



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Osäkerhetsrelationen mellan schwartzfunktioner och deras fouriertransformationer

av

Alexander Thurdin

2022 - No K19

Osäkerhetsrelationen mellan schwartzfunktioner och deras fouriertransformationer

Alexander Thurdin

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Ulrik Enstad

2022



Osäkerhetsrelationen mellan schwartzfunktioner och deras fouriertransformationer

Alexander Thurdin

18 maj 2022

Självständigt arbete i matematik, 15 hp

Stockholms Universitet

Handledare: Ulrik Enstad

Förord

Stort tack till min handledare Ulrik för vägledningen och motivationen genom hela arbetet. Utan den hade uppsatsen aldrig blivit färdig. Tackar även mina vänner Karl och André för korrekturläsningen och synpunkterna på uppsatsen.

Sammanfattning

För en given signal, kan inte tid och frekvens bestämmas godtyckligt noggrant. Det är helt enkelt inte möjligt att fastställa frekvenser i omedelbar tid. Om tidsramen är för liten, kommer det inte vara möjligt att urskilja vilka frekvenser signalen består av. Om däremot frekvenserna för signalen är väl definierade, kommer tidsramen vara stor. I detta arbete ska denna lägsta gräns mellan tid och frekvens bevisas, den så kallade *osäkerhetsprincipen*. En central del av arbetet är en speciell typ av funktioner, *Schwartzfunktioner*, vars egenskaper visar sig viktiga när dess *fouriertransformation* analyseras. Hur denna princip uppstår i praktiken kommer även visas vid signalbehandling med datorer.

Abstract

For a given signal, time and frequency cannot be determined simultaneously with arbitrarily high accuracy. It's simply not possible to determine frequencies in instantaneous time. If the time frame is too small, it will be impossible to distinguish the frequencies of the signal. On the other hand, if the frequencies are well defined, the time frame will be large. This lower limit between time and frequency will be proven in this project, the so called *uncertainty principle*. A central part of this project is a special type of functions, *Schwartz functions*, with properties that will prove useful when their *fourier transform* is analyzed. How this principle appears in practice will also be shown in signal processing by computers.

Innehåll

1	Introduktion	5
2	Integration över \mathbb{R}	11
3	Schwartzrummet	16
3.1	Translation och modulation	17
4	Fouriertransformationen	20
4.1	Fourierinversen	24
4.2	Plancherels sats	25
5	Osäkerhetsprincipen	28
6	Slutsats/ Vidare frågeställningar	31
A	Pythonkod för signaler och grafer	32

1 Introduktion

Syftet med detta arbete är att redogöra för och bevisa osäkerhetsrelationen mellan tid och frekvens för funktioner i *Schwartzrummet*, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Matematiskt definieras Schwartzfunktioner att vara oändligt deriverbara och alla derivator avtar snabbare än godtyckliga reella polynom. Mer formellt är en funktion f definierad i Schwartzrummet om

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k f^{(l)}(x)| < \infty \quad \forall k, l \geq 0 \quad [1].$$

Egenskaperna för funktioner definierade i Schwartzrummet kommer visa sig användbara för härledningen av osäkerhetsprincipen mellan tid och frekvens. Innan teorin redogörs i detta arbete, ska detta först ses ur en mer intuitiv synvinkel, för att få en tydligare uppfattning om hur detta kan kopplas till verkligheten.

En signal kan vara av flera olika typer. Några exempel är elektriska-, akustiska- och optiska signaler. Dessa signaler är i grunden analoga signaler, vilket innebär att de är kontinuerliga i tid och amplitud. I de flesta fall är de ändliga och periodiska, vilket gör det möjligt att beskriva dem matematiskt som Schwartzfunktioner. Det är mycket vanligt att en signal omvandlas till en annan för att kunna behandla den, till exempel vid inspelning av ljud, där en akustisk signal omvandlas till en elektrisk med en mikrofon. Detta arbete behandlar endast signaler av en dimension, men kan även appliceras i högre dimensioner. I två dimensioner skulle signalen kunna representera en bild [2].

Att analysera, modifiera och framställa signaler är ett område som kallas för *signalbehandling*. Det finns både analog och digital signalbehandling, där den analoga behandlar kontinuerliga signaler och den digitala behandlar diskreta. Några vanliga typer av analog signalbehandling är frekvensfilter i exempelvis högtalare och volymkontrollen på en stereo [2].

Det var mycket vanligare med analog signalbehandling förr i tiden då datorer inte var lika vanligt. I och med att datorer blev populärare, blev digital signalbehandling det med. Datorer kan dock inte behandla analoga signaler omedelbart, utan den måste konverteras till en digital signal med diskreta tidssteg. Detta kallas för *sampling*. Storleken på tidsstegen beror på hur hög *samplingsfrekvens* man har. Samplingsfrekvens anges i Hertz och står för antalet mätningar per sekund. En högre samplingsfrekvens leder till fler mätningar per sekund och vice versa. De vanligaste samplingsfrekvenserna för datorer idag är 44.1 kHz och 48 kHz. De diskreta tidsstegen för signalen är då den multiplikativa inversen av samplingsfrekvensen [2].

En viktig del av sampling är *Nyquistfrekvensen*, som säger att signalens högsta frekvens inte kan vara högre än halva samplingfrekvensen. Om den skulle vara det, uppstår ett fenomen som kallas för *vikning* (aliasing). Detta innebär att en mycket högre frekvens har samma diskreta värden som en lägre frekvens när samplingen utförs. När man då återskapar signalen kommer den lägre frekvensen bildas och introducera oönskat ljud. För att förhindra att detta sker måste frekvenser högre än Nyquistfrekvensen filtreras bort. Människan kan höra frekvenser mellan ungefär 20 Hz och 20 kHz.

En samplingsfrekvens på högre än 40 kHz är då nödvändig för att vikning inte ska uppstå i det hörbara intervallet [2].

