n+1}$ så är $|\beta k - h| < |\beta y_n - x_n|$ inte möjligt enligt sats 2.13. och därför har vi att

$$|\beta y_n - x_n| \leq |\beta k - h| = k\left|\beta - \frac{h}{k}\right| < k\frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2k}.$$

Vidare medför olikheten $|\beta y_n - x_n| < 1/2k$ att

$$\left|\beta - \frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{1}{2ky_n} < \frac{1}{ky_n}.$$

Vi har antagit att h/k inte är en konvergent. Så med andra ord är $h/k \neq x_n/y_n$, vilket medför att $hy_n \neq kx_n$ och vidare att $|kx_n - hy_n| \geq 1$ är ett positivt heltal. Detta innebär att

$$\frac{1}{ky_n} \leq \frac{|kx_n - hy_n|}{ky_n} = \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{h}{k}\right| = \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{h}{k} + \beta - \beta\right|.$$

Vidare använder vi triangelolikheten och får att

$$\frac{1}{ky_n} \leq \left|\left(\frac{x_n}{y_n} - \beta\right) + \left(\beta - \frac{h}{k}\right)\right| \leq \left|\left(\frac{x_n}{y_n} - \beta\right)\right| + \left|\left(\beta - \frac{h}{k}\right)\right|$$

$$= \left|\beta - \frac{x_n}{y_n}\right| + \left|\beta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{2ky_n} + \frac{1}{2k^2}.$$

Genom att subtrahera båda sidor med $1/2ky_n$ får vi att $1/2ky_n < 1/2k^2$, vilket medför att $k < y_n$, en motsägelse ty antagandet var att $y_n \leq k < y_{n+1}$ och därför är h/k en konvergent.■

3. Periodisk kedjebråksutveckling

I detta avsnitt ska vi behandla periodisk kedjebråksutveckling. Vi ska definiera och ge exempel på periodisk och rent periodisk kedjebråksutveckling samt introducera kvadratiska irrationaliteter och reducerade tal. Periodiciteten hos kedjebråk kommer visa sig användbart när vi ska lösa Pells ekvation. Detta avsnitt bygger på [5. Kap 4] och [7. Avsnitt 5].

3.1 Periodiska och rent periodiska kedjebråk

Vi börjar med att definiera begreppet periodisk och rent periodisk kedjebråksutveckling.

Definition 3.1 En kedjebråksutveckling på formen

$$b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cdots + \cfrac{1}{b_k + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}}}}}} \tag{3.1}$$

$$= [b_1, \dots, b_k, a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, \dots]$$

kallas för *periodisk.* Vi inför beteckningen

$$[b_1, \dots, b_k, \overline{a_1, \dots, a_n}] = [b_1, \dots, b_k, a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, \dots]$$

där den övre linjen indikerar att de partiella kvoterna $a_1, \dots, a_n$ fortsatt upprepar sig.

Definition 3.2 En kedjebråksutveckling på formen

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}}} = [a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, \dots] \tag{3.2}$$

kallas för *rent periodisk.* Vi betecknar kedjebråk med rent periodisk utveckling

$$[\overline{a_1, \dots, a_n}] = [a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, \dots].$$

Vi har redan sett exempel på tal som har periodisk kedjebråksutveckling. Kedjebråket $[1; 2,2,2, \dots]$ representerar talet $\sqrt{2}$. Enligt definition 3.1 kan vi skriva att $[1; 2,2,2, \dots] = [1; \overline{2}]$ och alltså har $\sqrt{2}$ en periodisk kedjebråksutveckling.

Låt oss också ge ett exempel på rent periodisk utveckling.

Exempel 3.1. Vi tillämpar kedjebråksalgoritmen från avsnitt 1.2 på $3 + \sqrt{11}$ och får att

$$3 + \sqrt{11} = 6 + \left(3 + \sqrt{11} - 6\right) = 6 + \left(\sqrt{11} - 3\right) = 6 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{11} - 3}}$$

$$= 6 + \cfrac{1}{\cfrac{(\sqrt{11} + 3)}{(\sqrt{11} - 3)(\sqrt{11} + 3)}} = 6 + \cfrac{1}{\cfrac{(\sqrt{11} + 3)}{2}} = 6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{(\sqrt{11} - 3)}{2}}$$

$$= 6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{(\sqrt{11} + 3)}} = 6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\sqrt{11} - 3}}} = \cdots$$

$$= 6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}} = [6; 3,6,3,6,3, \cdots] = [\overline{6,3}].$$

Alltså har $3 + \sqrt{11}$ en rent periodisk kedjebråksutveckling där de partiella kvoterna 6,3 upprepar sig.

3.2 Kvadratiska irrationaliteter och konjugat

Vi ska nu behandla kvadratiska irrationaliteter och deras konjugat och vi börjar med en definition.

Definition 3.2. Varje tal som kan skrivas på formen

$$\frac{p \pm \sqrt{d}}{q} \tag{3.3}$$

där p, q, d är heltal, $q \neq 0$ och $d > 0$ inte är en jämn kvadrat, kallas för ett *kvadratiskt irrationellt tal* eller *kvadratisk irrationalitet (eng. quadratic surd).* Detta eftersom talen i (3.3) är rötter till en kvadratisk ekvation med heltalskoefficienter, vilket vi visar i satsen som följer.

Sats. 3.1 *Ett tal x är en kvadratisk irrationalitet om det satisfierar en kvadratisk ekvation*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.4}$$

där a, b, c är heltal, $a > 0$ och $b^2 - 4ac > 0$ inte är en jämn kvadrat.

Bevis: Under förutsättning att $a > 0$ kan vi skriva om den kvadratiska ekvationen (3.4) på formen

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}$$

vilket medför att

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

och att

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{P \pm \sqrt{D}}{Q}$$

där $P = -b, Q = 2a$ och $D = b^2 - 4ac > 0$. Talet x är alltså en kvadratisk irrationalitet.
Antag nu omvänt att

$$x = \frac{p \pm \sqrt{d}}{q}$$

där p, q, d är heltal, $q \neq 0$ och $d > 0$ inte är en jämn kvadrat. Detta medför att

$$qx - p = \pm\sqrt{d} \tag{3.5}$$

Vi kvadrerar (3.5) och får att

$$(qx - p)^2 = q^2x^2 + q^2 - 2pqx = d$$

vilket medför den kvadratiska ekvationen

$$q^2x^2 + (-2pq)x + (p^2 - d) = 0. \blacksquare$$

Varje kvadratisk irrationalitet $\beta = (p+\sqrt{d})/q$ har ett så kallat *konjugat* $\beta' = (p-\sqrt{d})/q$ och vi observerar att om β är en lösning till den kvadratiska ekvationen (3.4), så är β' också det.

