SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Sfärisk trigonometri

av

Julia Rundbom

2022 - No K12

Sfärisk trigonometri

Julia Rundbom

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2022

Sfärisk trigonometri

Julia Rundbom

Contents

1 Introduktion **3**
1.1 Kort om sfärisk trigonometris historia . . . 3

2 Viktiga begrepp **3**
2.1 Storcirklar . . . 4
2.2 Storcirkelbågar . . . 4
2.3 Vinklar i en sfärisk triangel . . . 4

3 Satser inom sfärisk trigonometri **5**
3.1 Vinkelsumman i en sfärisk triangel . . . 6
3.2 Sfäriska cosinussatsen . . . 7
3.2.1 Bevis . . . 7
3.2.2 Navigation . . . 9
3.2.3 Exempel . . . 9
3.2.4 Vad händer då $R \to \infty$? . . . 11
3.3 Den duala cosinussatsen . . . 11
3.3.1 Bevis . . . 12
3.3.2 Navigation . . . 13
3.3.3 Exempel . . . 13
3.3.4 Vad händer då $R \to \infty$? . . . 15
3.4 Sfäriska sinussatsen . . . 16
3.4.1 Bevis . . . 16
3.4.2 Navigation . . . 17
3.4.3 Exempel . . . 17
3.4.4 Vad händer då $R \to \infty$? . . . 19
3.5 Gebers och pythagoras sats . . . 20
3.5.1 Bevis . . . 20
3.5.2 Navigation . . . 24
3.5.3 Exempel . . . 24
3.5.4 Vad händer då $R \to \infty$? . . . 25
3.6 Satsen om fyra kvantiteter . . . 26
3.6.1 Navigation . . . 27
3.6.2 Exempel . . . 28
3.6.3 Vad händer då $R \to \infty$? . . . 30
3.7 Girards sats . . . 30
3.7.1 Bevis . . . 30
3.7.2 Exempel . . . 31
3.7.3 Vad händer då $R \to \infty$? . . . 32

4 Slutsats **32**

1 Introduktion

De allra flesta av oss är nog mer insatta och vana vid plan geometri och trigonometri och de satser som ingår där. Men, just i denna uppsats ska vi förkovra oss lite i sfärisk geometri och närmre bestämt sfärisk trigonometri. Sfärisk geometri handlar, inte så otroligt nog, om geometri på en sfär. Vi kan t ex använda sfärisk geometri för att beräkna avstånd på jordytan. Jorden är rund men egentligen inte helt sfärisk, för att göra beräkningar någorlunda enkla så approximerar man dock jorden till att vara helt rund. Och det gör vi även i denna uppsats. Men, som jag skrev ovan så ska vi i denna uppsats inrikta oss främst mot sfärisk trigonometri och vad det används till.

I sfärisk trigonometri så har man valt att arbeta med enhetssfären, dvs en sfär med radie 1. Man har valt att göra så för att göra beräkningar och satser enklare att hantera. Men, vad skulle hända med en sfärisk triangel om radien i en sfär går mot oändligheten, då sfären bara blir större och större? Vad händer med de olika satserna och vad kan man dra för slutsatser av det?

1.1 Kort om sfärisk trigonometris historia

När jag började med denna uppsats så var sfärisk trigonometri något helt nytt för mig. När jag pratade med vänner och familj så hade de heller ingen tanke om vad det var. Men, det är faktiskt inte så länge sen som sfärisk geometri och sfärisk trigonometri var en del av skolundervisningen. [7].
Läran om sfärisk geometri går tillbaka över 2000 år. Många har länge vetat att jorden är rund och hur man kan använda just den kunskapen till olika saker, bland annat till navigation.

Om man tittar tillbaka på historien och den sfäriska trigonometrin så har den just varit allra viktigast för sjöfart och luftfart, närmre bestämt för navigation. Sfärisk trigonometri skapades nämligen utifrån behovet att kunna lokalisera sig efter stjärnor och planeter [1]. I en modernare tid har sfärisk trigonometri även använts av luftfart. Som exempel så kan man använda sfärisk trigonometri för att beräkna den kortaste rutten om man ska flyga mellan ARN (Arlanda, Stockholms flygplats) och LAX (Los Angeles flygplats).

2 Viktiga begrepp

Nedan kommer jag att redogöra för en del begrepp som kommer användas i uppsatsen och som kan vara bra att veta vad de betyder för att förstå vad sfärisk trigonometri är.

2.1 Storcirklar

Om man ritar cirklar runt en sfär så får man cirklar med olika radie. De största av dessa cirklar, de vars medelpunkt sammanfaller med sfärens medelpunkt, kallas storcirklar. T ex så är ekvatorn en storcirkel. De andra cirklarna med mindre radie kallas småcirklar.

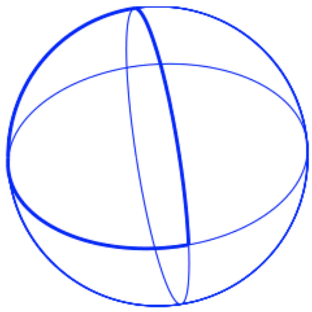

Figure 1: Storcirklar

Möjligtvis har du lagt märke till att när du flyger och får upp flygrutten på skärmen framför dig så ser rutten krökt ut. Detta är på grund av att rutten följer en så kallad storcirkelbåge. Snabbaste vägen är alltid via en storcirkelbåge. Enkelt förklarat så beror detta på att storcirkelbågar har den minsta krökningen på sfärens yta. Alla cirklar mindre än en storcirkel, dvs småcirklar, har mer krökning och vägen blir därför längre om man skulle följa dessa. [9]

2.2 Storcirkelbågar

Plan trigonometri handlar om sambandet mellan sidor och vinklar i trianglar. I den sfäriska trigonometrin behandlar man sfäriska trianglar där sidorna utgörs av storcirkelbågar.

2.3 Vinklar i en sfärisk triangel

Inom sfärisk trigonometri så pratar man om vinklar mellan storcirklar och det finns lite olika sätt att definiera detta på. Man kan prata om vinkeln mellan planen eller om vinkeln mellan normalerna till planen. Det finns även ett tredje sätt och det är att göra en lokal plan approximation vilket innebär att om vi är

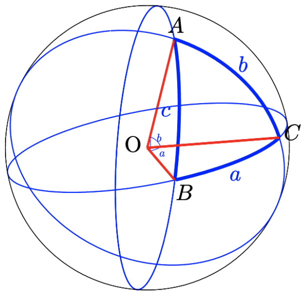

Figure 2: Sfärisk triangel med storcirkelbågar som sidor

väldigt nära en punkt A så är sfären i princip plan där och vi kan då göra en approximation av vinkeln nära punkten A.

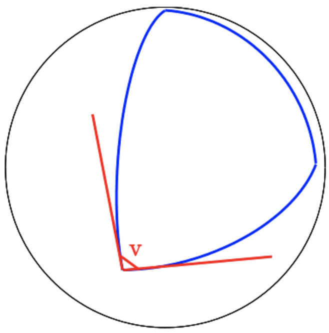

Figure 3: En approximation nära en punkt v

Men, det speciella med sfäriska trianglar är att även sidorna i trianglarna är vinklar och mäts i radianer eller grader. En sidas vinkel bestäms av vinkeln mellan de två vektorer som går från sfärens mitt till sidans ändpunkter.

3 Satser inom sfärisk trigonometri

Här kommer det presenteras satser som är viktiga för sfärisk trigonometri. Satserna kommer beskrivas, bevisas och ges exempel på. Både exempel för hur man beräknar vinklar i en sfärisk triangel med hjälp av just den satsen men även hur satsen har använts eller används idag ur ett navigationsperspektiv.