Ett viktigt verktyg inom signalbehandling är *fouriertransformationen*, som omvandlar en signal från tidsplanet till frekvensplanet. Genom att kunna representera signaler i form av dess frekvenser är det enklare att analysera och modifiera dem. Matematiskt definieras fouriertransformationen av en Schwartzfunktion f som

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \quad [1].$$

Det är även möjligt att omvandla signaler från frekvensplanet tillbaka till tidsplanet med *fourierinversen*. För en Schwartzfunktion f beskrivs fourierinversen som

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad [1].$$

Osäkerhetsprincipen som uppstår mellan en Schwartzfunktion ψ och dess fouriertransformation $\hat{\psi}$, vars bevis är det huvudsakliga syftet i denna uppsats, kan matematiskt beskrivas som olikheten

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad [1].$$

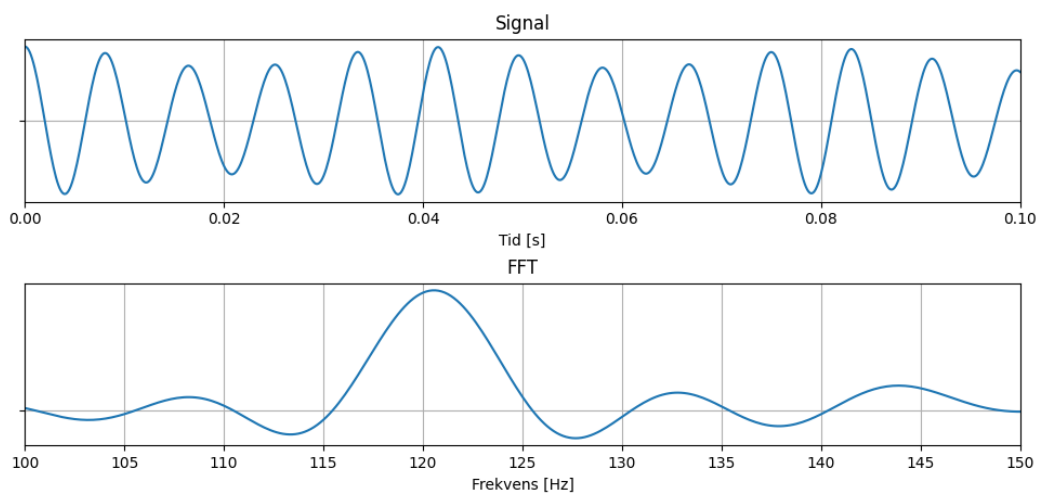
Vad denna olikhet beskriver är att för en signal kan inte tid och frekvens bestämmas godtyckligt noggrant. De är alltså nedåt begränsad. Med andra ord innebär detta att om tidramen är liten, kommer frekvensspektrumet vara väldigt utbrett. Om tidsramen istället är stor, kommer frekvensspektrumet vara tydligt definierat. Denna princip gäller för andra observabler också.

Ett exempel är kvantmekaniken, där en partikels position och rörelsemängd inte kan bestämmas godtyckligt noggrant [3].

Osäkerhetsprincipen gäller även för större funktionsrum än Schwartzrummet. Då det kräver matematiska kunskaper långt ovanför en kandidatexamen för att bevisa detta, begränsas detta arbete till Schwartzrummet.

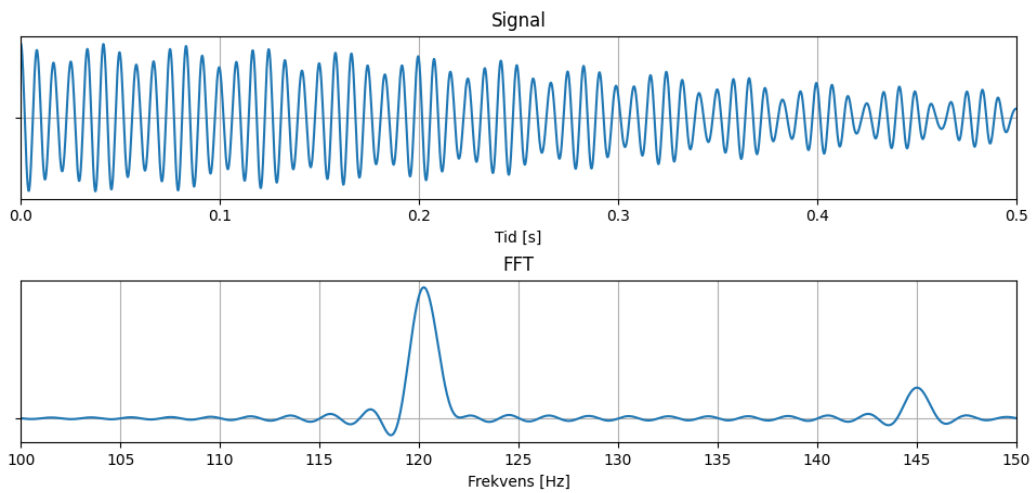
Ett exempel som påvisar osäkerhetsprincipen kommer nu att demonstreras. En syntetisk signal har skapats bestående av ett antal olika frekvenser med olika amplituder. Sedan observeras tre olika tidsramar för signalen med en gemensam samplingsfrekvens på 8 kHz. Fouriertransformationen som utförs på signalen kallas för *Fast Fourier Transform*, FFT, som är en algoritm för en diskret fouriertransformation [4].

Koden för att framställa graferna ges i bilaga A.



