SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

En resa bland de reella talen

av

Filip Lindhfors

2021 - No K4

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

En resa bland de reella talen

Filip Lindhfors

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2021

En resa bland de reella talen

Filip Lindhfors

27 januari 2021

Sammanfattning

Som uppsatsens titel antyder kommer vi genomföra en resa bland de reella talen. Vi möter Eudoxos och hans proportionslära. Dessutom träffar vi Richard Dedekind och fördjupar oss i Dedekindsnitt, en metod för att konstruera de reella talen. På vägen kommer vi även möta de naturliga talen och bevisa några av de vanliga räknelagarna.

Nyckelord: Dedekindsnitt, Eudoxos proportionslära, irrationella tal, naturliga tal, reella tal, supremum.

Abstract

As the title of the thesis suggests we will do a journey amongst the real numbers. We meet Eudoxus and his theory of proportion. Furthermore we meet Richard Dedekind and learn about Dedekind cuts, a method for constructing the real numbers. On the road we will also meet the natural numbers and prove some of the ordinary laws of arithmetic.

Key words: Dedekind cuts, Eudoxus' theory of proportion, irrational numbers, natural numbers, real numbers, supremum.

Innehåll

1 Inledning

Spänn fast era säkerhetsbälten för nu påbörjar vi vår resa bland de reella talen. Resan kommer bli något krokig men under resans gång är syftet att på olika sätt möta de reella talen och därigenom fördjupa våra kunskaper om dessa tal. De reella talen är något som alla skolelever möter i undervisningen. I grundskolans tidiga år används tal till stor del för att räkna antal och eleverna börjar med att räkna med de naturliga talen. De lär sig de grundläggande räknesätten; addition, subtraktion, multiplikation och sedermera division. I mellanstadiet möter eleverna rationella tal och de möter under grundskoletiden även irrationella tal som $\sqrt{2}$ och π.

De reella talen är ”fundamentala”, för att använda matematikprofessorn Michael Henles ord (Henle, 2012). De reella talen används i all matematikundervisning och inom de flesta matematiska områden men de är även en grund för mätning inom forskning och industrin. Utan de reella talen skulle mycket av matematiken vara förändrad. Till exempel bygger begrepp som kontinuitet och inom analysen välkända satser som satsen om största och minsta värde och satsen om mellanliggande värden på de reella talens existens. Andra delar av matematiken som är beroende av de reella talen är exempelvis förhållandet mellan cirkelns diameter och omkrets, som ju bygger på talet π och vissa trigonometriska värden, som ju innehåller kvadratrötter.

Trots att de reella talen är så viktiga för matematiken så är de något som de flesta tar för givet. Man kanske tänker på de reella talen som ”alla tal”, de rationella och de irrationella talen tillsammans, eller som en tallinje. Det är i alla fall framför allt på dessa sätt som jag har tänkt på de reella talen. Men är det möjligt att nå en djupare förståelse för dessa tal och finns det någon teori bakom de reella talen? Detta är frågor som jag efter två terminers universitetsstudier i matematik inte kan besvara, då det inte varit något som tagits upp varken på föreläsningar eller i kurslitteraturen. Det verkar således som att de reella talen även på universitetsnivå tas för givet.

De reella talen har en lång historia och i denna text kommer vi börja med att presentera Eudoxos proportionslära, en över 2300 år gammal teori för irrationella tal. Därefter kommer vi i Avsnitt 3 fokusera på de naturliga talen och bevisa några av de vanliga räknelagarna såsom kommutativitet och associativitet, men även ta upp ett avsnitt om de rationella talen. Efter detta kommer vi i Avsnitt 4 fokusera på Dedekindsnitt, en teori för de reella talen.

1.1 Huvudsakliga källor

I detta avsnitt tänkte jag kortfattat nämna vilka mina huvudsakliga källor har varit. Den källa som jag kanske har haft mest nytta av i skrivandet av denna uppsats är John Stillwells bok *The Real Numbers - An Introduction to Set Theory and Analysis*. Stillwell är en 78-årig australiensisk matematikprofessor, som för ungefär 50 år sedan doktorerade vid Massachusetts Institute of Technology och som undervisat en stor del av sitt liv på Monash University i Melbourne. Boken har varit väldigt användbar, framför allt för avsnittet om de naturliga talen och avsnittet om Dedekindsnitt.

En annan källa som jag har haft stor nytta av är *Matematisk analys II* av Carl Hyltén-Cavallius och Lennart Sandgren. Även om denna källa har ganska många år på nacken så har den varit användbar för avsnittet om Dedekindsnitt. En tredje källa som bör nämnas i detta avsnitt är det klassiska verket Elementa av Euklides, som jag läst vissa delar av. Det har varit spännande och lärorikt att ta del av hur matematiker som Euklides och Eudoxos resonerade för över 2000 år sedan. Även om språket var krångligt och det tog lång tid att läsa (jag fick läsa om många gånger) så tycker jag att det har varit givande läsning.

2 Eudoxos proportionslära

Vår resa tar avstamp i det gamla Grekland. Här kommer vi möta pythagoréerna och ett bevis för att $\sqrt{2}$ är irrationellt. Dessutom kommer vi möta Eudoxos och hans proportionslära, en teori för irrationella tal.

2.1 Historia

Eudoxos föddes omkring år 400 före vår tideräkning i den forntida grekiska staden Knidos, som ligger i nuvarande Turkiet. Han studerade bland annat medicin och filosofi men var främst verksam inom matematiken och astronomin och undervisades bland annat av Platon. Inom astronomin studerade Eudoxos planeter och andra himlakroppars rörelse. Inom det matematiska området var det främst geometri som Eudoxos ägnade sig åt. Förutom proportionsläran är han känd för att ha utvecklat uttömningsprincipen, som är en metod för att beräkna areor och volymer av krökta figurer och således en föregångare till teorin om integraler. Metoden går kortfattat till som följer. I figuren inskrivs en följd av n stycken polygoner och arean av dessa polygoner kommer konvergera mot den krökta figurens area när n blir stort. Eudoxos bevisade bland annat att volymen av en kon är en tredjedel av en cylinders volym, om de har samma basyta och höjd, och att volymen av en pyramid även den är en tredjedel av en prismas volym, om de har samma basyta och höjd.

Omkring 100 år innan Eudoxos födelse bevisades att $\sqrt{2}$ inte kunde skrivas som en kvot av två heltal, det vill säga att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal. Detta bevis genomfördes av pythagoréerna (Pythagoras lärjungar), eventuellt av en man vid namn Hippasos. Vid denna tid ansågs all matematik och till och med hela universum, i alla fall av pythagoréerna, vara uppbyggd av heltalen och kvoter av heltal. Att $\sqrt{2}$ bevisades vara ett irrationellt tal måste verkligen ha haft en stor påverkan på den samtida synen på matematik. Pythagoréerna verkar dock ha haft väldigt svårt för denna upptäckt. Det finns en del myter om att Hippasos antingen kastades överbord av någon av pythagoréerna eller att han till och med dömdes till döden med dränkning av Pythagoras, antingen för att ha lyckats med beviset eller att för omvärlden ha avslöjat det.

2.1.1 Bevis av att $\sqrt{2}$ är irrationellt

Följande bevis är en modern version av pythagoréernas bevis av att $\sqrt{2}$ är irrationellt. En version av beviset finns även publicerad i Elementa, ett verk från ungefär 300 f.v.t. som samlade den dåvarande kunskapen inom matematik. Beviset är ett så kallat motsägelsebevis där vi utgår från motsatsen, nämligen att $\sqrt{2}$ är rationellt. Vi antar alltså att $\sqrt{2}$ kan skrivas som kvoten av två heltal. Om dessa båda heltal har en gemensam faktor kan vi förkorta kvoten så långt som möjligt. När vi väl gjort detta kan vi skriva:

$$\sqrt{2} = \tfrac{m}{n}, \text{ där } m \text{ och } n \text{ är heltal, som saknar gemensam faktor.}$$

Att m och n saknar gemensam faktor innebär att båda ej kan vara jämna för då skulle vi kunna förkorta kvoten med 2. Vi kvadrerar båda sidorna:

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \iff 2n^2 = m^2.$$

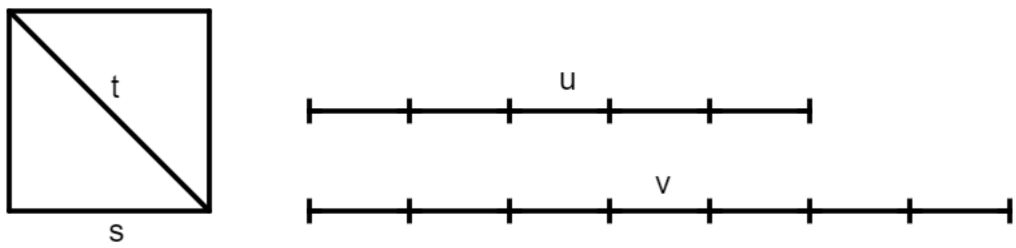
Här ser vi att $2n^2$ är ett jämnt tal, eftersom det är produkten av det jämna talet 2 och ett heltal (n^2 är ju ett heltal då n är ett heltal). Därmed måste även m^2 vara jämnt. Vi kan vidare dra slutsatsen att m måste vara ett jämnt tal eftersom kvadraten på ett udda tal alltid är udda. Vi kan därmed skriva: $m = 2k$, där k är ett heltal. Detta ger:

$$2n^2 = (2k)^2 \iff 2n^2 = 4k^2 \iff n^2 = 2k^2.$$

Med samma resonemang som ovan ser vi att n^2 är ett jämnt tal och att även n är jämnt. Vi har alltså kommit fram till att både m och n måste vara jämna, men detta motsäger vårt antagande om att m och n saknar gemensam faktor. Eftersom att vi kommer fram till denna motsägelse kan $\sqrt{2}$ inte skrivas som kvoten av två heltal och måste således vara ett irrationellt tal.

2.2 Proportionsläran

Eudoxos skapade sin proportionslära på ett sådant sätt att man inte direkt behövde använda irrationella tal men att det ändå var möjligt att hantera inkommensurabla storheter. Två storheter är inkommensurabla om förhållandet dem emellan inte kan skrivas som ett rationellt tal. I Figur 1 nedan visas två inkommensurabla sträckor s och t, där s är sidan av en kvadrat och t är kvadratens diagonal. I figuren visas även två kommensurabla sträckor u och v.