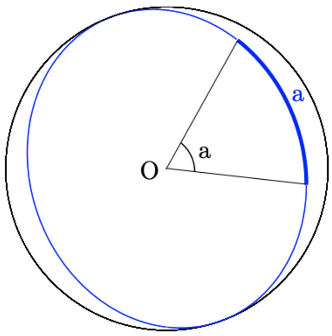

Figure 4: Hur en sidas vinkel bestäms

3.1 Vinkelsumman i en sfärisk triangel

Sfäriska trianglar skiljer sig en del från plana trianglar. En av dessa skillnader är att vinkelsumman alltid är mer än 180°i en sfärisk triangel. Den kan vara uppemot 540°eller närmre 180°beroende på hur stor den sfäriska triangeln är. Men, hur kommer det sig att en sfärisk triangel har en vinkelsumma som alltid är större än 180°?
Att sidorna i en sfärisk triangel är storcirkelbågar innebär att triangelns sidor är krökta. Detta medför att vinkelsumman alltid är mer än 180°. Vi behöver dock ett mer korrekt bevis för detta.

Det finns en sats som heter Girards sats, jag bevisar den längre ner. Och Girards sats säger att ytan av en sfärisk triangel på en sfär med radie R är:

$$|\triangle ABC| = R^2(A + B + C - \pi).$$

Ytan av en sfärisk triangel bestäms alltså helt utifrån hörnvinklarna och hur mycket vinkelsumman överstiger 180°. I en plan triangel så är överskottet 0. Vinkelöverskottet kallas för sfäriskt överskott. [7]

En sfärisk triangel har förstås en area, och då följer ur Girards sats att vinkelsumman är större än 180°. För mer se diskussionen om Girads sats på sidan 29.

3.2 Sfäriska cosinussatsen

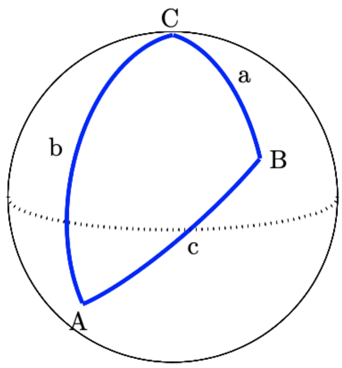

Figure 5: En sfärisk triangel

Cosinussatsen i en sfärisk triangel på en sfär med radie 1 säger att:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Viktigt att tänka på är att sidorna i en sfärisk triangel mäts i radianer (för beteckningar på sidor, se figur 5). Sidorna i en sfärisk triangel är med andra ord vinklar. En sidas vinkel bestäms av vinkeln mellan de två vektorer som går från sfärens mitt till sidans ändpunkter.

Som vi ser i figur 4 så är a, b och c triangelns sidor och C är vinkeln som bestäms av vinkeln mellan vektorerna som man får från sfärens mitt till ändpunkterna på sidan c.

Den sfäriska cosinussatsen är väldigt användbar vid navigering då man utgår främst ifrån avstånd, närmare bestämt behöver vi veta sidorna i en triangel och endast en vinkel alternativt att man har alla tre sidor givna vilket ger oss en hörnvinkel.

3.2.1 Bevis

Vi bestämmer att $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är enhetsvektorer från sfärens mittpunkt till de tre hörnen. Viktigt att poängtera här är att enhetsvektorerna har längden 1. Två plan kan bestämmas av vektorparen $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{u}, \vec{w}$. Vinkeln C är då vinkeln mellan normalerna till dessa två plan och normalerna väljer vi som $\vec{u} \times \vec{v}$ och $\vec{u} \times \vec{w}$. Vi får då:

$$\cos C = \frac{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w})}{|\vec{u} \times \vec{v}||\vec{u} \times \vec{w}|}.$$

Nämnaren: Absolutbeloppet $|\vec{u} \times \vec{v}|$ i nämnaren är arean av de parallellogram som bildas av vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Räkneregler säger att vi kan skriva om denna area till produkten av sinus för vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ (som är a) respektive $\vec{w}$ (som är b), då längderna $\vec{u} = \vec{v} = 1$. Vi får då:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin a = \sin a$$

och likadant blir:

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = |\vec{u}||\vec{w}| \sin b = \sin b.$$

Detta leder till att nämnaren kan skrivas om till $\sin a \sin b$. Vad gäller täljaren så kan vi med hjälp av räkneregler skriva om den så vi får:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = |\vec{u}|^2(\vec{v} \cdot \vec{w}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u} \cdot \vec{w}).$$

Vidare vet vi att vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är c vilket leder till:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos c = \cos c.$$

På samma sätt blir

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \quad \text{och} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = \cos b.$$

Detta leder till att vi kan skriva om täljaren på detta vis:

$$(\vec{u} \times \vec{v})(\vec{u} \times \vec{w}) = \cos c - \cos a \cos b.$$

Om vi nu använder oss av den omskrivna täljaren och nämnaren får vi:

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

och detta kan skrivas om som:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Detta bevisar den sfäriska cosinussatsen. Specialfall om vinkeln C är rät, alltså $C = \frac{\pi}{2}$. Då blir $\cos C = 0$ och vi får då Pythagoras sats för sfäriska trianglar

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

3.2.2 Navigation

Den sfäriska cosinussatsen används inom navigering på det sätt att man kan beräkna bäringen, vinkeln mellan en riktning och nordriktningen, till destinationen. [8]
Vi säger att A är nordpolen, C är vår position på t ex havet och B är vår destination (bäringen betecknas med γ). Då får vi:

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

3.2.3 Exempel

Vi tänker oss att vi ska segla över norra atlanten, från Lissabon till New York. Hur långt är avståndet? För att ta reda på detta så skapar vi en sfärisk triangel med position i Lissabon (B), destination New York (A) och en punkt, vi kan kalla C, i Nordpolen. New York har koordinaterna 40°46'55" N, 73°57'58" V och Lissabon har koordinaterna 38°42' N, 9°11' V.

Eftersom vi har koordinaterna så kan vi då beräkna längderna av a respektive b och även vinkeln C (nordpolen). Men, för att kunna räkna med koordinaterna behöver vi göra om grader, minuter och sekunder till ett decimaltal. Detta gör vi på följande sätt:

För New York:

$$40°46'55'' = 40 + \frac{46}{60} + \frac{55}{3600} = 40.79°$$
$$73°57'58'' = 73 + \frac{57}{60} + \frac{58}{3600} = 73.97°$$

och för Lissabon:

$$38°42' = 38 + \frac{42}{60} = 38.7°$$
$$9°11' = 9 + \frac{11}{60} = 9.18°.$$

För att förklara vad jag gör ovanför så förklarar jag först hur man läser koordinaterna. Om vi använder New York som exempel och koordinaterna 40°46'55" N så står 40 för hela grader, 46 står för minuter och 55 för antalet sekunder. För att kunna använda detta i beräkningar måste vi räkna om dem lite, detta gör vi genom att dela antalet minuter på 60 och antalet sekunder på 3600. Detta gör vi för att det går 60 minuter på en grad och 3600 sekunder på en grad.[5] Vi fortsätter med att beräkna längderna för a respektive b:

$$b = 90 - 38.7 = 51.3^\circ$$
$$a = 90 - 40.79 = 49.21^\circ.$$

Vinkeln C vid nordpolen blir skillnaden mellan de två longituderna vi har, alltså:

$$73.97 - 9.18 = 64.79^\circ.$$

Om vi nu sätter in detta i den sfäriska cosinussatsen så får vi:

$$\cos c = \cos 49.21^\circ \cos 51.3^\circ + \sin 49.21^\circ \sin 51.3^\circ \cos 64.79^\circ$$

Vi vill nu lösa för c för att kunna få avståndet och vi får då:

$$c = \cos^{-1}\left(\cos 49.21^\circ \cos 51.3^\circ + \sin 49.21^\circ \sin 51.3^\circ \cos 64.79^\circ\right) = 52.4^\circ.$$

Det vi har fått fram är alltså sidovinkeln c som är 52.4 °. Om vi nu vill få ut detta i ett mått på avstånd istället så väljer vi att multiplicera c med 60. Då får vi ut hur många sjömil det är mellan New York och Lissabon.

$$c = 52.4 \cdot 60 = 3144 \quad \text{sjömil}$$

En sjömil är 1.852 km vilket innebär att vi enkelt kan få fram hur många kilometer det är mellan New York och Lissabon så här:

$$3144 \cdot 1,852 = 5822,7 \quad \text{km}.$$

Avståndet är ca 5822,7 km mellan Lissabon och New York.