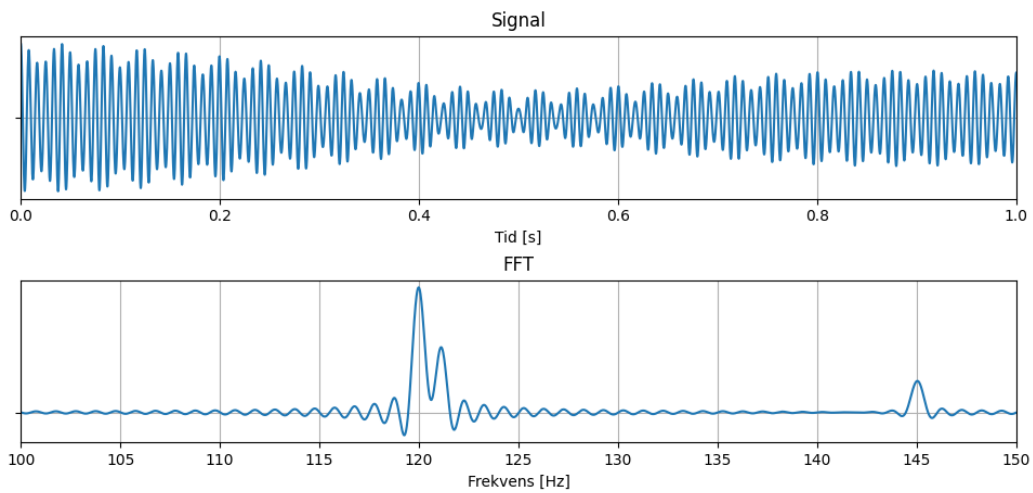
Figur 1: Syntetisk signal under 0.1 sekunder. 8 kHz samplingsfrekvens.

I figur 1 ovan kan en grov uppskattning göras om den dominerande frekvensen i signalen utifrån fouriertransformationen. En bred topp vid ungefär 120 Hz kan observeras. I signalen varierar amplituden periodiskt över tid. Detta antyder att det existerar någon form av svag interferens med en annan frekvens. Tidsramen är för dock för kort för att kunna tydligt urskilja den i frekvensspektrumet.



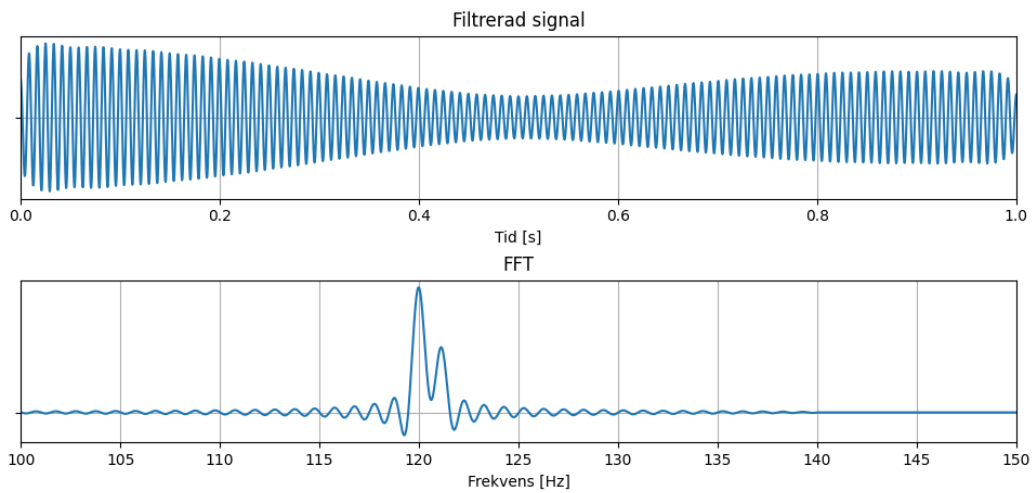
Figur 2: Syntetisk signal under 0.5 sekunder. 8 kHz samplingsfrekvens.

En topp vid strax över 120 Hz och en liten topp på 145 Hz kan nu urskiljas i figur 2. Den mindre toppen skulle kunna tolkas som oönskad interferens som konsekvens av att signalen inte är tillräckligt isolerad. Notera att signalens amplitud minskar något över tid. Orsaken till detta kan vara att signalen helt enkelt avtar relativt snabbt men det kan inte fastställas med säkerhet. Anledningen är att det även kan bero på konstruktiv interferens mellan två frekvenser nära varandra. Den konstruktiva interferensen mellan dem är i sin tur periodisk och då tidsramen är för kort kan inte hela perioden observeras. Detta resulterar i endast en topp vid 120 Hz.



Figur 3: Syntetisk signal under 1 sekund. 8 kHz samplingsfrekvens.

Först nu urskiljer sig två frekvenser på 120 Hz respektive 121 Hz där endast en topp visades i figur 2. Det kan tydligt observeras att en interferens av längre period existerar samt att signalen avtar en aning över tid. Den relativa amplituden på alla frekvenser i signalen kan även fastställas. Ett frekvensfilter på 140 Hz sätts nu in och tar bort alla frekvenser ovanför och på så sätt eliminerar den oönskade interferensen i signalen. Med andra ord manipuleras fouriertransformationen och inverteras tillbaka till tidsplanet.



Figur 4: Filtrerad syntetisk signal under 1 sekund. 8 kHz samplingsfrekvens.

Det kan nu observeras en signal som endast består av två frekvenser på 120 Hz och 121 Hz. Om tidsramen för signalen utökas till flera sekunder kommer topparna för frekvenserna vara mycket brantare. Observera att en viss störning har uppstått i början och slutet av den filtrerade signalen. Detta är på grund av att filtret skarpt kappar av frekvenser istället för att dämpa dem.

2 Integration över \mathbb{R}

Integralen av en kontinuerlig funktion på det slutna intervallet $[-N, N]$ definieras av att

$$I_N = \int_{-N}^N f(x)dx.$$

Om denna definition utökas över hela \mathbb{R} , det vill säga att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x)dx$$

blir det problematiskt. Det är inte säkert att denna gräns existerar. I det enkla exemplet $f(x) = 1$ kommer integralen divergera. Om f däremot avtar tillräckligt snabbt kan det bevisas att integralen är väldefinierad.