Låt nu β_1 och β_2 vara två kvadratiska irrationaliteter. Då är konjugatet av deras summa lika med summan av deras konjugat, nämligen

$$(\beta_1+\beta_2)' = \left(\frac{p_1+\sqrt{d}}{q_1}+\frac{p_2+\sqrt{d}}{q_2}\right)' = \left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right) - \left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)\sqrt{d} = \frac{p_1-\sqrt{d}}{q_1}+\frac{p_2-\sqrt{d}}{q_2} = \beta_1'+\beta_2'.$$

På analogt sätt får vi att

$$(\beta_1-\beta_2)' = \beta_1'-\beta_2', \qquad (\beta_1\cdot\beta_2)' = \beta_1'\cdot\beta_2' \qquad \text{och att} \qquad (\beta_1/\beta_2)' = \beta_1'/\beta_2'$$

Vad kan vi säga om kvadratiska irrationaliteter och deras kedjebråksutveckling?

Sats 3.2 *Varje oändligt enkelt kedjebråk som har en periodisk kedjebråksutveckling representerar en kvadratisk irrationalitet.*

Bevis. Låt först β vara ett irrationellt tal med rent periodisk kedjebråksutveckling. Vi har att

$$\beta = [\overline{a_1,..,a_n}] = a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{\beta_{n+1}}}}},$$

där

$$\beta_{n+1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cdots}} = \beta.$$

Enligt sats 2.6 gäller för $i = n+1$ att

$$\beta = [a_1, a_2, \cdots, a_n, \beta_{n+1}] = \frac{\beta_{n+1}x_n + x_{n-1}}{\beta_{n+1}y_n + y_{n-1}},$$

och eftersom $\beta_{n+1} = \beta$ får vi att

$$\beta = [a_1, a_2, \cdots, a_n, \beta] = \frac{\beta x_n + x_{n-1}}{\beta y_n + y_{n-1}}.$$

Så med andra ord erhålls den kvadratiska ekvationen

$$y_n\beta^2 + (y_{n-1}-x_n)\beta - x_{n-1} = a\beta^2 + b\beta + c = 0,$$

där $a = y_n, b = (y_{n-1}-x_n)$ och $c = x_{n-1}$, alla är heltal. Ekvationen $a\beta^2 + b\beta + c = 0$ har lösningarna

$$\beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{p \pm \sqrt{d}}{q},$$

där $p = -b, q = 2a$ och $d = b^2 - 4ac$. Vi har därmed visat att β är en kvadratisk irrationalitet.

Låt nu α vara ett irrationellt tal med periodiskt kedjebråk $[b_1, \dots, b_k, \overline{a_1, \dots, a_n}]$. Den rent periodiska delen betecknar vi som tidigare $\beta = [\overline{a_1, \dots, a_n}]$ så att

$$\alpha = [b_1, \dots, b_k, \beta] = b_1 + \cfrac{1}{b_2+\cdots+\cfrac{1}{b_{n-1}+\cfrac{1}{b_n+\cfrac{1}{\beta}}}}.$$

Vi har redan visat att β är en kvadratisk irrationalitet, så då antar även α formen av en kvadratisk irrationalitet. Vi har därmed bevisat satsen. ■

Låt oss nu ge ett exempel.

Exempel 3.2. Representera kedjebråket $[2;1,\overline{11,1,2}]$ som en kvadratisk irrationalitet.

Vi sätter att $\alpha=[2;1,\overline{11,1,2}]$ och $\beta=[\overline{11,1,2}]$. Vi börjar med den rent periodiska delen β. Vi får att

$$\beta=[\overline{11,1,2}]=[11,1,2,11,1,2,\ldots]=11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\beta}}}=11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2\beta+1}{\beta}}}=11+\cfrac{1}{1+\cfrac{\beta}{2\beta+1}}$$

$$=11+\cfrac{1}{\cfrac{(2\beta+1)+\beta}{2\beta+1}}=11+\frac{2\beta+1}{3\beta+1}=\frac{11(3\beta+1)+2\beta+1}{3\beta+1}=\frac{35\beta+12}{3\beta+2}.$$

Efter en del beräkning får vi att

$$\beta^2-\frac{34}{3}\beta-4=\left(\beta-\frac{17}{3}\right)^2-\frac{325}{9}=0,$$

vilket medför att

$$\beta=\frac{17\pm5\sqrt{13}}{3}.$$

Eftersom kedjebråksutvecklingen är positiv så gäller att $\beta=(17+5\sqrt{13})/3$. Vidare har vi att

$$\alpha=[2;1,\overline{11,1,2}]=[2;1,\beta]=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\beta}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{17+5\sqrt{13}}{3}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{17+5\sqrt{13}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{\cfrac{20+5\sqrt{13}}{17+5\sqrt{13}}}=2+\frac{17+5\sqrt{13}}{20+5\sqrt{13}}=\frac{57+15\sqrt{13}}{20+5\sqrt{13}}$$

$$=\frac{(57+15\sqrt{13})(20-5\sqrt{13})}{(20+5\sqrt{13})(20-5\sqrt{13})}=\frac{165+15\sqrt{13}}{75}=\frac{11+\sqrt{13}}{5}.$$

Alltså har vi visat att kedjebråket $[2;1,\overline{11,1,2}]$ representerar den kvadratiska irrationaliteten

$$\alpha=\frac{11+\sqrt{13}}{5}.$$

3.3 Reducerade kvadratiska irrationaliteter

Vi ska nu behandla reducerade kvadratiska irrationaliteter och vi börjar med en definition.

Definition 3.3 Låt β vara en kvadratisk irrationalitet där β' är dess konjugat. Om $\beta>1$ och $-1<\beta'<0$ så säger vi att β är en *reducerad kvadratisk irrationalitet* eller att β är *reducerad*.

Eftersom β är en rot till en kvadratisk ekvation

$$A\beta^2+B\beta+C=0$$

där $A>0,B,C$ är heltal, så kan β skrivas på formen

$$\beta=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{p\pm\sqrt{d}}{q}$$

där $p = -B, q = 2A,$ och $d = B^2 - 4AC$. Vidare kallas uttrycket $d = B^2 - 4AC$ för ekvationens *diskriminant*.