3.2.4 Vad händer då $R \to \infty$?

Vad händer med den sfäriska cosinussatsen om vi låter $R \to \infty$? Istället för att som ovan anta att $R = 1$, så ska vi ta reda på vad som sker om radien blir oändligt stor. Vi har sfärens radie R. Den sfäriska cosinussatsen ser då ut som följer:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A.$$

Med hjälp av maclaurinutvekling har vi att:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^4 H(x) \quad \text{och} \quad \sin x = x + x^3 H(x)$$

där H står för olika funktioner som är begränsade nära 0. Om vi sätter in det i (18) och sedan förenklar så får vi:

$$a^2 + R^{-2}H(R^{-1}) = b^2 + c^2 + R^{-2}H(R^{-1}) - 2\left(bc + R^{-2}H(R^{-1})\right)\cos A.$$

Om vi nu låter $R \to \infty$ så får vi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Alltså, om vi låter $R \to \infty$ så blir den sfäriska cosinussatsen densamma som cosinussatsen för plan trigonometri. [6]

3.3 Den duala cosinussatsen

Det finns även något som kallas för den duala cosinussatsen. Denna sats är viktig och användbar då man kan använda den om man vet alla vinklar i en sfärisk triangel. Vet man alla vinklar kan man räkna ut alla sidor.[2] Även om man har ett problem där man vet vinkel, sida, vinkel kan denna sats vara användbar.

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c$$

3.3.1 Bevis

För att kunna bevisa den här satsen behöver vi introducera den polära triangeln. Vi kan skriva den polära triangeln som $\triangle A'B'C'$ och den är en dual till den sfäriska triangeln $\triangle ABC$. Att den är en dual innebär att den bildas så här: tänk på sidan AB som en del av ekvatorn. Då är C' den pol (nord/syd) som ligger på samma sida om ekvatorn AB som C. Upprepa med den sfäriska triangelns andra sidor för att få A' och B'.

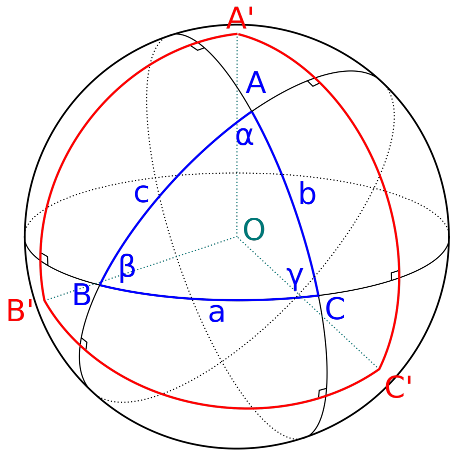

Figure 6: En polär triangel, wikipedia

I bilden så har vi nu en polär triangel, $\triangle A'B'C'$ och en vanlig sfärisk triangel $\triangle ABC$. Det finns förhållanden mellan dessa två trianglar och det är dessa förhållanden vi använder för att bevisa den duala cosinussatsen.

$$A' = \pi - a \quad B' = \pi - b \quad C = \pi - c$$
$$a' = \pi - A \quad b' = \pi - B \quad c' = \pi - C$$

Den sfäriska cosinussatsen (se sats 3.2 i [4]) som vi bevisat och gett exempel på ovan, gäller såklart även för den polära triangeln. Vi använder därför den sfäriska cosinussatsen på den polära triangeln:

$$\cos c' = \cos a' \cdot \cos b' + \sin a' \cdot \sin b' \cdot \cos \gamma'.$$

Detta kan nu skrivas om så här:

$$\cos(\pi - C) = \cos(\pi - A) \cdot \cos(\pi - B) + \sin(\pi - A) \cdot \sin(\pi - B) \cdot \cos(\pi - c) =$$
$$-\cos C = (-\cos A) \cdot (-\cos B) + \sin A \cdot \sin B(-\cos c) =$$
$$-\cos C = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c =$$
$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c.$$

Den duala cosinussatsen är därmed bevisad.

3.3.2 Navigation

Som vi redan lärt oss så krävs olika information för att använda den sfäriska cosinussatsen och den duala cosinussatsen. Sfäriska cosinussatsen kräver att man vet alla sidor eller två sidor och en vinkel. Den duala cosinussatsen är intressant då, till skillnad från plana trianglar, man kan beräkna alla sidor om man vet alla hörnvinklar i en sfäriska triangel. Navigationsmässigt så innebär detta att om man vet vinklar så kan man beräkna avstånd (sidor).

3.3.3 Exempel

Ett exempel på anvädningen av denna sats finner vi i Van Brummelens bok "Heavenly mathematics". Han förklarar att det är en fantasifull illustration av satsen om än väldigt ineffektiv. Men, för att ändå illustera så tänkte jag visa hans exempel nedan. [1]

Tänk er att vi ska flyga från Vancouver till Edmonton på en storcirkel. Vi mäter både sträckan vi färdas och kurserna vid avresa och ankomst. Avståndet mellan Vancouver och Edmonton mäter vi till 507 miles = 815.9 km eller 440.9 sjömil, detta motsvarar 7.35°. Vi lämnar Vancouver med en kurs på 50.7 ° NO och ankommer till Edmonton med en kurs på 58.22° NO. Som vi har gjort innan så blir det tredje hörnet i vår triangel Nordpolen, betecknat N. Precis som i exemplet med cosinussatsen så blir vinkeln N vid nordpolen skillnaden mellan longituderna. Vinkeln V = 50.7 ° och vinkeln E = $180° - 58.22° = 121.78°$. Vi använder nu den duala cosinussatsen och låter c vara resan från Vancouver till Edmonton.

Den duala cosinussatsen ger oss:

$$\cos N = -\cos V \cos E + \sin V \sin E \cos c$$

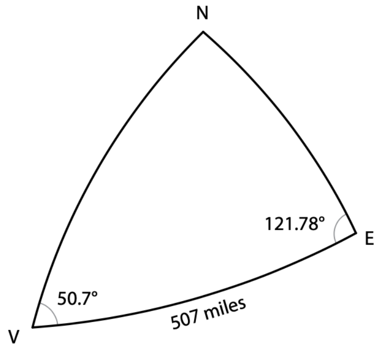

Figure 7: Vancouver till Edmonton

och vi löser ut N och får:

$$N = \cos^{-1}\left(-\cos 50.7^\circ \cos 121.78^\circ + \sin 50.7^\circ \sin 121.78^\circ \cos 7.35^\circ\right) = 9.6^\circ.$$

Vi har alltså med hjälp av den duala cosinussatsen tagit reda på den tredje vinkeln i vår triangel, i detta fall som jag skrev ovan, skillnaden i longitud mellan städerna. Tack vare detta resultat kan vi då ta reda på städernas latituder. Detta går att göra med den sfäriska cosinussatsen men är betydligt enklare med sfäriska sinussatsen. Sfäriska sinussatsen säger att (bevisas i nästa avsnitt):