Definition 2.1. En kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definieras att vara *snabbt avtagande* för en konstant $A > 0$ om

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1 + |x|^k} \quad \forall k \geq 0.$$

Sats 2.2. Låt f vara en snabbt avtagande funktion. Definiera sedan en följd $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, där Riemannintegralen är

$$a_n = \int_{-n}^n f(x)dx.$$

Då konvergerar a_n och integralen över \mathbb{R} definieras som

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x)dx.$$

Bevis. Steg 1: Antag att $f(x) \geq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Då är $a_{n+1} \geq a_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

För att $(a_n)_n$ ska konvergera måste $(a_n)_n$ vara begränsad av en konstant, det vill säga att $a_n \leq C$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Då f är icke-negativ och snabbt avtagande fås från definitionen med $k = 2$ att

$$f(x) \leq \frac{A}{1 + x^2}.$$

integration på båda sidor ger att

$$\int_{-n}^n f(x)dx \leq \int_{-n}^n \frac{A}{1+x^2}dx = A \int_{-n}^n \frac{1}{1+x^2}dx = A \cdot \arctan(n).$$

låt nu $n \rightarrow \infty$. Detta resulterar i att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \leq A \cdot \pi.$$

Steg 2: $f(x) \in \mathbb{C}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Först och främst kan $f(x)$ omformuleras till

$$f(x) = \operatorname{Re}[f(x)] + i \operatorname{Im}[f(x)].$$

Vidare gäller det för komplexa tal då $|f(x)|^2 = \operatorname{Re}[f(x)]^2 + \operatorname{Im}[f(x)]^2$ att

$$|f(x)| \geq |\operatorname{Re}[f(x)]| \quad \text{och} \quad |f(x)| \geq |\operatorname{Im}[f(x)]|.$$

Då $\operatorname{Re}[f(x)], \operatorname{Im}[f(x)] \in \mathbb{R}$, kan de delas upp på följande sätt:

$$[f^+, f^-, f^{+i}, f^{-i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}]$$

$$f^+(x) = \begin{cases} \operatorname{Re}[f(x)], & \operatorname{Re}[f(x)] \geq 0 \\ 0, & \operatorname{Re}[f(x)] < 0 \end{cases}; \quad f^-(x) = \begin{cases} -\operatorname{Re}[f(x)], & \operatorname{Re}[f(x)] \leq 0 \\ 0, & \operatorname{Re}[f(x)] > 0 \end{cases};$$

$$f^{+i}(x) = \begin{cases} \operatorname{Im}[f(x)], & \operatorname{Im}[f(x)] \geq 0 \\ 0, & \operatorname{Im}[f(x)] < 0 \end{cases}; \quad f^{-i}(x) = \begin{cases} -\operatorname{Im}[f(x)], & \operatorname{Im}[f(x)] \leq 0 \\ 0, & \operatorname{Im}[f(x)] > 0 \end{cases}$$

$$\implies |\operatorname{Re}[f(x)]| = f^+(x) + f^-(x), \quad |\operatorname{Im}[f(x)]| = f^{+i}(x) + f^{-i}(x).$$

Integration på båda sidor för varje uttryck ger att

$$\int_{-N}^N |\operatorname{Re}[f(x)]|dx = \int_{-N}^N f^+(x)dx + \int_{-N}^N f^-(x)dx \quad \text{och}$$

$$\int_{-N}^N |\operatorname{Im}[f(x)]|dx = \int_{-N}^N f^{+i}(x)dx + \int_{-N}^N f^{-i}(x)dx.$$

Då f är snabbt avtagande, implicerar detta att f^+, f^-, f^{+i} och f^{-i} är snabbt avtagande då $f^+, f^- \leq |\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$ och $f^{+i}, f^{-i} \leq |\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$. Det gäller även att $f^+, f^-, f^{+i}, f^{-i} \geq 0$. Att integralerna konvergerar då $N \rightarrow \infty$ kan då visas enligt steg 1.

Det följer då att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[f(x)]dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^+(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f^-(x)dx \quad \text{och}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}[f(x)]dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^{+i}(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f^{-i}(x)dx.$$

Detta leder till att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^+(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f^-(x)dx$$

$$+ i \int_{-\infty}^{\infty} f^{+i}(x)dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f^{-i}(x)dx.$$

□

Följande proposition visar några egenskaper för integrering över \mathbb{R} .

Proposition 2.3. *Integralen av en snabbt avtagande funktion har följande egenskaper:*

(i) *Linearitet: Om f, g är snabbt avtagande och $a, b \in \mathbb{C}$, så är*

$$\int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)]dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx.$$

(ii) *Invarians under translation: För varje $h \in \mathbb{R}$ följer det att*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - h)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

(iii) *Skalning under utvidgning: Om $\delta > 0$ så är*

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Bevis. Se proposition 1.1 på s. 133 i *Fourier Analysis - An Introduction* [1].

Utifrån satsen kan nu ett lemma för absolutbelopp introduceras, som kommer visa sig vara användbart i senare bevis.

Lemma 2.4. Om f är snabbt avtagande, så är

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Bevis. (Från *Complex Analysis: The Integral Inequality*) [5].

För en kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ på intervallet $[-N, N]$ är integralen $\int_{-N}^N f(x) dx$ väldefinierad. Då $f \in \mathbb{C}$, kan funktionen uttryckas på exponentiell form som

$$\int_{-N}^N f(x) dx = r e^{i\theta} \implies \int_{-N}^N e^{-i\theta} f(x) dx = r.$$

Absolutbeloppet tas på båda sidor av första likheten. Detta ger att

$$\left| \int_{-N}^N f(x) dx \right| = r \implies \left| \int_{-N}^N f(x) dx \right| = \int_{-N}^N e^{-i\theta} f(x) dx.$$

Vi noterar nu att $\int_{-N}^N e^{-i\theta} f(x) dx \in \mathbb{R}$, så

$$\int_{-N}^N e^{-i\theta} f(x) dx = \operatorname{Re} \int_{-N}^N e^{-i\theta} f(x) dx = \int_{-N}^N \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f(x)] dx.$$

Då $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$, leder detta till att

$$\int_{-N}^N \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f(x)] dx \leq \int_{-N}^N |e^{-i\theta} f(x)| dx.$$

Utifrån denna olikhet fås då att

$$\left| \int_{-N}^N f(x) dx \right| \leq \int_{-N}^N |f(x)| dx.$$

Låt nu f vara snabbt avtagande. Då är integralerna väldefinierade då $N \rightarrow \infty$ enligt sats 2.2. \square

3 Schwartzrummet

Schwartzrummet på \mathbb{R} består av mängden av alla funktioner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ som är oändligt deriverbara samt att f och alla dess derivator är snabbt avtagande så att

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P^k D^l f(x)| < \infty \quad \forall k, l \geq 0,$$

där $Pf(x) = xf(x)$ och $Df(x) = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$.