Figur 1: Inkommensurabla och kommensurabla sträckor.

Vi kan se att förhållandet mellan u och v är $5:7$ eller med andra ord att sträckan v är $\frac{7}{5}$ av sträckan u. Här har vi alltså hittat ett gemensamt mått och med hjälp av detta mått kunnat mäta båda sträckorna. För att beskriva geometriska storheter som längd och area använde sig Eudoxos inte av tal, som ju bland pythagoréerna varit i fokus för matematiken. Proportionsläran bygger istället på förhållanden. I Euklides Elementa definieras ett förhållande som en storleksrelation mellan två storheter av samma sort. Två storheter av samma sort är till exempel två areor. Enligt denna definition är det inte tillåtet att ha ett förhållande mellan en sträcka och en area, då de är olika typer av storheter. Däremot går det utmärkt att jämföra förhållandet mellan till exempel två sträckor med förhållandet mellan två areor. Såhär definieras liket mellan två förhållanden i en svensk översättning av Elementa:

Definition 2.1. Storheter sägs vara i samma förhållande, en första till en andra och en tredje till en fjärde, när lika multiplar av den första och den tredje samtidigt är antingen större, samtidigt lika eller samtidigt mindre än lika multiplar av den andra och den fjärde när de tagits mot varandra med vilka multiplar som helst var och en med var och en (Elementa, bok V).

För att tydliggöra denna definition börjar vi med att införa lite notation. A, B, C och D är fyra storheter medan m och n är godtyckliga multiplar. Att storheten A till B är i samma förhållande som storheten C är till D kan skrivas på följande sätt, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, om följande gäller:

$$mA > nB \Leftrightarrow mC > nD,$$
$$mA = nB \Leftrightarrow mC = nD,$$
$$mA < nB \Leftrightarrow mC < nD.$$

Ett annat ekvivalent sätt att formulera proportionsläran är som följer:
Två tal, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, om det för varje rationellt tal $r = \frac{m}{n}$ gäller att

$$r < \frac{A}{B} \implies r < \frac{C}{D},$$
$$r = \frac{A}{B} \implies r = \frac{C}{D},$$
$$r > \frac{A}{B} \implies r > \frac{C}{D}.$$

2.3 Ett förtydligande exempel

För att ytterligare förtydliga definitionen tas ett konkret exempel upp, nämligen Proposition I i del VI av Elementa, som vi ska bevisa. Denna sats handlar om att arean av två trianglar som har samma höjd förhåller sig till varandra som sina baser. I Elementa uttrycks satsen som följer:

Sats 2.2. *Trianglar, som har samma höjd, är till varandra som baserna.*

Bevis. Vi låter $\triangle ABC$ och $\triangle ADE$ vara två godtyckliga trianglar med höjden AO. Triangeln $\triangle ABC$ har basen BC och $\triangle ADE$ har basen DE. Därefter sätter vi ut en ny punkt, B_2, på ett sådant sätt att $|B_2C| = 2 \cdot |BC|$, och att $|BC| = |B_2B|$. Vi fortsätter på samma sätt att sätta ut punkter, $B_3, ..., B_m$, på ett sådant sätt att:

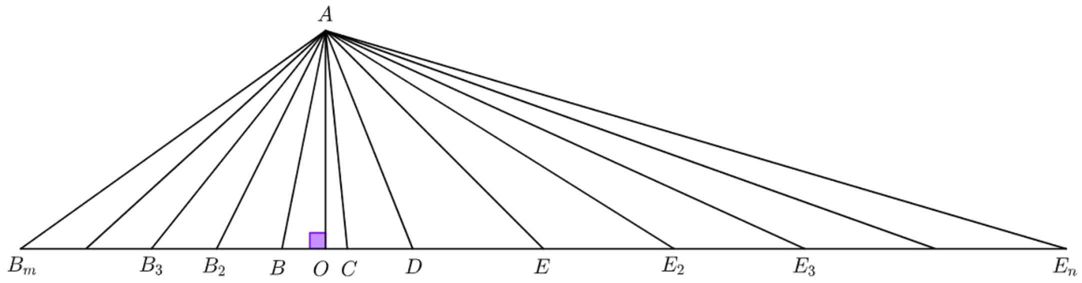
$$1)\ |B_mC| = m \cdot |BC|,$$
$$2)\ |BC| = |B_mB_{m-1}|.$$

Dessutom drar vi sträckorna $AB_2, AB_3, ..., AB_m$. Vidare sätter vi på samma sätt som ovan ut punkterna $E_2, E_3, ..., E_n$ så att:

$$1)\ |DE_n| = n \cdot |DE|,$$

$$2)\ |DE| = |E_{n-1}E_n|.$$

Därefter drar vi sträckorna AE_2, AE_3 och så vidare, vilket illustreras i Figur 2:



Figur 2: Illustration till bevis av Sats 2.2.

Eftersom $|BC| = |B_2B| = ... = |B_mB_{m-1}|$, så är arean av trianglarna $\triangle ABC$, $\triangle AB_2B, ..., \triangle AB_mB_{m-1}$ lika. Här använder vi oss av proposition 38 från första boken av Elementa; ”Trianglar som ligger på lika baser och mellan samma paralleller är lika med varandra,” alltså att två trianglar med samma bas och höjd har samma area. Detta ger oss även att arean av triangeln $\triangle AB_iC$ är i gånger så stor som arean av $\triangle ABC$, eftersom höjden är densamma och basen är i gånger så lång. På samma sätt får vi att arean av $\triangle ADE_j$ är j gånger så stor som arean av $\triangle ADE$. Eftersom $\triangle AB_iC$ och $\triangle ADE_j$ har samma höjd så har vi att:

$$|B_mC| > |DE_n| \implies area(\triangle AB_mC) > area(\triangle ADE_n),$$
$$|B_mC| = |DE_n| \implies area(\triangle AB_mC) = area(\triangle ADE_n),$$
$$|B_mC| < |DE_n| \implies area(\triangle AB_mC) < area(\triangle ADE_n).$$

Om till exempel basen B_mC är längre än basen DE_n så är alltså arean av $\triangle AB_mC$ större än arean av $\triangle ADE_n$, eftersom de båda trianglarna har samma höjd. Förhållandet mellan längden av trianglarnas baser är alltså samma som förhållandet av deras areor och satsen är därmed bevisad med hjälp av proportionsläran. $\square$

Ovanstående implikationer kan även uttryckas på följande sätt för att tydligare koppla detta exempel till definitionen om likhet mellan två förhållanden:

$$m \cdot |BC| > n \cdot |DE| \implies area(\triangle AB_mC) > area(\triangle ADE_n),$$
$$m \cdot |BC| = n \cdot |DE| \implies area(\triangle AB_mC) = area(\triangle ADE_n),$$
$$m \cdot |BC| < n \cdot |DE| \implies area(\triangle AB_mC) < area(\triangle ADE_n).$$

Här har vi uttryckt förhållandet mellan trianglarnas baser och areor på ett sätt som tydliggör Definition 5 i Elementas bok V. I vårt exempel är de fyra storheterna två baser samt två triangelareor och vi visade att dessa storheter är i samma förhållande.

3 Från de naturliga till de rationella talen

Vi lämnar Grekland, irrationella tal och proportionsläran och reser mot de naturliga talen. Precis som de naturliga talen stod i centrum hos pythagoréerna kommer de naturliga talen stå i centrum i detta avsnitt. Med hjälp av mängdlära är det möjligt att konstruera de naturliga talen på ett sådant sätt att Peanos axiom är uppfyllda. Peanos axiom är nio axiom för de naturliga talen som formulerades av den italienska matematikern Giuseppe Peano och som publicerades 1889. Tre av dessa axiom kommer presenteras i Avsnitt 3.1. Vi kommer inte konstruera de naturliga talen utan utgå från att de naturliga talen är följande mängd, $\{0, 1, 2, 3, ...\}$. Vi betecknar denna mängd med $\mathbb{N}$ och konstaterar att den uppfyller Peanos axiom.

Utifrån de naturliga talen kommer vi i detta avsnitt definiera addition och multiplikation av naturliga tal samt bevisa några av de vanliga räknereglerna med hjälp av induktion. Fokus kommer att ligga på associativa och kommutativa lagen för addition (Avsnitt 3.1) respektive multiplikation (Avsnitt 3.2). Därefter kommer vi göra en avstickare och kortfattat introducera de positiva rationella talen (Avsnitt 3.3).

Vi börjar med att införa en funktion $S(a)$ som skickar ett naturligt tal a till efterföljande naturliga tal. Matematiskt skrivs detta som: $S(a) = a + 1$. Exempelvis är $S(0) = 1$ och $S(S(0)) = S(1) = 2$. Med denna notation kan vi således skriva mängden av de naturliga talen som: $\mathbb{N} = \{0, S(0), S(1), ...\}$. Här kan nämnas att $S(a) \neq 0$, då det inte finns något naturligt tal vars efterföljare är talet 0. Att funktionen betecknas med bokstaven S beror på att efterföljare eller efterträdare översatt till engelska är ”successor.”

3.1 Addition av naturliga tal

Innan vi fortsätter med att definiera addition av naturliga tal kan här nämnas att både denna definition och multiplikationsdefinitionen i Avsnitt 3.2 bygger på Peanos axiom. Ett av dessa har redan nämnts ovan, nämligen att talet 0 inte är efterföljare till något naturligt tal. Ett annat av axiomen handlar om att två olika naturliga tal inte kan ha samma efterföljare. Ett tredje av Peanos axiom är induktionsaxiomet, vilket är centralt för bevisen i detta avsnitt och Avsnitt 3.2. Induktionsaxiomet bygger på två kriterier för de naturliga talen som formuleras nedan:

1. Det naturliga talet 0 (eller i vissa fall talet 1) har en viss egenskap.
2. Ett naturligt tal n har denna egenskap och detta implicerar att efterföljaren till n också har denna egenskap.

Om båda dessa kriterier är uppfyllda för en egenskap har varje naturligt tal egenskapen, enligt induktionsaxiomet. Det första av kriterierna kommer vi att kalla för bassteget och det andra kriteriet för induktionssteget. Efter att addition har definierats är den huvudsakliga målsättningen med detta avsnitt att utifrån denna definition kunna bevisa den kommutativa lagen för addition av naturliga tal, men att på vägen till detta mål även bevisa associativitet. Kommutativitet och associativitet hos addition är två exempel på egenskaper hos de naturliga talen som i detta avsnitt kommer att bevisas med induktion. Vi definierar addition av naturliga tal nedan.