Om β är reducerad så gäller att

$$\beta = \frac{p + \sqrt{d}}{q} > 1\,, \qquad \text{och} \qquad -1 < \beta' = \frac{p - \sqrt{d}}{q} < 0,$$

Vi adderar β och β' och får att

$$\beta + \beta' = \frac{p + \sqrt{d}}{q} + \frac{p - \sqrt{d}}{q} = 2\frac{p}{q} > 0.$$

Eftersom $A > 0$ så följer att $q = 2A > 0$ och därmed att $p > 0$. Vidare medför detta att $\sqrt{d} > p$. För p, q respektive d har vi alltså att

$$0 < p < \sqrt{d} \qquad \text{och} \qquad -p + \sqrt{d} < q < p + \sqrt{d} < 2\sqrt{d}. \tag{3.3}$$

Från (3.3) ser vi att för varje val av diskriminant d så finns endast ett ändligt antal p respektive q och alltså endast ett ändligt antal reducerade kvadratiska irrationaliteter $\beta = (p + \sqrt{d})/q$.

Vidare kan vi visa följande sats.

Sats 3.3 *Låt β vara en reducerad kvadratisk irrationalitet och definiera ξ genom*

$$\beta = a + \frac{1}{\xi} \tag{3.4}$$

där $a = [\beta]$. Då är ξ också reducerad och har samma diskriminant d som β.

Bevis. Vi låter β vara en rot till $Ax^2 + Bx + C = 0$, där $A > 0, B, C$ är heltal. Vi ser att

$$A\beta^2 + B\beta + C = A\left(a + \frac{1}{\xi}\right)^2 + B\left(a + \frac{1}{\xi}\right) + C = 0.$$

Vi skriver sedan om uttrycket på formen

$$Aa^2 + \frac{A}{\xi^2} + \frac{2aA}{\xi} + Ba + \frac{B}{\xi} + C = 0$$

och multiplicerar båda sidor med ξ^2 och får då att

$$Aa^2\xi^2 + A + 2aA\xi + Ba\xi^2 + B\xi + C\xi^2$$
$$= \xi^2(Aa^2 + Ba + C) + \xi(2Aa + B) + A = 0.$$

Ekvationen har lösningarna

$$\xi = -(2Aa + B) \pm \frac{\sqrt{(2Aa + B)^2 - 4A(Aa^2 + Ba + C)}}{2(Aa^2 + Ba + C)}$$
$$= -(2Aa + B) \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2(Aa^2 + Ba + C)} = p \pm \frac{\sqrt{d}}{q},$$

där $p = -(2Aa + B)$ och $q = 2(Aa^2 + Ba + C)$. Observera att ξ har samma diskriminant d som β. Eftersom a är det största heltal mindre än β så gäller att $0 < 1/\xi < 1$. Med andra ord är $\xi > 1$. Vi har att $\beta = a + 1/\xi$ vilket medför att $\xi = 1/(\beta - a)$.

Vidare ges konjugatet ξ' av

$$\xi' = \left(\frac{1}{\beta - a}\right)' = \frac{1}{(\beta - a)'}, = \frac{1}{(\beta' - a)} = -\frac{1}{(a - \beta')}.$$

Givet att $-1 < \beta' < 0$ och $a \geq 1$ så följer att $a - \beta' > 1$ och att $-(a - \beta') < -1$. Detta medför att $-1 < \xi' = -1/(a - \beta') < 0$ och vi har visat att ξ är en reducerad kvadratisk irrationalitet. ■

Om β är en reducerad kvadratisk irrationalitet så gäller även att $-1/\beta'$ är det. Enligt definition 3.3 är $\beta > 1$ och $-1 < \beta' < 0$, vilket medför att $-1/\beta' > 1$ och vi får att konjugatet $(-1/\beta')' = -1/\beta$. Eftersom $\beta > 1$ så medför det att $-1 < -1/\beta < 0$.

Sats 3.4 *Om ξ är en reducerad kvadratisk irrationalitet så existerar det precis ett tal $b \in \mathbb{Z}$, sådant att $b + 1/\xi$ är en reducerad kvadratisk irrationalitet. Det talet är $b = [-1/\xi']$.*

Bevis. Vi vet att konjugatet till $b + 1/\xi$ ges av $b + 1/\xi'$ och att om $b + 1/\xi$ skall vara en reducerad kvadratisk irrationalitet, så måste för konjugatet gälla att

$$-1 < b + \frac{1}{\xi'} < 0 \qquad \text{vilket medför att} \qquad -1 + \left(-\frac{1}{\xi'}\right) < b < -\frac{1}{\xi'}.$$

Med andra ord måste b vara det största heltal som är mindre än $-1/\xi'$, det vill säga $b = [-1/\xi']$. Vidare vet vi att för ξ' gäller att $-1 < \xi' < 0$ vilket medför att $1/\xi' < -1$. Om $b = [-1/\xi']$ vilket innebär att $-1 < b + 1/\xi' < 0$ så måste heltalet $b \geq 1$ och eftersom $0 < 1/\xi < 1$ så följer att $b + 1/\xi > 1$ är en reducerad kvadratisk irrationalitet. ■

Vi ska nu visa att kedjebråksutvecklingen av en reducerad kvadratisk irrationalitet är rent periodisk.

Sats. 3.5 *Om β är reducerad så är kedjebråksutvecklingen av β rent periodisk.*

Bevis. Låt β vara en reducerad kvadratisk irrationalitet. Sätt att $\xi_1 = \beta$ och vi får enligt sats 3.3 att

$$\beta = \xi_1 = \frac{p_1 + \sqrt{d}}{q_1} = a_1 + \frac{1}{\xi_2} > 1$$

där $a_1 = [\xi_1]$ och $\xi_2 > 1$ är reducerad. På samma sätt får vi sedan för ξ_2 att

$$\xi_2 = \frac{p_2 + \sqrt{d}}{q_2} = a_2 + \frac{1}{\xi_3} > 1,$$

där $a_2 = [\xi_2]$ och $\xi_3 > 1$ är reducerad. Genom att upprepa processen enligt sats 3.3 får vi för reducerade tal $\xi_i = a_i + 1/\xi_{i+1}$ med $i \geq 1$, allmänt att

$$\xi_i = \frac{p_i + \sqrt{d}}{q_i} = a_i + \frac{1}{\xi_{i+1}} > 1,$$

där $a_i = [\xi_i]$ och $\xi_{i+1} > 1$ är ett reducerat kvadratiskt irrationellt tal. Alltså har vi att

$$\beta = \xi_1 = a_1 + \frac{1}{\xi_2} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\xi_3}} = \cdots = a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_i + \frac{1}{\xi_{i+1}}}}.$$

Eftersom β är ett irrationellt tal kommer dess kedjebråksutveckling vara oändlig och vi får därmed ett oändligt antal fullständiga kvoter. Vi såg tidigare att för varje val av diskriminant d så finns det endast ett ändligt antal reducerade kvadratiska irrationaliteter och följaktligen ett ändligt antal fullständiga kvoter. Det innebär att de fullständiga kvoterna kommer börja upprepa sig. För några tal n och l där $0 < n < l$ får vi därför att $\xi_n = \xi_l$ vilket medför att $\xi_n' = \xi_l'$ och att $-1/\xi_n' = -1/\xi_l'$. Eftersom

$$\xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}} = \xi_l = a_l + \frac{1}{\xi_{l+1}},$$

där $a_n = [\xi_n]$ och $a_l = [\xi_l]$, så måste $a_n = a_l$ och då följer att $\xi_{n+1} = \xi_{l+1}$. På analogt sätt erhålls $\xi_{n+2} = \xi_{l+2}, \xi_{n+3} = \xi_{l+3}$, och så vidare.