Det vill säga att f och alla dess derivator avtar snabbare än godtyckliga polynom på \mathbb{R} . Detta rum betecknas som $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Några viktiga egenskaper följer:

Proposition 3.1. Om $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, så är

(i) $Df, Pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(ii) $\overline{f(x)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(iii) $f + g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(iv) $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Bevis. Egenskap (i): För Pf gäller det från triangelolikheten, samt att supremum av en summa är ekvivalent med summan av termernas supremum, att

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P^k D^l [Pf(x)]| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |P^{k+1} D^l f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |l P^k D^{l-1} f(x)| < \infty,$$

För Df gäller det att

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P^k D^l [Df(x)]| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |P^k D^{l+1} f(x)| < \infty.$$

Detta innebär att Schwartzrummet är slutet under derivering och multiplikation med polynom. (ii) gäller då $|\overline{f(x)}| = |f(x)|$ för komplexa funktioner.

(iii) gäller då

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P^k D^l [f(x) + g(x)]| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |P^k D^l f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |P^k D^l g(x)| < \infty.$$

Egenskap (iv) kan visas med Leibniz regel. Beviset för regeln är för långt för denna uppsats, men vad den bevisar är att om två funktioner är oändligt deriverbara, är även produkten av dem det [6]. \square

Exempel. $f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Med kedjeregeln och produktregeln för derivator följer det att $D^l f(x) = P_l(x)f(x)$ där $P_l(x)$ är ett polynom av grad l . $f(x)$ är alltså oändligt deriverbar. Med Maclaurinutveckling av e^{x^2} kan det vidare visas att

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} \geq \frac{(x^2)^k}{k!}$$
$$\implies |x|^k e^{-x^2} \leq \frac{k!}{|x|^k} \leq k!, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Alltså avtar alla derivator av f snabbare än godtyckliga polynom och är därmed en Schwartzfunktion.

3.1 Translation och modulation

Två operatorer på $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ introduceras och definieras som följande för $h, \omega \in \mathbb{R}$:

Translation T_h :

$$T_h f(x) = f(x - h).$$

Modulation M_ω :

$$M_\omega f(x) = e^{2\pi i \omega x} f(x).$$

Translationsoperatoren förskjuter f med tiden h . Modulationsoperatoren skiftar f med frekvensen ω .

Ett par egenskaper följer:

Proposition 3.2. Om $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, så är

(i) $T_h M_\omega f(x) = e^{-2\pi i h \omega} M_\omega T_h f(x)$.

(ii) $T_h f, M_\omega f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Bevis. (i)

$$\begin{aligned} T_h M_\omega f(x) &= (M_\omega f)(h-x) \\ &= e^{2\pi i h \omega(x-h)} f(x-h) \\ &= e^{-2\pi i h \omega} e^{2\pi i x \omega} f(x-h) \\ &= e^{-2\pi i h \omega} M_\omega T_h f(x). \end{aligned}$$

□

De kommuterar alltså endast om $h \cdot \omega \in \mathbb{Z}$.

Bevis. (ii)

Först och främst observeras att $[T_h f(x)]' = T_h f'(x)$ och att $\frac{d}{dx}(e^{2\pi i \omega x}) = 2\pi i \omega \cdot e^{2\pi i \omega x}$. Med induktion kan det vidare visas att $[T_h f(x)]^{(l)} = T_h f^{(l)}(x)$ och att $(e^{2\pi i \omega x})^{(l)} = (2\pi i \omega)^l \cdot e^{2\pi i \omega x}$. $T_h f$ och $e^{2\pi i \omega x}$ är alltså oändligt deriverbar. Att $T_h f$ och alla dess derivator är snabbt avtagande visas med substitutionen $u = x - h$. Då $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gäller det att

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} |(u+h)^k| f^{(l)}(u) < \infty \quad \forall k, l \geq 0.$$

För att visa att $M_\omega f$ och alla dess derivator är snabbt avtagande konstateras först med Leibniz regel att

$$(M_\omega f)^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} f^{(l-k)}(x) (2\pi i \omega)^k \cdot e^{2\pi i \omega x}.$$

Från triangelolikheten följer det då att

$$\begin{aligned} |[M_\omega f(x)]^{(l)}| &= \sum_{n=0}^l \left| \binom{l}{n} f^{(l-n)}(x) (2\pi i \omega)^n \cdot e^{2\pi i \omega x} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^l \left| \binom{l}{n} f^{(l-n)}(x) (2\pi i \omega)^n \right|. \end{aligned}$$

Då f är en Schwartzfunktion gäller det från egenskap (iii) i proposition 3.1 för alla termer i summan att

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left| \binom{l}{n} f^{(l-n)}(x) (2\pi i \omega)^n \right| < \infty.$$

Alltså är

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |[M_\omega f(x)]^{(l)}| < \infty \quad \forall k, l \geq 0.$$

□

4 Fouriertransformationen

Fouriertransformationen av en funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definieras av

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Integranden är snabbt avtagande då $|f(x)e^{-2\pi i x \xi}| = |f(x)|$ och integralen är då väldefinierad.