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Vi byter ut A mot V, a mot v, B mot N och b mot n för att göra det enklare och mer förståeligt:

$$\frac{\sin V}{\sin v} = \frac{\sin N}{\sin n}.$$

Vi vill ha reda på v och gör om i vår uträkning:

$$\sin n \sin V = \sin N \sin v \to \sin v = \frac{\sin n \sin V}{\sin N}$$

För att ta reda på v så applicerar vi $\sin^{-1}$ på båda sidor och får:

$$v = \sin^{-1}\left(\frac{\sin n \sin V}{\sin N}\right).$$

Vi sätter in den information vi har och får:

$$v = 90° - \sin^{-1}\left(\frac{\sin 7.35° \sin 50.7°}{\sin 9.6°}\right) = 53.6°.$$

Vi gör samma sak för att få ut e och får:

$$e = 90° - \sin^{-1}\left(\frac{\sin 7.35° \sin 121.78°}{\sin 9.6°}\right) = 49.3°.$$

Vi har nu med hjälp av den duala cosinussatsen och sinussatsen fått fram latituderna till Vancouver respektive Edmonton.

3.3.4 Vad händer då $R \to \infty$?

Om vi tänker oss tre fixa punkter på sfären som tillsammans bildar en sfärisk triangel på en sfär med radie R. Vi antar att vinklarna och sidorna är A, B, C och a, b, c. Då har vi att:

$$\cos C = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos\left(\frac{c}{R}\right).$$

När då $c \to R$ så går $\cos \frac{c}{R} \to 1$ vilket leder till att den sfäriska triangeln går mot den plana triangeln med vinklar A, B och $C = 180 - A - B$ (på grund av att vinkelsumman i en plan triangel är just 180 grader).

Så när $R \to \infty$ så säger den duala cosinussatsen, alltså för den plana triangeln ABC, att:

$$\cos(180 - A - B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

Detta är en variant av additionsformeln för cos.

3.4 Sfäriska sinussatsen

Om man har en sfärisk triangel $\triangle ABC$ där man vet två sidor och en motstående vinkel så är det lämpligt att använda den sfäriska sinussatsen. Sinussatsen i en sfärisk triangel säger att:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

3.4.1 Bevis

Vi låter $\triangle ABC$ vara en sfärisk triangel med sidorna a, b och c. För att härleda sinussatsen för sfäriska trianglar så använder vi oss av cosinussatsen och den duala cosinussatsen för sfäriska trianglar (se ovan). Vi kommer även att använda oss av trigonometriska ettan (se nedan).

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

Med hjälp av de sfäriska cosinussatserna kan vi alltså bevisa den sfäriska sinussatsen.

$$\begin{aligned}
\cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \Rightarrow \\
\cos^2 a &= \frac{\cos^2 A + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos^2 B \cdot \cos^2 C}{\sin^2 B \cdot \sin^2 C} \Rightarrow \\
\sin^2 a = 1 - \cos^2 a &= 1 - \frac{\cos^2 A + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos^2 B \cdot \cos^2 C}{\sin^2 B \cdot \sin^2 C} \\
&= \frac{\sin^2 B \sin^2 C - \cos^2 A - 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - \cos^2 B \cdot \cos^2 C}{\sin^2 B \cdot \sin^2 C}
\end{aligned}$$

Med hjälp av trigonometriska ettan kan vi nu byta ut $\sin^2 B \sin^2 C$ mot $(1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C) = 1 - \cos^2 B - \cos^2 C + \cos^2 B \cos^2 C$. Vi har nu istället följande:

$$\frac{1 - \cos^2 B - \cos^2 C + \cos^2 B \cos^2 C - \cos^2 A - 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - \cos^2 B \cdot \cos^2 C}{\sin^2 B \cdot \sin^2 C}.$$

Som vi ser kan några termer tas ut mot varandra och vi har då kvar:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos^2 B - \cos^2 C - \cos^2 A - 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}{\sin^2 B \cdot \sin^2 C}.$$

Vi väljer nu att dividera hela ekvationen med $\sin^2 A$ och får:

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 A} = \frac{1 - \cos^2 B - \cos^2 C - \cos^2 A - 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}{\sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C}.$$

Om vi tittar på högerledet så ser vi att det är symmetriskt för a, b och c. Att högerledet är symmetriskt innebär att vi lika väl kan skriva att ekvationen är lika med $\frac{\sin^2 b}{\sin^2 B}$ eller $\frac{\sin^2 c}{\sin^2 C}$. Detta betyder att vi kan skriva om det så här:

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 b}{\sin^2 B} = \frac{\sin^2 c}{\sin^2 C}.$$

I en sfärisk triangel ligger alla sidor och vinklar mellan 0 och π vilket leder till att varje sinus är positivt. Vi gör rotutdragningar och får:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Detta bevisar då sinussatsen för sfäriska trianglar.

3.4.2 Navigation

Sinussatsen för sfäriska trianglar kan, som vi sett ovan och får se nedan, hjälpa oss att t.ex. ta fram en viss positions koordinater. Trots att vi idag kan se på sfäriska sinussatsen som ganska lättanvänd så tog det lång tid innan den blev populär att använda. Den användes enbart i vissa specialfall. Satsen om fyra kvantiteter, som beskrivs nedan, var långt mer populär.[7]

3.4.3 Exempel

Ett exempel på hur man kan tillämpa den sfäriska sinussatsen är följande. Säg att vi vill ta reda på vart, på storcirkelbågen mellan ARN och LAX, finns den nordligaste punkten? Vi vill svara med koordinaterna för just den punkten.

Vi döper om ARN till A och LAX till B och vinklarna vid P är räta. Vi får två trianglar att jobba med. Triangeln ACP har rät vinkel vid P och sinussatsen ger då:

$$\frac{\sin f}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin 90°} \Rightarrow \frac{\sin f}{\sin A} = \frac{\sin b}{1} \Rightarrow \sin f = \sin A \sin b.$$

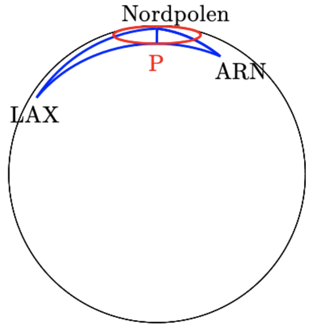

Figure 8: Arlanda, Nordpolen och Los Angeles flygplats

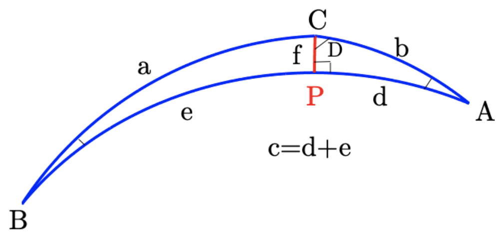

Figure 9: Tydligare bild av de två sfäriska trianglarna

Exemplet ovan är taget ur Chalmers kompendium om sfärisk trigonometri [**s.8**, 2], därför tänkte jag göra det enkelt för oss och hoppa över en del beräkningar. För att ta reda på $\sin f$ behöver vi vinkeln A och b. Vinkeln $A = 35.61°$ får man fram genom att använda cosinussatsen för sfäriska trianglar. Sidan b får man genom att ta $90° - LatA$ vilket ser ut såhär:

$$b = 90 - LatA = 90 - 59°39' = 90 - 59.65° \approx 30.35°.$$

Nu har vi det vi behöver för att beräkna f.

