



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## En introduktion till Catalantalen

av

**Nils Toresson**

2021 - No K6



# En introduktion till Catalantalen

Nils Toresson

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Håkan Granath

2021



## Sammanfattning

En introduktion till Catalantalen är som titeln avslöjar en introduktion till denna talföljd som är namngiven efter Eugene Charles Catalan. Som läsare kommer ni få se flertalet kombinatoriska problem som kan räknas av Catalantalen samt exempel på olika sätt att uttrycka denna talföljd.

Nyckelord: Catalantal, binomialtal, rekursion, bijektion, genererande funktion.

## Abstract

The title of this work is *An introduction to the Catalan numbers* and as it says it will give you as a reader an introduction to this sequence of numbers named after Eugene Charles Catalan. You will see multiple of various counting problems which can be counted by the Catalan numbers and also examples of different ways to express these numbers.

Key words: Catalan number, binomial coefficients, bijection, recurrence relation, generating function.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Bakgrund</b>	<b>3</b>
2.1	Minggatu, 1692-1763 . . . . .	3
2.2	Leonhard Euler, 1707–1783 . . . . .	4
2.3	Eugene Charles Catalan, 1814-1894 . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Introduktion</b>	<b>5</b>
3.1	Rekursiv form . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Bijektioner och bijektiva bevis</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Catalantalen och några kombinatoriska problem</b>	<b>9</b>
5.1	Vägar i planet . . . . .	9
5.2	Några fler kombinatoriska problem och bijektioner . . . . .	14
5.3	Catalantalen och parentesuttryck utan symboler . . . . .	17
5.4	Parentesuttryck med symboler . . . . .	18
5.5	Triangulering av polygoner . . . . .	19
5.6	Segners rekursionsformel . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Catalantalens genererande funktion</b>	<b>26</b>
<b>7</b>	<b>Catalantalen och sport</b>	<b>30</b>
7.1	Ett slutspel i ishockey . . . . .	30
7.2	En konvergerande funktion och en väldigt lång matchserie . . . . .	35
<b>8</b>	<b>Summering och avslut</b>	<b>37</b>

# 1 Inledning

Catalantalen är en talföljd av positiva heltal som återkommer i olika kombinatoriska problem. Catalantalen betecknas  $C_n$  och de första talen med start  $n = 0$  är;

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796....

Det finns många publicerade texter inom området och såhär skriver Richard Stanley i förorden till Steven Romans bok *An Introduction to Catalan Numbers*, där han syftar på vad läsaren kommer att känna efter att ha läst boken.

*"they will acquire a good feeling for why so many mathematicians are enthralled by the remarkable ubiquity and elegance of Catalan numbers."*

Om denna talföljd är så anmärkningsvärt elegant som Richard Stanley påstår är upp till var och en av er som läser. Efter att ha slutfört denna text så är dock förhoppningen att läsaren i vart fall ska kunna bedöma vad som i så fall är så elegant eller inte med Catalantalen. Jag kommer i texten att visa på vanligt förekommande kombinatoriska problem så som antalet vägar vi kan gå i  $xy$ -planet till en viss punkt utan att korsa diagonalen  $y = x$ , och på hur många olika sätt vi kan triangulera konvexa polygoner. Vidare kommer också sambandet mellan sport och Catalantalen att behandlas i form av en slutspelsserie i ishockey. Den främsta litteraturen jag använt mig av är Grimaldi [1] Roman [3], Koshy [2] och Stanley[5]. Dessa källor och även andra källor kommer finnas hänvisade som löpande i texten samt som fullständigt litteraturförteckning.

## 2 Bakgrund

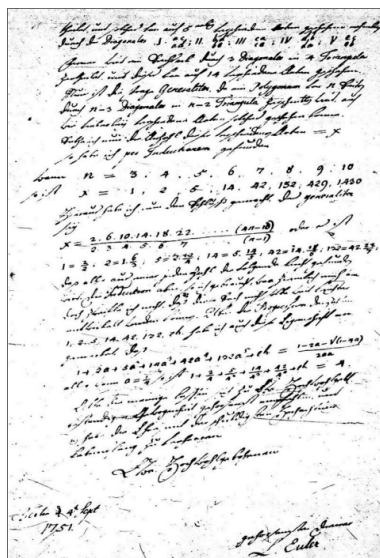
### 2.1 Minggatu, 1692-1763

I slutet av 1600-talets inre Mongoliet föddes *Sharavyn Myangat*. Inom det Mongoliska imperiet växte han fram som en framgångsrik vetenskapsman inom främst astronomi och matematik. Han var mestadels verksam i imperiets observatorium och blev i slutet på sin karriär utnämnd till Mandarin, ett högt uppsatt regeringsombud. Minggatu, som han sedermera blev kallad, är mest känd för boken *Efficient Methods for the Precise Values of Circular Functions* som han påbörjade 1730 och som avslutades senare av hans studenter 1774. Det var i den boken som Minggatu visade en första förståelse för Catalantalen, men då allt publicerades på kinesiska så blev detta inte känt i västvärlden förrän betydligt senare [2, s.104].

## 2.2 Leonhard Euler, 1707–1783

Namnet Euler är det nog många som känner igen, inte minst för *Eulers tal*:  $e \approx 2.72$ , talet som utgör basen för den naturliga logaritmen.

Leonhard Euler intresserade sig även för polygoner och ville ta reda på hur många sätt man kunde dela upp ett polygon i trianglar. Under arbetet med detta så finner han de 8 första Catalanantalen. I ett brev adresserat till matematikerkollegan Christian Goldbach daterat 4 September 1751 så beskriver han denna upptäckt. I mittenpartiet av brevet så kan vi se hur Euler formulerar de 8 första Catalanantalen. Ganska så förundransvärt att vi sitter här och funderar på exakt samma siffror 270 år senare...



Figur 1: Eulers brev till Goldbach<sup>1</sup>.

## 2.3 Eugene Charles Catalan, 1814-1894

Som namnet avslöjar så är det efter den här belgiske matematikern Eugene Charles Catalan som Catalanantalen är uppkallade efter. Catalan arbetade inom ett antal matematiska områden så som kedjebräåk, talteori och kombinatorik. 1838 så visade Catalan att

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

räknar antal olika sätt att sätta parenteser kring en sträng med  $n + 1$  symboler där  $n$  är antalet par av höger- och vänsterparenteser. Namnet *Catalantal* myntades

<sup>1</sup>Källa: [www.math.ucla.edu/~pak](http://www.math.ucla.edu/~pak)



först 1948, alltså över 50 år efter Catalans död och gavs av matematikern John Riordan [3, s.14]. En kan tycka att det var tur och kul för Catalan att få dessa talen uppnämnda efter sig då Euler redan har sitt namn i så många böcker. Men när allt kommer omkring sig så borde de kanske ha fått namnet *Minggatutalen*.

### 3 Introduktion

Catalantalen kan uttryckas på flertalet olika sätt. Vi kommer här introduceras till några utav dem och senare under resans gång se vart de kan uppstå samt hur de kan användas.

**Definition 3.1.** Catalantalen defineras som

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

för  $n = 0, 1, 2, \dots$

Vi tittar på två till sätt att uttrycka  $C_n$ , dessa varianter går båda att härleda tillbaka till definition 3.1.

**Sats 3.2.** *Catalantalen kan uttryckas som*

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1},$$

för  $n \geq 1$ .

*Bevis.* För  $n \geq 1$  så gäller

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!(n+1)}{(n+1)!n!} - \frac{(2n)!n}{n!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!(n+1-n)}{(n+1)!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n. \end{aligned}$$

□

Vi tittar på ett tredje sätt att uttrycka  $C_n$  på.

**Sats 3.3.** *Catalantalen kan uttryckas som*

$$C_n = 2 \binom{2n}{n} - \binom{2n+1}{n},$$

för  $n \geq 0$ .

*Bevis.* För  $n \geq 0$  så gäller

$$\begin{aligned} 2 \binom{2n}{n} - \binom{2n+1}{n} &= 2 \left( \frac{(2n)!}{n!n!} \right) - \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \left[ 2 - \frac{2n+1}{n+1} \right] = \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = C_n. \end{aligned}$$

□

*Exempel 3.4.* Om vi vill veta vad det tredje Catalantalet är så får vi genom definition 3.1

$$C_3 = \frac{1}{4} \binom{6}{3} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$$

eller genom sats 3.2

$$C_3 = \binom{6}{3} - \binom{6}{2} = 20 - 15 = 5.$$

Vi har nu introducerat en definition samt två satser för Catalantalen. Dessa kommer alla dyka upp senare i texten, till exempel så ser vi sats 3.2 i avsnitt 5.1 där vi beräknar vägar i  $xy$ -planet och sats 3.3 dyker upp i avsnitt 7.1 då vi är i sportens värld.

### 3.1 Rekursiv form

Vi kan även uttrycka Catalantalen på rekursiv form. Med en rekursivt definierad talföljd så innebär det att vi vet startvärdet för följen och sedan följer något villkor som gör att vi successivt kan finna nästkommande värden. Generellt kan vi säga att om vi vill beräkna det  $n$ :te elementet i talföljden så använder vi oss av information från de föregående elementen i talföljden och beräknar därmed värdena på elementen successivt. Vi ska nu introduceras till två rekursiva beskrivningar av Catalantalen och vi börjar med Leonard Eulers [2].

**Sats 3.5.** *Eulers rekursiva form för Catalantalen uttrycks som*

$$C_n = \begin{cases} \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1} & \text{för } n \geq 1 \\ 1 & \text{för } n = 0. \end{cases}$$

*Bevis.* Om vi låter  $C_0, C_1, C_2 \dots$  vara talföljden som bestäms av rekursionen, får vi för  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1} = \frac{(4n-2)(4n-6)}{(n+1)n}C_{n-2} = \frac{(4n-2)(4n-6)(4n-10)}{(n+1)n(n-1)}C_{n-3} \\ &\dots = \frac{(4n-2)(4n-6)(4n-10)\dots\cdot 6\cdot 2}{(n+1)n\dots 3\cdot 2}C_0 \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots\cdot 3\cdot 1}{(n+1)!} \cdot 2^n \\ &= \frac{(2n)!2^n}{(n+1)!2^n n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

så ser vi att talföljden överstämmer med definition 3.1 för Catalantalen.  $\square$

Även nästa rekursiva formel är från en känd matematiker [3, s.19], Johann von Segner.

**Sats 3.6.** *Johann von Segners rekursiva formel för Catalantalen är*

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

för  $n \geq 1$ .

Segners rekursions formel uttrycks även ofta som

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}.$$

Vi kommer återkomma till Segners rekursion under textens gång, främst i avsnitt 5.6 där vi visar att antalet trianguleringar av polygon kan beräknas med denna rekursiva formel och vi bevisar även sats 3.6 i det avsnittet. Vi avslutar introduktionen med ett exempel.

