SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Den allmänna lösningen till tredjegradsekvationer och införandet av komplexa tal

av

Alicia Stamm Svensson

2022 - No K23

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Den allmänna lösningen till tredjegradsekvationer och införandet av komplexa tal

Alicia Stamm Svensson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Dan Petersen

2022

Den allmänna lösningen till tredjegradsekvationer och införandet av komplexa tal

ALICIA STAMM SVENSSON

Sammanfattning: I detta självständiga arbete kommer du att få följa en historia som börjar redan år 1800 f.kr i Babylonenien, fram tills slutet på 1800-talet i Europa. Du kommer att stöta på flera matematiker, somliga kändare än andra - men alla minst lika viktiga för de komplexa talens upptäckt. Du som läsare kommer få en historia om upptäckten av den allmänna lösningen för tredjegradsekvationer och hur den historien blir en startplatta för de komplexa talens upptäckt.

Abstract: In this work you will be able to follow a story that begins as early as 1800 B.C in Babylonia, until the end of the 19th century in Europe. You will come across several mathematicians, some more knowledgeable than others - but all at least as important for the discovery of complex numbers. You as a reader will get a story about the discovery of the general solution for third degree equations and how that story becomes a starting point for the discovery of complex numbers.

Förord

Detta arbete utgör ett examensarbete om 15 hp vid stockholms universitet som jag skrivit under våren 2022. Efter detta ska jag fortsätta mina studier med att utbilda mig till ämneslärare inom matematik, samt idrott och hälsa.

Jag vill rikta ett stort tack till min handledare Dan Petersen som först kom med idén om uppsatsämne och som under arbetets gång alltid har varit tillgänglig , hjälpsam och lösningsorienterad. Det har varit till mycket stor hjälp, Tack!

Innehåll

1. Introduktion

Alla som har en gymnasieexamen i Sverige har stött på den allmänna formeln för att lösa andragradsekvationer, i Sverige kallad PQ-formeln. I PQ-formeln har vi en standard andragradsekvation $x^2 + px + q = 0$, där rötterna fås av en kombination av rotutdragningar och det fyra räknesätten. Det finns även en allmän formel för tredjegradsekvationer, dock mer komplicerad än PQ-formeln och denna lärs inte ut på gymnasiet. Men precis som i fallet för andragradsekvationer finns det en formel för tredjegradsekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, där man likt PQ-formeln får rötterna av kombinationer av rotutdragningar och det fyra räknesätten.

Den allmänna lösningen till tredjegradsekvationer, även känd som Cardanos formel upptäcktes under 1500-talet av de italienska matematikerna Scipione del Ferro, Niccoló Tartaglia och Gerolamo Cardano. En intressant upptäckt som matematikerna fann med Cardanos formel var att komplexa tal uppstod emellanåt i beräkningen, trots att de endast var intresserade av reella rötter. De komplexa talen som dök upp i beräkningen med Cardanos formel lyckades Cardano själv aldrig riktigt förstå sig på, han såg dem bara som en förvirring.

Vidare under 1600-talet fortsatte flera matematiker bland annat Rafael Bombelli och Gottfried Leibniz att försöka lösa förvirringen med de komplexa talen som uppstod med Cardanos formel. Det de lyckades med var att reducera komplexa tal i beräkningen till rötter med reella värden. Vidare för att kunna förstå sig på de komplexa talen ännu mer behövdes en geometrisk tolkning av de komplexa talen. Även här har vi flera matematiker som försökte men inte nådde till hela slutresultatet, bland annat Rene Descartes och John Wallis. Rene Descartes var den matematiker som först införde termen “imaginär” (imaginära tal) och ca 100 år senare stöter vi på den schweiziske matematikerna Leonhard Euler som införde beteckning av $\sqrt{-1}$. Den man som faktiskt lyckades med den geometriska tolkningen först av de komplexa talen var den norske Casper Wessel i slutet av 1700-talet. Historien för denna uppsats avslutas vid Karl Friedrich Gauss på 1800-talet som är den man som kom på begreppet “komplexa tal”.

2. Andragradsekvationer

Vi ska börja med att titta på den allmänna lösningen av andragradsekvationer, även kallad med känt namn PQ-formeln. Vi kommer vidare att fortsätta med historien om hur denna geometriska lösning har funnits och vidare till hur den allmänna lösning till andragradsekvationer kom till. Vart började historien för PQ-formeln?

2.1. Härledning av PQ-formeln

Vi börjar med en allmän andragradsekvation av som har form:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Det första vi vill göra är att föra över q till andra sidan av likamedstecknet:

$$x^2 + px =- q,$$

Vi vill nu hitta det talet d som vi vill addera till ekvationen, detta för att vi vill bilda en kvadrat. Värdet på talet d kan vi konstruera som:

$$d = (\frac{p}{2})^2.$$

Vi kompletterar nu ekvationen med konstanten d:

$$x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q.$$

Med hjälp av kvadreringsregler kan vi skriva om det som står i VL:

$$(x + (\frac{p}{2}))^2 = (\frac{p}{2})^2 - q.$$

Härifrån tar vi nu kvadratroten ur båda sidorna:

$$\sqrt{(x + (\frac{p}{2}))^2} = \pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$
$$\Rightarrow$$
$$(x + (\frac{p}{2}) = \pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Vi vill nu få x ensam på ena sidan:

$$x + (\frac{p}{2}) - (\frac{p}{2}) \quad = \quad \pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} - (\frac{p}{2}).$$

Vi har nu fått x ensamt på VL och vi är klara med härledningen av PQ-formeln:

$$x = -\,(\frac{p}{2}) \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

2.2. Babylonierna och andragradsekvationer

Den allmänna lösningen till andragradsekvationer sträcker sig långt bak i historien. Det har återfunnits lertavlor från babylonierna från år 1800 f.kr där många olika exempel på problem av kvadratisk natur återfunnits (Hodgkin, 2005, s.25). Att benämna dessa exempel på problem som “kvadratisk natur” i stället för “kvadratiska ekvationer” beror på att de exemplen som återfunnits har en mycket annan natur än vad vid känner till kvadratiska ekvationer idag. Vid denna tid saknade babylonierna, precis som egyptierna matematiska symboler. Babylonierna kunde därför inte skriva ut någon generell lösning till andragradsekvationer på sina lertavlor, dock med ord och procedurer lyckades vissa specifika problem att bli lösta. (Hodgkin, 2005, s.25)

Här följer ett räkneexempel som har återfunnits på en sådan lertavla, där vi kan åskådliggöra ord och procedurer för att lösa andragradsekvationen. Viktigt att nämna är att Babylonierna vid denna tid använde sexagesimala systemet när de räknade och vi har här översatt beräkningarna till det moderna decimalsystemet. (Hodgkin, 2005, s.25)

”Jag har adderat sju gånger sidan av min kvadrat och elva gånger arean: 6,25.”

Som vi idag kan tolka som: $7x + 11x^2 = 6,25.$

Lösningen som återfunnits på lertavlorna har beskrivits som sådan:

1. Du skriver ned 7 och 11. Du multiplicerar $6,25$ med 11. Resultat $68,75$.

2. Du bryter av hälften av 7. Du multiplicerar hälften av 7 med hälften av 7. Resultat $12,25$.

3. Du adderar $12,25$ till $68,75$. Resultat 81.

4. Detta är kvadraten av 9. Du subtraherar $3,5$ från 9. Resultat $5,5$.

5. Den multiplikativa inversen av 11 kan inte hittas. Med vad måste du multiplicera med 11 för att få $5,5$? sidan av kvadraten är $0,5$.