$$f = \sin^{-1}(\sin 35.61° \sin 30.35°) \Rightarrow f \approx 17.11°.$$

Vidare vill vi nu ta reda på d och detta gör vi med hjälp av cosinussatsen. På grund av att vi har en rät vinkel så blir det ett specialfall som vi känner till somn Pythagoras sats för sfäriska trianglar (bevis följer nedan)[2].

$$\cos b = \cos f \cos d \Rightarrow \cos d = \frac{\cos b}{\cos f} \Rightarrow d \approx 25.45^\circ.$$

Vi vill nu gå vidare och ta reda på vinkeln D. Detta gör vi genom att använda sinussatsen igen och får:

$$\frac{\sin D}{\sin d} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin b} \Rightarrow \sin D = \frac{\sin d}{\sin b} \Rightarrow D \approx 58.28^\circ.$$

Nu har vi tillräckligt med information för att beräkna koordinaterna för punkten P. Latituden beräkna vi med hjälp av $f \approx 17.11^\circ$ och vi tar då $90 - f \approx 72.89^\circ$. För att beräkna longituden för A tar vi $long_A - D \approx -40.36^\circ$. Om vi gör om svaren vi fått till grader och minuter så får vi att punkten P har latituden $72^\circ 59' N$ och longituden $40^\circ 22' V$. Punkten vi fått fram finner vi mitt i grönländska inlandsisen.

3.4.4 Vad händer då $R \to \infty$?

Vad händer med den sfäriska sinussatsen om vi låter $R \to \infty$? Om vi gör på samma sätt som med cosinussatsen ovan. Den sfäriska sinussatsen ser då ut som följer:

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{R}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{R}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{R}}.$$

Vi gör som ovan med cosinussatsen och använder oss av maclaurinutveckling för $\sin x$. För små värden på x är $\sin x = x + x^3 H(x)$ där $H(x)$ är en begränsad funktion. Vi kan i princip approximera detta till att $\sin x = x$. Om vi sätter att $x = \frac{a}{R}$ och dividerar alla element med R så får vi:

$$\begin{gathered} \frac{\sin A}{R\frac{a}{R}} = \frac{\sin B}{R\frac{b}{R}} = \frac{\sin C}{R\frac{c}{R}} = \\ \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}. \end{gathered}$$

Som vi ser är detta sinussatsen för plana trianglar. Om vi låter $R \to \infty$ kommer den sfäriska sinussatsen att närma sig den plana sinussatsen. Man kan uttrycka sig så att den plana sinussatsen är specialfallet $R = \infty$ av den sfäriska sinussatsen.

3.5 Gebers och pythagoras sats

Otroligt nog så finns det 10 satser som kan användas om vi har en rätvinklig sfärisk triangel. Alla dessa går att få fram från figuren nedanför. Vi kommer dock enbart att bevisa två av dom, nämligen Pythagoras sats för sfäriska trianglar och Gebers sats.

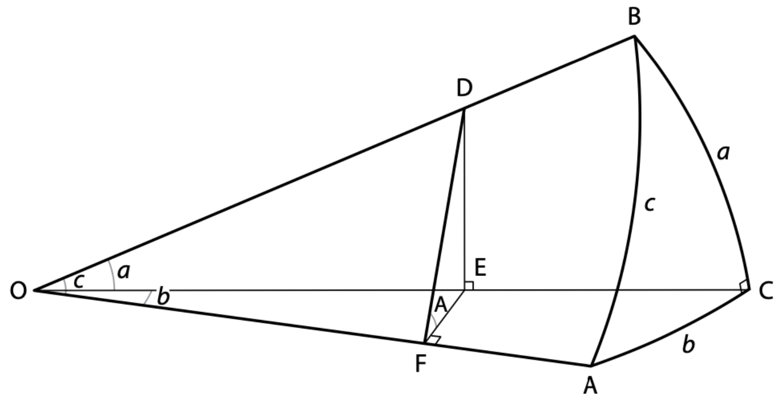

Figure 10: Rätvinklig sfärisk triangel $\triangle ABC$

Så, om vi har en sfärisk triangel $\triangle ABC$ och så döper vi längderna av bågarna till a, b och c som står emot A, B och C. Om vinkeln $\wedge C$ är rät så säger Gebers sats att:

$$\cos B = \sin A \cos b \quad \cos A = \sin B \cos a.$$

Och pythagoras sats för sfäriska trianglar säger att:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

3.5.1 Bevis

Det första vi gör är att dra linjer från hörnen i $\triangle ABC$ till sfärens mittpunkt, O. Det som händer när vi gör det är att det bildas tre nya vinklar vid O som även är triangelns sidlängder a, b och c (som också är vinklar). Efter det väljer vi en punkt D på OB. Från D drar vi en vinkelrät linje till OC, den punkten kallar vi E. Sen drar vi en till vinkelrät linje till OA och den punkten benämner vi F. Vi kan nu konstatera att vi har skapat en plan vinkelrät triangel inuti sfären, $\triangle DEF$. Av dessa nya punkter och den nya triangeln vi skapat kan vi dra en del slutsatser. Vi kan bland annat se att vi fått flera nya rätvinkliga trianglar, nämligen $\triangle ODE$, $\triangle OEF$ och $\triangle ODF$. Den sistnämnda är kanske inte lika uppenbart rätvinklig så låt oss förklara varför den är det. Vi använder oss av plana pythagoras sats för att visa. Vi tänker oss att OD är vår hypotenusa och får:

$$\begin{aligned} OD^2 &= OE^2 + ED^2 \\ &= (OF^2 + EF^2) + (DF^2 - EF^2) \\ &= OF^2 + DF^2. \end{aligned}$$

Så, vi ser nu att även $\triangle ODF$ är rätvinklig. Om vi tittar närmre på figur 7 ovan och med hjälp av våra nya upptäckter så kan vi se att vi kan bilda två plan, OAC och OAB, och vi kan då även konstatera att $\wedge DFE$ är vinkeln mellan dessa två plan som även är $\wedge A$.

För att göra det extra tydligt så kan vi exempelvis konstatera att $\wedge c$ kommer vara lika i $\triangle ODF$ och i $\triangle OBA$. Vi kan nu med hjälp av de plana trigonometriska formlerna få fram en del satser.

$$\sin a = \frac{DE}{OD}.$$

Detta kan skrivas om som:

$$\sin a = \frac{DE}{DF} \cdot \frac{DF}{OD} = \sin A \sin c.$$

På samma sätt kan man få fram tre andra liknande satser och en av dessa är pythagoras sats för sfäriska trianglar som vi ska härleda nu.

$$\begin{aligned} \cos c &= \frac{OF}{OD} \\ &= \frac{OF}{OE} \cdot \frac{OE}{OD} \\ &= \cos b \cdot \cos a. \end{aligned}$$

Vi har nu bevisat en av våra satser och ska nu ta oss an Gebers sats. För att göra det behöver vi införa ännu en triangel i vår figur (se figur 8 nedan), detta för att kunna få fram $\wedge B$ på samma sätt som vi fick fram $\wedge A$. Det vi gör är att vi väljer en punkt G på OA. Från G drar vi en vinkelrät linje till OC och punkten E. Från E drar vi en till vinkelrät linje till OB och den punkten benämner vi H. Precis som ovan kan vi konstatera att $\triangle OHG$ är rät och att $\wedge EHG = \wedge B$.