*Exempel 3.7.* Bestäm det fjärde Catalantalet,  $C_4$  med hjälp av en rekursiv formel. Genom Eulers formel i sats 3.5 får vi

$$C_4 = \frac{14}{5}C_3 = \frac{14}{5} \cdot 5 = 14.$$

Alternativt genom Segners formel i sats 3.6

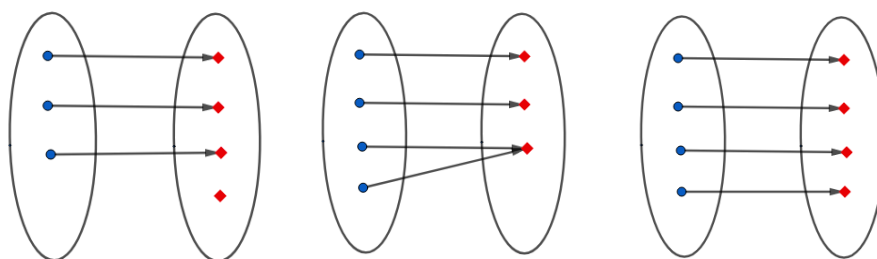
$$\begin{aligned} C_4 &= \sum_{k=0}^3 C_k C_{3-k} = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 \\ &= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14. \end{aligned}$$

## 4 Bijektions och bijektiva bevis

Vi kommer under den här uppsatsen vid återkommande tillfällen att använda oss av bijektions för att genomföra så kallade bijektiva bevis. Vi skriver därför ner några rader där vi klargör begreppet bijektion, men om du som läsare känner att det är väldigt klart för dig så kan du bara bläddra förbi detta avsnitt.

**Definition 4.1.** Låt  $M$  och  $N$  vara mängder och låt  $f : M \rightarrow N$  vara en funktion. Då gäller följande:

1. Om  $f(x) \neq f(y)$  för alla  $x$  och  $y \in M$  sådant att  $x \neq y$  så kallas  $f$  **injektiv**. Om  $f$  är injektiv så kan vi tänka oss  $M$  som en delmängd av  $N$  via funktionen  $f$ .
2. Om det för varje  $n \in N$  finns minst ett element  $x \in M$  sådant att  $f(x) = n$  så kallas  $f$  **surjektiv**. Vi kan tänka det som att  $M$  hamnar ovanpå mängden  $N$  och täcker över den.
3. Om  $f$  är både **injektiv** och **surjektiv** så kallar vi  $f$  för **bijektiv**.



Exempel på injektiv, surjektiv och bijektiv funktion.

Vi sammanfattar en bijektiv funktion som en funktion mellan två mängder,  $M$  och  $N$  där varje element  $m \in M$  avbildas på något unikt element  $n \in N$  samt att det samma gäller åt andra hållet. Om det finns en bijektion mellan två mängder så måste mängderna innehålla samma antal element det vill säga att kardinaliteten är den samma för mängderna. I denna uppsats så kommer vi genomföra bijektiva bevis mellan olika mängder som uppstår vid kombinatoriska problem vi räknar på. Grundtanken är att skapa bijektioner med någon mängd som vi vet kan beräknas med hjälp av Catalantalen och genom bijektion bevisar det att även den andra mängden kan beräknas med hjälp av Catalantalen. I uppsatsen kommer även uttrycket ett-till-ett-relation användas, och med det så menas en bijektion mellan två olika mängder.

## 5 Catalantalen och några kombinatoriska problem

### 5.1 Vägar i planet

Det första kombinatoriska problemet vi ska titta närmare på är beskrivet i Ralph Grimaldis arbete [1, kap.19]. Vi tänker oss att vi är i  $xy$ -planet och från origo ska ta oss till en viss punkt  $(n, n)$  och för att ta oss dit så förflyttar vi oss ett steg i taget.

**Definition 5.1.** Låt oss definiera  $R$  som ett steg åt höger och  $U$  som ett steg uppåt i planet

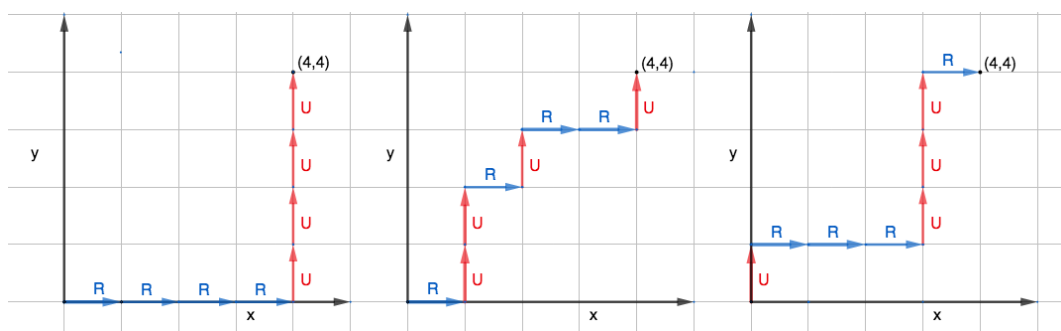
$$\mathbf{R} : (x, y) \rightarrow (x + 1, y),$$

$$\mathbf{U} : (x, y) \rightarrow (x, y + 1).$$

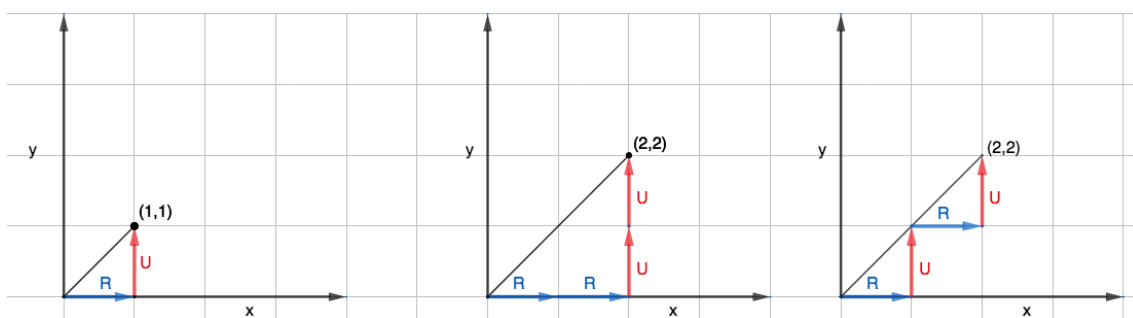
Som ett första exempel väljer vi att undersöka punkten  $(4,4)$ . Förutsatt att vi inte går förbi punkten så kommer vi oavsett vilken väg vi väljer att gå lika många steg till höger som steg uppåt, fyra  $R$  och fyra  $U$ . För att uttrycka hur många möjliga vägar det finns så använder vi oss av binomialkoefficienter. Vi ska gå 8 steg och ska välja 4  $R$  och resterande blir  $U$ , vi har 8 och ska välja 4

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70.$$

Det betyder att det finns 70 olika sätt att ordna fyra stycken  $U$  och  $R$ . Här nedan ser vi exempel på tre utav dessa vägar.



Vi lägger nu till ytterligare ett villkor. Utöver att vi endast förflyttar oss ett steg i taget så får vi nu inte heller gå ovanför diagonalen som är linjen  $y = x$ . Det är okej att beröra linjen men aldrig att vara ovanför den. Dessa vägar säger vi är tillåtna vägar medans de som går ovanför diagonalen benämns som otillåtna vägar. Med det här nya villkoret så börjar vi med att undersöka antalet möjliga vägar från origo till punkterna  $(1, 1)$  och  $(2, 2)$ , vi ser dessa i figuren nedan.



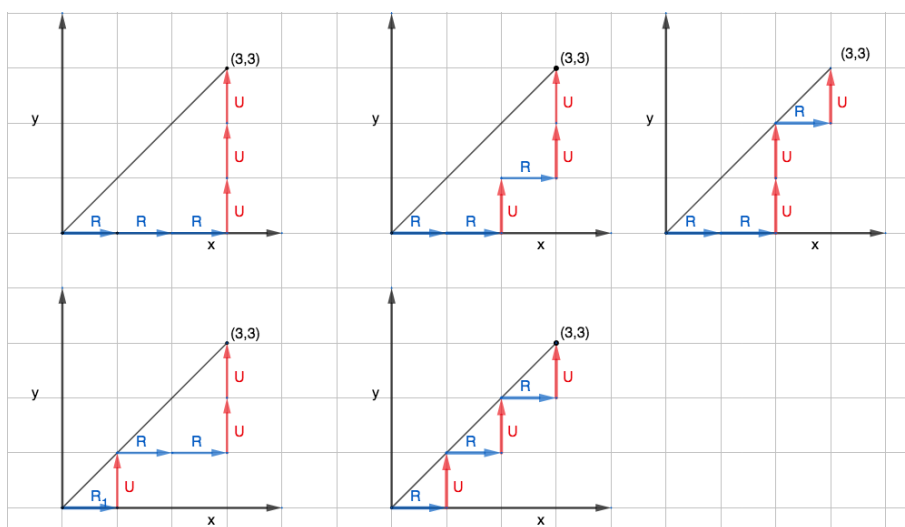
Det första steget måste alltid vara till höger det vill säga ett  $R$ , annars så kommer vi hamna över diagonalen direkt vilket inte är tillåtet. Till punkten  $(1,1)$  ser vi att det endast finns en möjlig tillåten väg och det är att först gå ett steg höger och sedan ett steg upp,

**RU.**

Till punkten  $(2,2)$  så kan vi antingen börja med två steg höger och sedan två steg uppåt. Alternativ två är ett steg höger ett steg upp och sedan samma procedur igen. Det finns alltså två tillåtna vägar till punkten  $(2,2)$ ,

**RRUU – RURU.**

Går vi vidare och undersöker punkten  $(3,3)$  på samma sätt så finner vi här 5 stycken tillåtna vägar som vi kan se i figuren nedan.



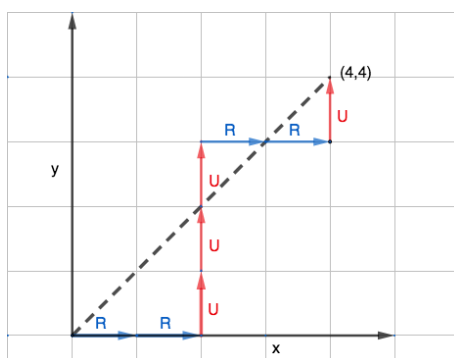
**RRRUUU – RRURUU – RRUURU – RURURU – RURURU.**

Vi kan konstatera att varje väg startar med ett  $R$  och avslutas med ett  $U$ . Vi noterade också tidigare att det alltid är lika antal  $R$  som  $U$  oavsett till vilken punkt  $(n, n)$  vi ska ta oss till. Vi kan också konstatera att antalet  $R$  läst från vänster till en godtycklig position alltid måste vara fler eller lika med antalet  $U$ . Skulle antalet  $U$  vara fler än antalet  $R$  så har vi då korsat diagonalen och vi befinner oss på fel sida av den. Men hur många olika vägar finns det till en punkt  $(4, 4)$ ,  $(5, 5)$  eller  $(n, n)$ ? Skulle vi fortsätta på samma sätt som med punkterna  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  och  $(3, 3)$  att grafiskt rita upp alternativen så skulle det krävas mycket jobb och en stor sannolikhet att vi missar någon väg. Vi vill hitta ett mer generellt räknesätt som går att applicera på alla punkter av formen  $(n, n)$ .