(Hodgkin, 2005, s.30)

2.3. Muhammad ibn Al-Khwarizmis (780-850) och andragradsekvationer.

Vi hoppar fram några år i historien och hamnar vid 800-talet i Bagdad. Det var vid denna tid och plats som en generaliserad beskrivning av lösningen till kvadratiska ekvationer uppstod. Muhammad ibn al-Khwarizmi (780-850), en persisk matematiker som skrev vid denna tid sitt verk *Al-kitab al-muhtasar fi hisab tal-jabr wa-l-muqabalah.* Verket släpptes mer exakt året 825 och kom att ha stort inflytande på den matematiska historien. Det som utmärkte al-Khwarizmis verk var hans systematisering av kvadratiska ekvationer och bevisen av geometrisk form, detta var bidragande för algebrans utveckling som en egen gren inom matematiken. (Katz, 2008, s.271-276)

Al-Khwarizmi skrev sitt verk med tanken att de skulle vara en manual för att lösa kvadratiska ekvationer. Han ägnade sig åt tre olika kvantiteter; kvadraten, roten av kvadraten och det absoluta talet. Vidare anmärker al-Khwarizmi att man kan kombinera dessa kvantiteter i sex olika typer, följande:

1. Kvadrat lika med rötter, modern notation: $ax^2 = bx$
2. Kvadrat lika med tal, modern notation: $ax^2 = c$
3. Rötter lika med tal, modern notation: $bx = c$
4. Kvadrat och rötter lika med tal, modern notation: $ax^2 + bx = c$
5. Kvadrat och tal lika med rötter, modern notation: $ax^2 + c = bx$
6. Rötter lika med kvadrat, modern notation: $bx = ax^2$

(Katz, 2008, s.271-276).

Anledningen till denna indelning av dessa sex olika typerna är att islamsk matematik vid denna tid inte ägnade sig åt negativa tal. Med detta menas att koefficienterna och rötterna bör båda vara positiva och den generella formen av kvadratiska ekvationer som vi uttrycker idag;

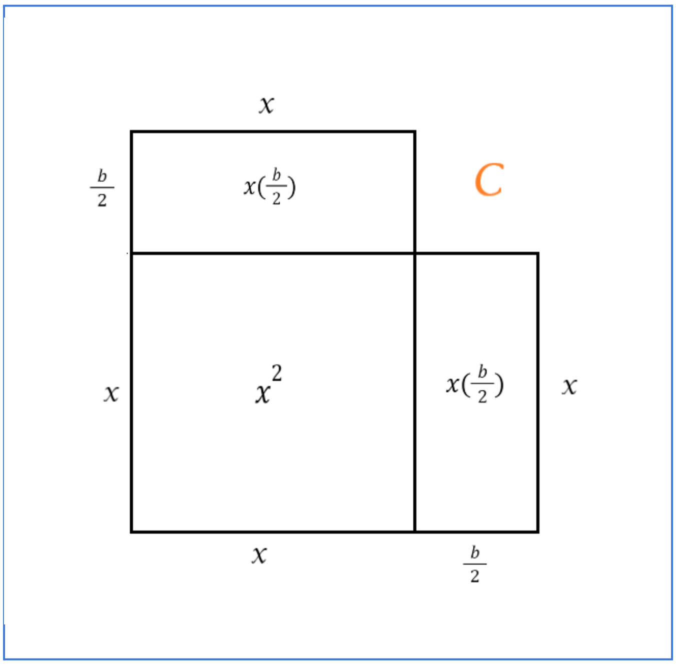
$$ax^2 + bx + c = 0$$

kan innehålla både positiva och negativa koefficienter. (Katz, 2008, s.271-276)

Al-Khwarizmi lösningar till de tre första typerna av ekvationer var enkla och relativt simpla att förstå sig på. Mer intressant blir det när Al-Khwarizmi går igenom lösningarna för de sammansatta ekvationerna, som i typerna 4-6. Al-Khwarizmi likt många andra matematiker vid denna tid använde sig inte av matematiska symboler utan han skrev lösningen med ord. Efter att al-Khwarizmi lagt fram lösningarna för de olika fallen gick han vidare med att geometriskt bevisa dem. (Katz, 2008, s.271-276)

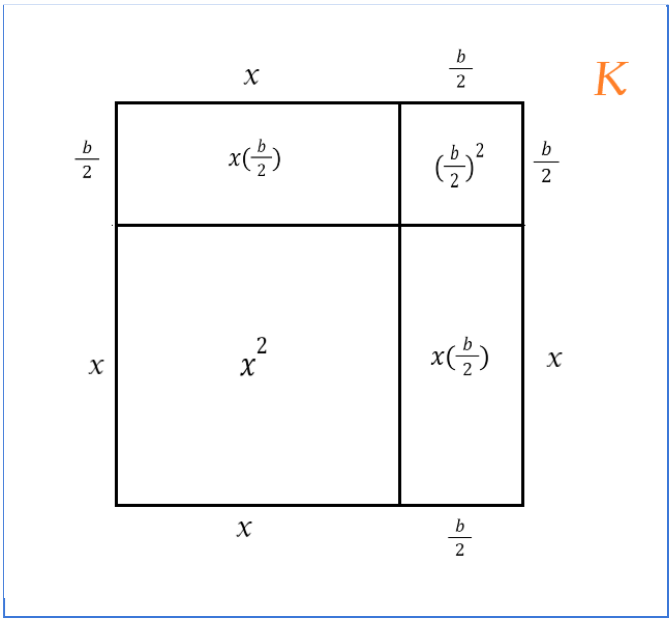
Vi kommer här få följa Al-Khwarizmis lösning för typ 4; Kvadrat och rötter lika med tal som kan beskrivas med modern notation: $ax^2 + bx = c$.

Första steget är att konstruera en kvadrat som representerar x^2. Al-Khwarizmi uttryckte variabeln bx som en rektangel med bredden b och längden x, variabeln c uttryckte han som den totala arean av kvadraten x^2 och rektangeln bx. Kvadraten och rektangeln har den gemensamma längden x. Med detta kunde Al-Khwarizmi påbörja en geometrisk konstruktion. Al-Khwarizmis halverade sin rektangel bx till två nya rektanglar genom att dela den i mitten av sida b, han fick då två rektanglar med längden x och bredden $\frac{b}{2}$. Dessa rektanglar placerade han bredvid kvadraten x^2, se figur 1. Dessa har tillsammans area c, kom ihåg $\left[ax^2 + bx = c\right]$. (Katz, 2008, s.271-276)



FIGUR 1

Vidare för att konstruera en hel kvadrat K skapar al-Khwarizmi en kvadrat med sidorna $\frac{b}{2}$ och area $(\frac{b}{2})^2$ som adderas till arean c, se figur 2.



FIGUR 2

Då hela kvadraten Ks area beskrivs av:

$$K = (\frac{b}{2})^2 + c$$

och därför beskriver uttrycket:

$$\sqrt{K} = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c}$$

sidan av hela kvadraten K.

För att få roten av sidan x subtraherar al-Khwarizmi sidan av kvadraten $(\frac{b}{2})^2$ från $\sqrt{K}$.
Al-Khwarizmi får då uttrycket:

$$x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Som vi kan se är det här det generella uttrycket till lösningen av en andragradsekvation. (Katz, 2008, s.272-273)

Om vi jämför Al-Khwarizmis med PQ-formeln ser vi att det fungerar på likartat sätt.
Al-Khwarizmis lägger till en liten kvadrat med sidor $\frac{b}{2}$, som ger en area $(\frac{b}{2})^2$. I PQ-formeln gör vi på samma sätt där ville vi hitta ett tal d som vi ville addera till ekvationen, detta för att vi ville bilda en kvadrat. Värdet på talet d konstruerade vi som:

$$d = (\frac{p}{2})^2,$$

dvs arean av Al-Khwarizmis kvadrat.