Nedan följer några enkla egenskaper för fouriertransformationen:

Proposition 4.1. Om $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ så följer det att:

(i) Om $h \in \mathbb{R}$ så är $\widehat{(T_h f)}(\xi) = M_{-h}\hat{f}(\xi)$.

(ii) Om $\omega \in \mathbb{R}$ så är $\widehat{(M_\omega f)}(\xi) = T_\omega \hat{f}(\xi)$.

(iii) $\widehat{(Df)}(\xi) = 2\pi i \cdot P\hat{f}(\xi)$.

(iv) $\widehat{(-2\pi i \cdot Pf)}(\xi) = D\hat{f}(\xi)$.

(v) Om $\delta > 0$ och $g_\delta(x) = f(\delta x)$ så är $\hat{g}_\delta(\xi) = \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$.

Bevis. (i) Då f är Schwartz är även $T_h f$ Schwartz enligt proposition 3.2 och integralen är då väldefinierad. Det följer då att

$$\widehat{(T_h f)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} T_h f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-h)e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Med substitutionen $u = x - h$ följer det att

$$\begin{aligned} \widehat{(T_h f)}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi i(u+h)\xi} du \\ &= e^{-2\pi i h \xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi i u \xi} du \\ &= e^{-2\pi i h \xi} \hat{f}(\xi) = M_{-h}\hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Bevis. (ii) Fouriertransformationen av $M_\omega f$ är väldefinierad då $M_\omega f$ är Schwartz enligt proposition 3.2. Det gäller då att

$$\begin{aligned} \widehat{(M_\omega f)}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} M_\omega f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \omega} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x (\xi - \omega)} dx \\ &= \hat{f}(\xi - \omega) = T_\omega \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Bevis. (iii) (Från *Fourier Analysis - An Introduction*) [1].

Att Df är Schwartz följer från (i) i proposition 3.1. Detta resulterar i att

$$\widehat{(Df)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} Df(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Partialintegration med avseende på x ger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = [f(x) e^{-2\pi i x \xi}]_{-\infty}^{\infty} + 2\pi i \xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Första termen är snabbt avtagande då $|f(x) e^{-2\pi i x \xi}| = |f(x)|$.

Detta implicerar att termen försvinner då $f(x) \rightarrow 0$ när $x \rightarrow \pm\infty$.

Av detta ges att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi) = 2\pi i \cdot P\hat{f}(\xi).$$

□

Bevis. (iv) Egenskap (i) i proposition 3.1 leder till integralen är väldefinierad för $-2\pi i \cdot Pf$

$$(-2\pi i \cdot Pf)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Det gäller att

$$-2\pi i x \cdot e^{-2\pi i x \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (e^{-2\pi i x \xi}).$$

Då integranden är kontinuerlig och oändligt deriverbar i x och ξ är derivering inuti integralen möjlig enligt Leibniz integralregel [7].

Från detta följer att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial \xi} (e^{-2\pi i x \xi}) dx = \frac{d}{d\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right) = D\hat{f}(\xi).$$

□

Bevis. (v) Med $g(x) = f(\delta x)$ gäller det att

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Substitutionen $u = \delta x$ medför att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \delta^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \delta^{-1} u \xi} du = \delta^{-1} \hat{f}(\delta^{-1} \xi).$$

□

Sats 4.2. Om $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, så är $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Bevis. (Från *Fourier Analysis - An Introduction*) [1].

Först och främst noteras med lemma 2.4 att

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-2\pi i x \xi}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Detta implicerar att \hat{f} är begränsad då $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Då proposition 4.1 visar att $2\pi i \cdot P\hat{f}(\xi) = \widehat{Df}(\xi)$ och $D\hat{f}(x) = \widehat{(-2\pi i \cdot Pf)}(\xi)$ följer det att $P\hat{f}(\xi)$ och $D\hat{f}(x)$ är begränsade då $Df(x), Pf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ enligt proposition 3.1. Med induktion kan det vidare visas att detta gäller för $P^k \hat{f}(\xi)$ och $D^l \hat{f}(\xi)$ för alla $k, l \geq 0$. Från detta följer det att $P^k D^l \hat{f}(\xi)$ är begränsad, då det är fouriertransformationen av

$$\frac{1}{(2\pi i)^k} D^k [(-2\pi i)^l P^l f(x)].$$

Alltså är

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |P^k D^l \hat{f}(\xi)| < \infty.$$

□

4.1 Fourierinversen

Sats 4.3 (Fourierinversen). Om $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, så är:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Då sats 4.2 visar att \hat{f} är en Schwartzfunktion och $|\hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}| = |\hat{f}(\xi)|$, är integranden snabbt avtagande och integralen väldefinierad.

Bevis. (Från *Fourier Analysis: An Introduction*) [1].

Vi hävdar först att

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Beviset för att detta gäller hänvisas till teorem 1.9 på s. 141 i boken [1].

Låt nu $g(y) = T_{-x}f(y)$. Med hävdandet ovan samt egenskap (i) i proposition 4.1 följer det att

$$\begin{aligned} f(x) = g(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{(T_{-x}f)}(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} M_x \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi. \end{aligned}$$

□

4.2 Plancherels sats

För att bevisa Plancherels sats behöver Schwartzrummet utrustas med ett inre produktrum. Den inre produkten på $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle$, definieras för $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ som

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Dess tillhörande norm är då

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Enligt (ii) och (iv) i proposition 3.1 är integranden för både den inre produkten och normen Schwartzfunktioner och integralerna är väldefinierad.

En ytterligare nödvändig operator på två Schwartzfunktioner är *konvolutionen*, $f * g$. Denna operator definieras som

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy.$$

Av definitionen följer det att:

Proposition 4.4. Om $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, så är:

- (i) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- (ii) $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

Bevis. (i) Se proposition 1.11 på s. 142 i *Frequency Analysis: An introduction* [1].

Bevis. (ii) Då (i) visar att $f * g$ är Schwartz är integralen väldefinierad.