**Sats 5.2.** *Antalet möjliga vägar från origo till en punkt  $(n, n)$  med  $n \geq 1$  där vi går ett steg  $R$  eller ett steg  $U$  i taget och aldrig går ovanför linjen  $y = x$ , ges av*

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

*Bevis.* Vi kan ta reda på antalet möjliga tillåtna vägar genom att räkna ut antalet otillåtna vägar och sedan subtrahera detta från de totala antalet vägar som är  $\binom{2n}{n}$ . Vi tittar först på ett specialfall med punkten  $(4, 4)$  och en otillåten väg



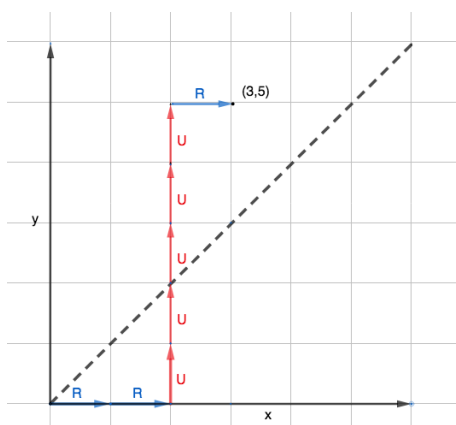
**RRUUURRU.**

Tidigare har vi sett att en väg representeras av en sträng bestående av  $R$  och  $U$ . Denna sträng måste starta med  $R$  och en väg blir otillåten om antalet  $U$  överskrider antalet  $R$  vid en godtycklig positionen i denna sträng. I fallet ovan kan vi se att det sker vid det tredje  $U$ . Vi inför en transformation där varje vägval efter att antalet  $U$  är fler än antalet  $R$  byts till det omvända, exempelvis blir vägen ovan efter transformationen

**R R U U U R R U  $\rightarrow$  R R U U U U U R.**

Efter transformationen bildas en ny väg som alltid kommer innehålla 2 stycken fler  $U$  än  $R$ . Exempelvis när  $n = 4$  får vi 3st  $R$  och 5st  $U$ , om  $n = 6$  får vi 5st  $R$  och 7st  $U$ . Transformationen genomförs alltid efter den position där antalet  $U$  överskrider antalet  $R$  för första gången. Det innebär att vid den positionen har vi  $k$  stycken  $R$  och  $k + 1$  stycken  $U$  utskrivna i strängen. Vi vet att en väg till en punkt  $(n, n)$  innehåller lika många  $U$  som  $R$ . Strängens andra del kommer därför innehålla  $n - k$  stycken  $R$  och  $n - k - 1$  stycken  $U$ . Efter transformationen får vi sammanlagt  $n - 1$  stycken  $R$  och  $n + 1$  stycken  $U$ . Dessa vägar kommer att ta oss till punkten  $(n - 1, n + 1)$  vilket vi kan illustrera med specialfallet för vägen till punkten  $(4, 4)$  som efter transformationen går till punkten  $(3, 5)$ .





**R R U U U U R**

Vi kan omvänt ta vilken sträng som helst som innehåller  $n - 1$   $R$  och  $n + 1$   $U$  och genomföra ovanstående transformation genom att efter första positionen där antalet  $U$  är fler än antalet  $R$  så byter vi till det omvända. Då blir antalet  $R$  lika med antalet  $U$  och vi får en sträng som tar oss till en punkt  $(n, n)$ . Men dessa vägar kommer alla att vara otillåtna då antalet  $U$  överskrider antalet  $R$  vid någon position. Vi har genom våra transformationer hittat alla otillåtna vägar som går till en punkt  $(n, n)$  genom att skapa en bijektion mellan dem och alla vägar som går till punkten  $(n - 1, n + 1)$ . Om vi tar reda på hur många sätt det går att bilda strängar med  $n - 1$  stycken  $R$  och  $n + 1$  stycken  $U$  så vet vi också antalet otillåtna vägar till en punkt  $(n, n)$ . Vi har fortfarande  $2n$  steg vi ska gå men nu välja ut endast  $n - 1$  stycken  $R$  vilket vi kan göra på

$$\binom{2n}{n-1}$$

antal sätt. Och som vi sa i början av beviset, antalet tillåtna vägar som går till en punkt  $(n, n)$  får vi genom att beräkna totala antalet vägar subtraherat med de otillåtna vägar som går ovanför diagonalen

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

vilket enligt sats 5.2 är Catalantalet,  $C_n$ . □

Antalet tillåtna vägar i planet till en viss punkt  $(n, n)$  kan alltså bestämmas av Catalantalen. Vi avslutar detta område med ett exempel.

*Exempel 5.3.* På hur många sätt kan vi ta oss till punkten  $(8, 8)$  utan att korsa diagonalen?

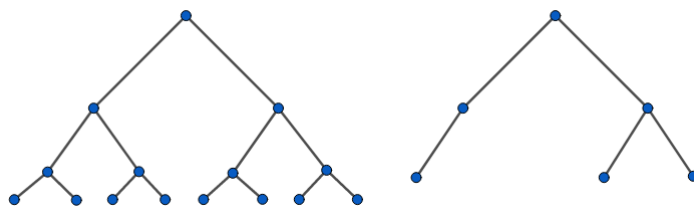
Som läsare får du gärna prova själv för att sedan kontrollera med följande räkningar. För att lösa uppgiften så använder vi oss endast av formeln vi precis byggt upp  $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$  och sätter  $n = 8$

$$\begin{aligned} C_8 &= \binom{16}{8} - \binom{16}{7} \\ &= \frac{16!}{8!8!} - \frac{16!}{9!7!} = \frac{9(16!) - 8(16!)}{9!8!} = \frac{16!}{9!8!} \\ &= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 11 \cdot 10 = 1430. \end{aligned}$$

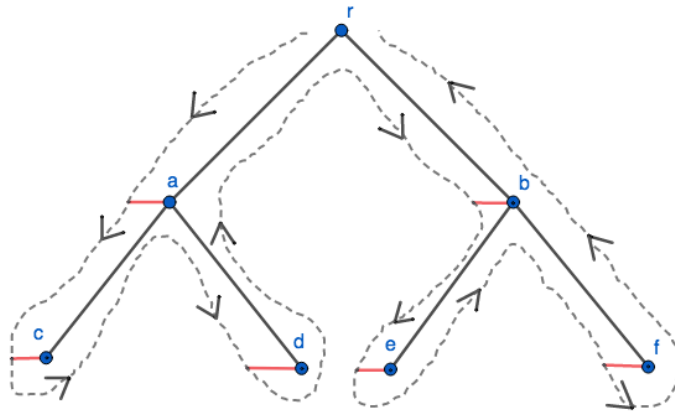
Vi har nu räknat ut antal vägar till punkten  $(8, 8)$  utan att gå ovanför diagonalen och då även Catalantalet  $C_8 = 1430$ .

## 5.2 Några fler kombinatoriska problem och bijektioner

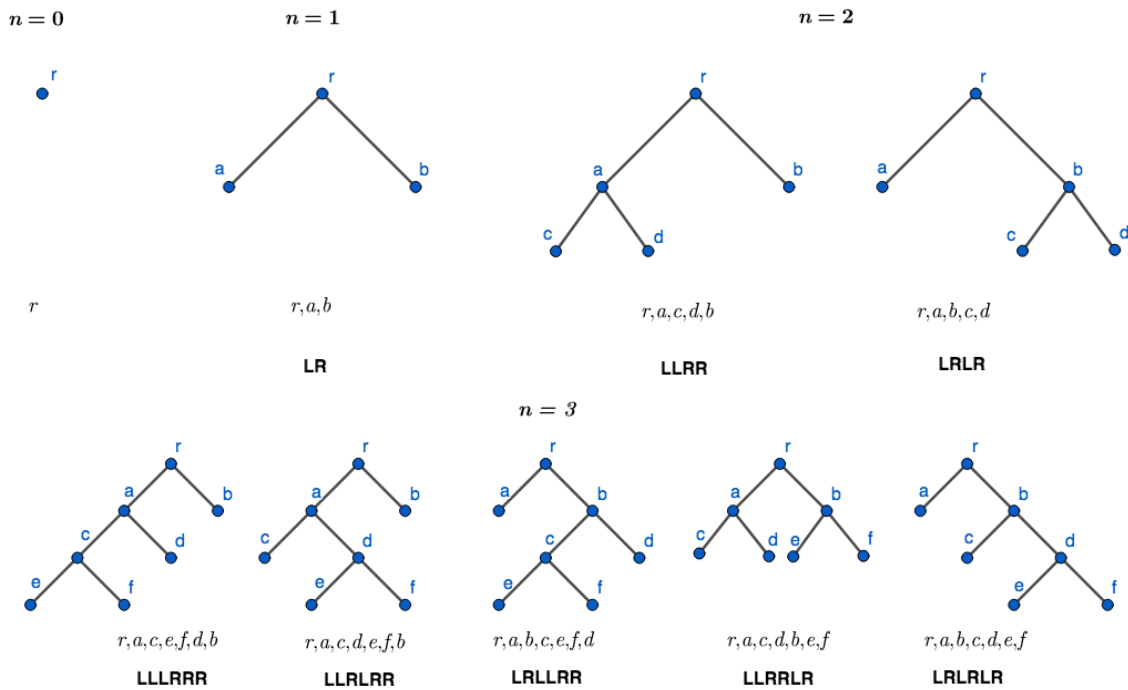
Vi går vidare till ett annat kombinatoriskt problem som handlar om binära träd. Ett binärt träd börjar med en rotnod som maximalt har två grenar ut till två noder och från dessa noder kan det också vidare finnas maximalt två grenar till två nya noder och sådär fortsätter det tills vi kommer längst ner på trädet i så kallade löv där inga grenar går ut. Vi kommer endast att arbeta med binära träd bestående av noder med antingen två grenar eller inga grenar alls. Nedan är ett exempel på två binära träd varav det vänstra är ett exempel på ett sådant binärt träd vi kommer arbeta med.



Roten i varje träd benämns som  $r$  och varje nod i trädet får en bokstav. Vi går igenom (traverserar) träden efter ett särskilt mönster. Från roten så börjar vi alltid med ett steg till vänster, och kommer vi därefter till ett nytt vägval så väljer vi vänster igen vilket vi fortsätter med så länge det går. Finns det ingen möjlighet att välja väg så har vi kommit till ett löv och vi går då tillbaka samma väg och varje gång vi passerar ett vägval så går vi ner på de grenar vi tidigare valt bort och där följer vi samma mönster igen. Vi kan föreställa oss denna trädtraversering som att vi drar ett snöre kring hela trädet vilket illustreras i bilden nedan.