Definition 3.1. Addition av två naturliga tal m och n definieras som:

$$m + 0 = m \qquad (A1),$$

$$m + S(n) = S(m + n) \qquad (A2).$$

För att kunna bevisa kommutativitet behöver vi först bevisa att addition av naturliga tal är associativ. Men innan vi gör detta ska vi med additionsdefinitionen (A2) som utgångspunkt betrakta talet $n + 1$:

$$\begin{aligned} n + 1 &= n + S(0) && \text{enligt definitionen av talet 1,} \\ &= S(n + 0) && \text{enligt A2,} \\ &= S(n) && \text{enligt A1.} \end{aligned}$$

Vi ser alltså att $S(n) = n + 1$, vilket är som förväntat. Per definition tar ju S-funktionen ett naturligt tal n och skickar det till nästkommande naturliga tal. Nu ska vi med induktion på n bevisa den associativa lagen för addition av naturliga tal; att $l + (m + n) = (l + m) + n$ för alla naturliga tal l, m och n. Vi börjar med bassteget, där $n = 0$ och studerar den associativa lagens vänster- respektive högerled:

$$l + (m + 0) = l + m,$$

$$(l + m) + 0 = l + m.$$

Här utnyttjas additionsdefinitionen A1 i båda dessa fall och vi ser att den associativa lagen för addition av naturliga tal håller för alla l och m då $n = 0$. Vi fortsätter med induktionssteget och antar att $l + (m + n) = (l + m) + n$ gäller för alla l och m och för något n, säg $n = k$. Vi behöver bevisa att detta även gäller för det efterföljande naturliga talet, $n = S(k)$, vilket görs nedan:

$$\begin{aligned}
l + (m + S(k)) &= l + S(m + k) && \text{enligt A2,}\\
&= S(l + (m + k)) && \text{också enligt A2,}\\
&= S((l + m) + k) && \text{efter vårt induktionsantagande,}\\
&= (l + m) + S(k) && \text{enligt A2.}
\end{aligned}$$

Med hjälp av additionsdefinitionen och vårt induktionsantagande har vi bevisat att den associativa lagen gäller för addition av naturliga tal, det vill säga att $l + (m + n) = (l + m) + n$.

För att kunna bevisa den kommutativa lagen för addition av naturliga tal underlättar det om vi först bevisar att 0 är det addititva identitetselementet, alltså att $m + 0 = m = 0 + m$, för alla naturliga tal m. Att $m + 0 = m$ följer direkt från additionsdefinitionen (A1). Att $0 + m = m$ behöver däremot bevisas med induktion på m. Vi inleder med bassteget, då $m = 0$:

$$0 + 0 = 0 \qquad \text{följer direkt från A1.}$$

Induktionssteget: Nu antar vi att $0 + m = m = m + 0$ gäller för $m = k$ och ska bevisa att det även gäller för $m = S(k)$:

$$\begin{aligned}
0 + S(k) &= S(0 + k) && \text{enligt A2,}\\
&= S(k + 0) && \text{av induktionsantagandet,}\\
&= S(k) && \text{enligt A1.}
\end{aligned}$$

Vi har med induktion bevisat att $m + 0 = m = 0 + m$ för alla naturliga tal m. Med andra ord är alltså 0 identitetselement vid addition av naturliga tal.

För att ytterligare underlätta läsandet och förståelsen av beviset av den kommutativa lagen ska vi här presentera ett induktionsbevis för att $m + 1 = 1 + m$ för alla naturliga tal m. Vi inleder med bassteget, då $m = 0$. Om vi utgår från det vi har bevisat ovan, nämligen att $0 + m = m + 0$ för alla m har vi specifikt att $0 + 1 = 1 + 0$ och därmed är bassteget klart. Nu antar vi att $m + 1 = 1 + m$ för $m = k$ och ska bevisa att det gäller för $m = S(k)$:

$$
\begin{aligned}
S(k)+1 &= S(k)+S(0) && \text{från definitionen av talet 1,}\\
&= S(S(k)+0) && \text{enligt A2,}\\
&= S((k+1)+0) && \text{enligt definitionen av S-funktionen,}\\
&= S(k+1) && \text{enligt A1,}\\
&= S(1+k) && \text{i enlighet med induktionsantagandet,}\\
&= 1+S(k) && \text{enligt A2.}
\end{aligned}
$$

Med induktion har vi bevisat att $m+1=1+m$. Nu är det möjligt att bevisa den kommutativa lagen för addition av naturliga tal, alltså att $m+n=n+m$. Vi bevisar detta för alla m genom induktion på n. Bassteget är uppdelat i två fall; $n=0$ och $n=1$. Både dessa fall är bevisade ovan. Först bevisades att $m+0=0+m$ och därefter att $m+1=1+m$. Därmed kan vi direkt gå vidare med induktionssteget. Vi antar att $m+n=n+m$ gäller för alla m och för något n, säg $n=k$ och ska bevisa att det även gäller för $n=S(k)$:

$$
\begin{aligned}
m+S(k) &= m+(k+1) && \text{enligt definitionen av S-funktionen,}\\
&= (m+k)+1 && \text{addition associativ,}\\
&= (k+m)+1 && \text{av vårt induktionsantagande,}\\
&= k+(m+1) && \text{addition associativ,}\\
&= k+(1+m) && \text{från beviset av det andra basfallet,}\\
&= (k+1)+m && \text{addition associativ,}\\
&= S(k)+m && \text{enligt definitionen av S-funktionen.}
\end{aligned}
$$

Vi har med induktion bevisat att $m+n=n+m$, alltså att addition av naturliga tal är kommutativ.

3.2 Multiplikation av naturliga tal

I detta avsnitt definieras multiplikation av naturliga tal och därefter bevisas den associativa och kommutativa lagen för multiplikation av naturliga tal med induktion. Värt att påpeka i detta sammanhang är att detta är en uppsats som i första hand handlar om de reella talen. Därför kommer vissa delar av bevisen i detta avsnitt inte att presenteras till fullo.

Definition 3.2. Multiplikation av två naturliga tal m och n definieras som:

$$
\begin{aligned}
m\cdot 0 &= 0 && \text{(M1),}\\
m\cdot S(n) &= m\cdot n+m && \text{(M2).}
\end{aligned}
$$

Innan vi kan bevisa associativitet och kommutativitet behöver vi bevisa att 1 är identitetselementet vid multiplikation av naturliga tal, det vill säga att $1 \cdot m = m = m \cdot 1$. Vi bevisar endast att $m \cdot 1 = m$ och lämnar beviset av att $1 \cdot m = m$ till läsaren. Bassteget, då $m = 0$:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 1 &= 0 \cdot S(0) && \text{enligt definitionen av talet 1,} \\ &= 0 \cdot 0 + 0 && \text{av M2,} \\ &= 0. \end{aligned}$$

I det sista steget ovan har vi enligt M1 att $0 \cdot 0 = 0$ och enligt $A1$ att $0 + 0 = 0$. Därmed är bassteget bevisat och vi fortsätter med induktionssteget. Vi antar att $m \cdot 1 = m$ gäller för $m = k$ och ska bevisa att det gäller för $m = S(k)$:

$$\begin{aligned} S(k) \cdot 1 &= S(k) \cdot S(0) && \text{enligt definitionen av talet 1,} \\ &= S(k) \cdot 0 + S(k) && \text{enligt M2,} \\ &= 0 + S(k) && \text{enligt M1,} \\ &= S(k) && \text{från beviset av 0 som additivt identitetselement.} \end{aligned}$$

Induktionen är genomförd och av detta tillsammans med beviset av att $1 \cdot m = m$ kan vi dra slutsatsen att $1 \cdot m = m = m \cdot 1$, alltså att 1 är identitetselement vid multiplikation av naturliga tal.

Innan den associativa lagen och sedermera den kommutativa lagen kan bevisas behöver vi bevisa den distributiva lagen, där vi endast bevisar den högra distributiva lagen, alltså att $(l + m) \cdot n = l \cdot n + m \cdot n$. Bassteget, då $n = 1$:

$$\begin{aligned} (l + m) \cdot 1 &= l + m \\ &= l \cdot 1 + m \cdot 1. \end{aligned}$$

Båda dessa steg bygger på beviset av talet 1 som multiplikativt identitetselement. Vi fortsätter med induktionssteget och antar att $(l+m) \cdot n = l \cdot n + m \cdot n$ gäller för alla l och m och för något n, säg $n = k$ och ska som vanligt bevisa att det även gäller för efterföljande heltal:

$$\begin{aligned} (l + m) \cdot S(k) &= (l + m) \cdot k + (l + m) && \text{enligt M2,} \\ &= (l \cdot k + m \cdot k) + (l + m) && \text{enligt induktionsantagandet,} \\ &= (l \cdot k + l) + (m \cdot k + m) && \text{addition kommutativ,} \\ &= l \cdot S(k) + m \cdot S(k) && \text{enligt M2.} \end{aligned}$$

Med hjälp av induktion har vi bevisat den högra distributiva lagen, alltså att $(l+m) \cdot n = l \cdot n + m \cdot n$. Detta bevis kommer användas i beviset av den kommutativa lagen men vi börjar med beviset för att multiplikation av naturliga tal är associativ, det vill säga att $(l \cdot m) \cdot n = l \cdot (m \cdot n)$. I detta bevis kommer vi använda den vänstra distributiva lagen, som lyder: $l \cdot (m+n) = l \cdot m + l \cdot n$. För att bevisa den associativa lagen inleder vi med bassteget, då $n = 0$:

$$\begin{aligned}(l \cdot m) \cdot 0 &= 0 \\ &= l \cdot 0 \\ &= l \cdot (m \cdot 0).\end{aligned}$$