3. Tredjegradsekvationer

Vi fortsätta med att titta på den allmänna lösningen av tredjegradsekvationer, även kallad Cardanos formel. Senare kommer vi titta på hur denna geometriska lösning har funnits och vidare till hur Cardanos formel kom till från början.

3.1. Lösningen till en förkortad tredjegradsekvation

Jag har i denna härledning använt mig av tillvägagångssättet som Wikström (2014) redogör i boken *Funktionsteori*. Vi ska börja med att gå igenom lösningen till tredjegradsekvationer som saknar $x^2 - term$, den ser ut så här:

(1) $$x^3 + qx + q = 0$$

Vi vill nu leta lösningar på formen $x = u + v$, där u och v är två nya variabler. Vi vill göra detta då det ger oss lite större frihet då vi kan experimentera med olika relationer u och v emellan. Insättning av detta i (1) ger oss:

$$(u + v)^3 + q(u + v) + q = 0$$

Vi vill nu samla termer av samma grad, detta genom att reducera parenteserna:

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
(2) $$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Om vi nu väljer våra u och v på sådant sätt att de uppfyller dessa två ekvationer:

$$1.\ 3uv + p = 0$$
$$2.\ u^3 + v^3 + q = 0,$$

så har vi hittat en lösning till vår tredjegradsekvation. Detta då om båda dessa ekvationer är uppfyllda ger det samma resultat som i (2). Vi skriver om ekvationerna och konstaterar att vi vill lösa:

$$1.\ 3uv = -p$$
$$2.\ u^3 + v^3 = -q.$$
$$\Leftrightarrow$$
$$1.\ u^3v^3 = \frac{-p^3}{27}$$
$$2.\ u^3 + v^3 = -q$$

Detta vid första anblick kan verka lika svårt som att lösa tredjegradsekvationen direkt, men vi har tur! Det är nämligen så att det är betydligt mycket enklare att lösa dessa två ekvationer än den ursprungliga tredjegradsekvationen. Vi genomför nu ett variabelbyte och skriver om $t = u^3\ och\ s = v^3$. Vi får då våra två tidigare ekvationer till:

$$1.\ ts = \frac{-p^3}{27}$$
$$2.\ t + s = -q$$

Vi tittar tillbaka i backspegeln och kollar på sambandet mellan koefficienterna och nollställena till en andragradsekvation. Talen x_1 och x_2 är rötter till ekvationen $x^2 + p + q = 0$ om och endast om $x_1 + x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = q$. Av detta konstateras att t och s måste vara lösningarna till andragradsekvationen:

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$$

Vi får lösningarna:

$$s, t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Då $t = u^3$ och $s = v^3$ så måste u och v ha lösningen:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

och

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Vi har nu kommit fram till en lösning till vår tredjegradsekvation:

(3) $$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Något som är intressant att notera är att det ser ut att bli nio olika rötter till tredjegradsekvationen. Detta stämmer dock inte. Om vi tittar tillbaka på villkoret:

$$1.\ 3uv = -p$$
$$2.\ u^3 + v^3 = -q$$

Så kan vi konstatera att en tredjegradsekvation inte har nio rötter, utan tre. Detta ser vi då om vi kollar på villkoret $1.\ 3uv = -p$ så är det endast ett specifikt u som matchar med ett specifikt v. Detta resulterar till att sex av våra lösningar i (3) inte är giltiga, utan endast tre stycken.

3.2. Den allmänna lösningen till tredjegradsekvationer

Jag har fortsättningsvis använt mig av tillvägagångssättet som Wikström (2014) redogör i boken *Funktionsteori*. Nu när vi har visat att det går att lösa tredjegradsekvationer som saknar $x^2 - term$ vill vi visa att det går att reducera ut $x^2 - termen$ ur en tredjegradsekvation. Vi har nu i stället vår allmänna tredjegradsekvation med $x^2 - term$ som ser ut som följande:

(4) $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Det har visat sig att det går att överföra (4) till en tredjegradsekvation som saknar $x^2 - term$:

$$x^3 + px + q = 0$$

Med det menas, att det går att eliminera $x^2 - termen$ från vår allmänna tredjegradsekvation (4). Detta går med hjälp av ett variabelbyte av följande:

$$x = y - \frac{a}{3}.$$

Om vi gör en insättning i (4) får vi:

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0$$

Vi vill nu samla termer av samma grad, vi börjar med att reducera parenteserna.

$$y^3 - y^2a + \frac{ya^2}{3} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

(5) $$y^3 + y(b - \frac{a^2}{3}) + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

Vi har nu eliminerat $x^2 - terme$n och kan lösa (5) med hjälp av formeln som vi gick igenom ovan kapitel.

3.3. Omar Khayyam (1050-1123) - Fann den geometriska lösningen

Under historien har flera matematiker från Babylonien, Grekland, Kina och Italien under antiken hittade flera olika sätt att lösa några särskilda tredjegradsekvationer, men inte funnit en allmän lösning för alla tredjegradsekvationer. Omar Khayyam var en persisk matematiker och poet som levde under åren 1050-1123. Vid omkring året 1070 gav Khayyam ut en formel för att lösa tredjegradsekvationer som påminde lite om al-Khwarizmis metod för andragradsekvationer. Det Khayyam gjorde var att han behandlade samtliga tredjegradsekvationer och använde sig av kägelsnittet för att ge en geometrisk lösning. Khayyam var den första som gav en geometrisk lösning på tredjegradsekvationer som gällde för alla möjliga fall. Tidigare hade denna metod använts redan i det antika Grekland men endast för att lösa vissa tredjegradsekvationer. (Boyer & Merzbach, 2011, s.218-219)

I Khayyams text *Risala fi al-barahin 'ala masa'il al-jabr wa'lmuqabala* analyserade Khayyam alla möjliga olika tredjegradsekvationer. Khayyam tillhandahöll sina läsare med djupa algebraiska lösningar i sin text, där läsaren behövde vara bekant med Euklides Elementa och Apollonius arbete om kägelsnitt. Precis som al-Khwarizmi började Khayyam sitt arbete med att ge en fullständig klassificering av ekvationer, dock med ekvationer med grader upp till tre i stället för två. Han delade in sina ekvationer i 14 olika typer, i tre olika grupper; binomial, trinomial och tetranomial. (Katz, 2008, s.287-290)

Binomial:

1. $x^3 = d$

Trinomial:

1. $x^3 + cx = d$
2. $x^3 + d = cx$
3. $x^3 = cx + d$
4. $x^3 + bx^2 = d$
5. $x^3 + d = bx^2$
6. $x^3 = bx^2 + d$

Tetranomial:

1. $x^3 + bx^2 + cx = d$
2. $x^3 + bx^2 + d = cx$
3. $x^3 + cx + d = bx^2$
4. $x^3 = bx^2 + cx + d$
5. $x^3 + bx^2 = cx + d$
6. $x^3 + cx = bx^2 + d$
7. $x^3 + d = bx^2 + cx$

(Katz, 2008, s.287-290)

Khayyam bevisade i sin text att hans lösning var riktig genom att argumentera för de villkor som kan leda till noll, en eller flera lösningar. Khayyam förklarade också för varje grupp; binomial, trinomial och tetranomial de kägelsnittet som behövdes för ekvationens lösningar. Vidare var inte Khayyam intresserad av att bevisa typiska geometriska problem, utan hans intresse låg i att hitta ett generellt tillvägagångssätt för lösningarna av alla dessa 14 typer av ekvationer ovan. (Katz, 2008, s.287-290)

Vi ska gå in i en lösningsmetod som har utgångspunkt i den trinominala ekvationen av typ $x^3 + cx = d$. Khayyam beskrev denna som en kub och en sida som är lika med ett tal. Då x representerar en sida av en kub så behöver c representera arean av en kub. Detta medför att cx i ekvationen $x^3 + cx = d$ beskriver $area \times sidan(höjden)$ som en kropps volym, d representerar också en kropps volym. (Katz, 2008, s.287-290).