För  $n \geq 0$  så betraktar vi de binära träden med  $2n + 1$  noder. Exempelvis om  $n = 1$  så finns först rotnoden och därefter två grenar ut till varsin nod. Vi ritar upp träden då  $0 \leq n \leq 3$  här nedan. Under varje träd står bokstäverna i kursiv stil i den ordning som dess noder uppstår enligt trädtraverseringen och ytterligare en rad ner finns en sträng av  $L$  och  $R$  som beskriver hur trädtraversering har gått till med start i roten.  $L$  betecknar ett steg till vänster och  $R$  ett steg till höger. Vi har här en sträng som påminner om vägvalen i  $xy$ -planet från föregående avsnitt.



Figur 5.2.3.

Men vad har nu det här att göra med Catalantalen? Jo vi sa att det fanns en likhet mellan trädtraverseringen som bildar strängar bestående av  $LR$  och det vi tidigare undersökt med strängarna bestående av  $RU$ . När vi räknade tillåtna vägar i  $xy$ -planet så fick strängen läst från vänster inte innehålla fler antal  $U$  än antalet  $R$  vid någon position, detsamma gäller för dessa strängar tillhörande de binära träden där antalet  $R$  ej får överskrida antalet  $L$  vid någon position. Vi kan skapa en bijektion enligt avsnitt 4 där den ena mängden består av strängarna från avsnitt 5.1 angående vägar i planet och den andra mängden blir strängarna från dessa binära träd. I det här fallet så är tanken att skapa en bijektion med något som vi vet kan uttryckas med Catalantalen och på så sätt bevisar det att även de binära träden kan räknas med hjälp av Catalantalen.

**Sats 5.4.** *Antalet binära träd med  $2n + 1$  antal noder är lika med*

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

*Bevis.* Vi illustrerar det med specialfallen  $1 \leq n \leq 3$ . I avsnittet 5.1 så ritade vi ut dessa vägar och även de binära träden har vi konstruerat i figuren ovan. I tabellen nedan så ser vi i den första kolumnen vägarna i planet uttryckt med  $R$  och  $U$  och i den andra kolumnen trädtraverseringen av våra binära träd uttryckt med  $L$  och  $R$ . För att förenkla det hela så benämner vi dessa mängder som  $\Gamma_n$  och  $\Phi_n$ .

$n$	$\Gamma_n$	$\Phi_n$
1	<b>RU</b>	<b>LR</b>
2	<b>RRUU</b> <b>RURU</b>	<b>LLRR</b> <b>LRLR</b>
3	<b>RRRUUU</b> <b>RRURUU</b> <b>RRUURU</b> <b>RURRUU</b> <b>RURURU</b>	<b>LLLRRL</b> <b>LLRLRR</b> <b>LLRRLR</b> <b>LRLLR</b> <b>LRLRLR</b>

Tabell 5.2.1

Vi ser att vi enkelt kan ta oss från  $\Gamma_n$  till  $\Phi_n$  genom att låta  $R \rightarrow L$  och  $U \rightarrow R$ . För att göra det omvända och gå från  $\Phi_n$  till  $\Gamma_n$  så låter vi  $L \rightarrow R$  och  $R \rightarrow U$ . Denna bijektion gäller inte endast för specialfallen vi visat utan för alla  $n$ , så antalet strängar kommer alltid vara av samma kardinalitet. Vi vet att antalet vägar i planet kan uttryckas med Catalantalen och vi har nu visat att en bijektion finns mellan  $\Gamma_n$  och  $\Phi_n$  vilket betyder att också antalet binära träd ges av Catalantalen.  $\square$

### 5.3 Catalantalen och parentesuttryck utan symboler

I avsnitt 2.3 nämndes det att Eugene Catalan undersökte antalet sätt att sätta parenteser kring en sträng med  $n + 1$  symboler och att det kan beräknas med Catalantalen. Vi börjar med att titta en balanserad sträng som bara består av  $n$  vänsterparenteser och  $n$  högerparenteser. Likt de två föregående avsnitten så har vi ett villkor här. Vi har från vägarna i  $xy$ -planet att antalet  $U$  ej fick överskrida antalet  $R$  samt i de binära träden så fick antalet  $R$  ej överskrida antalet  $L$  läst från vänster och i det här fallet så får inte antalet högerparenteser vara fler än antalet vänsterparenteser läst från vänster. Vi skriver upp en tabell för hur vi kan placera  $n$  vänster och  $n$  högerparenteser för  $1 \leq n \leq 3$ .

$n$	
1	()
2	(( )) ()()
3	(( ( )) (( )) ()( )) (( )) ()( )()

**Definition 5.5.** En parentesuttryck är balanserat om det för varje öppning i form av en vänsterparentes finns en stängning i form av en högerparentes.

**Sats 5.6.** Antalet sätt att ordna  $n$  balanserade parenteser är  $C_n$ .

*Bevis.* Vi använder oss återigen av bijektion där vi skapar en så kallad ett-till-ett relation med mängderna från det vi tidigare räknat på i avsnitt 5.2 och 5.4. För enkelhets skull så inför vi även en benämning för denna mängd så vi arbetar nu med följande mängder

$$\begin{cases} \Gamma_n = \text{mängden av vägar i planet till punkten } (n, n), \\ \Phi_n = \text{mängden av binära träd med } 2n + 1 \text{ noder,} \\ \Omega_n = \text{mängden av strängar med } n \text{ balanserade parenteser.} \end{cases}$$

Vi använder oss av tabell 5.2.1 från det föregående beviset och fyller nu på med den tredje mängden som vi vill skapa bijektion med.

$n$	$\Gamma_n$	$\Phi_n$	$\Omega_n$
1	<b>RU</b>	<b>LR</b>	()
2	<b>RRUU</b>	<b>LLRR</b>	(( ))
	<b>RURU</b>	<b>LRLR</b>	()()
3	<b>RRRUUU</b>	<b>LLLRRR</b>	(( ( ))
	<b>RRURUU</b>	<b>LLRLRR</b>	(( ))
	<b>RRUURU</b>	<b>LLRRLR</b>	()()
	<b>RURRUU</b>	<b>LRLRRR</b>	()( )
	<b>RURURU</b>	<b>LRLRLR</b>	()()

Vi vet sedan tidigare att det finns en bijektion mellan  $\Gamma_n$  och  $\Phi_n$  och vi ska skapa en bijektion till mängden  $\Omega_n$ . För att gå från mängden  $\Gamma_n$  till  $\Omega_n$  så låter vi  $R \rightarrow ($  och  $U \rightarrow)$  och för att gå från  $\Omega_n$  tillbaka till den  $\Gamma_n$  så låter vi  $(\rightarrow R$  och  $) \rightarrow U$  och vi ser att det finns ett ett-till-ett-förhållande och därmed en bijektion mellan  $\Gamma_n$  och  $\Omega_n$ . Eftersom vi redan har konstaterat att bijektion gäller mellan  $\Gamma_n$  och  $\Phi_n$  betyder det att det finns bijektioner mellan alla tre mängderna. Denna bijektion gäller inte endast för specialfallen vi visat utan vi inser också ganska enkelt att den gäller för alla  $n$  och beviset är klart [1, kap 20].  $\square$

## 5.4 Parentesuttryck med symboler

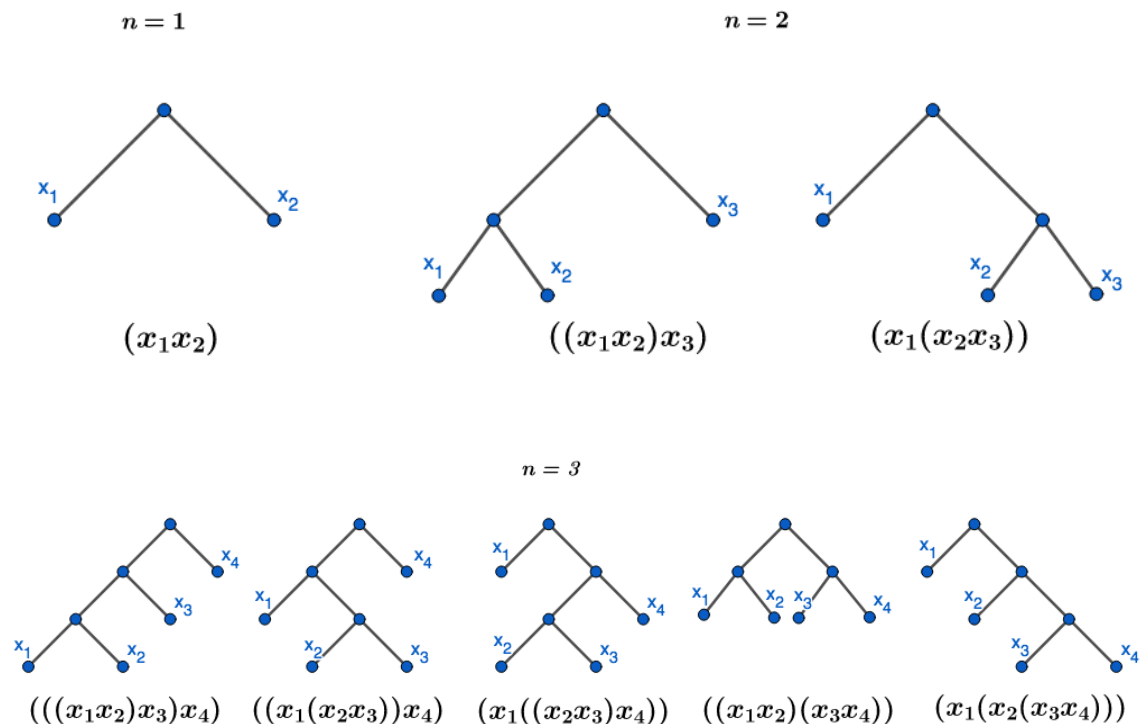
Catalan ville beräkna antalet sätt som vi kan sätta parenteser kring produkten av  $n + 1$  symboler och använda sig av  $n$  balanserade parenteser.

**Sats 5.7.** *En sträng av  $n + 1$  symboler kan sättas inom parenteser på  $C_n$  olika sätt med tre villkor. Mellan varje par av parenteser så ska något av dessa finnas:*

1. *Två symboler.*
2. *En symbol och ett uttryck inom parenteser.*
3. *Två uttryck inom parenteser.*

Vi kan visa att denna sats gäller med hjälp av de binära träden.

*Bevis.* Vi använder oss av de binära träd vi konstruerade i figur 5.2.3 i avsnitt 5.2 där vi kan se att på varje träd med  $2n + 1$  noder finns det  $n + 1$  löv. Vi sätter nu en symbol på varje löv och namnger dem från vänster till höger som  $x_1 \dots x_{n+1}$ . Vi kan nu sätta  $n$  antal balanserade parenteser kring dessa symboler genom att följa ett specifikt mönster. Till en början tänker vi att vi delar in träden i olika nivåplan. Vi startar på nivån längst ner på varje träd och de symboler som finns på löven där bildar en produkt som är innanför parenteser. Vi går sedan upp till nästa nivå och där bildar de symboler en produkt med produkten från föregående plan och vi sätter det hela innanför parentes. Vi fortsätter sedan så tills vi når den översta nivån där hela uttrycket omsluts i en parentes. Som vi har gjort tidigare så illustrerar vi detta i några specialfall. För  $1 \leq n \leq 3$  så visar figuren hur löven som representerar  $n + 1$  symboler sätts inom  $n$  parenteser och där de tre villkoren från sats 5.7 gäller.