Samtliga av stegen ovan bygger på multiplikationsdefinitionen (M1), alltså att $m \cdot 0 = 0$. Induktionen fortsätter med att vi antar att $(l \cdot m) \cdot n = l \cdot (m \cdot n)$ gäller för alla l och m och för $n = k$ och ska bevisa att det gäller för $n = S(k)$:

$$\begin{aligned}(l \cdot m) \cdot S(k) &= ((l \cdot m) \cdot k) + (l \cdot m) && \text{enligt M2,} \\ &= (l \cdot (m \cdot k)) + (l \cdot m) && \text{enligt vårt induktionsantagande,} \\ &= (l \cdot m) + (l \cdot (m \cdot k)) && \text{addition kommutativ,} \\ &= l \cdot (m + (m \cdot k)) && \text{enligt den vänstra distributiva lagen,} \\ &= l \cdot ((m \cdot k) + m) && \text{addition kommutativ,} \\ &= l \cdot (m \cdot S(k)) && \text{enligt M2.}\end{aligned}$$

Med hjälp av induktion har vi bevisat att multiplikation av naturliga tal är associativ. Innan vi ska bevisa den kommutativa lagen ska vi först bevisa att $0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$. Bassteget, då $n = 0$, följer direkt från M1. Vi antar att $0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$ gäller för $n = k$ och visar att det även gäller för $n = S(k)$. Vi kan först konstatera att $S(k) \cdot 0 = 0$ enligt M1 och behöver således endast bevisa att $0 \cdot S(k) = 0$:

$$\begin{aligned}0 \cdot S(k) &= 0 \cdot k + 0 && \text{enligt M2,} \\ &= 0 + 0 && \text{i enlighet med vårt induktionsantagande,} \\ &= 0 && \text{enligt A1.}\end{aligned}$$

Induktionen är klar och $0 \cdot n = n \cdot 0$ för alla naturliga tal n. Nu är det möjligt att bevisa den kommutativa lagen för multiplikation av naturliga tal; att $m \cdot n = n \cdot m$ genom induktion på n. Bassteget, då $n = 0$, har vi precis bevisat ovan och därmed kan vi fortsätta med induktionssteget. Vi antar att $m \cdot n = n \cdot m$ gäller för alla m

och för något n, säg $n = k$ och ska bevisa att det gäller för nästkommande tal:

$$\begin{aligned}
m \cdot S(k) &= m \cdot k + m && \text{från M2,} \\
&= m + m \cdot k && \text{addition kommutativ,} \\
&= m + k \cdot m && \text{enligt induktionsantagandet,} \\
&= 1 \cdot m + k \cdot m && \text{1 identitetselement vid multiplikation,} \\
&= (1 + k) \cdot m && \text{enligt den högra distributiva lagen,} \\
&= (k + 1) \cdot m && \text{addition kommutativ,} \\
&= S(k) \cdot m && \text{enligt definitionen av S-funktionen.}
\end{aligned}$$

Beviset är klart och således kan vi dra slutsatsen att multiplikation av naturliga tal är kommutativ, det vill säga att $m \cdot n = n \cdot m$.

3.3 De rationella talen

Nu är vi framme vid den ovannämnda avstickaren till de rationella talen. Syftet med detta avsnitt är att kortfattat utvidga de naturliga talen till de rationella talen. Vi gör detta eftersom vi i Avsnitt 4 kommer konstruera de reella talen med hjälp av rationella tal. Rationella tal har varit kända mycket länge. De utvecklades på olika platser, bland annat i Babylonien och i det forntida Egypten. En anledning till att dessa samhällen utvecklade de rationella talen är att tal på bråkform är viktiga inom handel och astonomi.

De naturliga talen, $\mathbb{N}$, kan i ett första steg utvidgas till heltalen, $\mathbb{Z}$, genom att vi även inkluderar negativa heltal. Mängden av heltal är alltså följande mängd: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Det går att visa att heltalen uppfyller de vanliga räknereglerna såsom den distributiva lagen, associativitet och kommutativitet. Vidare har heltalen en viktig egenskap som de naturliga talen saknar, nämligen en additiv invers. För varje heltal a finns ett heltal $-a$ sådant att $a + (-a) = 0$.

Heltalen kan i sin tur utvidgas till de rationella talen, $\mathbb{Q}$. Rationella tal är tal på formen $\frac{m}{n}$, där m och n är heltal och $n \neq 0$. De rationella talen uppfyller samma räkneregler som heltalen men har även en multiplikativ invers. Varje rationellt tal $r \neq 0$ har en multiplikativ invers r^{-1} sådan att $r \cdot r^{-1} = 1$.

I Avsnitt 4.2 kommer vi utifrån de positiva rationella talen konstruera de reella talen, med en metod som kallas för Dedekindsnitt. Därför kommer vi som avslutning på detta avsnitt definiera positiva rationella tal.

Definition 3.3. Ett positivt rationellt tal är ett rationellt tal, alltså ett tal på formen $\frac{m}{n}$, där m och n är heltal och $n \neq 0$, som är strikt större än 0.

Mängden av positiva rationella tal, $\mathbb{Q}^+$, definieras som:

$$\mathbb{Q}^+ = \{a \in \mathbb{Q} : a > 0\}.$$

4 En konstruktion av de reella talen

Vår resa fortsätter och vi färdas i hög hastighet mot de reella talen. Här kommer vi möta en herre vid namn Richard Dedekind och bekanta oss med hans teori för de reella talen. De reella talen har som vi varit inne på en lång historia, först i form av naturliga tal och rationella tal och sedermera upptäckten av att alla tal ej kan skrivas som en kvot av heltal. Denna upptäckt, att de rationella talen har luckor exempelvis för talet $\sqrt{2}$, är en av anledningarna till att vi behöver utvidga de rationella talen, $\mathbb{Q}$, till de reella talen, $\mathbb{R}$. Men vad menas med en lucka bland de rationella talen? Om vi tänker oss att de rationella talen är placerade på en tallinje så täcker de inte hela tallinjen. Med andra ord finns det punkter på tallinjen som inte representerar ett rationellt tal, såsom för det ovan nämnda talet $\sqrt{2}$. Det finns oändligt många irrationella tal och därmed oändligt många luckor bland de rationella talen. De reella talen saknar sådana luckor, en egenskap som vi kallar för fullständighet.

En annan anledning till att vi behöver utvidga de rationella talen är att växande och uppåt begränsade följder av rationella tal inte alltid har ett gränsvärde. Detta kan med andra ord uttryckas som att axiomet om övre gräns inte generellt gäller för de rationella talen. I $\mathbb{Q}$ går det att skapa mängder av tal som är uppåt begränsade av ett rationellt tal men som saknar minsta övre begränsning (supremum). Ett exempel är följande mängd: $M = \{a : a \in \mathbb{Q} \text{ och } a^2 < 2\}$. Mängden M har massor av övre begränsningar bland de rationella talen, till exempel talet $\frac{142}{100}$, men saknar minsta övre begränsning bland de rationella talen. På grund av avsaknaden av denna egenskap fungerar inte vissa inom analysen viktiga satser, till exempel satsen om största och minsta värde, för funktioner i $\mathbb{Q}$.

Trots de reella talens långa historia dröjde det väldigt länge innan en teori för de reella talen utvecklades. Under 1800-talet försökte många matematiker utveckla en teoretisk grund för analysen, en utveckling som kan sägas skedde baklänges. Först utvecklades en teori för grundläggande satser inom analysen, såsom satsen om mellanliggande värden, där bevis av dessa bygger på teorin om gränsvärden. Gränsvärden bygger bland annat på antagandet om att varje monoton och begränsad talföljd konvergerar, vilket i sin tur bygger på de reella talens fullständighet.

Detta skiftade matematikernas fokus mot att utveckla en teori för de reella talen. Den första som konstruerade en sådan teori var Richard Dedekind, ett arbete som publicerades 1872. Denna teori kallas Dedekindsnitt och är vad uppsatsen fortsättningsvis kommer handla om. Genom att utvidga de rationella talen till de reella med hjälp av Dedekindsnitt går det att visa att de reella talen uppfyller ovannämnda egenskaper.

Här kan vi även nämna att Dedekindsnitt är en av de två mest använda metoderna för att konstruera de reella talen. Den andra metoden kallas för Cauchy-följder och är uppkallad efter den franska matematikern Augustin-Louis Cauchy. Cauchyföljder kommer dock inte ges plats i denna uppsats utan fokus kommer ligga på Dedekindsnitt.

4.1 Richard Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916) var en tysk matematiker från Braunschweig, en stad i närheten av Wolfsburg. Hans far arbetade på Collegium Carolinum, en skola som på den tiden var en kombination av gymnasieskola och universitet. Som ungt barn var matematik inte ett av Dedekinds favoritämnen men intresset började senare växa fram och vid 16 års ålder påbörjade han studier i ämnet på Collegium Carolinum. Två år senare bytte Dedekind till Göttingens universitet, där han bland annat studerade differential- och integralkalkyl samt talteori. Vid denna tidpunkt undervisade en 73-årig Carl Friedrich Gauss på Göttingens universitet och Dedekind fick Gauss som handledare under sitt doktorerande. Redan 1852, 21 år gammal, blev Dedekind klar med sin doktorsavhandling om en viss typ av integraler, nämligen Eulers integraler. Därefter flyttade Dedekind till Berlin, där han studerade i ytterligare två års tid för att bli behörig att undervisa på universitetsnivå.

Två år senare flyttade Dedekind tillbaka till Göttingen för att undervisa i både sannolikhet och geometri men han fortsatte samtidigt att läsa olika kurser, såsom kurser i partiella differentialekvationer och talteori. Två av föreläsarna som Dedekind undervisades av var Lejeune Dirichlet och Bernhard Riemann. 1858 fick Dedekind en ny tjänst på Polytechnikum, ett universitet i Zürich. Under hösten samma år, medan Dedekind funderade på sin undervisning i differential- och integralkalkyl, kom han på ett sätt att definiera de reella talen; med så kallade Dedekindsnitt. Denna teori publicerades dock inte förrän 14 år senare i *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, som översatt till svenska blir “Kontinuitet och irrationella tal.” När detta verk publicerades hade Dedekind sedan tio år tillbaka bosatt sig i sin hemstad Braunschweig, då Collegium Carolinum hade fått status som teknologiskt institut och han undervisade där i drygt tre decennier innan han gick i pension.

Förutom Dedekindsnitt är Dedekind känd för att ha introducerat konceptet ideal inom ringteorin. Dessutom föreslog han 1888 ett antal axiom för de naturliga talen, där han utgick från talet 1 och den i Avsnitt 3 introducerade S-funktionen. Året därpå presenterade Peano en ekvivalent men något förenklad version av Dedekinds axiomatisering. Dessa axiom kallas normalt för Peanos axiom men även Dedekind-Peanos axiom brukar användas för att visa på Dedekinds bidrag.