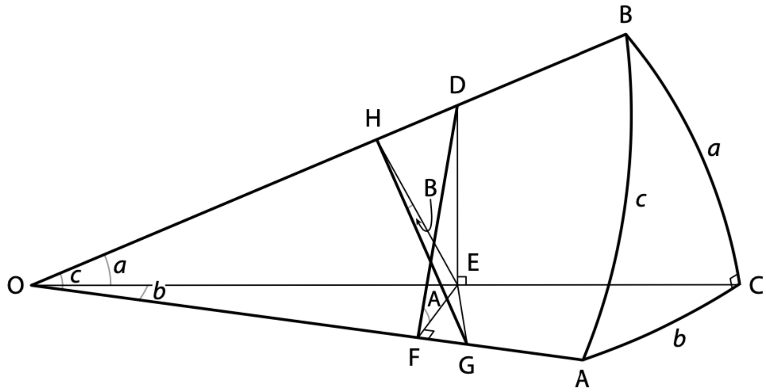

Figure 11: $\triangle ABC$

På samma sätt som tidigare kan vi nu använda oss av figur 8 och de plana trigonometriska formlerna för att få fram det vi söker. Men, för att göra det hela lite mer överskådligt så ska vi ta en närmre titt på planen i figur 8. Och med hjälp av figur 8 (ovan) och figur 9 (nedan) så ska vi även bevisa Gebers sats.

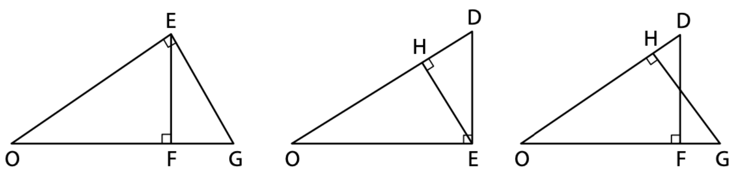

Figure 12: De tre planen i figur 8

Från den tredje triangeln i figur 9 har vi att:

$$\frac{HG}{OG} = \frac{DF}{OD}.$$

Eftersom de två räta trianglarna har samma vinklar. Av detta får vi då även:

$$HG = \frac{OG \cdot DF}{OD}.$$

Från figur 8 har vi att $\sin B = \frac{EG}{HG}$. Detta leder till att vi nu har:

$$\sin B = \frac{EG}{HG} = \frac{EG \cdot OD}{OG \cdot DF}.$$

Som påminnelse så säger alltså Gebers sats att $\cos A = \cos a \cdot \sin B$. Så, från figur 8 får vi även att $\cos a = \frac{OE}{OD}$. Om vi nu lägger ihop resultatet från $\cos a$ och $\sin B$ så får vi:

$$\begin{aligned}
\cos a \cdot \sin B &= \frac{OE}{OD} \cdot \frac{EG \cdot OD}{OG \cdot DF} \\
&= \frac{EG \cdot OE}{OG \cdot DF} \\
&= \frac{EG \cdot OE}{OG} \cdot \frac{1}{DF}.
\end{aligned}$$

Från figur 8 har vi att $\cos A = \frac{EF}{DF}$. Det vi behöver göra nu är då alltså att visa att $\frac{EG \cdot OE}{OG} = EF$. Ur första triangeln i figur 9 följer att:

$$\frac{EG}{OG} = \frac{EF}{OE} \Longleftrightarrow EF = \frac{EG \cdot OE}{OG}.$$

Om vi nu lägger ihop de resultat vi fått fram får vi:

$$
\begin{aligned}
\cos a \cdot \sin B &= \frac{EG \cdot OE}{OG} \cdot \frac{1}{DF} \\
&= EF \cdot \frac{1}{DF} \\
&= \frac{EF}{DF} \\
&= \cos A.
\end{aligned}
$$

Med detta har vi bevisat Gebers sats.

3.5.2 Navigation

Pythagoras sats för sfäriska trianglar är ju egentligen ett specialfall av sfäriska cosinussatsen och kan därför användas på samma sätt som cosinussatsen som vi skrivit om ovan.

Gebers sats kan, som vi fick se i exemplet ovan, bland annat användas för att ta reda på ett skepps färdriktning på en viss position.

3.5.3 Exempel

För att tillämpa Pythagoras sats och Gebers sats så använder vi ett exempel från Van Brummelens bok ”Heavenly mathematics[1]. Problemet vi ska försöka lösa är följande: Ett skepp lämnar Halifax (koordinaterna 44.67°N, 63.58°V), mot Öst och följer storcirkeln. Hitta skeppets position och färdriktning efter att det seglat 1000 sjömil (se figur 13).

Triangeln vi ska använda oss av är den som knyter samman avresa, ankomst och nordpolen (se figur 13). Vi kan enkelt räkna ut b genom att ta $b = AC = 90° - 44.67° = 45.33°$. På grund av att en sjömil är detsamma som en bågminut så kan vi också beräkna a genom att ta $a = BC = 1000' = 16.67°$. Vi vet nu två sidor i vår triangel och kan då med hjälp av pythagoras sats ta redan på den tredje:

$$c = AB = \cos *{-1} (\cos 45.33° \cos 16.67°) = 47.66°.$$

Nu kan vi ta reda på skeppets slutgiltiga latitud genom att ta $90° - 47.66° = 42.34°$. För att ta reda på skeppets longitud så tittar vi på figur 13 igen och kan konstatera att vinkeln A vid Nordpolen är skillnaden i longitud mellan

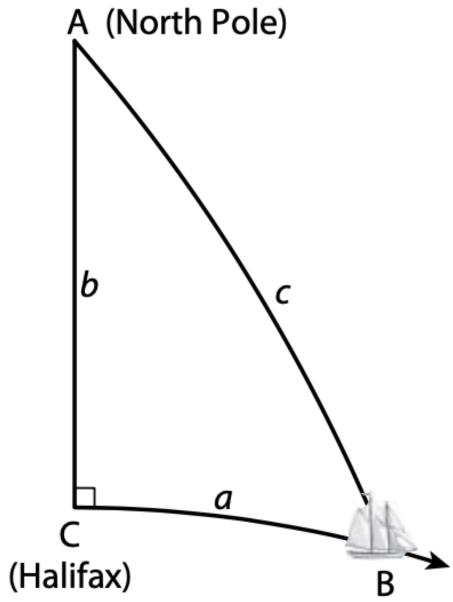

Figure 13: Ett navigationsproblem

avresa och ankomst. Vi kan ta reda på A genom att använda en av de 10 rätvinkliga satserna (denna har vi inte gått igenom. Det vi gör är att vi tar $\cos A = \tan b \cot c$ vilket blir $22.81°$. Så skeppets longitud blir då $63.58°V - 22.81°V = 40.77°V$. Denna position är i mitt i havet från Halifax till Azorerna.

För att finna skeppets färdriktning vid B så behöver vi helt enkelt räkna ut vinkeln B. Detta gör vi genom att använda just Gebers sats och vi får då:

$$\cos B = \cos 45.33° \sin 22.81° = 74.18°.$$

Skeppet seglar alltså $74.18°$ sydost och efter 1000 sjömil har skeppet positionen $42.34°, 40.77°V$.

3.5.4 Vad händer då $R \to \infty$?

När en sfär blir större och större, alltså att radien går mot oändligheten så blir en given sfärisk triangel mindre och mindre, i relation till sfären. Detta innebär att kurvaturen av den sfäriska triangeln i princip försvinner och närmar sig en plan triangel. De vinklar som finns blir mindre ju större radien blir. Om vi tittar på Gebers sats så kommer sin(en viss vinkel) att närma sig enbart vinkeln vilket leder till att $\cos A = \sin B \cos a$ blir det plana uttrycket $\cos A = \sin B$. Och, vi vet att detta stämmer eftersom att en vinkel i denna triangel är 90° vilket då också leder till att vinkeln $B = 90° - A$.[1]

För pythagoras sats för sfäriska trianglar gäller samma som vi visat för sfäriska cosinussatsen då $R \to \infty$.