Om $n > 1$ så får vi för reducerade tal ξ_{n-1} och ξ_{l-1} att omvänt,

$$\xi_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\xi_n} \qquad \text{och} \qquad \xi_{l-1} = a_{l-1} + \frac{1}{\xi_l},$$

samt

$$-1 < \xi'_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\xi_n{}'} < 0, \qquad \text{och} \qquad -1 < \xi'_{l-1} = a_{l-1} + \frac{1}{\xi_l{}'} < 0.$$

Detta medför att

$$0 < \left(-\frac{1}{\xi_n{}'}\right) - a_{n-1} < 1, \qquad \text{och} \qquad 0 < \left(-\frac{1}{\xi_l{}'}\right) - a_{l-1} < 1,$$

och alltså att $a_{n-1} = \left[-1/\xi_n'\right]$ och $a_{l-1} = \left[-1/\xi_l'\right]$. Eftersom $-1/\xi_n' = -1/\xi_l'$ så följer att $a_{n-1} = a_{l-1}$ och därmed att $\xi_{n-1} = \xi_{l-1}$. Genom att upprepa processen $n-1$ gånger får vi att $\xi_{n-1} = \xi_{l-1}$, $\xi_{n-2} = \xi_{l-2}$, $\xi_{n-3} = \xi_{l-3}$, …, $\xi_{n-(n-1)} = \xi_1 = \xi_{l-(n-1)}$. Alltså får vi för $\beta = \xi_1$ att $\beta = \xi_1 = [a_1; a_2, \ldots, a_{l-n}, \xi_{l-n-1} = \xi_1] = [\overline{a_1, a_2, \ldots, a_{l-n}}]$ och vi har visat att β har en rent periodisk kedjebråksutveckling.■

Med hjälp av sats 3.5 ska vi nu visa omvändningen till sats 3.2 och vi utgår från beviset i [5, kap 4.6].

Följdsats 3.6 *Om β är en kvadratisk irrationalitet så är kedjebråksutvecklingen av β periodisk.*
Bevis: Låt β vara en kvadratisk irrationalitet med kedjebråksutvecklingen

$$\beta = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\beta_{n+1}}}},$$

där $\beta_{n+1} > 1$ är en kvadratisk irrationalitet. Enligt sats 2.6 har vi för $i = n+1$ att

$$\beta = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \beta_{n+1}] = \frac{\beta_{n+1} x_n + x_{n-1}}{\beta_{n+1} y_n + y_{n-1}}. \tag{3.5}$$

där x_n/y_n och x_{n-1}/y_{n-1} är konvergenter till β. Vi tar nu konjugatet av ekvation 3.5 och får att

$$\beta' = \frac{\beta'_{n+1} x_n + x_{n-1}}{\beta'_{n+1} y_n + y_{n-1}},$$

vilket i sin tur medför att

$$\beta'_{n+1} = -\frac{\beta' y_{n-1} - x_{n-1}}{\beta' y_n - x_n} = -\frac{y_{n-1}}{y_n}\left(\frac{\beta' - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}}{\beta' - \frac{x_n}{y_n}}\right) = -\frac{y_{n-1}}{y_n}\left(\frac{\beta' - C_{n-1}}{\beta' - C_n}\right).$$

Vi har tidigare visat att varje konvergent med udda index är mindre än varje konvergent med jämnt index och att dessa konvergerar mot det irrationella tal som gav upphov till kedjebråksutvecklingen till att börja med. När $n \to \infty$ så följer alltså att $C_n \to \beta$ och $C_{n-1} \to \beta$ och därmed att

$$\frac{\beta' - C_{n-1}}{\beta' - C_n} \to \frac{\beta' - \beta}{\beta' - \beta} = 1.$$

Enligt sats 2.3 har vi för $n \geq 3$ att $0 < y_{n-1} < y_n$ vilket medför att $-1 < -y_{n-1}/y_n < 0$. För ett tillräckligt stort värde på n finner vi att $(\beta' - C_{n-1})/(\beta' - C_n)$ är lite mindre än 1. Detta medför att $-1 < \beta'_{n+1} < 0$ och alltså att β_{n+1} är reducerad. Enligt sats 3.5 innebär det att β_{n+1} har en rent periodisk kedjebråksutveckling och alltså har β en periodisk kedjebråksutveckling och satsen är bevisad. ■

4. Pells ekvation

I detta avsnitt ska vi titta närmare på den speciella diofantiska ekvationen

$$x^2 - dy^2 = q, \tag{4.0}$$

där x, y är heltal, och q, d är givna heltal men d inte är en perfekt kvadrat. Vi kommer avgränsa oss till fallet $q = \pm 1$ och visa att ekvationen (4.0) går att lösa med hjälp av kedjebråk. Vi ska också ge några exempel där vi bland annat kommer se att ekvationen i fallet $q = 1$ alltid har en lösning men att detsamma inte gäller $q = -1$. Avsnittet bygger i huvudsak på [1, kap. 2.4], [5, kap. 4.7-4.8] och [7, avsnitt 6]. Satser och bevis utgår från [4, kap 7.8].

4.1 Introduktion

Ekvationen (4.0) i fallet $q = \pm 1$ kallas allmänt för Pells ekvation och har en lång historia. Indiska matematiker intresserade sig för den tidigt, däribland Brahmagupta (f.598) som bland annat lyckades bestämma den så kallade fundamentallösningen till $x^2 - 92y^2 = 1$ och Bhaskara II (f.1114) som uppfann en metod för att hitta lösningar till Pells ekvation, vilken har en nära koppling till kedjebråken. Som exempel lyckades Bhaskara bestämma fundamentallösningen till $x^2 - 61y^2 = 1$ [7. kap. 4]. Intressant är att långt senare, år 1657, utmanade Fermat den franske matematikern Bernard Frenicle de Bessy att lösa Pells ekvation i just detta fall. Han utmanade även de två engelsmännen Brouncker och Wallis att bland annat hitta heltalslösningar till Pells ekvation i fallet $q = 1$. Fermat, som var känd för att inte ge bevis, hävdade att ekvationen har oändligt många heltalslösningar. Engelsmännen antog utmaningen och lyckades hitta en metod att generera lösningar, vilken kan formuleras med hjälp av kedjebråk. Att ekvationen alltid har icke-triviala lösningar för alla $d > 0$ som inte är kvadrater visade de dock inte. Först att bevisa detta var Lagrange år 1766.