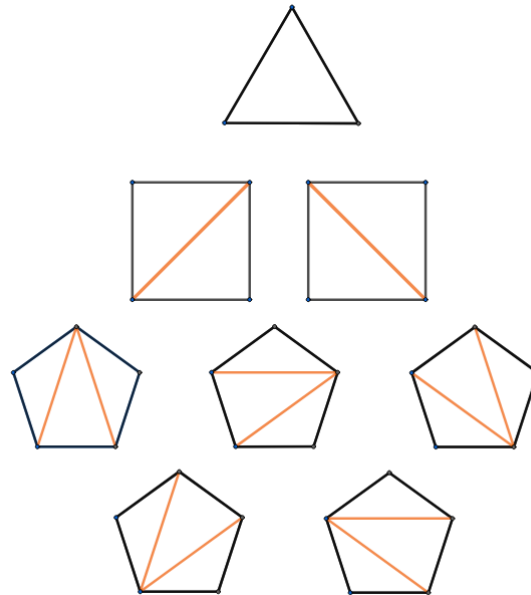


Vill vi gå tillbaka till en binärt träd så går det bra genom att läsa uttrycket inneifrån och ut genom att först titta på den minsta produkten och sedan arbeta sig utåt. Står en symbol ensam så är den på ett ensamt löv och står den i par så har den ett syskon på samma nivåplan. Vi ska också komma ihåg att från varje nod kan det max gå två grenar. Lättast att förstå är genom att själv rita upp träden genom att endast läsa parentesuttrycket. Vi har visat att det finns en bijektion för  $1 \leq n \leq 3$  och detta ett-till-ett förhållande gäller för alla  $n \geq 1$  men också även då  $n = 0$  eftersom vi då har endast ett sätt vi kan skapa en sträng med  $n + 1$  symboler och sätta parentes runt den [1, kap 20]. □

## 5.5 Triangulering av polygoner

Vi har nu tagit upp lite av Eugene Catalans arbeten men i avsnitt 2.2 så nämndes även Euler som en av de första som arbetade med Catalantalen. Han undersökte konvexa polygoner och antalet trianguleringar som kunde göras i dem. Med en polygon så menar vi en sluten kurva som inte skär sig själv och består av räta linjesegment. En polygon är konvex om alla vinklar i dess inre är mindre än 180 grader.

Det som menas med triangulering av en polygon är att icke-korsande diagonaler dras mellan polygonens hörn och bildar trianglar inuti dem. Här nedan ser vi de möjliga trianguleringarna av polygon med tre, fyra respektive fem hörn.



Vi gör en observation på polygonen med fem hörn, dessa betraktar vi som distinkta även om det ser ut som att det bara är att rotera dem för att få den nästkommande. Detta är på grund av att alla hörn i polygonen anses vara olika [3, s.33–36]. Vi observerar också att varje  $n$ -hörning rymmer  $n - 2$  trianglar.

**Definition 5.8.** Antalet sätt att triangulera en konvex polygon med  $n \geq 3$  hörn betecknas  $P_n$  och  $P_2$  definieras som 1.

Om vi tänker oss en polygon med två hörn, dvs ett streck så betraktar vi alltså den som att den kan trianguleras på ett sätt.

**Sats 5.9.** För  $n \geq 0$  så räknar  $C_n$  antalet sätt att triangulera en konvex polygon med  $n + 2$  hörn så att

$$P_{n+2} = C_n.$$

Vi ska återigen använda oss av bijektion och liknande bevis genomförs av både Stanley [5, s.8] och Grimaldi [1, kap 23].

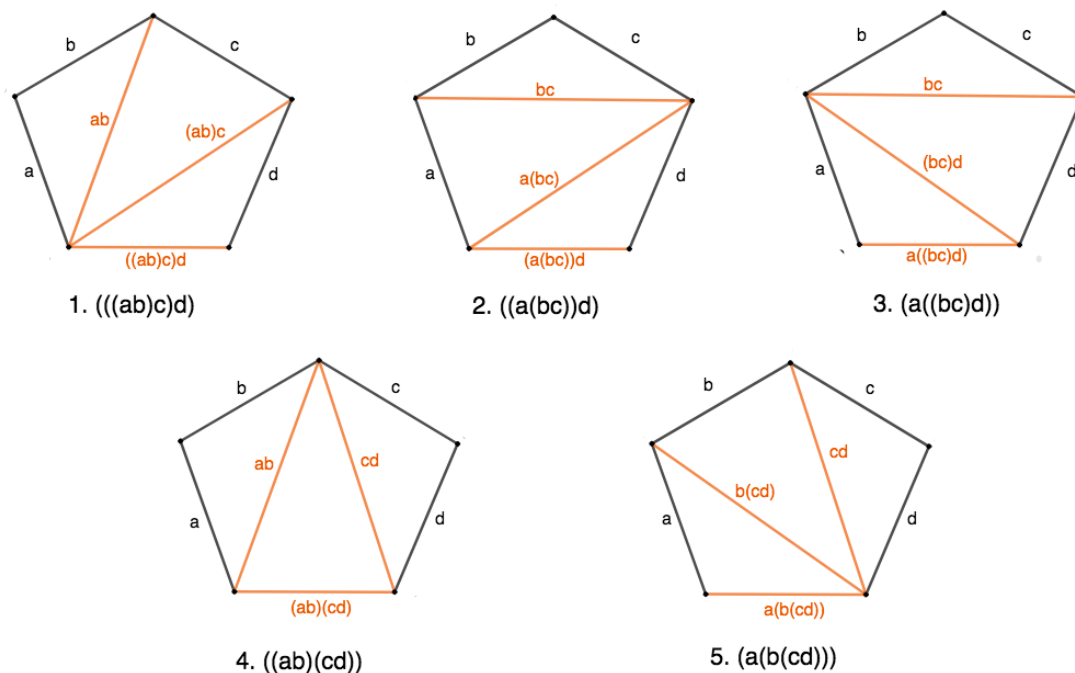
*Bevis.* Vi kommer använda oss av det vi precis visat i sats 5.7 om parenteser runt  $n + 1$  symboler och skapa en bijektion. Vi visar specialfallet då  $n = 3$  och använder oss av de parentessträngar vi skapade i beviset av sats 5.7. Vi numrerar dessa och gör ett symbolbyte från  $x_1, x_2, x_3, x_4$  till a,b,c,d.



1. $((x_1x_2)x_3)x_4$	$\rightarrow$	$((ab)c)d$
2. $(x_1(x_2x_3))x_4$	$\rightarrow$	$(a(bc))d$
3. $x_1((x_2x_3)x_4)$	$\rightarrow$	$a((bc)d)$
4. $(x_1x_2)(x_3x_4)$	$\rightarrow$	$(ab)(cd)$
5. $x_1(x_2(x_3x_4))$	$\rightarrow$	$a(b(cd))$

Tabell 5.4.1

Eftersom  $n = 3$  så ritar vi upp en polygon med  $n + 2 = 5$  hörn. Vi lämnar en bassida tom och medurs därifrån är sidorna a,b,c och d. Varje rad i tabellen ovan representerar en femhörning och vi ska nu triangulera dessa. Detta går till på ett liknande sätt som då vi konstruerade de binära träden genom att läsa det tillhörande parentesuttrycket inneifrån och ut där nu produkterna bildar trianglar. Från rad 1 i tabell 5.4.1 ser vi att ab bildar den första produkten så genom att dra linjen ab mellan sidorna a och b så har vi konstruerat den första triangeln. Nästa produkt är (ab)c så genom att dra en linje mellan sidan ab och sida c så bildas den andra triangeln. Den tredje produkten ((ab)c)d ger oss en triangel med linjen (ab)c, sidan d och bassidan ((ab)c)d. Produkterna i parentesuttrycket konstruerar alltså trianglarna inuti polygonen. Vi fortsätter på samma sätt med rad 2 där vi läser den första produkten som bc. Vi konstruerar därför den första triangeln genom att dra linjen mellan sidorna b och c. Den andra produkten är a(bc) så den andra triangeln konstrueras genom att dra en linje mellan sidorna a och bc. Den sista produkten är (a(bc))d och det bildas alltså en triangel som består av bassidan (a(bc))d, a(bc) och d. Bassidan i varje polygon är alltså dess unika parentesuttryck men utan den yttersta omslutande parentes. Läger vi till en höger och vänster parentes på den nedersta sidan i varje pentagon så får vi hela den andra kolumnen från tabell 5.4.1. Det lättaste sättet för läsaren att hänga med är nog att själv rita upp de resterande tre polygonen och triangulera dem utefter samma modell.



Denna metod gäller inte endast för  $n = 3$  utan för alla  $n \geq 1$ . Vill vi gå åt andra hållet och skriva en triangulerad polygon som ett parentesuttryck så går det bra. Enklast är att starta med att namnge en linje som bildar triangel med två sidor som redan är namngivna, ex i vårt fall hade vi i pentagon 1 först namngivit sidan  $ab$  och i pentagon 2 sidan  $bc$ . Därefter namnges resterande linjer utefter vilka de bildar triangel med och vi bygger på så sätt upp vårt parentesuttryck. Den sista sidan som namnges är bassidan i polygonen som vi avslutar med att omsluta med en parentes och vi har gått från en triangulerad polygon till ett parentesuttryck. Vi har visat att en bijektion finns och med det att antal sätt att triangulera det inre av konvexa polygon med  $n + 2$  sidor också kan räknas av Catalanalen.  $\square$

Vi avslutar detta avsnitt med ett exempel som vi kommer kunna ha nytta av vid beräkningar i nästa avsnitt.

*Exempel 5.10.* På hur många sätt kan vi triangulera en konvex polygon med 7 stycken hörn?

Vi repeterar definition 5.8 som säger att  $P_n$  betecknar antal sätt att triangulera konvexa polygon med  $n$  stycken hörn och sats 5.9 som säger att  $P_{n+2} = C_n$ . För att få fram svaret så behöver vi endast lösa ekvationen  $n + 2 = 7$  eftersom  $n$  ger oss Catalan-talet som representerar antalet trianguleringar för polygonen. Vi får att det finns  $C_5 = 42$  olika sätt att triangulera en polygon med 7 stycken hörn.

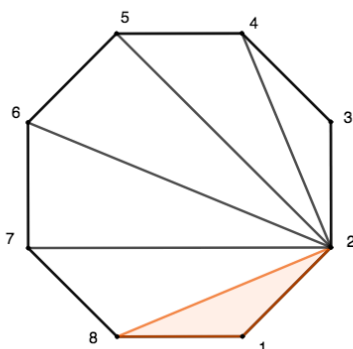
## 5.6 Segners rekursionsformel

Vi har visat att  $P_{n+2} = C_n$  och med hjälp av detta ska vi nu bevisa att Segners rekursiva formel som vi såg i sats 3.6 gäller [2, s.114-120]. Den ungerske matematikern Johann Von Segner fick 1761 kontakt med Euler och blev på den vägen introducerad till Catalantalen. Som så många andra (förhoppningsvis även du som läsare) så blev Segner fascinerad av talen och fortsatte i Eulers fotspår att arbeta med trianguleringar och presenterade därefter en rekursiv formel för  $P_n$  då  $n \geq 3$ .