3.6 Satsen om fyra kvantiteter

Tidigare, under avsnittet om sfärisk trigonometrins historia så nämns Menelaos sats. Menelaos sats kallades även för satsen om sex kvantiteter vilket man kan förstå när man ser den framför sig.

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{CB}} = \frac{\sin \widehat{AE}}{\sin \widehat{ED}} \cdot \frac{\sin \widehat{DF}}{\sin \widehat{FC}}.$$

Figure 14: Menelaos sats A

$$\frac{\sin \widehat{AC}}{\sin \widehat{AB}} = \frac{\sin \widehat{CD}}{\sin \widehat{DF}} \cdot \frac{\sin \widehat{EF}}{\sin \widehat{EB}}.$$

Figure 15: Menelaos sats B

Menelaos sats var standardverktyget för sfärisk astronomi under i princip hela första milleniumet. Många efter Menelaos, bland andra Klaudius Ptolemaios, använde hans sats till alla möjliga astronomiska problem [1]. Som vi skrev ovan så heter ju även Menelaos sats satsen om sex kvantiteter vilket leder oss utsökt till satsen vi faktiskt ska prata om, satsen om fyra kvantiteter. Satsen om fyra kvantiteter är framtagen med hjälp av Menalaos sats som man kanske kan tänka sig när man ser satserna framför sig och användes till samma typer av astronomiska problem. Skillnaden är att satsen om fyra kvantiteter, kanske enkelt att räkna ut, är mycket mer lättanvänd. Satsen om fyra kvantiteter ser ut så här och är baserad på figur 16:

$$\frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{CE}} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{AE}}.$$

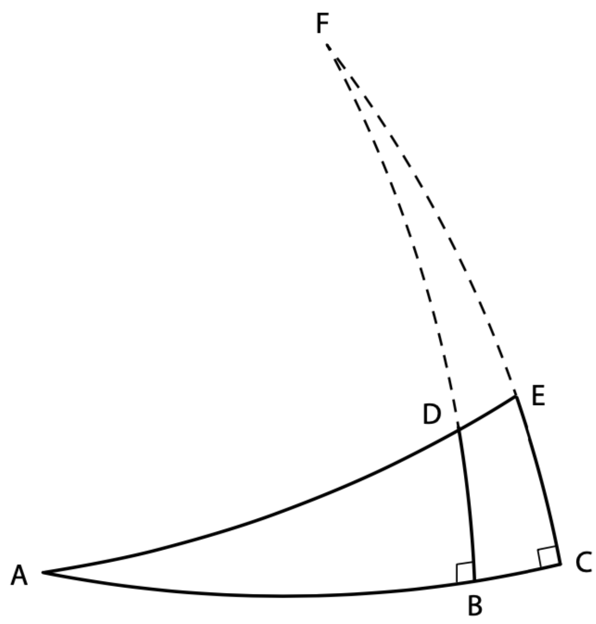

Figure 16: Satsen om fyra kvantiteter

För att förtydliga så betyder t ex sin $\widehat{BD}$, sinus för bågen BD.

Som jag skrev ovan så kan satsen om fyra kvantiteter sägas vara en mer lättanvänd variant på Menelaos sats och den blev väldigt populär när den kom. Den gjorde astronomers och matematikers arbete mycket enklare och de kunde arbeta på i ett snabbare tempo.[1]

Vi kommer inte att bevisa varken Menelaos sats eller satsen om fyra kvantiteter på grund av att beviset är alldeles för långt. Vill man se beviset så hittar man det bland annat i Van Brummelens bok "Heavenly mathematics" [1].

3.6.1 Navigation

Med tanke på hur gammal Menelaos sats är så kan man ju undra hur den användes, vad den var viktig för. Den användes bland annat för att göra olika beräkningar med hjälp av solen. T.ex. kunde man ta reda på vilken dag det var på året eller hur lång tid det tog för solen att stiga upp på himlen. Detta var otroligt användbart för både sjöfarare som astronomer och matematiker på land. Satsen om fyra kvantiteter användes, inte så otroligt nog, till samma beräkningar. Satsen om fyra kvantiteter är en förenkling av Menelaos sats, som även kallades satsen om sex kvantiteter.

3.6.2 Exempel

För att förstå exemplet nedan så ska vi gå först och främst gå igenom ordet *Ekliptika*. *Ekliptika* är den tänkta bana som solen förflyttar sig utmed under året.

Vi ska nu ta reda på solens ekvatorialkoordinater med hjälp av satsen om fyra kvantiteter. Ekvatorialkoordinater är det vanligaste systemet för att uppge ett objekts position på himlen.[1]

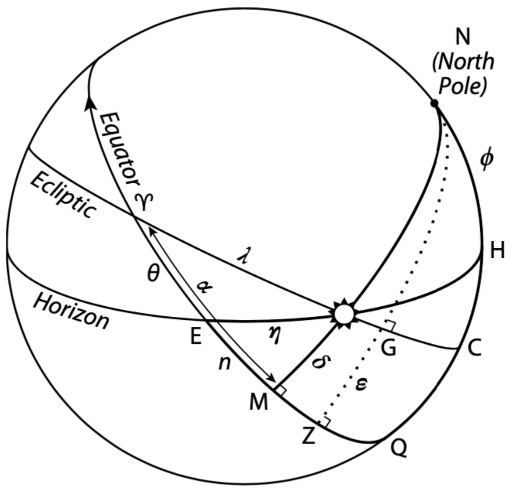

Figure 17:

För en given båge på ekliptikan så är stigningstiden för solen den tiden det tar från att bågen precis syns ovanför horisonten till det att hela bågen har stigit till max. Eftersom solen ligger på ekliptikan, så är tiderna för solens uppgång kopplat till dagsljusets förändringar under året.

För att förenkla lite, för mig själv, så byter jag ut solsymbolen ni ser i figur 19 till, $\odot$. I figur 19 har bågen vi söker, $\Upsilon\odot$ med longituden λ precis stigit färdigt över horisonten. Några timmar tidigare (den exakta tiden är det vi vill få fram), befann sig Υ på den östra punkten, benämnd E. Vi vet vart vi befinner oss på jorden vilket leder till att vi då även vet ϕ. Om vi ritar bågen $\widehat{NGZ}$ till nordpolen, N. Eftersom vi vet att alla vinklar i denna storcirkel är 90° så vet vi att $\varepsilon = \widehat{GZ}$. För att summera så har vi nu λ (från vilken tid på året det är), ϕ och ε.

I Van Brummelens bok kan man läsa om "Celestial equator"[1]. "Celestial equator", på svenska himmelsekvator, är en imaginär storcirkel på himmelsfären som är en projektion av jordens ekvator. Van Brummelen skriver då också att vi vet att himmelsekvatorn är vår astronomiska klocka, som roterar 15° per timme. När ekliptikabågen, $\Upsilon\odot$, steg över horisonten, så var det ekvatorn $\theta = \Upsilon E$ som steg. Så, om vi hittar θ och dividerar det med 15 så har vi stigningstiden i timmar.

Vi ska nu försöka lösa detta med satsen om fyra kvantiteter. Vi börjar med att beräkna figuren $\Upsilon \odot GZM$. Där får vi fram:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\lambda} = \frac{\sin\varepsilon}{1} \Rightarrow \sin\delta = \sin\lambda\sin\varepsilon.$$

Vi använder sedan figuren $E \odot HQM$, där vi har att:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\eta} = \frac{\sin(90-\phi)}{1} \Rightarrow \sin\eta = \frac{\sin\delta}{\cos\phi}.$$

Nästa steg är att använda figuren $N \odot MQH$ vilket ger oss:

$$\frac{\sin(90-\eta)}{\sin(90-\delta)} = \frac{\sin\widehat{MQ}}{1} \Rightarrow \sin\widehat{MQ} = \frac{\cos\eta}{\cos\delta}.$$

Till slut så ska vi använda figuren $NGZM\odot$ för att få:

$$\frac{\sin(90-\lambda)}{\sin(90-\delta)} = \frac{\sin\widehat{MZ}}{1} \Rightarrow \sin\widehat{MZ} = \frac{\cos\lambda}{\cos\delta}.$$

Det som återstår är helt enkelt bara att ta $\theta = \widehat{MQ} - \widehat{MZ}$.