Khayyams tillvägagångssätt för lösningen av trinomial ekvationer av typ $x^3 + cx = d$ börjar med sex stycken konstruktionssteg:

1. Khayyam utformade längden AB som är lika med sidan på kvadraten $c \Rightarrow AB = \sqrt{c}.$

2. Vinkelrät mot AB utformades BC så att $BC \times AB^2 = \frac{d}{c} \times (\sqrt{c})^2 = d,\ BC = \frac{d}{c}$.

3. Khayyam förlängde AB mot en punkt Z, han skapade också en parabel med maximi på punkten B (se figur 3).

Viktigt här är att uppmärksamma att då parabeln kan beskrivas med parametern $AB = \sqrt{c}$ och har en axel BZ så kan parabeln i modernt uttryck uttryckas som ekvationen $x^2 = \sqrt{c}y$.

4. Khayyam konstruerade nu en halvcirkel som har diametern $BC = \frac{d}{c}$, denne skär parabeln i punkt D (Se figur 3).

Vi kan uttrycka Khayyams lösningsmetod med en grafisk tolkning. Vi kan med hjälp av cirkelns allmänna ekvation:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

beskriva Khayyams halvcirkeln som:

$$(x - \frac{d}{2c})^2 + y^2 = (\frac{d}{2c})^2 \text{ eller } x(\frac{d}{c} - x) = y^2.$$

Med hjälp av konstruktions steg 4 kan vi även beskriva x och y som koordinater till denna graf som

$$x_0 = BE = DZ \; och \; y_0 = BZ = DE,$$

då får vi:

$$x_0^2 = \sqrt{C}y_0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{c}}{x_0} = \frac{x_0}{y_0}.$$

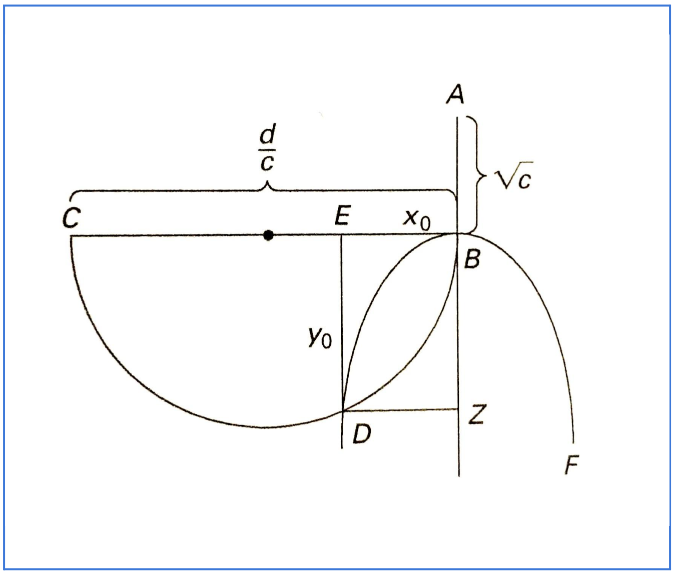
5. Då punkten D befinner sig på parabeln får Khayyam att:

$$x_0(\frac{d}{c} - x_0) = y_0^2 \, eller \, \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{\frac{d}{c} - x_0}.$$

6. Då punkten D även befinner sig på halvcirkeln får Khayyam att:

$$\frac{c}{x_0^2} = \frac{x_0^2}{y_0^2} = \frac{y_0^2}{(\frac{d}{c} - x_0)^2} = \frac{y_0}{\frac{d}{c} - x_0} \times \frac{x_0}{y_0} = \frac{x_0}{\frac{d}{c} - x_0}.$$

Ur det sistnämnda steget får khayyam att $x_0^3 = d - cx_0$ och att x_0 är den eftersökta lösningen för den trinominala ekvationen av typ $x^3 + cx = d$. (Katz, 2008, s.287-290)



FIGUR 3
(Katz, 2008, s.289)

Khayyam behandlade alla 14 typer av tredjegradsekvationer på samma sätt. I vissa fall existerade det inte några positiva lösningar, han skrev att det kunde existera noll, en eller två lösningar. Detta berodde på om halvcirkeln och parabeln som involverades korsade varandra i noll, en eller två punkter. (Katz, 2008, s.287-290)

3.4. Scipione del Ferro (1465-1526), Niccoló Tartaglia (1499-1557) och Gerolamo Cardano (1501-1576) - Fann Cardanos formel

Khayyams geometriska bevis av lösning till tredjegradsekvationer gjorde värdefulla bidrag för utvecklingen den allmänna lösningen för tredjegradsekvationer. Dock dröjde det närmare 500 år tills den aritmetiska lösningen skulle arbetas fram.

Tiden emellan från Khayyams geometriska lösning lades fram tills den aritmetiska lösningen upptäcktes påstådde Luca Pacioli (1445-1517) vid året 1494 att det är omöjligt att hitta en allmän algebraisk lösning till tredjegradsekvationer. Pacioli var en Italiensk matematiker och franciskanermunk, han var vid denna tid nära vän till Leonardo da Vinci. Paciolis påstående gav som följd att flera matematiker vid denna tid blev avrådda att låta bli att ens försöka finna en lösning, medan några andra matematiker blev sporrade i att försöka motbevisa Pacioli. Det blev ett händelserikt tillfälle i algebrans utveckling när Gerolamo Cardano (1501-1576) publicerade i sitt verk *Ars Magna* lösningsformel för tredjegradsekvationer och fjärdegradsekvationer i mitten på 1500-talet (Boyer & Merzbach, 2011, s.251-253).

Det som är intressant i historien är att det inte var Cardano som tidigast kom på lösningen, utan det var en man med namn Scipione del Ferro (1465-1526). Del Ferro var professor i matematik vid universitet i Bologna och han föreläste i aritmetik och geometri, han var en mycket omtyckt föreläsare. Året 1515 har del Ferro hittat en lösningsmetod för en förkortad tredjegradsekvation $x^3 + ax = b$. Till skillnad från vad man kan tänka sig så valde del Ferro att inte berätta för någon om hans upptäckt! Efter del Ferros död blir hans svärson Hannibal Nave, som var gift med hans dotter Filippa del Ferro arvtagare till del Ferros anteckningsbok som bland annat innehöll hans upptäckta formel för att lösa tredjegradsekvationer. Del Ferro meddelade även under tystnadslöfte sitt resultat till Antonio Maria Fiore. (Boyer & Merzbach, 2011, s.255-260)