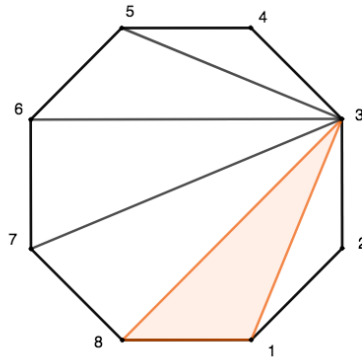
**Sats 5.11.** *Om  $n \geq 3$  så gäller*

$$P_n = \sum_{k=2}^{n-1} P_k P_{n-k+1}.$$

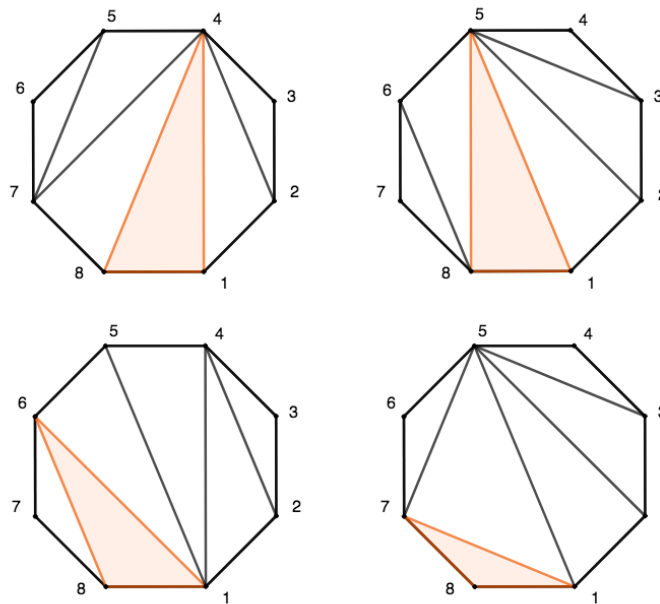
Innan vi visar att satsen gäller för alla  $n \geq 3$  så skall vi som förberedelse titta närmare på fallet  $n = 8$ . Vi ritar ut en polygon med åtta stycken hörn och triangulerar den samt väljer den nedersta sidan som bas. Vi fyller i den triangel som innehåller bassidan och numrerar hörnen i polygonen motsols från basen.



Vi ska nu undersöka vardera sida om vår ifyllda triangel, på hur många sätt kan vi där göra trianguleringar? Till höger om vår ifyllda triangel så finns bara 2 hörn och vi har inget val på triangulering utan  $P_2 = 1$ . Till vänster om den ifyllda triangeln bildas en polygon med sju stycken hörn och det finns  $P_7$  olika sätt att triangulera det området. Vi ritar upp en till åttahörning där vi har samma bas för den ifyllda triangeln men vi flyttar topphörnet till polygonens hörn nummer tre.



På samma sätt så undersöker vi vardera sida om den ifyllda triangeln. På höger sida bildas en polygon med tre hörn som ger oss  $P_3$  olika möjligheter att triangulera området till höger. På vänster sida finns det en polygon med sex stycken hörn vilket ger oss  $P_6$  olika sätt att triangulera området. Vi går vidare och låter den ifyllda triangelns topphörn vandra hela vägen runt till de återstående hörnen 4, 5, 6 och 7. De nästkommande figurerna skulle exempelvis kunna se ut som följande.



Vi undersöker på samma sätt både höger och vänster sida om den ifyllda triangeln i de här polygonen vilket du som läsare själv kan genomföra. Från vår första åttahörning fick vi med oss  $P_2$  och  $P_7$  antal sätt att triangulera sidorna om den ifyllda triangeln. För den andra åttahörningen där vi hade flyttat den ifyllda triangelns topphörn ett steg så fick vi ut  $P_3$  och  $P_6$ . I varje åttahörning finns det en höger

och vänstersida om den ifyllda triangeln så vi kommer alltid få fram två tal som vi nu enligt multiplikationsprincipen multiplicerar med varandra. För att räkna ut det totala antalet sätt att triangulera en åttahörning, det vill säga  $P_8$  så adderar vi alla dessa produkter

$$P_8 = P_2 \cdot P_7 + P_3 \cdot P_6 + P_4 \cdot P_5 + P_5 \cdot P_4 + P_6 \cdot P_3 + P_7 \cdot P_2.$$

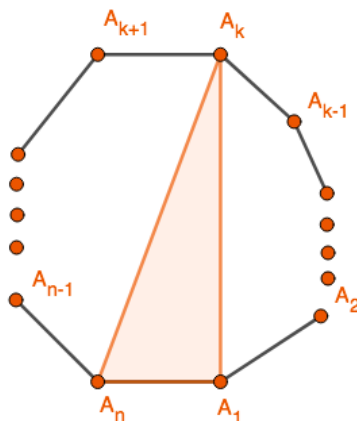
Detta kan vi skriva som

$$P_8 = \sum_{k=2}^7 P_k P_{8-k+1}$$

vilket är sats 5.11 i specialfallet  $n = 8$ .

Vi bevisar nu sats 5.11 för det allmänna fallet [2, kap.5].

*Bevis.* Vi tänker oss en  $n$ -hörning  $n \geq 3$  med hörnen  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , och låter  $k$  uppfylla  $1 < k < n$ .



Vi skapar en triangel  $\triangle A_1 A_k A_n$  och precis som i fallet med vår åttahörning så delar den ifyllda triangeln in vår polygon i två mindre polygoner. Om  $3 \leq k \leq n - 2$ , så får vi en  $k$ -hörning på högra sidan med hörnen  $A_1, A_2, \dots, A_k$  och en  $(n - k + 1)$ -hörning på den vänstra sidan med hörnen  $A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ . Men om vi skulle sätta  $k = 2$  så får vi ingen polygon på den högra sidan men en  $(n - 1)$ -hörning på den vänstra sidan. Vi får liknande resultat om vi sätter  $k = n - 1$ .

På den högra sidan finns  $k$ -hörningen och den kan bli triangulerad på  $P_k$  olika sätt och vår  $(n - k + 1)$ -hörning på vänster sida kan bli triangulerad på  $P_{n-k+1}$  olika sätt. Det totala antalet sätt att triangulera  $n$ -hörningen som innehåller  $\triangle A_1 A_k A_n$

blir via multiplikationsprincipen  $P_k P_{n-k+1}$ . Eftersom  $2 \leq k < n$  så blir det totala antalet sätt att triangulera en  $n$ -hörning

$$P_n = \sum_{k=2}^{n-1} P_k P_{n-k+1}$$

$$= P_2 P_{n-1} + P_3 P_{n-2} + P_4 P_{n-3} + \cdots + P_{n-1} P_2,$$

där vi har definierat  $P_2 = 1$ . □

I introduktionsavsnittet så tittade vi på Segners rekursiva formel för Catalantalen, sats 3.6

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

Vi kan nu bevisa att den gäller.

*Bevis.* Vi har från sats 5.11 att

$$P_n = \sum_{k=2}^{n-1} P_k P_{n-k+1}.$$

Från sats 5.9 har vi att  $P_{n+2} = C_n$  det vill säga  $P_n = C_{n-2}$  vilket ger oss efter en omskrivning

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + \cdots + C_{n-1} C_0,$$

vilket är Segners rekursiva formel för Catalantalen som vi introducerade i sats 3.6 och beviset är klart. □

## 6 Catalantalens genererande funktion

Vi har hittills sett Catalantalen i några olika former och vi ska nu bekanta oss med deras genererande funktion. Vi börjar med att klargöra vad en genererande funktion är. Om vi har en talföljd och vill uttrycka den i en mer kompakt form så kan vi konstruera den genererande funktionen. Den genererande funktionen är en formell potensserie som innehåller all information om talföljden. Den genererande funktionen  $f$  till en talföljd  $a_n$ , där  $n = 0, 1, 2, \dots$ , defineras som

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \dots$$

Målet för det här avsnittet är att beräkna den genererande funktionen för Catalan-talen och undersöka dess konvergensgenskaper.

**Definition 6.1.** Vi definierar  $C(x)$  som

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

Till att börja med vill vi undersöka om vår genererande funktion för Catalan-talen är konvergent. Vi har följande sats.

**Sats 6.2.** *Serien*

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

är konvergent om och endast om  $|x| \leq \frac{1}{4}$ .

*Bevis.* Vi säger att två talföljder  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  och  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  är asymptotiskt lika, och detta skriver vi som  $a_n \sim b_n$ , om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1. \quad (6.3)$$

Vi kommer att använda oss av Stirlings formel [4] som säger att faktulteter kan asymptotiskt ges av

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Vi har definition 3.1 av Catalan-talen

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

och använder vi oss av Stirlings formel får vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} &\sim \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{\sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(n+1)(2\pi n) \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \\ &= \frac{4^n}{(n+1)\sqrt{\pi n}} \sim \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}} \end{aligned}$$

eftersom  $n+1 \sim n$ , så har vi visat att

$$C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}.$$

Till att börja med så kan vi konstatera att  $C(x)$  är divergent för alla  $x$  sådan att  $|x| > \frac{1}{4}$  för då skulle inte seriens termer gå mot noll, d.v.s  $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}} x^n$  går ej mot noll vilket är ett kriterium för att en serie ska kunna konvergera. Så det återstår att undersöka om  $C(x)$  konvergerar då  $|x| \leq \frac{1}{4}$ . Vi sätter  $A_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}$  och betraktar motsvarande genererande funktion  $A(x)$  som är en serie utan faktorer vilken är lättare att undersöka konvergens på. Vi undersöker om

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}} x^n$$

konvergerar för alla  $x$  sådan att  $|x| \leq \frac{1}{4}$ . Vi börjar med att sätta  $x = \frac{1}{4}$ ,

$$A\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Nu är det tur att vi har läst analys A och kan använda oss av olika konvergenzkriterium från kursen [6]. Vi vet bland annat från teoridelen att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{är konvergent då } p > 1.$$

Tittar vi på högerledet ovan så ser vi att  $\frac{3}{2} > 1$  vilket betyder att  $A(x)$  är konvergent då  $x = \frac{1}{4}$ . I vårt fall så ser vi att  $x = \frac{1}{4}$  kommer ge oss serien med de största termerna, väljer vi ett  $x$  så att  $|x| \leq \frac{1}{4}$  så blir termerna  $A_n |x|^n$  mindre. Enligt jämförelsekriterium I som säger att om det för två talföljder  $a_n$  och  $b_n$  gäller att  $0 \leq a_n \leq b_n$  för  $n = 0, 1, \dots$  så gäller att om  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  är konvergent så är också  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergent. Vi kan alltså konstatera att serien  $A(|x|)$  är konvergent om  $|x| \leq \frac{1}{4}$ .