Figur 3: Richard Dedekind.

4.2 Dedekindsnitt

Nu har vi lärt känna Richard Dedekind och är redo att möta hans teori för de reella talen. Dedekindsnitt är en metod för att konstruera de reella talen från de rationella talen, som bygger på mängdlära. Ett Dedekindsnitt (eller ett snitt) är en partition av de rationella talen, $\mathbb{Q}$, i två icke-tomma delmängder D_N och $D_{\ddot{O}}$, där D_N är det nedre och $D_{\ddot{O}}$ det övre Dedekindsnittet. Denna partition av de rationella talen är sådan att D_N saknar största element och där samtliga element i mängden $D_{\ddot{O}}$ är större än varje element i D_N.

Som tidigare nämnts kommer vi utgå från de positiva rationella talen i vår konstruktion av de reella talen. Vi kommer alltså exkludera negativa tal för att underlätta framställningen. Vi börjar med att definiera ett Dedekindsnitt.

Definition 4.1. Ett Dedekindsnitt är en partition av de positiva rationella talen, $\mathbb{Q}^+$, i två delmängder, D_N och $D_{\ddot{O}}$, med följande egenskaper:

1) $D_N \neq \emptyset$,
2) D_N är uppåt begränsad av ett rationellt tal c, sådant att $a < c$ för alla $a \in D_N$,
3) Om $a \in D_N$ så existerar ett $b \in D_N$ sådant att $b > a$,
4) Om $a \in D_N$ och $0 < b < a$, så $b \in D_N$.

I denna definition har vi valt att utgå från det nedre Dedekindsnittet. Det är nämligen så att mängderna D_N och $D_{\ddot{O}}$ var för sig bestämmer den andre. Därför räcker det att fokusera på det nedre Dedekindsnittet, D_N, vilket vi kommer göra i detta avsnitt. Den första egenskapen fastslår att ett nedre Dedekindsnitt är en icke-tom mängd. Enligt den andra egenskapen är ett nedre Dedekindsnitt en uppåt begränsad mängd. Den tredje egenskapen handlar om att D_N saknar ett största element. Den fjärde egenskapen säger att om ett element a tillhör mängden D_N så innehåller D_N även alla positiva rationella tal som är strikt mindre än a. Detta brukar vi benämna som att mängden är sluten nedåt. Vi kommer framöver använda "Dedekindsnitt" eller "snitt" för att beteckna ett nedre Dedekindsnitt. Innan vi presenterar några exempel på Dedekindsnitt ska vi göra en till definition.

Definition 4.2. Mängden av alla reella tal, $\mathbb{R}$, definieras som mängden av alla Dedekindsnitt.

4.2.1 Exempel på Dedekindsnitt

Exempel 1. Ett exempel på ett Dedekindsnitt är följande mängd:

$A = \{a \in \mathbb{Q}^+ : a < \frac{3}{7}\}$.

Mängden A är alltså en mängd som innehåller alla positiva rationella tal strikt mindre än $\frac{3}{7}$. För att visa att detta är ett Dedekindsnitt behöver vi bevisa att mängden uppfyller de fyra egenskaperna (eller kriterierna) för ett snitt.

1) Det första kriteriet är uppfyllt av mängden A. Till exempel har vi att $\frac{1}{7} \in A$, så A är en icke-tom mängd.

2) Vi har även att $c = \frac{5}{7} \notin A$ och att c således är en övre begränsning till mängden.

3) Mängden A uppfyller även det tredje kriteriet, alltså avsaknaden av största element. Till exempel ingår dessa tal i mängden A: $\{\frac{2}{7}, \frac{5}{14}, \frac{8}{21}, \frac{29}{70}, \frac{299}{700}\}$. Om $a \in \mathbb{Q}^+$ kan vi alltid hitta ett b som är större än a och som också tillhör $\mathbb{Q}^+$. Vi antar att vi har hittat ett största element $a \in A$. Då kan vi observera att:

$$a < \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{3}{7}\right) < \frac{3}{7}.$$

Därmed var a inget störst element och mängden A saknar således största element.

4) För att kunna konstatera att mängden A är ett Dedekindsnitt behöver vi avslutningsvis bevisa att A är sluten nedåt. Vi antar att $p \in A$ och att $0 < q < p$. Att $p \in A$ betyder att $p < \frac{3}{7}$. Detta ger oss: $q < p < \frac{3}{7}$ och att $q \in A$. Den fjärde egenskapen är alltså uppfylld och mängden A är ett Dedekindsnitt. Mängden representerar det rationella talet $\frac{3}{7}$ och kallas därför för ett rationellt snitt.

Exempel 2. Vi tar även upp ett exempel på ett irrationellt snitt, alltså ett snitt som representerar ett irrationellt tal. Mängden B nedan representerar det irrationella talet $\sqrt{2}$ och vi ska bevisa att B är ett Dedekindsnitt genom att kontrollera att mängden uppfyller de fyra kriterierna:

$B = \{a \in \mathbb{Q}^+ : a^2 < 2\}$.

1) Det är uppenbart att de första två kriterierna är uppfyllda av denna mängd. Vi har ju för det första att $1 \in B$, eftersom $1^2 < 2$, så B är icke-tom.

2) Vidare har vi att $1.5 \notin B$ eftersom $1.5^2 = 2.25 > 2$ och $b = 1.5$ är alltså en övre begränsning till vår mängd.

3) Att B saknar största element är också möjligt att bevisa. Detta är dock krångligare än i exemplet av det rationella snittet ovan. Vi antar att vi har hittat ett största element $g \in B$, alltså sådant att $g^2 < 2$. Vi börjar med att konstatera att g är ett rationellt tal eftersom g tillhör mängden B, som ju är en mängd som består av rationella tal. Eftersom $g^2 < 2$ finns det ett positivt rationellt tal p sådant att $g^2 + p = 2$. Vi väljer $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ sådant att $\epsilon < 1$. Vidare har vi från $g^2 < 2$ att $g < 1.5$. Vi ska nu studera $g + \epsilon$, som alltså är ett större element än g. Då $\epsilon < 1$ och $g < 1.5$ har vi följande:

$$(g + \epsilon)^2 = g^2 + 2g\epsilon + \epsilon^2 < g^2 + 3\epsilon + \epsilon = g^2 + 4\epsilon.$$

Vi drar oss till minnes att $g^2 + p = 2$. Vidare har vi att $g^2 + 4\epsilon < g^2 + p$ om $\epsilon < \frac{p}{4}$. Om $\epsilon < \frac{p}{4}$ har vi alltså att $(g + \epsilon)^2 < g^2 + 4\epsilon < 2$. Dessutom har vi att $(g + \epsilon)^2$ är större än g. Vi började med att anta att vi hade hittat ett största element g till mängden B. Därefter bevisade vi att g inte var något största element och att B därmed saknar största element (vi kan med hjälp av algoritmen ovan alltid hitta ett större element).

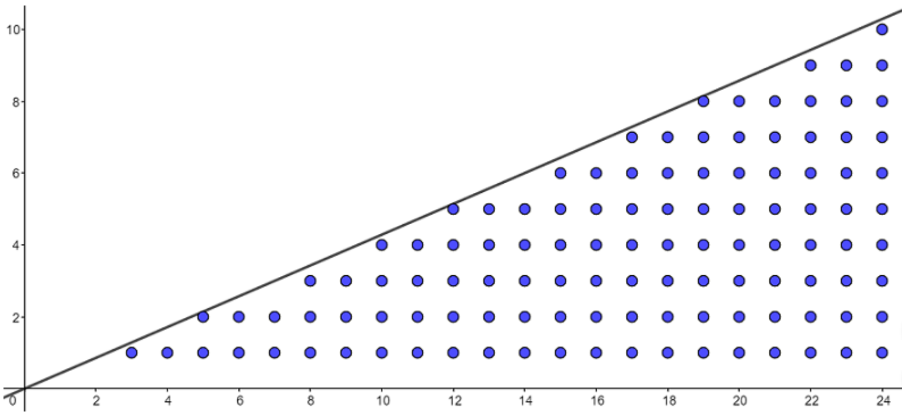
4) Det fjärde kriteriet för ett Dedekindsnitt är även det uppfyllt av vår mängd. Att $a \in B$ betyder att $a^2 < 2$. Om $0 < b < a$ så har vi att $0 < b^2 < a^2 < 2$ och därmed att $b \in B$. Då samtliga fyra egenskaper är uppfyllda är B ett Dedekindsnitt och snittet representerar det irrationella talet $\sqrt{2}$ och kallas därför för ett irrationellt snitt.

För att ytterligare förtydliga vad som menas med ett Dedekindsnitt tar vi även upp två icke-exempel, alltså två mängder som inte är Dedekindsnitt:

1) $C = \{a \in \mathbb{Q}^+ : a \leq \frac{3}{7}\}$,
2) $D = \{a \in \mathbb{Q}^+ : a > \frac{3}{7}\}$.

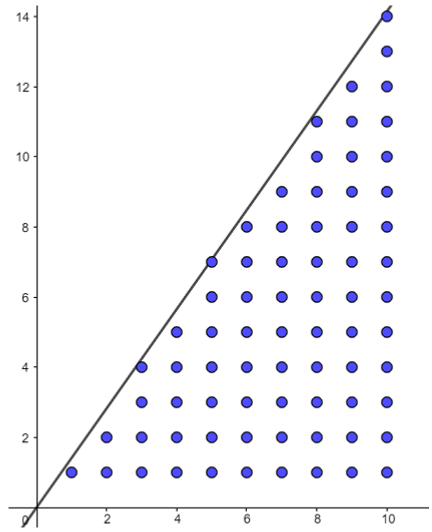
I det första av dessa icke-exempel tillhör $a = \frac{3}{7}$ mängden C men det finns inget element $b \in C$ sådant att $b > \frac{3}{7}$. Denna mängd har alltså ett största element och är således inget Dedekindsnitt. I det andra icke-exemplet har vi att elementet $\frac{5}{7} \in D$ och att $0 < \frac{1}{7} < \frac{5}{7}$ men att $\frac{1}{7} \notin D$. Mängden D uppfyller således inte den fjärde egenskapen eftersom positiva rationella tal som är strikt mindre än $\frac{3}{7}$ ej ingår i mängden.