Vid år 1535 uppmanar Fiore till en matematisk kamp, Fiore mot Niccoló Tartaglia (1499-1557). Det är viktigt här att få en inblick i det matematiska klimatet på 1500-talet i Italien. Det skiljer sig nämligen mycket från nutiden och en typisk skillnad var dåtidens tävlingsmatcher i matematik, som var mycket populära bland folket. Matcherna gick till som sådan att matematikerna utmanade varandra med några matematiska problem, den matematiker som kunde lösa flest problem blev utsedd till vinnare. Vinnaren blev belönad med prispengar men i synnerhet ett erkännande. Under tävlingsmatchen i matematik mellan Fiore och Tartaglia insåg Fiore med tidens gång att han inte var den enda som kunde lösa tredjegradsekvationer. Då Tartaglia kunde lösa alla av Fiores ekvationer så blev det väldigt tydligt för Fiore att även Tartaglia kände till en lösning till tredjegradsekvationer. (Rothman, 2013, s.5-6)

Efter matchens slut korades Tartaglia till vinnare och han blev omtalad över hela Italien. Tartaglias vinst mot Fiore väckte intresse hos Cardano som var intresserad av lösningen för att kunna publicera den i sitt matematiska verk som han skapade. Tartaglia vill hinna publicera lösningen själv innan han delade med sig av den till Cardano. Efter flera försök i att försöka övertyga Tartaglia att delge lösningen lyckades Cardano, detta med hjälp av att erbjuda tillgång till hans rika bekantskapskrets. Tartaglia delgjorde lösning till Cardano med ett villkor, att Cardano var tvungen att hålla lösningen i hemlighet och inte trycka den i sitt verk. Vid år 1543 upptäckte Cardano tillsammans med hans student Ludovico Ferrari (1522-1565) att det var del Ferro som tidigast funnit en lösning till tredjegradsekvationer. Då Cardano insåg att Tartaglia inte var upphovsman till den allmänna lösningen av tredjegradsekvationer, gav Cardano sig rätten att bryta löftet med Tartaglia och publicera lösningen i hans verk *Ars Magna*. (Rothman, 2013, s.6-7)

När Tartaglia upptäckte att Cardano brutit sitt löfte och publicerat lösningen blev Tartaglia väldigt arg och gick i attack mot Cardano. Tartaglia beskyllde Cardano för stöld i sin bok *Quesiti et Inventione Diverse* som till Tartaglias besvikelse inte verkade beröra Cardano särskilt mycket. Ferrari kom till Cardanos försvar i stället som gick i starkt motangrepp. Efter två års tid av negativ korrespondens Tartaglia och Ferrari emellan utmanande Ferrari Tartaglia till en tävlingsmatch i matematik som 1548 blev av. Till mångas förvåning lyckades Ferrari visa att han var kunnigare än Tartaglia i tävlingsmatchen 1548. Följden blev att Ferrari blev utsedd till vinnare och Tartaglias rykte tog bestående skada. (Rothman, 2013, s.7-8)

4. Upptäckten av de komplexa talen

Vi ska fortsätta med att kolla på hur upptäckten av Cardanos formel blir en startplatta för de komplexa talen. Det ska visa sig att de frågetecken som Cardanos formel bringade, skulle en dag bli besvarade.

4.1. Reducera komplexa tal till reella värden

Historien för de komplexa talen anses börja under 1500-talet, vid samma tidpunkt som matematiker sökte efter den allmänna lösningen för tredjegradsekvationer. Matematikernas mål var att finna ett tillvägagångssätt som gav lösningar vid varje tredjegradsekvation. Som historien har berättat fann Cardano, Tartaglia och del Ferro ett tillvägagångssätt som Cardano publicerade i sitt verk *Ars Magna* året 1545. Tillvägagångssättet som Cardano presenterar för att lösa tredjegradsekvationer av typ $x^3 = px + q$, ser ut som följande:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Det uppstod dock problem med Cardanos formel strax efter att den upptäckts på 1500-talet, detta då formeln inte fick fram lösningar till alla tredjegradsekvationer. Cardanos formel visade sig vara beroende av värdet på konstanterna q och p. Detta då om $\frac{q^2}{4} - \frac{p^2}{27} < 0$ kommer Cardanos formel att innehålla ett komplext tal, eller som de benämnde det under 1500-talet: kvadratroten ur ett negativt tal. (Nahin, 1998, s.15-18)

Ett exempel på detta är då vi har tredjegradsekvationen:

$$x^3 = 15x + 4,$$

som vi får med Cardanos formel följande rötter:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-212}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-212}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-212}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-212}},$$

det vill säga inslag av komplexa tal trots att ekvationen har tre reella rötter. (Nahin, 1998, s.15-18)

4.1.1. Gerolamo Cardano (1501-1576) - Gav det ett försök att förstå de komplexa talen

Den första personen vi möter på i historien för de komplexa talen är Cardano han själv som gör försök i att förstå de komplexa talen. Cardano var enligt historien den första som anmärkte de negativa rötterna till tredjegradsekvationer, samt att tredjegradsekvationer kunde ha tre rötter. Cardano gjorde också en annan anmärkningsvärd upptäckt med hans formel, han upptäckte om den tydliga existensen av komplexa tal. Vilket för Cardano under denna tid blev en förvirring. (Burton, 1985, s.309-312)

I Cardanos verk *Ars Magna* ser vi tydligt att han försökte hålla de komplexa talen borta genomgående, utom i ett specifikt problem (Burton, 1985, s.309-314). I detta problem försökte Cardano att ge sig på förvirringen med de komplexa talen och komma underfund med problematiken. Han försöker lösa problemet som han kallade "uppenbart omöjligt" (Nahin, 1998, s.15-18):

"Dela 10 i två delar, produkten av dessa delar är lika med 40".

Vi kan tolka denna text idag som ekvationssystemet:

(6)
$$\begin{aligned} &1.\ x + y = 10 \\ &2.\ xy = 40. \end{aligned}$$

Han kallade problemet "uppenbart omöjligt" då det direkt ledde till en andragradsfunktion av form:

$$x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Med hjälp av kvadratkomplettering fås följande rötter:

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15}$$
$$x_2 = 5 - \sqrt{-15}.$$

En addition av dessa rötter ger den efterfrågade summan:

$$5 + \sqrt{-15} + (5 - \sqrt{-15)} = 10$$

och produkten mellan dessa erhåller värdet:

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) =$$
$$(5)(5) - (5)(\sqrt{-15}) + (5)(\sqrt{-15}) + (\sqrt{-15})(\sqrt{-15}) = 25 + 15 = 40.$$

Dessa resultat överensstämmer med det ekvationssystemet ovan (6). I denna beräkning tog multiplikationen av $(\sqrt{-15})(\sqrt{-15})$ ut rottecknet, vilket underlättade för Cardano då han inte behövde fundera väsentligt mycket på talet $\sqrt{-15}$. Det Cardano menade i sitt verk *Ars Magna* var att om man hanterar de komplexa talen som andra tal, då fungerar allting. Cardano hade dock ingen riktig motivering till de komplexa talen i sitt verk *Ars Magna*. (Nahin, 1998, s.15-18)

4.1.2. Rafael Bombelli (1526-1572) - Reducerade komplexa rötter till reella rötter

Några år senare vid året 1572 släpps ett verk, *Algebra.* Verket var skrivet av Cardanos efterföljare, Rafael Bombelli (1526-1572). Bombelli var den första som tog de komplexa talen på allvar vilket resulterade att han uppnådde en viss försoning med dem. (Stillwell, 2001, s.257-258)

Bombelli var en italiensk ingenjör, men i nutid även också känd som "expert i algebran". Han studerade Cardanos formel och försökte ge en förklaring på hur formeln fungerar för värden på talen p, q som uppfyller kriteriet:

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^2}{27} < 0,$$

det vill säga Cardanos formel som innehåller ett komplext tal. (Nahin, 1998, s.18-22)

I Bombellis verk *Algebra* använder han sig av en tredjegradsekvation som Cardano tidigare hade använt sig av:

$$x^3 = 15x + 4$$

Bombelli visste redan med hjälp av andra tillvägagångssätt och beräkningar att denna tredjegradsekvation hade tre reella lösningar; $x_1 = 4, x_2 =- 2 + \sqrt{3}$ och $x_3 =- 2 - \sqrt{3}$ (Burton, 1985, s. 312-314). Bombelli kan därför ha valt just denna tredjegradsekvation med tre stycken kända reella rötter för att kunna se hur Cardanos formel faktiskt fungerade (Nahin, 1998, s.18-22).