Vi har visat att serien  $A(|x|) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n |x|^n$  som vi fått fram via Stirlings formel är konvergent för alla  $x$  sådan att  $|x| \leq \frac{1}{4}$  och för att veta om  $C(x)$  är konvergent så använder vi oss av jämförelsekriterium II. Det säger att om gränsvärdet av kvoten mellan två positiva talföljder  $a_n$  och  $b_n$  blir ett tal mellan 0 och  $\infty$  då  $n \rightarrow \infty$  så gäller att  $\sum a_n$  är konvergent om och endast om  $\sum b_n$  konvergent. I vårt fall så vet vi från ekvation 6.3 att kvoten mellan  $C_n |x|^n$  och  $A_n |x|^n$  går mot 1 då  $n \rightarrow \infty$  och eftersom vi visat att  $\sum A_n |x|^n$  är konvergent så är då även  $\sum C_n |x|^n$  konvergent för alla  $x$  sådan att  $|x| \leq \frac{1}{4}$ . Slutligen vet vi angående absolutkonvergens att om  $\sum |a_k|$  är konvergent så är även  $\sum a_k$  konvergent och beviset är klart.  $\square$

Vi har nu visat att den genererande funktionen  $C(x)$  konvergerar då  $|x| \leq \frac{1}{4}$  och går vidare med ytterligare en sats.



**Sats 6.4.** Den genererande funktionen för Catalantalen ges av

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \quad \text{om } |x| \leq \frac{1}{4}.$$

*Bevis.* Vi använder oss av definition 6.1 och börjar med att plocka ut den första termen från serien som är  $C_0 \cdot x^0 = 1 \cdot 1$  och placerar den utanför summan

$$C(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n.$$

Om vi bryter ut en faktor  $x$  får vi

$$C(x) = 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^n.$$

Steget ovan har vi gjort för att nu kunna substituera  $C_{n+1}$  till en omskrivning av Segners rekursionsformel

$$C(x) = 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \right) x^n.$$

Den uppkomna serien kan skrivas som produkten av två separata serier

$$C(x) = 1 + x \sum_{l=0}^{\infty} C_l x^l \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m.$$

Dessa två separata serier är identiska med definition 6.1 vilket möjliggör omskrivningen

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 + x(C(x))^2 \\ &\Leftrightarrow \\ x(C(x))^2 - C(x) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Och genom att lösa andragradsekvationen får vi

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Genom att undersöka gränsvärdet då  $x \rightarrow 0$  så ser vi att vi måste välja minustecknet och inte plus. Vi vet att  $C_0 = 1$  så därför ska  $C(x) \rightarrow 1$  då  $x \rightarrow 0$  och det gränsvärdet existerar endast med minustecknet i täljaren. Den genererande funktionen för Catalantalen är därför

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

□

Vi har tagit fram den genererande funktionen för Catalantalen och vi kommer få se mer av den i nästkommande avsnitt där vi går in i sportens värld.

## 7 Catalantalen och sport

Vi har sett att Catalantalen kan räkna antalet möjliga vägar till en punkt  $(n, n)$  i  $xy$ -planet utan att gå ovanför diagonalen. Vi har också visat att Catalantalen kan räkna antal sätt att skapa binära träd med  $2n + 1$  antal noder. Vi har skapat bijektioner mellan parenteser kring en sträng med  $n + 1$  symboler samt om hur många sätt vi kan triangulera det inre av konvexa polygon. Alla dessa kombinatoriska problem är spännande på sitt sätt men vi ska nu gå in på något som kan kännas mer relaterbart i vår vardag, åtminstone för de läsare som är idrottsintresserade! Det här avsnittets första del är delvis baserad på L.W. Shapiros och W. Hamiltons studie om World Series som de publicerade 1993 för University of the District of Columbia och finns sammanfattad hos både Grimaldi [1] och Koshy [2]. Den andra delen av kapitel 7 är baserat helt på egna beräkningar.

### 7.1 Ett slutspel i ishockey

I ett slutspel i svensk ishockey så spelas finalserien alltid i bäst av sju matcher vilket innebär att det lag som först når fyra segrar har vunnit serien, vi säger att  $n = 4$ . Kvartsfinalerna kan spelas i bäst av fem matcher och då är  $n = 3$  och idag avgörs åttondelsfinalerna i bäst av tre matcher vilket betyder att  $n = 2$ . Först till  $n$  segrar vinner alltså serien.

Vi låter A och B vara två lag som möts i matcher där de antingen kan vinna eller förlora. Sannolikheten för att A vinner en match är  $p$  och att A förlorar tillika B vinner bestäms av sannolikheten  $q = 1 - p$ . Vi säger för det generella fallet att ett lag måste vinna  $n$  matcher av det som mest totala  $2n - 1$  antal matcher för att en matchserie ska ta slut. Vi inför nu slumpvariabeln

$$X = \text{antalet matcher.}$$

Vi vill bestämma sannolikheten att  $X = k$ , för ett givet heltal  $k$ . Denna sannolikhet betecknar vi som  $P(X = k)$  där  $P$  står för sannolikhet.

**Lemma 7.1.** *Sannolikheten för  $k$  matcher då  $n = 3$  ges av*

$k$	3	4	5
$P(X = k)$	$p^3 + q^3$	$3(p^2q)p + 3(pq^2)q$	$6(p^2q^2)p + 6(p^2q^2)q$

*Bevis.* Serien som kan liknas en kvartsfinalserie i bäst av fem matcher kan som snabbast vara avgjord efter tre matcher och som längst spelas i fem matcher. Exempelvis kan lag A vinna matchserien efter fyra matcher. Det betyder att lag A kommer först till tre vinster och förlorar endast en match, detta kan ske på tre

olika sätt och vi illustrerar det med en tabell (Notera att lag A alltid måste vinna sista matchen för att vinna serien).

Match 1	Match 2	Match 3	Match 4	Sannolikhet
Vinst	Vinst	Förlust	Vinst	$ppqp = (p^2q)p$
Vinst	Förlust	Vinst	Vinst	$pqpp = (p^2q)p$
Förlust	Vinst	Vinst	Vinst	$qppp = (p^2q)p$

Vi lägger ihop de tre olika sätten vilket betyder att sannolikheten för A att ta hem kvartsfinalserien efter fyra matcher kan skrivas som  $3(p^2q)p$  och om lag B skulle gå vinnande ur serien får vi istället  $3(pq^2)q$ . Den sammanlagda sannolikheten för att kvartsfinalen skulle ta slut efter fyra matcher uttrycks därför som  $3(p^2q)p + 3(pq^2)q$ . Gör vi liknande tabeller för tre respektive fem matcher så har vi bevisat lemma 7.1.  $\square$

Vi introducerar nu väntevärdet som står för hur många matcher en matchserie förväntas pågå vid en viss sannolikhet  $p = P(\text{A vinner})$ . Vi betecknar väntevärde som  $E(X)$ .

**Definition 7.2.** Väntevärdet för slumpvariabeln  $X$  är

$$E_n = E(X) = \sum_{k=n}^{2n-1} k \cdot P(X = k).$$

**Sats 7.3.** Det förväntade antalet matcher i en serie först till tre är

$$E_3 = 3(1 + pq + 2p^2q^2).$$

*Bevis.* Så genom att använda oss definition 7.2 och sannolikheterna från lemma 7.1 får vi

$$\begin{aligned} E_3 &= 3[p^3 + q^3] + 4[3(p^2q)p + 3(pq^2)q] + 5[6(p^2q^2)p + 6(p^2q^2)q] \\ &= 3(p+q)(p^2 - pq + q^2) + 12pq(p^2 + q^2) + 30(p^2q^2)(p+q) \\ &= 3[p^2 - pq + q^2 + 4pq(p^2 + q^2 + 10p^2q^2)], \end{aligned}$$

eftersom  $p+q=1$ . Eftersom  $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1-2pq$ . Så kan vi istället skriva

$$\begin{aligned} E_3 &= [1 - 3pq + 4pq(1 - 2pq) + 10p^2q^2] \\ &= 3(1 + pq + 2p^2q^2) \text{ och vi är färdiga med beviset.} \end{aligned}$$

$\square$

På liknande sätt så kan  $E_1, E_2, E_4$  och  $E_5$  beräknas och vi ser resultatet i tabellen nedan [1, kap. 28].

$E_1 =$	1	Tabell 7.1.3
$E_2 =$	$2(1 + pq)$	
$E_3 =$	$3(1 + pq + 2p^2q^2)$	
$E_4 =$	$4(1 + pq + 2p^2q^2 + 5p^3q^3)$	
$E_5 =$	$5((1 + pq + 2p^2q^2 + 5p^3q^3 + 14p^4q^4))$	

Ja det här var nytt för oss och kanske lite intressant, men vad har det med Catalantalen att göra? Vi som fått ett tränat (skadat) öga kan faktiskt se att Catalantalen,  $C_0, C_1, C_2, C_3$  och  $C_4$  uppenbarar sig som koefficienter framför termerna i varje parentes och vi kan nog även göra en kvalificerad gissning om hur  $E_6$  ser ut. Det visar sig alltså att det finns ett samband mellan antalet förväntade matcher och Catalantalen. Vi låter nu lag A och B spela en serie av matcher som tar slut när ett av dem vunnit  $n$  matcher, det vill säga att vi ska beräkna det generella väntevärdet  $E_n$ .

**Sats 7.4.** *De förväntade antalet matcher i en serie först till  $n$  vinster kan med hjälp av Catalantalen skrivas på summaform*

$$E_n = n \sum_{k=0}^{n-1} C_k (pq)^k.$$

*Bevis.* Tidigare sa vi att en serie kan som längst spelas i  $2n - 1$  matcher och första lag till  $n$  vinster har vunnit serien. Om exempelvis lag A vinner en serie efter  $n + k$  matcher så betyder det att lag B vunnit  $k$  av de  $n + k - 1$  matcherna och lag A de resterande  $n$  matcher. De vinster som lag B lyckas ta kan väljas på  $\binom{n+k-1}{k}$  sätt. Sannolikheten att en serie av  $n + k$  matcher spelas med A som vinnare för  $n$ :te gången i match  $n + k$  kan därför uttryckas som  $\binom{n+k-1}{k} (p^{n-1}q^k)p = \binom{n+k-1}{k} (p^n q^k)$  och skulle B vara vinnaren  $\binom{n+k-1}{k} (q^n p^k)$ . Vi har att

$$P(X = n + k) = \binom{n+k-1}{k} (p^n q^k + q^n p^k) \quad \text{för } 0 \leq k \leq n - 1$$

eftersom det förlorande laget kan som mest vinna  $n - 1$  matcher. Vi får att det förväntade antalet matcher är

$$E_n = n(p^n + q^n) + (n + 1) \binom{n}{1} (p^n q + q^n p) + (n + 2) \binom{n + 1}{2} (p^n q^2 + q^n p^2) + \dots + (2n - 1) \binom{2n - 2}{n - 1} (p^n q^{n-1} q^n p^{n-1}).$$

Det förlorande laget i matchserien kan alltså vinna 0 till och med  $n - 1$  matcher och på summaform får vi

$$E_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n+k) \binom{n+k-1}{k} (p^n q^k + q^n p^k).$$

Och eftersom

$$(n+k) \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k)!}{k!(n-1)!} = n \binom{n+k}{k},$$

så kan vi skriva det som

$$E_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{k} (p^n q^k + q^n p^k). \quad (7.5)$$