Vi kan grafiskt visa Dedekindsnitt i ett koordinatsystem. Här ser vi rationella tal som lutningar $\frac{n}{m}$ från origo till andra punkter av typen (m, n) i koordinatsystemet, där m och n är heltal och $m \neq 0$. Nedan visas Dedekindsnittet för vårt första exempel i detta avsnitt, alltså för det rationella talet $\frac{3}{7}$, som ju representerades av mängden $A = \{a \in \mathbb{Q}^+ : a < \frac{3}{7}\}$. Punkterna i koordinatsystemet representerar rationella tal som tillhör A. Till exempel är punkten $(24, 10)$ med eftersom $\frac{10}{24} < \frac{3}{7}$.



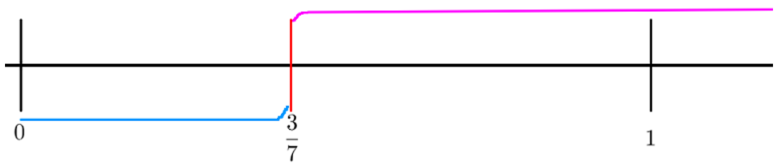
Figur 4: Grafisk representation av $\frac{3}{7}$.

Denna representationsform kan även användas för att representera irrationella tal. Irrationella tal representeras av räta linjer från origo som ej går genom någon punkt av typen (m, n). I Figur 5 visas Dedekindsnittet för $\sqrt{2}$:



Figur 5: Grafisk representation av $\sqrt{2}$.

En annan visuell representation av ett Dedekindsnitt kan göras i form av en tallinje. I Figur 6 visas Dedekindsnittet för talet $\frac{3}{7}$. I bilden är tallinjen indelad i två delar, separerade med en vertikal röd linje vid värdet $\frac{3}{7}$. Mängden av positiva rationella tal på tallinjen till vänster om den röda linjen (den ljusblå sektionen) representerar (det nedre) Dedekindsnittet för $\frac{3}{7}$. Den lila sektionen representerar samtidigt det övre Dedekindsnittet:



Figur 6: Alternativ representation av $\frac{3}{7}$.

4.3 Addition och multiplikation av reella tal

I detta avsnitt kommer vi bevisa att addition respektive multiplikation av två Dedekindsnitt är ett Dedekindsnitt. Därefter kommer några av de vanliga räknelagarna bevisas; nämligen kommutativitet, associativitet och den högra distributiva lagen.

Sats 4.3. *Mängden* $S = A + B = \{a + b : a \in A \text{ och } b \in B\}$ *är ett Dedekindsnitt.*

Satsen säger att summan av två Dedekindsnitt är ett Dedekindsnitt.

Bevis. För att bevisa satsen behöver vi kontrollera de fyra egenskaperna hos ett Dedekindsnitt.

1) Mängderna A och B är två Dedekindsnitt och är alltså två icke-tomma mängder av positiva rationella tal. Av detta följer att S är en icke-tom mängd och vi kan gå vidare till det andra kriteriet.

2) Mängden A är ett snitt, vilket betyder att det finns ett positivt rationellt tal c_1 sådant att $a < c_1$ för alla $a \in A$. På samma sätt har vi att B är ett snitt, vilket betyder att det finns ett positivt rationellt tal c_2 sådant att $b < c_2$ för alla $b \in B$. Vi har alltså att:

$$a < c_1 \text{ och } b < c_2 \implies a + b < c_1 + c_2 = c.$$

Alla element i S är alltså uppåt begränsade av det positiva rationella talet c och kriterium 2 är följaktligen uppfyllt.

3) För att bevisa att S saknar största element börjar vi med att låta $a \in A$ och $b \in B$ vara två godtyckliga element. Eftersom A är ett Dedekindsnitt saknar A största element och det existerar ett $a' \in A$ sådant att $a < a'$. På samma sätt har vi att då B är ett Dedekindsnitt saknar B största element och det existerar ett $b' \in B$ sådant att $b < b'$. Vi har alltså att $a' + b' \in S$ och att $a' + b' > a + b$. Från detta kan vi dra slutsatsen att $a + b$ ej är största element i S och att S ej kan ha något största element.

4) För att kontrollera den fjärde egenskapen för snitt börjar vi med att anta att $s \in S$. Att $s \in S$ betyder att $s = a + b$, där $a \in A$ och $b \in B$. Om $r < s$ kan vi skriva:

$$r = \frac{r}{a+b} \cdot (a + b) = pa + pb, \text{ där } p = \frac{r}{a+b} = \frac{r}{s} < 1.$$

Eftersom $p < 1$ har vi följande:

$$a \in A \text{ och } pa < a \implies pa \in A,$$

$$b \in B \text{ och } pb < b \implies pb \in B.$$

Då $pa \in A$ och $pb \in B$ kan vi se att $r = pa + pb \in S$. Nu har vi visat att de fyra kriterierna är uppfyllda och satsen är därmed bevisad. Om vi adderar två Dedekindsnitt får vi alltså ett Dedekindsnitt. Vi kan även uttrycka detta med andra ord; addition av två reella tal ger en summa i form av ett reellt tal. □

Vi fortsätter med att bevisa att multiplikation av två Dedekindsnitt är ett Dedekindsnitt.

Sats 4.4. *Mängden $P = AB = \{ab : a \in A \text{ och } b \in B\}$ är ett Dedekindsnitt.*

Bevis. För att bevisa att P är ett snitt går vi i tur och ordning igenom de fyra kriterierna för Dedekindsnitt. Detta bevis är väldigt likt beviset av Sats 4.3.

1) Då A och B är Dedekindsnitt är de icke-tomma mängder och P är följaktligen en icke-tom mängd.

2) Att A är ett snitt betyder att det finns ett rationellt tal c_1 sådant att $a < c_1$ för alla $a \in A$. På samma sätt har vi att c_2 är en övre begränsning till alla $b \in B$. Detta ger att $ab < c_1c_2 = c$ och P är alltså en uppåt begränsad mängd.

3) Att P saknar största element följer från det faktum att både A och B är Dedekindsnitt och alltså saknar största element. Om vi väljer ett godtyckligt $a \in A$ och $b \in B$ kan vi alltid hitta ett $a' \in A$ sådant att $a < a'$ och ett $b' \in B$ sådant att $b < b'$. Vi har därför att $a'b' \in P$ eftersom $a' \in A$ och $b' \in B$. Dessutom har vi att $a'b' > ab$ och därmed är ab ej största element i P och vi kan dra slutsatsen att P saknar största element.

4) För att slutföra beviset antar vi att $q = ab \in P$, där $a \in A$ och $b \in B$. Vidare antar vi att $r < q = ab$, vilket är ekvivalent med:

$$\frac{r}{a} < b, \text{ eftersom } a \text{ är ett positivt rationellt tal.}$$

Då $b \in B$ och $\frac{r}{a} < b$ inses med hjälp av den fjärde egenskapen hos Dedekindsnitt att $\frac{r}{a} \in B$. Då $a \in A$ och $\frac{r}{a} \in B$ har vi att $r = a \cdot \frac{r}{a} \in P$ och därmed är P sluten nedåt och beviset är klart. Multiplikation av två Dedekindsnitt (reella tal) ger ett Dedekindsnitt (reellt tal). □

Vi fortsätter med att bevisa några av de vanliga räknelagarna och börjar med att bevisa att addition av positiva reella tal uppfyller kommutativitet, det vill säga att $A + B = B + A$, där A och B är två Dedekindsnitt.

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ och } b \in B\},$$

$$B + A = \{b + a : b \in B \text{ och } a \in A\}.$$

Dessa båda mängder består av samma rationella tal och därmed är $A+B=B+A$ och addition av positiva reella tal uppfyller kommutativitet. Detta följer alltså direkt från kommutativitet hos positiva rationella tal som i sin tur följer från kommutativitet hos de naturliga talen. Vi fortsätter med att bevisa att addition av positiva reella tal är associativ, alltså att $(A+B)+C=A+(B+C)$:

$$(A+B)+C=\{(a+b)+c : a \in A,\ b \in B \text{ och } c \in C\},$$

$$A+(B+C)=\{a+(b+c) : a \in A,\ b \in B \text{ och } c \in C\}.$$

Vi vet att addition av positiva rationella tal uppfyller associativitet, alltså att $(a+b)+c=a+(b+c)$. Detta gör att mängderna ovan består av samma rationella tal och vi kan konstatera att addition av positiva reella tal uppfyller associativitet. På liknande sätt går det att bevisa att multiplikation av positiva reella tal uppfyller kommutativitet och associativitet eftersom positiva rationella tal uppfyller dessa räknelagar. Nu går vi vidare med att bevisa att den högra distributiva lagen gäller för positiva reella tal.

Sats 4.5. *$(A+B)\cdot C=AC+BC$, där A, B och C är Dedekindsnitt.*

Bevis. Vänsterledet betecknar vi med Y och högerledet med Z:

$$Y=(A+B)\cdot C,$$

$$Z=AC+BC.$$

Om vi antar att $r \in Y$ kan vi skriva: $r=(a+b)\cdot c$, där $a \in A, b \in B$ och $c \in C$. Eftersom den högra distributiva lagen gäller för positiva rationella tal har vi att:

$$r=(a+b)\cdot c=ac+bc.$$

Vidare vet vi från hur multiplikation och addition av Dedekindsnitt definieras att:

$$AC=\{ac : a \in A \text{ och } c \in C\},$$

$$BC=\{bc : b \in B \text{ och } c \in C\},$$

$$AC+BC=\{ac+bc : ac \in AC \text{ och } bc \in BC\}.$$

Då $ac \in AC$ och $bc \in BC$ har vi att $r=ac+bc \in Z$. Vi började med att anta att $r \in Y$ och bevisade att $r \in Z$.