För att kunna formulera beviset är det nödvändigt att visa att en dubbelintegral av en Schwartzfunktion f kan representeras av en itererad integral. En konsekvens av detta är att det även är möjligt att byta ut ordningen av den itererade integralen. Det vill säga att

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)dx_2 \right) dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)dx_1 \right) dx_2.$$

Beviset för detta hänvisas till teorem 3.1 på s. 295 i *Fourier Analysis: An Introduction* [1].

Det följer då att

$$\begin{aligned}\widehat{(f * g)}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-2\pi i x \xi} dx.\end{aligned}$$

Utbyte av ordningen av den itererade integralen samt faktumet att $e^{-2\pi i x \xi} = e^{-2\pi i y \xi} e^{-2\pi i (x - y) \xi}$ ger att

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-2\pi i y \xi} e^{-2\pi i (x - y) \xi} dx &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x - y) e^{-2\pi i (x - y) \xi} dx \right) dy &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

□

Den tredje operatoren som är nödvändig för beviset av Plancherel är *involutionen*, som för en Schwartzfunktion definieras av

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}.$$

Med (ii) i proposition 3.1 gäller det att $f^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Det följer då att:

Proposition 4.5. $\widehat{f^*}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$.

Bevis.

$$\begin{aligned}\widehat{f^*}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)} e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{2\pi i x \xi} dx}.\end{aligned}$$

Med substitutionen $u = -x$ ger detta att

$$\overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{2\pi i x \xi} dx} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i u \xi} du} = \overline{\hat{f}(\xi)}.$$

□

Med dessa operatorer kan Plancherels sats bevisas, som visar att fouriertransformationen är unitär. Med andra ord är den inre produkten före transformationen ekvivalent med den inre produkten efter. Intuitivt innebär detta att energin är bevarad när en signal transformeras till dess frekvensspektrum [3].

Sats 4.6 (Plancherel). Om $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, så är $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

Bevis. (Från *Fourier Analysis: An Introduction*) [1].

Låt $h = f * f^*$. Då är

$$\hat{h}(\xi) = \widehat{(f * f^*)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{f}^*(\xi) = \hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)} = |\hat{f}(\xi)|^2.$$

Det följer även att

$$h(0) = (f * f^*)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(0-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Av sats 4.3 med $x = 0$ gäller det att

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

□

5 Osäkerhetsprincipen

Alla bevis i detta avsnitt är från *Fourier Analysis - An Introduction* [1].

För att kunna bevisa att osäkerhetsprincipen existerar mellan Schwartzfunktioner och motsvarande fouriertransformation, introduceras följande lemma:

Lemma 5.1 (Cauchy-Schwartz olikhet). *Om $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, så gäller det att*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \right).$$

Bevis. Först visas att detta gäller för $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Låt λ vara en komplex konstant. Det gäller då att $0 \leq |[f(x) + \lambda g(x)]|^2$. Detta resulterar i att

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-N}^N |[f(x) + \lambda g(x)]|^2 dx = \int_{-N}^N [f(x) + \lambda g(x)]\overline{[f(x) + \lambda g(x)]} dx \\ &= \int_{-N}^N |f(x)|^2 dx + \lambda \int_{-N}^N g(x)\overline{f(x)} dx \\ &\quad + \bar{\lambda} \int_{-N}^N f(x)\overline{g(x)} dx + |\lambda|^2 \int_{-N}^N |g(x)|^2 dx. \end{aligned} \tag{1}$$

λ och $\bar{\lambda}$ definieras att vara

$$\lambda = - \frac{\int_{-N}^N f(x)\overline{g(x)} dx}{\int_{-N}^N |g(x)|^2 dx}, \tag{2}$$

$$\bar{\lambda} = - \frac{\int_{-N}^N g(x)\overline{f(x)} dx}{\int_{-N}^N |g(x)|^2 dx}. \tag{3}$$

(1) multipliceras med $\int_{-N}^N |g(x)|^2 dx$ och (2) och (3) sätts in. Detta ger att

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\int_{-N}^N |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-N}^N |g(x)|^2 dx \right) \\ &\quad - 2 \left(\int_{-N}^N f(x)\overline{g(x)} dx \right) \left(\int_{-N}^N g(x)\overline{f(x)} dx \right) \\ &\quad + \left(\int_{-N}^N f(x)\overline{g(x)} dx \right) \left(\int_{-N}^N g(x)\overline{f(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Då $\int_{-N}^N g(x)\overline{f(x)}dx = \overline{\int_{-N}^N f(x)\overline{g(x)}dx}$ kan detta skrivas om till

$$\left| \int_{-N}^N f(x)\overline{g(x)}dx \right|^2 \leq \left(\int_{-N}^N |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-N}^N |g(x)|^2 dx \right).$$

Låt nu $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Då är integranderna Schwartzfunktioner enligt proposition 3.1 och därmed snabbt avtagande. Med sats 2.2 kan integralgränserna utökas till oändligheten och utifrån detta följer den ursprungliga olikheten. \square

Sats 5.2 (Osäkerhetsprincipen). *Antag att $\psi(x)$ är en schwartzfunktion som uppfyller villkoret*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Då är

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Likheten uppfylls om och endast om $\psi(x) = Ae^{-Bx^2}$, $B > 0$ och $|A|^2 = \sqrt{2B/\pi}$.