Vi går vidare till den andra delen av beviset där vi kommer ägna oss åt flertalet omskrivningar och förenklingar. Vi vill visa att följande gäller

$$\frac{E_{n+1}}{n+1} - \frac{E_n}{n} = C_n p^n q^n.$$

Uträkningen (7.5) ger oss direkt att

$$\frac{E_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{k} (p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k).$$

Vi använder oss nu återigen av det faktum att  $p+q=1$  och skriver om potenserna

$$\begin{aligned} \frac{E_{n+1}}{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{k} (p^n (1-q) q^k + q^n (1-p) p^k) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{k} (p^n q^k + q^n p^k) - \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{k} (p^n q^{k+1} + q^n p^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (p^n q^k + q^n p^k) + \sum_{k=1}^n \binom{n+k}{k-1} (p^n q^k + q^n p^k) - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k-1} (p^n q^k + q^n p^k). \end{aligned}$$

Den sista omskrivningen kan vi göra p.g.a (i) för varje  $n \geq 0, k \geq 0$  så är  $\binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1}$  med  $\binom{n}{-1} = 0$ , och (ii) genom att ersätta  $k+1$  med  $k$  och sedan reindexera så får vi att  $\sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{k} (p^n q^{k+1} + q^n p^{k+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k-1} (p^n q^k + q^n p^k)$ . Nu tar många termer ut varandra och vi får

$$\frac{E_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (p^n q^k + q^n p^k) - \binom{n+(n+1)}{(n+1)-1} (p^n q^{n+1} + q^n p^{n+1})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (p^n q^k + q^n p^k) - \binom{2n+1}{n} (p^n q^{n+1} + q^n p^{n+1}) \\
&= \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{k} (p^n q^k + q^n p^k) + \binom{2n}{n} (2p^n q^n) \right] - \binom{2n+1}{n} (p^n q^n)(q+p) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{k} (p^n q^k + q^n p^k) + \left[ 2 \binom{2n}{n} - \binom{2n+1}{n} \right] p^n q^n.
\end{aligned}$$

Vi drar oss till minnes till sats 3.3 från introduktionen där vi visade att  $C_n = 2 \binom{2n}{n} - \binom{2n+1}{n}$  vilket betyder att vi kan göra omskrivningen

$$\frac{E_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{k} (p^n q^k + q^n p^k) + C_n p^n q^n.$$

Vidare så kan vi användas oss av beräkningarna i (7.5) som ger oss

$$\frac{E_{n+1}}{n+1} = \frac{E_n}{n} + C_n p^n q^n.$$

Detta blir rekursionen

$$\begin{cases} \frac{E_{n+1}}{n+1} = \frac{E_n}{n} + C_n p^n q^n & \text{då } n \geq 1, \\ E_1 = 1 \end{cases}$$

som vi kan uttrycka på summaform enligt

$$\frac{E_n}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k (pq)^k$$

och beviset av sats 7.4 är klart. □

Vi avslutar denna del med ett exempel.

*Exempel 7.6.* De två hockeylagen Modo och Timrå möts i en semifinalsserie som spelas i bäst av fem matcher, det vill säga försten att nå tre vinster. Ett spelbolag har satt fasta odds för de båda lagen och ger Modo sannolikheten  $p = 0.4$  att vinna en match vilket ger Timrå  $q = 0.6$ . Hur många matcher förväntas serien gå till? Vi använder oss av formeln vi precis visat.

$$\begin{aligned}
E_3 &= 3 \sum_{k=0}^2 C_k (0.4 \cdot 0.6)^k \\
&= 3(1 + 1 \cdot 0.24 + 2 \cdot 0.24^2) \\
&= 4.0656
\end{aligned}$$

Det förväntade antal matcher efter spelbolagets oddssättning för den här semifinalserien är alltså lite drygt fyra stycken.

## 7.2 En konvergerande funktion och en väldigt lång matchserie

Vi har pratat om en serie på tre, fem och sju matcher, men vad skulle hända om serien bestod av väldigt många fler matcher? Vi vill veta vad som händer då  $n$  går mot oändligheten, vad blir det förväntade antalet matcher då? Vi kan som exempel tänka oss en slantsingling där sannolikheten för krona eller klave är 0.5. Hur många gånger förväntas vi singla slanten för att komma till  $n$  antal klave? Vi har visat i avsnitt 6 att  $C(x)$  konvergerar för  $|x| \leq \frac{1}{4}$  och vi sätter nu upp en ny sats som gäller det förväntade antalet matcher för en väldigt lång serie.

**Sats 7.7.** *Då  $n \rightarrow \infty$  så gäller att*

$$\frac{E_n}{n} \rightarrow C(pq)$$

där

$$C(pq) = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & 0 < p < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{2} \leq p < 1 \end{cases}$$

*Bevis.* Vi får ett relativt kort bevis där vi använder oss av tidigare definitioner och satser. Vi har från definition 6.1

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Och från sats 6.4 om den genererande funktion

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}, \quad \text{om } |x| \leq \frac{1}{4}.$$

Från sats 7.4

$$\frac{E_n}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k (pq)^k$$

och om vi nu låter antalet matcher  $n$  gå mot  $\infty$  så får vi alltså

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (pq)^k = C(pq).$$

Vi noterar att

$$0 \leq pq \leq \frac{1}{4}$$

eftersom sannolikheten  $p = 0.5$  som ger  $q = 1 - p = 0.5$  ger oss den största produkten, 0.25. Från sats 6.4 får vi att

$$C(pq) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2pq}.$$

Vi kan skriva om funktionen så det istället blir en funktion endast beroende av  $p$  eftersom  $q = 1 - p$

$$\begin{aligned} C(pq) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1 - p)}}{2p(1 - p)} = \frac{1 - \sqrt{4p^2 - 4p + 1}}{2p(1 - p)} \\ &= \frac{1 - \sqrt{(2p - 1)^2}}{2p(1 - p)} = \frac{1 - |2p - 1|}{2p(1 - p)}. \end{aligned}$$

Vi får nu två intervall, ett då  $0 < p < \frac{1}{2}$  och ett då  $\frac{1}{2} \leq p < 1$ . Vi börjar med att förenkla det första fallet där vi får negativa tal innanför parentesen och vi får därför

$$C(pq) = \frac{1 - (-(2p - 1))}{2p(1 - p)} = \frac{p(2)}{p(2 - 2p)} = \frac{1}{1 - p}.$$

Det andra fallet ger oss

$$C(pq) = \frac{1 - (2p - 1)}{2p(1 - p)} = \frac{2(1 - p)}{2p(1 - p)} = \frac{1}{p}.$$

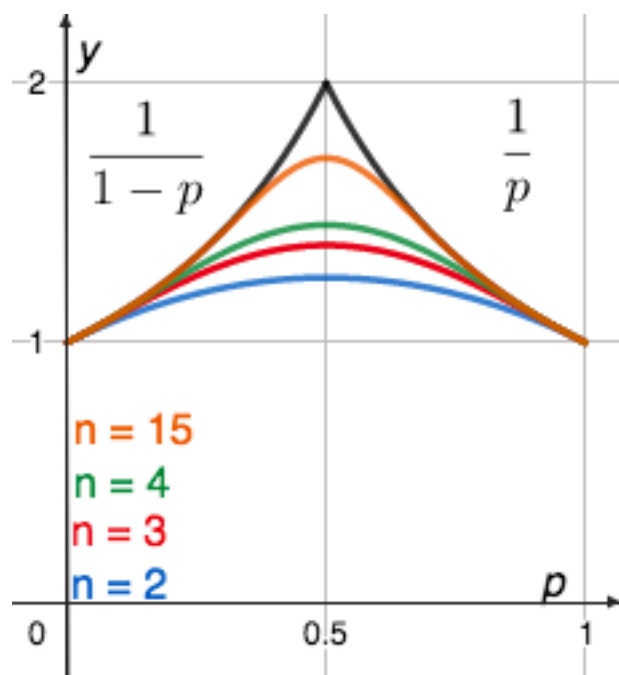
Vi får att

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n} &= C(pq) \quad \text{där} \\ C(pq) &= \begin{cases} \frac{1}{1-p} & 0 < p < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{2} \leq p < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

vilket vi skulle visa. □

Beviset är klart och vi illustrerar det grafiskt. Vi plottar  $C(pq)$  och ser att funktionen bildar något som liknar ett snedtak. Vi plottar väntevärdena enligt sats 7.4 för vår kvartsfinal  $E_2$ , semifinal  $E_3$ , final  $E_4$  och även en väldigt lång matchserie som är först till 15 vinster det vill säga  $E_{15}$ . Vi har på  $y$ -axeln  $y = \frac{E_n}{n}$  och på  $x$ -axeln har vi sannolikheten  $0 \leq p \leq 1$ . På  $y$ -axeln motsvarar 1 att matchserien spelas i  $n$  matcher.





Våra matchserier ryms alla under taket och vi ser att desto större  $n$  är desto närmare går  $\frac{E_n}{n}$  mot  $C(pq)$ . Vi kan också se att desto jämnare två motståndare är, det vill säga att  $p$  ligger nära 0.5 så kommer serien förväntas pågå i fler matcher och närma sig den övre gränsen på  $2n - 1$  antal matcher.

Vi har visat att vi kan beräkna förväntade antalet matcher som ska spelas i en matchserie försten till  $n$  vinster med hjälp av Catalantalen. Då  $n$  är ett väldigt stort tal så konvergerar  $\frac{E_n}{n}$  mot den genererande funktionen för Catalantalen.

## 8 Summering och avslut

För att avsluta det här arbetet så kan vi konstatera att Catalantalen dyker upp på väldigt varierade områden inom matematiken. Om det nu är vägarna i  $xy$ -planet eller förväntade antalet matcher i en matchserie som fångat din uppmärksamhet så hoppas jag att du som läsare har funnit texten intressant och lätt att följa. Tanken bakom arbetet var att fördjupa mina egna kunskaper i ämnet matematik och samtidigt introducera läsaren till Catalantalen. Texten behandlar endast en bråkdel av situationer där Catalantalen dyker upp och om du skulle vilja få reda på ett till område eller kanske 214 stycken olika så rekommenderar jag Richard P. Stanleys bok *Catalan Numbers* som på ett mycket utförligt sätt beskriver, för att citera Stanley själv, ”denna anmärkningsvärda eleganta” talföljd.

## Referenser

- [1] R. Grimaldi, *Fibonacci and Catalan numbers: an introduction*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2012.
- [2] T. Koshy *Catalan Numbers with Applications* Ann. Oxford Scholarship Online; 2009, (2008)
- [3] S. Roman, *An Introduction to Catalan Numbers*, Birkhäuser, (2015).
- [4] D. Romik, *Stirling's Approximation for  $n!$ : The Ultimate Short Proof?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 107, No. 6 (Jun. – Jul., 2000), 556–557.
- [5] R. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press (2015).
- [6] M. Tamm, *Serier och generaliserade integraler*, Matematiska institutionen, Stockholms universitet, Kurskompendium, VT2020.