Om vi kollar på vad Cardanos formel ger av samma tredjegradsekvation så får vi:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-212}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-212}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-212}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-212}},$$

dvs innehåll av komplexa tal. Cardano benämnde de komplexa talen för irreducibla, han kunde inte förstå hur man skulle beräkna dem och hans beräkningar gick bara runt i cirklar. Problemet kvarstod därför kring hur man beräknade något sådant. ((Nahin, 1998, s.18-22) och (Stillwell, 2001, s.257-258))

Bombellis tillvägagångssätt var att försöka reducerade uttrycket med både en kvadratrot och en kubikrot till ett uttryck med endast en kvadratrot (Stillwell, 2001, s.257-258). Det han gjorde var att ersätta de talen som står under rotuttrycken med två ännu inte fastställda reella tal a och b:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-212}} = a + \sqrt{-b} \tag{7}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-212}} = a - \sqrt{-b} \tag{8}$$

Bombelli kunde fastställa att villkoret $x_1 = 4$ när värdena på a och b är $a = 2\ och\ b = 1$, detta genom att han använde sig av räknereglerna för reella tal och antog att talen a och b var heltal (Burton, 1985, s.312-314).

Genom att ersätta a och b med värdena $a = 2 \; och \; b = 1$ på ovan uttryck (7) och (8), fick Bombelli:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-212}} = 2 + \sqrt{-1} \tag{9}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-212}} = 2 - \sqrt{-1} \tag{10}$$

Additionen av (9) och (10) för att få ut x ger:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-212}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-212}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

På detta sätt påvisade Bombelli att när värden $a = 2$ och $b = 1$ erhålls, är $x = 4$ en reell lösning till tredjegradsekvationen $x^3 = 15x + 4$ (Nahin, 1998, s.18-22). Bombelli hade med detta påvisat att det gick att reducera komplexa rötter till komplexa rötter. Bombelli hade med denna insikt suddat ut lite av den mystik som de komplexa talen hade över sig vid 1500-talet (Burton, 1985, s.312-314).

4.1.3. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) - Reducerade också komplexa rötter till reella rötter

Ungefär 100 år efter att Bombelli släppte sitt verk *Algebra* studerade den tyska matematikern Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) *Algebra.* Leibniz tyckte att det fortfarande uppstod några oklarheter med Cardanos formel i hans verk *Algebra*. Under sin livstid ägnade Leibniz väldigt mycket tid på att försöka begripa innebörden av de komplexa talen och på att försöka skapa sig en förståelse om hur dessa tal ska behandlas. Detta kan konstateras ur de opublicerade anteckningsböckerna som hittats efter hans död med många olika beräkningar. (Nahin, 1998, s.24-27)

Efter att ha granskat Leibniz anteckningsböcker har det kunnats konstateras att Leibniz har försökt att lösa dessa två tredjegradsekvationer:

$$x^3 - 13x - 12 = 0$$

och

$$x^3 - 48x - 72 = 0.$$

Han använde sig i beräkningen av Cardanos formel och fick följande två lösningar för ekvationerna, dessa är två av de sex lösningar vi får av de båda tredjegradsekvationerna:

$$x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{-1225}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{-1225}{27}}} = 4$$

$$x = \sqrt[3]{36 + \sqrt{-2800}} + \sqrt[3]{36 - \sqrt{-2800}} =- 6$$

Han konstaterar att problematiken hos Cardanos formel kvarstår vid beräkning av ekvationer med tre reella rötter. (Nahin, 1998, s.24-27)

Det är intressant att de komplexa talen bara dyker upp från dessa tredjegradsekvationer, trots att de inte har några komplexa rötter. Detta var alldeles för mycket för många matematiker att förstå, de menade helt enkelt att Cardanos formel inte håller i det här fallet. Leibniz fortsätter att undersöka problematiken och lyckas efter hårt arbete att lösa ett problem genom att reducera komplexa rötter till reella rötter. (McClenon, 1923, s.369-374).

Leibniz använde sig i detta problem av ett ekvationssystem:

(11)

$$\begin{aligned} &1.\ x^2 + y^2 = b \\ &2.\ xy = c, \end{aligned}$$

samt av villkoren $x^2 = \frac{c^2}{y^2}$ och $c > b$.

Genom att ersätta termen x^2 av bråket $\frac{c^2}{y^2}$ i första ekvationen i ekvationssystemet ovan (11) fick ekvationen i stället följande form:

$$\frac{c^2}{y^2} + y^2 = b$$

Vidare genomförde Leibniz en multiplikation med y^2, detta så att i första hand en eliminering av bråket $\frac{c^2}{y^2}$ sker,

$$y^4 - by^2 + c^2 = 0,$$

Fortsätter med kvadratkompletteringen:

$$(y^2 - \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c^2 = 0$$

Vilket gav Leibniz följande lösningar:

$$y_1^2 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$$
och
$$y_2^2 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$$

Leibniz få då dessa rötter:

$$y_{1,1} = \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}\ ,\ y_{1,2} =- \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$$
$$y_{2,1} = \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}\ ,\ y_{2,2} =- \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$$

Leibniz gör en insättning av $y_1^2 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ i ekvationssystemet (11) i villkoret 1. $x^2 + y^2 = b$ som ger följande resultat:

$$x^2 - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2} = 0$$

Han gick vidare med att lösa ekvationen för x, han fick x till:

$$x = \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$$

När Leibniz jämförde resultatet utifrån villkoret $c > b$, visade det sig att uttrycket $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ under rottecknet måste vara negativt. Vidare kunde Leibniz konstatera att uttryckets $x + y$ summa måste var lika med ett reellt tal. Låt d vara ett reellt tal:

$$d = x + y = \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} \tag{12}$$

Leibniz fortsätter med beräkningar. Här använder han sig av kvadreringsregler och villkoren i ekvationssystemet (11):

$$d^2 = x^2 + y^2 + 2xy = b + 2c$$

Där $x^2 + y^2 = b\ och\ xy = c$

Leibniz erhåller för d:

$$(13) \qquad d^2 = b + 2c \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{b + 2c}$$

Han fick nu ut två olika sätt som d kan uttryckas i (12) och (13), han satte dessa värden mot varandra:

$$\sqrt{b + 2c} = \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$$

Leibniz antog värdena 2 på variablerna b och c, han fick då:

$$(14) \qquad \sqrt{6} = \sqrt{1 - \sqrt{-3}} + \sqrt{1 + \sqrt{-3}}$$

Den sista identiteten (14) i beräkningen kommenterar Leibniz som att han var "den förste som reducerade irrationella rötter, imaginära till formen, till reella värden". Detta vet vi idag inte är sant, det var Bombelli som var före men ungefär 100 år. (McClenon, 1923, s.369-374)