Vi ska alltså betrakta den speciella diofantiska ekvationen

$$x^2 - dy^2 = \pm 1, \tag{4.1}$$

där d är ett givet heltal. Om d är en perfekt kvadrat, det vill säga $d = a^2$ där a är ett nollskilt heltal, får vi ett ändligt antal lösningar. Vi kan nämligen skriva ekvationen på formen

$$x^2 - dy^2 = (x - ay)(x + ay) = \pm 1$$

Detta ger fyra möjliga fall:

Fall 1: $\begin{cases} x - ay = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$ medför $(x, y) = (1,0)$,

Fall 2: $\begin{cases} x - ay = -1 \\ x + ay = -1 \end{cases}$ medför $(x, y) = (-1,0)$

Fall 3: $\begin{cases} x - ay = \ \ 1 \\ x + ay = -1 \end{cases}$ medför $(x, y) = (0, \pm 1)$ om $a = \pm 1$ annars ingen lösning.

Fall 4: $\begin{cases} x - ay = -1 \\ x + ay = \ \ 1 \end{cases}$ medför $(x, y) = (0, \pm 1)$ om $a = \pm 1$ annars ingen lösning.

Även i fallet $d < 0$ får vi endast ett ändligt antal lösningar, vilket enkelt inses. Vi ska nu betrakta det intressantare fallet, nämligen då d är ett positivt heltal, men inte en perfekt kvadrat. Med andra ord Fermats utmaning.

4.2 Kedjebråksutvecklingen av $\sqrt{d}$

Låt d vara ett positivt heltal som inte är en perfekt kvadrat. Eftersom $\sqrt{d}$ är ett irrationellt tal så är dess kedjebråksutveckling oändlig och vi kan skriva att $\sqrt{d} = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ där $a_1 = \lfloor\sqrt{d}\rfloor$. Vidare kan vi skriva att $a_1 + \sqrt{d} = [2a_1, a_2, a_3, \dots]$. Enligt definition 3.3 är $a_1 + \sqrt{d} = (a_1 + \sqrt{d})/1$ reducerad och enligt sats 3.5 har därför $a_1 + \sqrt{d}$ en rent periodisk kedjebråksutveckling, säg med period n:

$$a_1 + \sqrt{d} = [2a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_1, a_2, \dots] = [\overline{2a_1, a_2, \dots, a_n}]. \tag{4.2}$$

Detta medför att

$$\sqrt{d} = [a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_1, a_2, \dots] = [a_1, \overline{a_2, \dots, a_n, 2a_1}], \tag{4.3}$$

och vi kan följaktligen skriva att

$$\sqrt{d} = [a_1, a_2, \dots, a_n, \beta_{n+1}]$$

där $\beta_{n+1} = a_1 + \sqrt{d}$. Enligt sats 2.6 får vi för $i = n + 1$ att

$$\sqrt{d} = [a_1, a_2, \dots, a_n, \beta_{n+1}] = \frac{\beta_{n+1}x_n + x_{n-1}}{\beta_{n+1}y_n + y_{n-1}} = \frac{(a_1 + \sqrt{d})x_n + x_{n-1}}{(a_1 + \sqrt{d})y_n + y_{n-1}},$$

där x_n/y_n är konvergenter till kedjebråksutvecklingen av $\sqrt{d}$. Detta medför att

$$dy_n + (a_1y_n + y_{n-1})\sqrt{d} = a_1x_n + x_{n-1} + x_n\sqrt{d}. \tag{4.4}$$

Med andra ord kan vi skriva att

$$dy_n = a_1x_n + x_{n-1}, \qquad x_n = a_1y_n + y_{n-1}, \tag{4.5}$$

vilket medför att

$$x_{n-1} = dy_n - a_1x_n, \qquad y_{n-1} = x_n - a_1y_n. \tag{4.6}$$

Från sats 2.4 har vi att $x_ny_{n-1} - x_{n-1}y_n = (-1)^n$. Genom att använda (4.6) i denna ekvation fås

$$x_n(x_n - a_1y_n) - (dy_n - a_1x_n)y_n = (-1)^n$$

vilket i sin tur ger att

$$x_n^2 - dy_n^2 = (-1)^n = \pm 1, \tag{4.7}$$

Om n är jämn får vi att $x_n^2 - dy_n^2 = 1$ och en konvergent $C_n = x_n/y_n$ ger således en lösning till $x^2 - dy^2 = 1$. Om n i stället är udda får vi att $x_n^2 - dy_n^2 = -1$ och en konvergent $C_n = x_n/y_n$ ger en lösning till $x^2 - dy^2 = -1$. Om n är udda och vi söker en lösning till $x^2 - dy^2 = 1$ behöver vi fortsätta kedjebråksutvecklingen n steg till eftersom

$$\sqrt{d} = [a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_1, \dots] = [a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, \dots],$$

där $a_n = a_{2n}$. Med andra ord har vi att en konvergent $C_{2n} = x_{2n}/y_{2n}$ ger en lösning $(x, y) = (x_{2n}, y_{2n})$ till ekvationen $x^2 - dy^2 = 1$.

Samma resonemang gäller självfallet om vi fortsätter utvecklingen:

$$a_{2n} = a_{4n} = a_{6n} = \cdots = a_{rn}$$

där $r \in \mathbb{Z}^+$ är jämn. Detta medför att vi kan skriva ekvationen (4.7) på formen

$$x_{rn}^2 - dy_{rn}^2 = (-1)^{rn} = \pm 1. \quad (4.8)$$

Låt oss nu ge några exempel där vi hittar en heltalslösning till Pells ekvation med hjälp av kedjebråk.

Exempel 1: Hitta en heltalslösning till ekvationen $x^2 - 5y^2 = \pm 1$.

Vi tillämpar kedjebråksalgoritmen på talet $\sqrt{5}$ och får att

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cdots}} = [2, \overline{4}].$$

Vi observerar att perioden är udda och består av en partiell kvot. Alltså ger konvergenten $C_1 = x_1/y_1$ där $x_1 = 2, y_1 = 1$ en lösning till ekvationen $x^2 - 5y^2 = -1$. Vi söker också en lösning till ekvationen $x^2 - 5y^2 = 1$ och behöver därför fortsätta kedjebråksutvecklingen ett steg till. Alltså ger konvergenten $C_2 = x_2/y_2$ där $x_2 = 9, y_2 = 4$ en lösning till ekvationen.