Nu ska vi tvärtom anta att $r \in Z$. Att $r \in Z$ betyder att vi kan skriva: $r=ac+bc'$, där $a \in A, b \in B, c \in C$ och $c' \in C$. Här skiljer vi på elementen c och c', som båda tillhör mängden C men som kan vara olika element. Vi låter $q = max\{c, c'\}$, vilket ger $r \leq (a+b) \cdot q$. Eftersom $a \in A$ och $b \in B$ har vi följande:

$$a + b \in A + B, \qquad \text{från Sats 4.3.}$$

Dessutom har vi att $q \in C$ eftersom q är det största av två tal som tillhör C. Detta ger oss:

$$(a+b) \cdot q \in (A+B) \cdot C = Y.$$

Då $r \leq (a+b) \cdot q$ har vi från den fjärde egenskapen i definitionen av ett Dedekind-snitt att $r \in Y$. Nu har vi visat följande implikationer:

$$r \in Y \implies r \in Z,$$

$$r \in Z \implies r \in Y.$$

Därmed är beviset klart och den högra distributiva lagen gäller således för positiva reella tal, det vill säga $(A+B) \cdot C = AC + BC$. □

4.4 Existens av multiplikativ invers hos reella tal

I detta avsnitt kommer vi först bevisa existensen av talet 1 som multiplikativt identitetselement. Därefter är målsättningen att bevisa att positiva reella tal har en multiplikativ invers. För att bevisa detta kommer det krävas en betydligt större ansträngning än vad det krävdes för att bevisa räknelagarna i föregående avsnitt. Vi börjar dock med att definiera det rationella snittet för talet 1. Rationella snitt brukar betecknas med det rationella talet följt av en upphöjd stjärna.

Definition 4.6. $1^* = \{r \in \mathbb{Q}^+ : r < 1\}$.

Mängden 1^* består alltså av alla positiva rationella tal strikt mindre än 1. Nu är det dags att bevisa att 1 är identitetselement vid multiplikation av positiva reella tal.

Sats 4.7. *För alla positiva reella tal A gäller: $A \cdot 1^* = A$.*

Bevis. I detta bevis använder vi samma metod som i beviset av den högra distributiva lagen (Sats 4.5). Vi börjar med att anta att ett godtyckligt element $r \in A \cdot 1^*$ och ska bevisa att r också tillhör A. Att $r \in A \cdot 1^*$ betyder att: $r = aq$, där $a \in A$ och $q < 1$. Då $q < 1$ har vi att $r < a$. Från den fjärde egenskapen hos Dedekind-snitt vet vi att $r \in A$.

Nu antar vi att ett annat godtyckligt element $s \in A$. Från den tredje egenskapen hos Dedekindsnitt vet vi att det ej finns något största element i A. Det existerar alltså ett $t > s$ sådant att $t \in A$. Vi kan nu skriva:

$$s = t \cdot \tfrac{s}{t} = tp, \text{ där } p = \tfrac{s}{t} < 1.$$

Från den fjärde egenskapen hos Dedekindsnitt har vi att $p \in 1^*$ eftersom $p < 1$. Att $t \in A$ och $p \in 1^*$ ger att $s = tp \in A \cdot 1^*$. Nu har vi visat följande implikationer:

$$r \in A \cdot 1^* \implies r \in A,$$

$$s \in A \implies s \in A \cdot 1^*.$$

Därmed är beviset klart och för alla positiva reella tal A gäller att $A \cdot 1^* = A$ eller med andra ord att 1 är multiplikativt identitetselement. □

Vi ska nu definiera två begrepp som kommer användas i beviset av att positiva reella tal har en multiplikativ invers, nämligen begreppen undertal och övertal. I definitionerna nedan är A ett Dedekindsnitt.

Definition 4.8. Om a är ett positivt rationellt tal sådant att $a \in A$ kallas a för ett undertal till A.

Definition 4.9. Om $a \notin A$ kallas a för ett övertal till A.

Nästa steg är att bevisa följande sats, en sats som behövs för att vi ska kunna bevisa existensen av en multiplikativ invers hos positiva reella tal.

Sats 4.10. *Vi låter A vara ett positivt reellt tal och $B_0 = \{\frac{1}{a'} : a'$ är godtyckliga övertal till A förutom det minsta övertalet (om ett minsta övertal existerar)$\}$. Då är B_0 ett Dedekindsnitt.*

Bevis. För att bevisa satsen behöver vi precis som i bevisen av Sats 4.3 och Sats 4.4 bevisa att samtliga fyra egenskaper för Dedekindsnitt är uppfyllda av B_0.

1) Eftersom A är ett positivt reellt tal vet vi från egenskap 2 hos Dedekindsnitt att A är uppåt begränsad av ett rationellt tal c, sådant att $a < c$ för alla $a \in A$. Detta betyder samtidigt att det existerar övertal till A. Om s är ett godtyckligt övertal till A vet vi att $s + 1$ också är ett övertal till A, eftersom det är större än s. Därmed är $s + 1$ garanterat inte det minsta övertalet. Mängden B_0 innehåller därför talet $\frac{1}{s+1}$ och är således icke-tom.

2) Nu ska vi bevisa att B_0 är uppåt begränsad. Om t är ett givet undertal till A och s ett godtyckligt övertal till samma reella tal så har vi att $s > t$, vilket ger:

$$\frac{1}{s} < \frac{1}{t}.$$

B_0 är alltså uppåt begränsad av talet $\frac{1}{t}$ och den andra egenskapen är alltså uppfylld.

3) Vi går vidare med att bevisa att B_0 ej har något största element. Vi har som förutsättning i satsen att B_0 består av tal på formen $\frac{1}{a'}$, där a' är ett övertal till A men inte det minsta övertalet. Eftersom a' inte är det minsta övertalet är det alltid möjligt att hitta ett $b' < a'$ och där b' är ett övertal till A och inte det minsta övertalet. Från detta har vi att:

$$\frac{1}{b'} > \frac{1}{a'} \text{ och } \frac{1}{b'} \in B_0.$$

Vi har alltså bevisat att $\frac{1}{a'}$ ej är det största elementet i B_0 och drar således slutsatsen att B_0 saknar största element.

4) För att slutföra beviset måste vi bevisa att B_0 är sluten nedåt. Om vi antar att $b \in B_0$ kan vi skriva b som $b = \frac{1}{a'}$, där a' är ett övertal till A. Om $b' < b$ har vi att $b' = \frac{1}{a''}$, där $a'' > a'$. Eftersom a' är ett övertal till A och $a'' > a'$ så är a'' också ett övertal till A och garanterat inte det minsta övertalet. Då a'' ej är det minsta övertalet har vi från förutsättningen i satsen att $b' = \frac{1}{a''} \in B_0$. Vi har nu bevisat att B_0 är ett Dedekindsnitt. □

Nu kan vi bevisa att positiva reella tal har en multiplikativ invers.

Sats 4.11. *För det positiva reella talet B_0, från föregående sats, gäller att $AB_0 = 1^*$. Talet B_0 är den multiplikativa inversen till A och betecknas A^{-1}.*

Bevis. I detta bevis kommer vi göra på liknande sätt som i beviset av Sats 4.5. Vi kommer börja med att anta att $r \in AB_0$ och ska bevisa att r även tillhör 1^*. Att $r \in AB_0$ betyder att $r = a \cdot \frac{1}{a'}$, där $a \in A$ och $a' \notin A$. Vi har att $a' > a$ eftersom a är ett undertal och a' ett övertal till A. Detta implicerar att $r = a \cdot \frac{1}{a'} < 1$ och att $r \in 1^*$.

Nu antar vi att $r \in 1^*$, vilket betyder att $r < 1$. Att $r < 1$ betyder i sin tur att $\frac{1}{r} > 1$ och vi kan därmed skriva $\frac{1}{r} = 1 + p$, där $p > 0$. Vi använder oss av binomialsatsen:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^n = (1+p)^n = \binom{n}{0}p^0 + \binom{n}{1}p^1 + \binom{n}{2}p^2 + ... + \binom{n}{n-1}p^{n-1} + \binom{n}{n}p^n.$$

De två första termerna i binomialutvecklingen är:

$$\binom{n}{0}p^0 = 1,$$

$$\binom{n}{1}p^1 = np.$$

Eftersom $p > 0$ och binomialkoefficienter alltid är positiva kan vi dra slutsatsen att $\left(\frac{1}{r}\right)^n > 1 + np$. Nu multiplicerar vi båda sidor med a_0 där $a_0 \in A$:

$$a_0 \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^n > a_0 + a_0 np.$$

Vi kan alltid hitta ett tal a sådant att $a \in A$ samtidigt som $a \cdot \left(\frac{1}{r}\right) \notin A$. Om $a \cdot \left(\frac{1}{r}\right)$ skulle vara det minsta övertalet till A kan vi byta ut detta a mot ett $a'' \in A$, där $a'' > a$. Genom detta kommer $a \cdot \left(\frac{1}{r}\right)$ garanterat vara större än det minsta övertalet. Vidare har vi att:

$$r = a \cdot \left(\frac{r}{a}\right) = a \cdot \frac{1}{\left(\frac{a}{r}\right)} = a \cdot \frac{1}{a \cdot \left(\frac{1}{r}\right)},$$

$$\text{där } a \in A, a \cdot \left(\frac{1}{r}\right) \notin A \text{ och } \frac{1}{a \cdot \left(\frac{1}{r}\right)} \in B_0.$$

Att $\frac{1}{a \cdot \left(\frac{1}{r}\right)} \in B_0$ beror på att B_0 är mängden av tal på formen $\frac{1}{a'}$, där a' är övertal till A men ej det minsta övertalet, vilket ju uppfylls av $\frac{1}{a \cdot \left(\frac{1}{r}\right)}$. Då $a \in A$ och $\frac{1}{a \cdot \left(\frac{1}{r}\right)} \in B_0$ har vi att $r = a \cdot \frac{1}{a \cdot \left(\frac{1}{r}\right)} \in AB_0$. Vi har visat följande implikationer:

$$r \in AB_0 \implies r \in 1^*,$$

$$r \in 1^* \implies r \in AB_0.$$

Detta innebär att beviset är klart och vi har därmed att $AB_0 = 1^*$ och att B_0 är multiplikativ invers till A. $\square$

4.5 Supremumegenskapen hos reella tal

Nu är vi snart i mål på vår resa bland de reella talen. Det återstår endast ett stopp, där vi ska studera supremumegenskapen hos reella tal. Mängden av positiva rationella tal, $\mathbb{Q}^+$, saknar den inom analysen viktiga fullständighetsegenskapen. Som vi tidigare nämnt finns det oändligt många luckor bland de rationella talen, till exempel för talet $\sqrt{2}$. Detta gör att mängden $\{a \in \mathbb{Q}^+ : a^2 < 2\}$ saknar en minsta övre begränsning bland de rationella talen. Denna brist hos de rationella talen är kanske den viktigaste anledningen till att Richard Dedekind definierade reella tal som snitt av rationella tal. Med Dedekinds definition av ett reellt tal går det nämligen att bevisa att en icke-tom och uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta övre begränsning, som vi kallar för supremum av mängden.