Bevis. Då $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$, samt att ψ och ψ' är snabbt avtagande Schwartzfunktioner, följer det med partialintegration med avseende på x att

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\overline{\psi(x)} dx \\ &= \left[x\psi(x)\overline{\psi(x)} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} (\psi(x)\overline{\psi(x)}) dx. \end{aligned}$$

Då proposition 3.1 visar att $x\psi(x)\overline{\psi(x)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, är $x\psi(x)\overline{\psi(x)}$ snabbt avtagande och försvinner. Av detta följer nu att

$$- \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} (\psi(x)\overline{\psi(x)}) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(x\psi'(x)\overline{\psi(x)} + x\psi(x)\overline{\psi'(x)} \right) dx.$$

Med lemma 2.4, samt att $|f(x)| = |\overline{f(x)}|$, leder detta till att

$$1 = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(x\psi'(x)\overline{\psi(x)} + x\psi(x)\overline{\psi'(x)} \right) dx \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x||\psi(x)||\psi'(x)| dx.$$

Med lemma 5.1 ger detta att

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dx \\ &\leq 4 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Med sats 4.6 och egenskap (iii) i proposition 4.1, följer det att

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}'(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |2\pi i \xi \widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Detta sätts in olikheten ovan och leder till den ursprungliga olikheten. \square

Beviset för uppfyllelsen av likheten hänvisas till teorem 4.1 på s. 159 i boken [1].

6 Slutsats/ Vidare frågeställningar

Den nedre gräns för hur noggrant tid och frekvens kan bestämmas samtidigt har nu bevisats. Hur detta fenomen uppstår i praktiken för en syntetisk signal har även redogjorts för, om än kortfattat. Genom att kunna analysera en signal i form av dess frekvenser kan signalen manipuleras för att till exempel filtrera bort frekvenser eller förstärka dem. Applikationen av filtret i demonstrationen är dock väldigt primitivt och introducerar störningar i den återskapade signalen. Det finns mycket bättre tillvägagångssätt som minimerar detta och kan vara värt att utforska vidare, men för syftet att illustrera principen bakom dem är det tillräckligt.

En ytterligare teori för signalbehandling är *time-frequency analysis*, där egenskaperna för f och \hat{f} kombineras i samma representation. Detta kan jämföras intuitivt med ett musikstycke på ett notblad. Där kan den som tyder notbladet se vilka frekvenser som ska spelas och hur lång tid samtidigt. Detta är endast en approximation av hur musiken faktiskt låter och osäkerhetsprincipen gäller även där, så en ideal representation går inte att uppnå rent matematiskt [3].

A Pythonkod för signaler och grafer

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.fft as sp

# Function to create a decaying cosine wave.
def wave_function(t, amp, omega):
    psi = amp*np.cos((2*np.pi)*omega*t) * np.exp(-(1/2)*t**2)
    return psi

# Function to construct the synthetic signal.
def create_signal(file_name, t):
    components = []
    with open(file_name, 'r') as file:
        next(file) # Skip first line in file.
        for line in file:
            line_s = line.strip()
            items = line_s.split()
            amp = float(items[0])
            omega = float(items[1])
            psi = wave_function(t, amp, omega)
            components.append(psi)
    composite_signal= sum(components)
    return composite_signal

# Function for plotting graphs of signal and FFT
def plotter(duration, t, f_t, w, Ff_w, title_1, title_2):
    # Plot of signal
    plt.subplot(2,1,1)
    plt.plot(t, f_t)
    plt.title(title_1)
    plt.xlim([0, duration])
    plt.xticks(np.linspace(0, duration, int(max(2,6))))
    plt.xlabel("Tid [s]")
    plt.yticks(np.linspace(0,0,1), color='w')
    plt.subplots_adjust(left=0.02, right=0.98, top=0.94, bottom=0.1, hspace=0.5)
    plt.grid()

    # Plot of FFT
    plt.subplot(2,1,2)
    plt.plot(w, Ff_w)
    plt.title(title_2)
    plt.xlim([100,150])
    plt.xticks(np.linspace(100,150,11))
    plt.xlabel("Frekvens [Hz]")
    plt.yticks(np.linspace(0,0,1), color='w')
    plt.grid()

    plt.show() # Display plots
```

```

# Function to create the signal, the FFT and then plot them.
def signal_FFT_plots(file_name, sample_rate, duration):
    N = int(sample_rate*duration) # Total samples
    Nfft = N*(2**6) # Total samples for FFT. 64 times higher resolution.
    t = np.linspace(0, duration, N) # Time-steps

    # Create synthetic signal from file.
    f_t = create_signal(file_name, t)

    # FFT of signal. Only the real part is shown.
    w = sp.rfftfreq(Nfft, 1/sample_rate)
    Ff_w = sp.rfft(f_t, Nfft)

    plotter(duration, t, f_t, w, Ff_w, "Signal", "FFT")

    # If duration is sufficiently large,
    # applies a low pass filter of 140Hz.
    if duration >= 1:
        filter_freq = 140
        low_pass_FFT = Ff_w.copy()
        low_pass_FFT[(w > filter_freq)] = 0
        low_pass = sp.irfft(low_pass_FFT)

        w_f = sp.rfftfreq(Nfft, 1/sample_rate)
        Ff_w_f = sp.rfft(low_pass, Nfft)

        plotter(duration, t, low_pass[0:N], w_f, Ff_w_f, "Filtered signal", "FFT")

# Main function to run plots in different sample-rates and time-frames.
def main():
    print("--- Signal processing example ---")
    file_name = "signal.txt"
    sample_rate = 8000
    duration = float(input("Duration [s]: "))
    signal_FFT_plots(file_name, sample_rate, duration)

main()

```

signal.txt

```

[Amplitude, Frequency]
1 120
0.5 121
0.25 145

```

Referenser

- [1] Elias M. Stein & Rami Shakarchi. *Fourier Analysis - An Introduction*. Princeton University Press, 2003.
- [2] James H. McClellan, Ronald W. Schafer & Mark A. Yoder. *Signal Processing First*. Pearson Educational Incorporation, 2003.
- [3] Karlheinz Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [4] *Scipy documentation of fourier transforms*.
<https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/fft.html>
Hämtad 2022-04-28.
- [5] qncubed3. *Complex Analysis: The Integral Inequality*.
<https://www.youtube.com/watch?v=y5uKbkSy5K4>
2021-11-27.
- [6] Peter J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2000. S. 318-319
- [7] Murray H. Protter, Charles B. Morrey Jr. *Intermediate Calculus*. Springer Science & Business Media, 2012. S. 421-426