Exempel 2: Hitta en heltalslösning till ekvationen $x^2 - 13y^2 = \pm 1$.

Vi tillämpar kedjebråksalgoritmen på talet $\sqrt{13}$ och får att

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}} = [3, \overline{1,1,1,1,6}].$$

Perioden är udda och består av fem partiella kvoter och alltså ger konvergenten $C_5 = x_5/y_5$ där $x_5 = 18, y_5 = 5$ en lösning till ekvationen $x^2 - 13y^2 = -1$. Vi söker också en lösning till ekvationen $x^2 - 13y^2 = 1$ och behöver därför fortsätta kedjebråksutvecklingen fem steg till. Alltså ger konvergenten $C_{10} = x_{10}/y_{10}$ där $x_{10} = 649, y_{10} = 180$ en lösning till ekvationen.

Exempel 3: Hitta en heltalslösning till ekvationen $x^2 - 3y^2 = \pm 1$.

Vi tillämpar kedjebråksalgoritmen på talet $\sqrt{3}$ och får att

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}} = [1, \overline{1,2}].$$

Vi observerar att perioden består av ett jämnt antal partiella kvoter, nämligen två. Alltså ger konvergenten $C_2 = x_2/y_2$ där $x_2 = 2, y_2 = 1$ en lösning till ekvationen $x^2 - 3y^2 = 1$. Vi söker också en heltalslösning till $x^2 - 3y^2 = -1$, men eftersom perioden är jämn kan vi inte gå tillväga på samma sätt som i föregående exempel. Betyder det att ekvationen saknar lösning? Vi ska återkomma till detta exempel alldeles strax och motivera att så faktiskt är fallet.

4.3 Lösningar till Pells ekvation

Vi har alltså sett att kedjebråksutveckling av $\sqrt{d}$ ger oss en lösning till Pells ekvation. Vi ska nu visa att varje positiv lösning $(x, y) = (h, k)$ till $x^2 - dy^2 = \pm 1$ ges av en konvergent h/k till kedjebråksutvecklingen av $\sqrt{d}$. Låt $(x, y) = (h, k)$ där $h, k > 0$ vara en lösning till antingen $x^2 - dy^2 = 1$ eller $x^2 - dy^2 = -1$.

Med andra ord kan vi skriva att

$$h^2 - dk^2 = \left(h + k\sqrt{d}\right)\left(h - k\sqrt{d}\right) = -\left(k\sqrt{d} - h\right)\left(k\sqrt{d} + h\right) = \pm 1.$$

Genom att ta beloppet av differensen mellan $\sqrt{d}$ och h/k får vi att

$$\left|\sqrt{d}-\frac{h}{k}\right| = \left|\frac{k\sqrt{d}-h}{k}\right| = \left|\frac{-\left(k\sqrt{d}-h\right)\left(k\sqrt{d}+h\right)}{-k\left(k\sqrt{d}+h\right)}\right| = \left|\frac{\mp 1}{\left(\sqrt{d}+h\right)k^2}\right| = \frac{1}{\left(\sqrt{d}+h\right)k^2} < \frac{1}{2k^2}$$

och enligt sats 2.14 är h/k en konvergent i kedjebråksutvecklingen av $\sqrt{d}$. Alltså ges alla lösningar till Pells ekvation $x^2 - dy^2 = \pm 1$ av konvergenter i kedjebråksutvecklingen av $\sqrt{d}$.

Enligt sats 2.3 gäller för $C_i = x_i/y_i$ där $i = n \geq 1$, att talföljderna $x_1, x_2, x_3, \ldots$ respektive $y_1, y_2, y_3, \ldots$ är växande. Det innebär att den första konvergenten $C_n = x_n/y_n$ som ger en lösning $(x, y) = (x_n, y_n)$ till Pells ekvation $x^2 - dy^2 = \pm 1$ också ger den minsta lösningen, nämligen den så kallade *fundamentallösningen*.

Nästa sats ger ett partiellt svar på frågan när det finns lösningar till Pells ekvation $x^2 - dy^2 = -1$.

Sats 4.1. *[8, kap.3.4, s.142] Om d är ett primtal så är Pells ekvation på formen $x^2 - dy^2 = -1$ lösbar om och endast om $d = 2$ eller om $d \equiv 1$ (mod 4).*

Bevis: Vi kan skriva ekvationen på formen $x^2 + 1 = dy^2$. Om ekvationen har en lösning (x, y) så är d en delare till $x^2 + 1$ och då är antingen $d = 2$ eller $d \equiv 1$ (mod 4). Om $d = 2$ så är $(x, y) = (1,1)$ en lösning till ekvationen.

Vi ska nu visa att det finns en lösning för varje primtal $d = 4t + 1$. Låt $(x, y) = (x_1, y_1)$ vara fundamentallösningen till Pells ekvation $x^2 - dy^2 = 1$. Om x_1 är jämn så får vi att $x_1^2 \equiv 0$ (mod 4) och eftersom $d \equiv 1$ (mod 4) så får vi att $y_1^2 \equiv dy_1^2 \equiv -1 \equiv 3$ (mod 4). Eftersom detta inte är möjligt så måste x_1 vara udda. Vidare skriver vi om $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ på formen

$$x_1^2 - 1 = (x_1 - 1)(x_1 + 1) = dy_1^2.$$

Eftersom x_1 är udda har vi att största gemensamma delare $SGD(x_1 - 1, x_1 + 1) = 2$. Följaktligen får vi att

$$x_1 + 1 = 2a^2 \quad \text{och} \quad x_1 - 1 = 2db^2$$

eller att

$$x_1 - 1 = 2a^2 \quad \text{och} \quad x_1 + 1 = 2db^2$$

där a, b är positiva heltal. Om $x_1 + 1 = 2a^2$ och $x_1 - 1 = 2db^2$ får vi att $2a^2 - 1 = 2db^2 + 1$ vilket medför att $a^2 - db^2 = 1$. Men då är $x_1 > a$ och $y_1 > b$, vilket är en motsägelse ty $(x, y) = (x_1, x_1)$ är fundamentallösningen till $x^2 - dy^2 = 1$. Alltså måste $x_1 - 1 = 2a^2$ och $x_1 + 1 = 2db^2$. Detta medför att $a^2 - db^2 = -1$. ■

Med satsen ovan inses att $x^2 - 3y^2 = -1$ saknar lösning eftersom 3 $\not\equiv$ 1,2 (mod 4).

Vi ska nu visa att när vi hittat fundamentallösningen till ekvationen $x^2 - dy^2 = \pm 1$, så kan vi med hjälp av denna också hitta alla andra positiva lösningar till ekvationen.