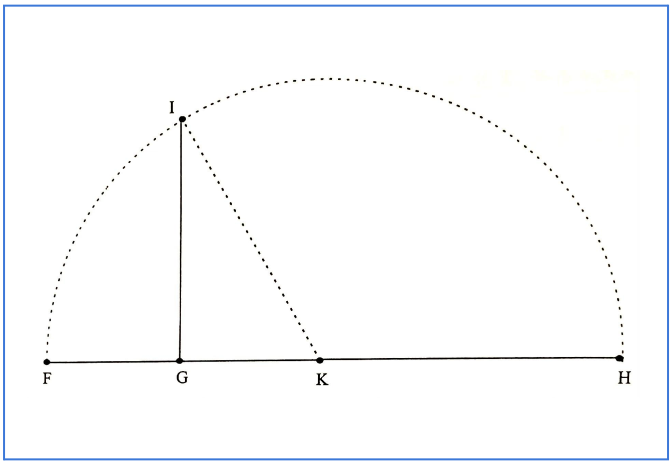
4.2. Den geometriska tolkningen av de komplexa talen

Efter Cardanos, Bombellis och Leibniz framsteg möter vi igen flera matematiker som försökte förstå sig på de komplexa talen, denna gång genom att finna en geometrisk tolkning. Denna del av historien började redan innan Leibniz kom att reducera de komplexa talen till reella värden. Mycket i historien sker parallellt och i olika delar av världen samtidigt, detta kommer vi framför allt att märka längre fram i mitt arbete.

4.2.1. René Descartes (1596-1650) - Gav det ett försök och myntade namnet imaginär

Den första personen som försökte ge en geometrisk tolkning till ett komplext tal, var en man med namn René Descartes (1596-1650). Han var en fransk vetenskapsman som i sitt verk *La Geometrie* från 1637 försökte ge en geometrisk tolkning av de komplexa talen men kom till slutsatsen att det var omöjligt att geometrisk tolka de komplexa talen. (Nahin, 1998, s.31-32)

(15)



FIGUR 4
(Nahin, 1998, s.32)

I verket *La Geometrie* introducerade Descartes följande problem som vi kan se i figur 4:

"Låt säga att GH är ett linjesegment och längden av FG är lika med 1 längdenhet. Skapa ett linjesegment med längden $\sqrt{GH}$."

Eftersom $FG = 1$ är givet så följer det att längden på FH är:

$$FH = FG + GH = 1 + GH.$$

Descartes hittade sedan mittpunkten K på sträckan FH, detta genom att använda en välkänd metod. Vidare utvecklade Descartes sträckan till en cirkel med mittpunkt i K och radien $KH = FK$. Till sist skapade han en linje till diametern FH som går genom punkt G och I. IK har samma värde som KH och FK, alla sträckor är radien.

$$FG + GH = 2IK$$

Kom ihåg att $FG = 1$:

$$1 + GH = 2IK$$

Ekvationen delas med 2:

(15) $$\frac{1}{2}(1 + GH) = IK$$

Vi tar tillbaka ekvationen:

$$FG + GK = IK$$

och löser ut GK:

(16) $GK = IK - FG = IK - 1 = \frac{1}{2}(1 + GH) - 1 = \frac{1}{2}(1 - GH)$

Nästa steg för Descartes var att tillämpa Pythagoras sats:

$$(IG)^2 + (GK)^2 = (IK)^2$$

Han ersätter *GK* med värdet $\frac{1}{2}(1 - GH)$ och *IK* med $\frac{1}{2}(1 + GH)$, detta enligt (15) och (16):

$$(IG)^2 + \frac{1}{4}(GH - 1)^2 = \frac{1}{4}(GH + 1)^2$$

En omplacering så att IG termen blir själv i vänsterledet:

$$(IG)^2 = \frac{1}{4}((1 + GH)^2 - (GH - 1)^2) = GH$$

Som i sin tur leder till att:

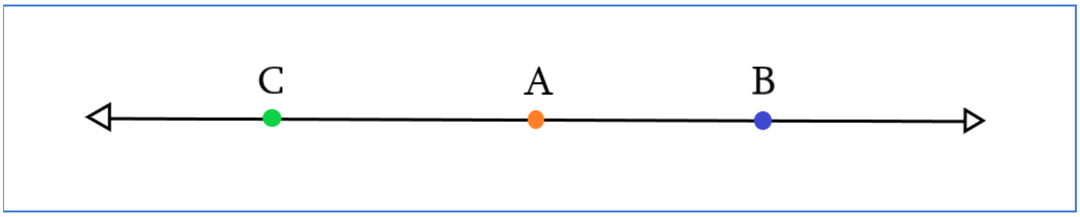
$$IG = \sqrt{GH}$$

Utifrån dessa beräkningar fick Descartes fram att $IG = \sqrt{GH}$. Nahin (1998) hävdar dock att denna geometriska presentation illustrerar kvadratroten av positiva tal. När Descartes insåg just detta, påstod han att göra en geometrisk konstruktion för de komplexa talen var omöjligt, han kallade dem då för "imaginära" och blir den första att mynta namnet "imaginära tal" för de komplexa talen. (Nahin, 1998, s.31-35).

4.2.2. John Wallis (1616-1703) - Kom nära den geometriska tolkningen

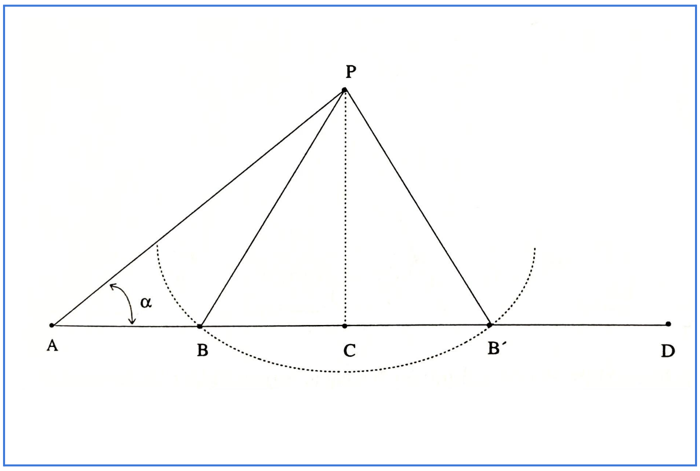
Efter Descartes konstaterande att det var omöjligt att geometriskt konstruera de komplexa talen försökte en annan matematiker att geometrisk konstruera de komplexa talen. John Wallis var en ung matematiker som levde under 1616-1703 och ansåg att det skulle gå att konstruera något som representerade de komplexa talen. Wallis kallades för ett underbarn som vid fjorton års ålder redan kunde läsa grekiska, franska, hebreiska och latin. Wallis började studera aritmetik som ett "behagligt nöje för ledig tid”. Han gjorde stora framsteg och vid åren 1647-1648 studerade han Cardanos-formel väldigt mycket så att han tillslut kunde den utantill. (Nahin, 1998, s.40-47)

Innan Wallis började sina analyser kring de komplexa talen funderade han på positiva tal, nollpunkten och negativa tals förhållanden till varandra, detta kan vi beskåda i figur 5 nedan. Negativa tal hade så länge betraktas med misstänksamhet av matematiker, men Wallis visade att det faktiskt fanns en helt klar fysisk tolkning av negativa tal. Wallis började sin tolkning av negativa tal med en rak linje med någon punk A markerad som nollpunkt. Vidare definierade Wallis att ett positivt tal B menades med avståndet mätt från nollpunkten mätt till höger. Wallis definierade vidare att ett negativt tal C menades med avståndet mätt från nollpunkten mätt till vänster. Wallis beskrev detta med sina egna ord som; “Och även om den (ett negativt tal) importerar en mängd mindre än ingenting: Ändå, när det kommer till en fysisk tillämpning, betecknar den som verklig en kvantitet som om tecknet vore +; men ska tolkas i motsatt mening.” (Nahin, 1998, s.40-47)