3.6.3 Vad händer då $R \to \infty$?

Om vi har två sfäriska trianglar med rät vinkel vardera och deras kateter är likformiga dvs kvoten av kvoten mellan två motsvarande sidor är densamma. Om punkterna A till F, $\triangle ABC$ och $\triangle DEF$, ligger fixa i rummet på två olika sfärer vars radier går mot oändligheten så kommer sin $\frac{AB}{R}$ bete sig som $\frac{AB}{R}$. Här måste vi dock stanna upp och observera att alla längder som t ex AB egentligen är funktioner av R. När vi tar kvoten så får vi:

$$\lim \frac{\sin BD}{\sin CE} = \lim \frac{\frac{BD}{R}}{\frac{CE}{R}} = \frac{BD}{CE}.$$

Längderna i den sista kvoten är bara det vanliga avståndet mellan två punkter i rummet. Detta leder oss fram till att två rätvinkliga trianglar i planet med en gemensam vinkel är likformiga. Vilket ju är ett välkänt geometriskt påstående.

3.7 Girards sats

Girards sats ger oss den sfäriska triangelns area, T. Ännu tydligare förklarat, den yta som begränsas av den sfäriska triangeln. Girards sats ser ut så här på en sfär med radie R:

$$T = A + B + C - \pi.$$

3.7.1 Bevis

För att satsen ska bli så lättanvänd som möjligt så kommer vinklarna anges i radianer.

Om vi tittar på figur 19 så ser vi att två storcirklar skapar 4 områden, vi kan kalla dem månar, på sfären. Dessa månar är parvis kongruenta. Om vi kallar vinkeln mellan dessa månar för v så är arean av hela månen $2v$. Hela sfärens area är 4π och vi får då att månens andel av sfärens area är $\frac{v}{2\pi}$.

Om vi, som i satsen, betecknar den sfäriska triangelns area med T. Och så betecknar vi $\triangle ADE$ med I, $\triangle ACE$ med II och $\triangle ABD$ med III, så kan vi se att de parvis bildar månar. $T + I = 2A, T + II = 2B, T + III = 2C$. Detta leder till att vi får:

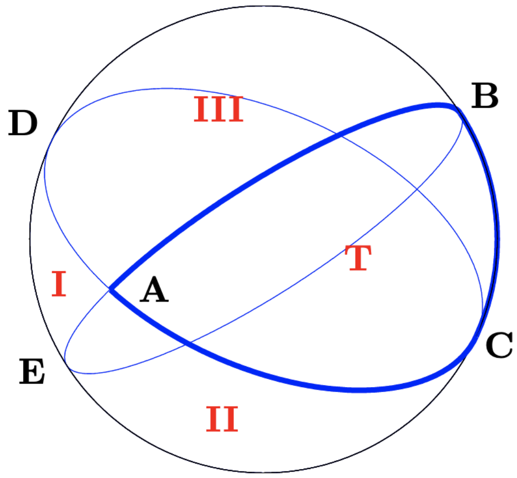

Figure 18: Girards sats

$$
\begin{aligned}
3T &= 2(A+B+C) - (I+II+III) \iff \\
2T &= 2(A+B+C) - (T+I+II+III) = \\
&\qquad 2 - (A+B+C) - 2\pi.
\end{aligned}
$$

Om vi då dividerar alla led med 2 så får vi $T = A + B + C - \pi$ vilket var det vi skulle visa. [3]

3.7.2 Exempel

Vi hittar på ett problem. Säg att vi har hamnat ute i rymden och framför oss har vi en sfär. Vi måste ta reda på radien på denna sfär men det enda vi har med oss är en gradskiva och en målarburk med 10 l färg i. Hur gör vi? Enligt instruktionerna på baksidan av burken ska den räcka till att måla $100m^2$. På sfären väljer vi nu att måla en sfärisk triangel med hela burkens innehåll vilket leder till att vi vet att den sfäriska triangelns area är $100m^2$. När vi målat triangeln så tar vi vår gradskiva och mäter triangelns vinklar. Vi får fram att det otroligt nog är en triangel med 3 räta vinklar. Vi har då följande:

$$100m^2 = (90^\circ + 90^\circ + 90^\circ - \pi)R^2.$$

Vi gör om till radianer för att kunna beräkna enklare och får:

$$100m^2 = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{2}\right) R^2 \Rightarrow 100m^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right) R^2.$$

Nu ska vi bara beräkna R:

$$100m^2 = 1,57rad \cdot R^2 \Rightarrow R \approx 8m.$$

Vi har alltså fått fram att radien på sfären är ca 8 m.

3.7.3 Vad händer då $R \to \infty$?

Om vi försöker se en sfärisk triangel framför oss, tre fixa punkter på en sfär med radie R. Då har vi att $\frac{T}{R^2} = A + B + C - \pi$ där T är arean av den sfäriska triangeln. Om vi nu låter $R \to \infty$ dvs att våra tre punkter ligger på en sfär med allt större och större radie så kommer $\frac{T}{R^2} \to 0$.

Vi får helt enkelt att $A + B + C - \pi \to 0$ vilket är satsen om vinkelsumman i en plan triangel.

4 Slutsats

I denna uppsats har vi fått bekanta oss med olika satser inom sfärisk trigonometri, hur de har använts inom navigation och vad som händer med dem när radien blir oändligt stor. Satserna har onekligen använts långt tillbaka i tiden och var förr livsviktiga för vissa grupper av människor. Vad händer då när radien blir oändligt stor? Jo, alla sfäriska satser närmar sig olika plana trigonometriska satser. Vi har fått cosinussatsen, sinussatsen, triangelsumman i en plan triangel och en additionsformel för cosinus. Alltså alla de välkända plana trigonometriska formlerna.

References

[1] Glen Van. Brummelen. *Heavenly mathematics : the forgotten art of spherical trigonometry*. Princeton: Princeton University Press, 2013. ISBN: 978-0-691-14892-2.

[2] Chalmers. *Sfärisk trigonometri*. URL: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/lnc022/1112/sftrigLNC.pdf. (accessed: 11.04.2022).

[3] Chalmers. *Sfärisk trigonometri - Appendix*. URL: https://studylibsv.com/doc/343666/appendix---math.chalmers.se. (accessed: 11.04.2022).

[4] Rob Johnson. *Spherical trigonometry*. URL: https://www.math.ucla.edu/~robjohn/math/spheretrig.pdf. (accessed: 22.04.2022).

[5] RL.se. *Räkna om grader, minuter och sekunder*. URL: https://rl.se/grader.php. (accessed: 14.04.2022).

[6] Torbjörn Tambour. *Sfärisk geometri*. Matematiska institutionen, Stockholms universitet, 2015.

[7] Marshall A. Whittlesey. *Spherical Geometry and Its Applications*. CRC Press, 2020. ISBN: 978-0-367-19690-5.

[8] Wikipedia. *Sfäriska cosinussatsen*. URL: https://sv.wikipedia.org/wiki/Sf%C3%A4riska_cosinussatsen. (accessed: 11.04.2022).

[9] Wikipedia. *Storcirkel*. URL: https://sv.wikipedia.org/wiki/Storcirkel. (accessed: 11.04.2022).