Sats 4.2 *Låt $(x, y) = (a, b)$ vara fundamentallösningen till $x^2 - dy^2 = \pm 1$. Då ges alla positiva lösningar av $(x, y) = (h_r, k_r)$ där $h_r + \sqrt{d}k_r = \left(a + b\sqrt{d}\right)^r$ för $r \in \mathbb{Z}^+$.*

Lösningen $(x, y) = (h_r, k_r)$ ges av att expandera $\left(a + b\sqrt{d}\right)^r$ och sedan sammanfoga de rationella respektive irrationella delarna var för sig. Som exempel ges för $(h_1, k_1) = (a, b)$ att $h_2 + \sqrt{d}k_2 = \left(a + b\sqrt{d}\right)^2$ där $(h_2, k_2) = (a^2 + b^2d, 2ab)$.

Bevis. För enkelhetens skull visar vi endast fallet då fundamentallösningen uppfyller ekvationen $x^2 - dy^2 = 1$. Först visar vi att $(x, y) = (h_r, k_r)$, där $r = 1,2,3, \ldots$, är en lösning till $x^2 - dy^2 = 1$. Vi vet att $(x, y) = (a, b)$ är en lösning till ekvationen och att $h_r + \sqrt{d}k_r = \left(a + b\sqrt{d}\right)^r$. Eftersom konjugatet av en produkt är lika med produkten av konjugaten har vi att $h_r - \sqrt{d}k_r = \left(a - b\sqrt{d}\right)^r$.

Vidare får vi att

$$h_r^2 - dk_r^2 = \left(h_r - \sqrt{d}k_r\right)\left(h_r + \sqrt{d}k_r\right) = \left(a - b\sqrt{d}\right)^r\left(a + b\sqrt{d}\right)^r = (a^2 - db^2)^r = 1^r = 1.$$

Alltså är $(x, y) = (h_r, k_r)$ en lösning till ekvationen.

Nu ska vi visa att alla positiva lösningar ges på just detta sätt. Antag nu att det finns en positiv lösning $(x, y) = (u, v)$ där $u \neq h_r, v \neq k_r$ för alla r. Vi vet att $a + b\sqrt{d} > 1$ och $u + v\sqrt{d} > 1$. Men då måste det finnas något heltal $l \geq 0$ sådant att

$$\left(a + b\sqrt{d}\right)^l \leq u + v\sqrt{d} < \left(a + b\sqrt{d}\right)^{l+1}$$

Om likhet råder får vi att $\left(a + b\sqrt{d}\right)^l = u + v\sqrt{d}$ vilket medför att $h_l = u$ och $k_l = v$ vilket är en motsägelse. Om strikt olikhet råder får vi att

$$\left(a + b\sqrt{d}\right)^l < u + v\sqrt{d} < \left(a + b\sqrt{d}\right)^{l+1} = \left(a + b\sqrt{d}\right)^l\left(a + b\sqrt{d}\right).$$

Division med $\left(a + b\sqrt{d}\right)^l$ ger sedan att

$$1 < \left(u + v\sqrt{d}\right)\left(a + b\sqrt{d}\right)^{-l} < \left(a + b\sqrt{d}\right).$$

Eftersom $\left(a - b\sqrt{d}\right)^l\left(a + b\sqrt{d}\right)^l = 1$ medför att $\left(a - b\sqrt{d}\right)^l = \left(a + b\sqrt{d}\right)^{-l}$ så följer att

$$1 < \left(u + v\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right)^l < \left(a + b\sqrt{d}\right).$$

Vi definierar nu heltalen h, k genom $h + k\sqrt{d} = \left(u + v\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right)^l$ och multiplicerar därefter $h + k\sqrt{d}$ med sitt konjugat $(h + k\sqrt{d})' = h - k\sqrt{d}$ vilket ger att

$$h^2 - k^2d = (h - k\sqrt{d})(h + k\sqrt{d})$$

$$= \left(u - v\sqrt{d}\right)\left(a + b\sqrt{d}\right)^l\left(u + v\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right)^l$$

$$= (u^2 - v^2d)(a^2 - b^2d)^l = 1.$$

Alltså är $(x, y) = (h, k)$ en lösning till $x^2 - dy^2 = 1$ där $1 < h + k\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$. Eftersom $h + k\sqrt{d} > 1$ så följer att $0 < \left(h + k\sqrt{d}\right)^{-1} = h - k\sqrt{d} < 1$ vilket medför att

$$\frac{1}{2}\left(h + k\sqrt{d}\right) > \frac{1}{2} \qquad \text{och} \qquad 0 < \frac{1}{2}\left(h - k\sqrt{d}\right) < \frac{1}{2}.$$

För h respektive $k\sqrt{d}$ observeras att

$$h = \frac{1}{2}\left(h + k\sqrt{d}\right) + \frac{1}{2}\left(h - k\sqrt{d}\right) > 0 \qquad \text{och} \qquad k\sqrt{d} = \frac{1}{2}\left(h + k\sqrt{d}\right) - \frac{1}{2}\left(h - k\sqrt{d}\right) > 0.$$

Alltså är $(x, y) = (h, k)$ en positiv lösning till $x^2 - dy^2 = 1$. Eftersom $(x, y) = (a, b)$ är den minsta positiva lösningen till ekvationen så måste $h > a$ och $k > b$ och då är $h + k\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$ en motsägelse. Alltså ges alla positiva lösningar av h_r, k_r. Fallet då fundamentallösningen $(x, y) = (a, b)$ uppfyller $x^2 - dy^2 = -1$ visas på liknande sätt.■

4.4 Fermats utmaning i fallet $d = 61$.

Vi inledde avsnitt 4.1 med att nämna Pells ekvation i fallet $d = 61$. Låt oss nu lösa detta exempel.

Exempel 4.4 Vi skall bestämma fundamentallösningen till $x^2 - 61y^2 = 1$.