Begreppet supremum har vi tidigare stött på under kursen Analys A, men då i form av ett axiom; supremumaxiomet. Skillnaden i detta avsnitt är att vi inte kommer ta denna egenskap för given utan formulera den som en sats, som vi därefter kommer bevisa. Innan vi gör detta ska vi dock först formulera vad vi menar med ordning mellan två reella tal, vilket vi gör med hjälp av mängdlärans inklusion.

Definition 4.12. För två Dedekindsnitt (reella tal), A och B, har vi att
1) $A < B$ om och endast om $A \subset B$,
2) $A \leq B$ om och endast om $A \subseteq B$.

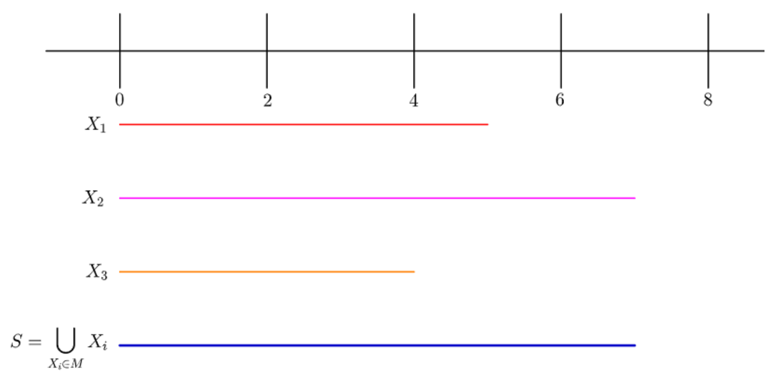
Ett reellt tal $A < B$ om A är en äkta delmängd av B. Och på samma sätt är $A \leq B$ om A är en delmängd av B. Nu fortsätter vi med att formulera och bevisa satsen.

Sats 4.13. *Varje icke-tom uppåt begränsad mängd av positiva reella tal har en minsta övre begränsning, vilken vi kallar för supremum.*

Bevis. Vi börjar beviset genom att låta M vara en icke-tom mängd av positiva reella tal, som är uppåt begränsad av ett godtyckligt reellt tal B. Från detta har vi att för varje reellt tal (Dedekindsnitt) $X_i \in M$ så är $X_i \leq B$. Vi definierar nu följande mängd:

$$S = \bigcup_{X_i \in M} X_i.$$

Mängden S är alltså definierad som unionen av samtliga reella tal som ingår i mängden M och jag påstår att S är supremum av mängden M. För att förtydliga vad som menas med unionen av reella tal presenteras ett exempel med tre reella tal , X_1, X_2 och X_3, vilket illustreras i figuren nedan:



Figur 7: Exempel på en union av tre reella tal.

Mängden $X_1 = \{a \in \mathbb{Q}^+ : a < 5\}$. Denna mängd representeras i Figur 6 av den röda linjen. På samma sätt är mängden $X_2 = \{b \in \mathbb{Q}^+ : b < 7\}$ och representeras av den lila linjen medan den orangea linjen representerar talet 4. Unionen av tre mängder, X_1, X_2 och X_3, är mängden av de element som tillhör minst en av mängderna X_1, X_2 och X_3. I figuren representeras unionen S av den blå linjen.

För att bevisa att S är supremum av mängden M behöver vi för det första bevisa att S är ett Dedekindsnitt. Därefter ska vi bevisa att S är den minsta övre begränsningen till mängden M. För att bevisa att S är ett Dedekindsnitt behöver vi som vanligt i tur och ordning kontrollera de fyra egenskaperna hos Dedekindsnitt.

1) Vi börjar med att bevisa att S är en icke-tom mängd. Mängden M är en mängd som består av positiva reella tal (snitt). Per definition av Dedekindsnitt är de icke-tomma mängder. Därmed är även S, som ju är unionen av dessa snitt, en icke-tom mängd.

2) Från förutsättningen i satsen har vi att mängden M är uppåt begränsad av det reella talet B. För alla $X_i \in M$ så är $X_i \leq B$. Mängden S är en union av reella tal, X_i, som alla är uppåt begränsade av B. Följaktligen är $S \subseteq B$ och $S \leq B$.

3) För att bevisa att S saknar största element antar vi att vi har hittat ett största element, g, till mängden S. Vi har alltså att $g \in S$ och från hur vi definierat mängden S har vi att $g \in X_i$ för något $X_i \in M$. Eftersom X_i är ett reellt tal vet vi från den tredje egenskapen hos Dedekindsnitt att X_i saknar största element, det vill säga det finns ett $h > g$ sådant att $h \in X_i$. Detta ger oss att $h \in X_i \subseteq S$. Det finns alltså ett $h \in S$ sådant att $h > g$ och g var således inte ett största element och vi kan dra slutasatsen att S saknar största element.

4) Vi antar att $g \in S$ och att $0 < h < g$. Eftersom $g \in S$ har vi att $g \in X_i$ för något $X_i \in M$. Då $g \in X_i$ och $h < g$ har vi från egenskap fyra hos Dedekindsnitt att $h \in X_i \subseteq S$, det vill säga $h \in S$ och beviset är slutfört. Vi har alltså bevisat att S är ett Dedekindsnitt och ska nu fortsätta med att bevisa att S är den minsta övre begränsningen till mängden M.

Att S är en övre begränsning till M beror på att S är unionen av alla element som ingår i mängden M eller med andra ord; $X_i \subseteq S$ för alla $X_i \in M$. Vi ska nu bevisa att S är den minsta övre begränsningen till M. För att göra detta räcker det att bevisa att $S \leq B$, eftersom B var en godtycklig övre begränsning till M. Att B är en godtycklig övre begränsning till M innebär att för alla $X_i \in M$ så är $X_i \leq B$ (och $X_i \subseteq B$). Om vi tar unionen av alla X_i så har vi självklart alltjämt att $X_i \subseteq B$ för alla X_i:

$$S = \bigcup_{X_i \in M} X_i \subseteq B \implies S \leq B.$$

Vi började med den godtyckliga övre begränsningen B och fann att S är mindre än denna. Från detta kan vi dra slutsatsen att S är den minsta övre begränsningen till mängden M. Vi kallar S för supremum av mängden och betecknar detta som $S = sup(M)$. □

5 Avslutning

I inledningen av denna uppsats nämndes att de reella talen är något som de flesta tar för givet och att de brukar ses som ”alla tal”, de rationella och irrationella talen tillsammans. Dessutom lyftes två frågor. Finns det någon teori bakom de reella talen och är det möjligt att nå en fördjupad förståelse för dessa tal?

Genom uppsatsen har vi tagits med på en resa som började för omkring 2500 år sedan i det gamla Grekland och som fortsatte med ett stopp vid de naturliga talen och en kortare avstickare till de rationella talen. Därefter fortsatte vi med att fördjupa oss i en teori för de reella talen, Dedekindsnitt. Med hjälp av Dedekinds definition av de reella talen har vi bland annat kunnat bevisa att positiva reella tal uppfyller några av de vanliga räknelagarna, såsom kommutativitet och den högra distributiva lagen. Vi har även bevisat att positiva reella tal har en multiplikativ invers, men dessa egenskaper är inte unika för de reella talen. Den huvudsakliga anledningen till att utvidga de rationella talen till de reella talen var att den inom analysen så viktiga supremumegenskapen inte alltid gäller för rationella tal. Med hjälp av Dedekindsnitt konstruerade vi de reella talen utifrån rationella tal och har på så sätt kunnat bevisa att supremumegenskapen gäller i $\mathbb{R}$. Därmed ryms ”alla tal” i Dedekinds definition, både de rationella och irrationella talen.

På de båda inledande frågorna kan vi efter denna resa med säkerhet svara ja. Det finns teorier bakom de reella talen, bland annat Dedekindsnitt, och vi har lärt oss mycket om de reella talen under resans gång. Som en möjlig fortsättning på denna uppsats, för att ytterligare fördjupa våra kunskaper om de reella talen, skulle det vara intressant att fördjupa sig i teorin om Cauchy-följder, den andra av de två vanligaste metoderna för att konstruera de reella talen.

Referenser

[1] Dedekind cut. (2020-12-10). *Wikipeida.* Hämtad 2020-12-17 från https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Dedekind_cut&oldid=993399134

[2] Eudoxos of Cnidus. (2020-12-10). *Wikipeida.* Hämtad 2020-12-17 från https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Eudoxus_of_Cnidus&oldid=993351822

[3] Euklides. *Elementa.* http://canities.se/elements.html

[4] Henle, M. (2012). *Which Numbers Are Real?* Mathematical Association of America.

[5] Hippasus. (2020-11-12). *Wikipeida.* Hämtad 2020-12-17 från https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hippasus&oldid=988376933

[6] Hyltén-Cavallius, C. & Sandgren, L. (1965). *Matematisk analys II.* Studentlitteratur.

[7] John Stillwell. (2020-10-10). *Wikipeida.* Hämtad 2020-12-17 från https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=John_Stillwell&oldid=982764299

[8] MacTutor History of Mathematics Archive. (1998). *Julius Wilhelm Richard Dedekind.* https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dedekind/

[9] Method of exhaustion. (2020-08-28). *Wikipeida.* Hämtad 2020-12-17 från https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Method_of_exhaustion&oldid=975411147

[10] Milson, R. (2013-03-21). *Dedekind cuts.* https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.703.8906&rep=rep1&type=pdf

[11] Peanos axiom. (2019-01-21). *Wikipeida.* Hämtad 2020-12-17 från //sv.wikipedia.org/w/index.php?title=Peanos_axiom&oldid=44347633

[12] Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: Reviderad 2019.* Stockholm: Skolverket. https://www.skolverket.se/publikationer?id=4206

[13] Stillwell, J. (2013). *The Real Numbers - An Introduction to Set Theory and Analysis*. Springer.

[14] Tabrizian, P. (2020-06-17). *Least upper bound proof* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=aRqabK3-f8I

[15] Tambour, T. (2018). *Eudoxos proportionslära.*

[16] Tengstrand, A. (2020). *Historiska perspektiv på matematik.* https://www.anderstengstrand-funderingarkringmatematik.se/