Vi tillämpar kedjebråksalgoritmen (1.2) på det irrationella talet $\sqrt{61}$, vilket ger att

$$\sqrt{61} = 7 + (\sqrt{61} - 7) = 7 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{61}-7}} = 7 + \frac{1}{\frac{\sqrt{61}+7}{12}} = \left[7; \frac{\sqrt{61}+7}{12}\right]$$

$$= \left[7; 1, \frac{\sqrt{61}+5}{3}\right] = \left[7; 1,4, \frac{\sqrt{61}+7}{4}\right] = \left[7; 1,4,3, \frac{\sqrt{61}+5}{9}\right] = \left[7; 1,4,3,1 \frac{\sqrt{61}+4}{5}\right]$$

$$= \left[7; 1,4,3,1,2, \frac{\sqrt{61}+6}{5}\right] = \left[7; 1,4,3,1,2,2, \frac{\sqrt{61}+4}{9}\right] = \left[7; 1,4,3,1,2,2,1, \frac{\sqrt{61}+5}{4}\right]$$

$$= \left[7; 1,4,3,1,2,2,1,3, \frac{\sqrt{61}+7}{3}\right] = \left[7; 1,4,3,1,2,2,1,3,4, \frac{\sqrt{61}+5}{12}\right]$$

$$= \left[7; 1,4,3,1,2,2,1,3,4,1, \sqrt{61}+7\right] = \left[7; 1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14, \frac{\sqrt{61}+7}{12}\right]$$

Vi ser i sista steget ovan att eftersom $(\sqrt{61}+7)/12$ upprepas så har en ny period börjat och kedjebråksutvecklingen följer (4.3), så vi kan skriva att $\sqrt{61} = [7; \overline{1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14}]$. Vidare beräknar vi tillhörande konvergenter $C_i = x_i/y_i$ för $i = 1,2,\ldots$ och använder dessa för att beräkna ekvationen $x_i^2 - 61y_i^2$.

Se Tabell 7.1 för de tolv första konvergenterna i kedjebråksutvecklingen av $\sqrt{61}$.

Tabell 7.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$C_i = \frac{x_i}{y_i}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{39}{5}$	$\frac{125}{16}$	$\frac{164}{21}$	$\frac{453}{58}$	$\frac{1070}{137}$	$\frac{1523}{195}$	$\frac{5639}{722}$	$\frac{24079}{3083}$	$\frac{29718}{3805}$	$\frac{440131}{56353}$
$x_i^2 - 61y_i^2$	-12	3	-4	9	-5	5	-9	4	-3	12	-1	12

I Tabell 7.1 ser vi att den elfte konvergenten $C_{11} = x_{11}/y_{11}$ där $x_{11} = 29718$ och $y_{11} = 3805$ ger fundamentallösningen till $x^2 - 61y^2 = -1$. Med andra ord får vi att

$$x_{11}^2 - 61y_{11}^2 = 29718^2 - 61 \cdot 3805^2 = -1.$$

Vi vill dock bestämma fundamentallösningen till ekvationen $x^2 - 61y^2 = 1$. Enligt ekvation 4.8 ger $C_{rn} = x_{rn}/y_{rn}$ där $r = 1$ och periodlängden $n = 11$, fundamentallösningen $(x, y) = (x_{11}, y_{11})$ till ekvationen $x^2 - 61y^2 = -1$. Eftersom n är udda ger konvergenten $C_{rn} = x_{rn}/y_{rn}$ där $r = 2$ och $n = 11$, fundamentallösningen $(x, y) = (x_{22}, y_{22})$ till $x^2 - 61y^2 = 1$. Vi kan nu fortsätta kedjebråksutvecklingen i elva steg till, men eftersom det ger upphov till ännu längre uträkningar så ska vi för enkelhetens skull utnyttja fundamentallösningen $(x, y) = (x_{11}, y_{11})$ till $x^2 - 61y^2 = -1$.

Vi sätter att $(h_r, k_r) = (x_{rn}, y_{rn})$ där $r = 1$ och $n = 11$ ger fundamentallösningen $(h_1, k_1) = (x_{11}, y_{11})$. Enligt sats 4.2 ger alla udda r lösningar till ekvationen. För jämna r får vi lösningar till $x^2 - 61y^2 = 1$.

Den minsta lösningen får vi därmed för $r = 2$:

$$h_2 + \sqrt{61}k_2 = \left(h_1 + k_1\sqrt{61}\right)^2 = \left(x_{11} + y_{11}\sqrt{61}\right)^2 = {x_{11}}^2 + y_{11}^2 61 + 2x_{11}y_{11}\sqrt{61}$$

där $(h_2, k_2) = (x_{11}^2 + y_{11}^2 \cdot 61, 2 \cdot x_{11} \cdot y_{11}) = (1766319049, 226153980)$.

Vi kontrollerar lösningen genom att stoppa in $(x, y) = (h_2, k_2)$ i ekvationen $x^2 - 61y^2 = 1$ och får

$$h_2^2 - 61k_2^2 = 1766319049^2 - 61 \cdot 226153980^2 = 1.$$

Vi ser i exempel 4.4 att den minsta positiva lösningen till Pells ekvation $x^2 - 61y^2 = 1$ utgörs av väldigt stora heltal. I tabellen nedan ger vi några fler exempel på fundamentallösningar till Pells ekvation vilka ger oss en uppfattning om hur lösningarna kan variera i storlek.

Tabell 7.3

d	x	y
3	2	1
5	9	4
13	649	580
61	1766319049	226153980
67	48842	5967
73	2281249	267000
94	2143295	221064
109	158070671986249	15140424455100

År 1657 skrev Fermat ett brev till kollegan Frenicle med slutsatsen att hans utmaning endast syftar till att bestämma de heltal som uppfyller Pells ekvation. Fermat menade att det inte krävdes en särskilt begåvad aritmetiker för att bestämma de rationella lösningarna till ekvationen. Från resultatet i exempel 4.4 och *Tabell 7.5* kan vi i någon mening förstå varför Fermat utmanade sina kollegor att hitta specifikt heltalslösningar. Det är dessutom imponerande att den indiske astronomen och matematikern Bhaskara flera hundra år tidigare lyckades lösa motsvarande exempel.

5. Referenser

[1] Brezinski, Claude, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer, Berlin, Heidelberg,1991.

[2] Coppel, William, *Number Theory: An introduction to mathematics Part A*, Springer, New York, 2006.

[3] Euler, Leonard, *Introductio in Analysin Infinitorium* (1748). Översättning: Introduction to Analysis of the Infinite, Springer-Verlag, New York , 1988.

[4] Niven, Ivan och Zuckerman, Herbert S och Montgomery, Hugh L, *An Introduction To The Theory of Numbers*, Upplaga 5, John Wiley and Sons Inc, New York, 1991.

[5] Olds, C.D, *Continued Fractions*, Random House and The L. W. Singer Company, San Jose, 1963.

[6] Persson, Arne och Böiers, Lars-Christer, *Analys i en variabel*, Upplaga 3, Studentlitteratur, Lund, 2015.

[7] Tambour, Torbjörn, *Kedjebråk: nästan bortglömd matematik*, Matematiska institutionen Stockholms Universitet, 2002.

[8] Titu, Andreescu och Andrica, Dorin och Cucurezeanu, Ion, *An Introduction To Diophantine Equations:A problem-based approach*, Birkhäuser, New York, 2010.