FIGUR 5

Med en korrekt fysisk tolkning av negativa tal gick Wallis vidare med en tolkning av komplexa tal. Jag ska nu visa en konstruktion av Wallis som han började med att röra sig i riktningen för att finna den geometriska konstruktionen av komplexa tal. Han började med att behandla ett klassiskt tvetydigt problem som syns i figur 6, den har generellt två möjligheter. (Nahin, 1998, s 40-47)



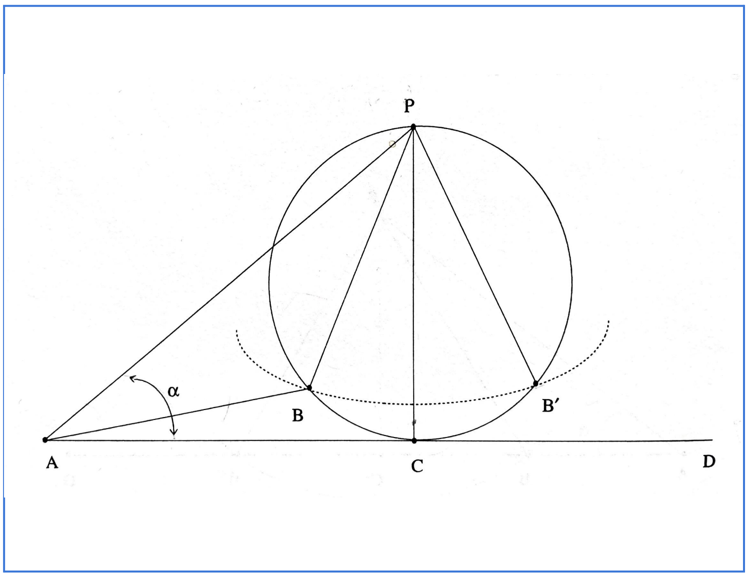
FIGUR 6
(Nahin, 1998, s.45)

Vi har i figuren två givna sidor AP och PB (=PB′), samt att vi har vinkeln $PAD = \alpha$. Det är tydligt att triangelns höjd är bestämd som PC och att så länge som PB = PB′ > PC finns det två lösningar, trianglarna APB och APB′. Men om PB = PB′ < PC så finns det ingen lösning om vi insisterar på att lösningarna är på basen AD (dvs att B och B′ är på AD). Detta går att se algebraiskt nedan:

$$AB = AC - BC = \sqrt{(AP)^2 - (PC)^2} - \sqrt{(PB)^2 - (PC)^2},$$
$$AB' = AC + CB' = \sqrt{(AP)^2 - (PC)^2} + \sqrt{(PB)^2 - (PC)^2}.$$

Dessa två ekvationer visar på att om $PC > PB$ (PB') så får vi ett komplext tal, vilket här Descartes skulle tolkat som att den geometriska konstruktionen av den önskade triangeln är omöjlig. Men Wallis stora insikt här var att även då $PC > PB$ (PB') bestämmer de givna uppgifterna två punkter B och B', dock om vi tillåter dem att vara någon annanstans än på basen AD.

Om vi tittar vidare på figur 7 kan vi se att Wallis konstruerade en cirkel med PC som diameter, Wallis konstruerade en båge med radie PB, så att den korsade cirkeln vid B och B'. Wallis fortsatte sedan med att påstå att trianglarna PAB och PAB' är lösningstrianglarna. Med detta menas att de bestäms av de givna sidorna AP och PB(=PB'), samt av vinkeln $PAD = \alpha$. Det som utgör en stor skillnad från figur 6 och figur 7 är att nu ligger inte B och B' på linjen AD.



FIGUR 7
(Nahin, 1998, s.46)

Med detta visade det sig att Wallis hade snubblat lite på idén om att den geometriska manifestationen av komplexa tal är i vertikal rörelse i planet, i någon mening. Men detta var inget uttalande Wallis själv gjorde. Viktigt att anmärka att det uttalande är en tillbakatittande kommentar som gjorts med tre århundradena eftertänksamhet. Det skulle dröja ytterligare ett sekel innan den nu "uppenbara" representationen av komplexa tal som punkter i planet, med de horisontella och vertikala riktningarna som de reella respektive imaginära riktningarna, skulle presenteras, men Wallis kom väldigt nära. (Nahin, 1998, s.40-47)

4.2.3. Leonhard Euler (1707-1783) - Införde beteckningen $\sqrt{-1}$

Vid årtalet 1770, ungefär 200 år efter att Bombelli släppte sitt verk *Algebra* släpptes ett nytt verk med samma namn; *Algebra.* Denna gång skriven av den schweiziske matematikern Leonhard Euler, där han blev den förste som införde beteckning $\sqrt{-1}$ för de komplexa talen. (Nahin,1998, s.31)

I Eulers verk *Algebra* presenterar han olika algebraiska operationer med positiva och negativa tal, han fortsätter också med att presentera konceptet med komplexa tal. I hans verk benämner Euler de komplexa talen för omöjliga eller imaginära. Detta då han menar att alla tal som är möjliga att föreställa är antingen mindre än 0, större än 0 eller 0 i sig och därför var det uppenbart för Euler att det inte gick att rangordna ett komplext tal som beskrevs av kvadratroten av ett negativt tal bland de möjliga talen. Av detta drog Euler slutsatsen att det är en omöjlig kvantitet. Euler fortsatte med att berätta att alla uttryck som är kvadratroten av ett negativt tal är omöjliga tal, detta då de företräder rötter till negativa kvantiteter men att vi trots detta ändå har tillräckligt stor uppfattning av de komplexa talen för att kunna använda dem i beräkningar. (Katz, 2008, s.671-672)

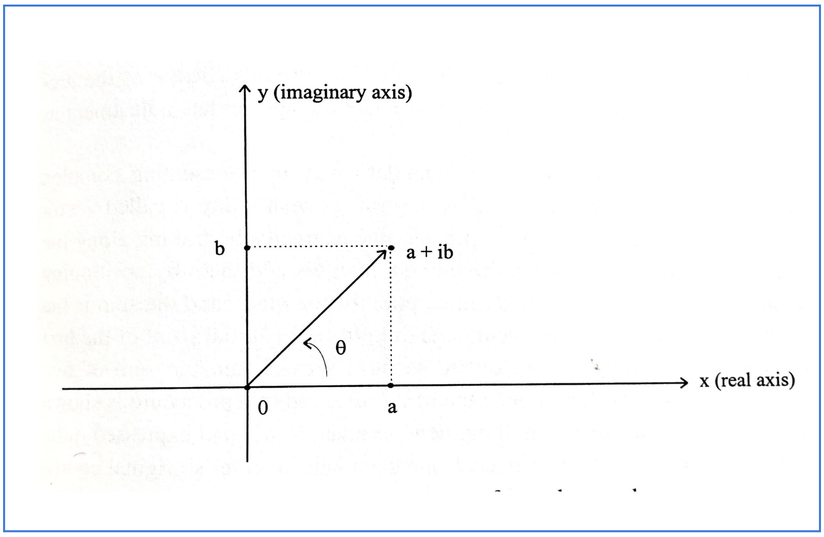
4.2.4. Caspar Wessel (1745-1818) - Fann den geometriska tolkningen

Ingen har vid denna tid lyckats göra en geometrisk tolkning av de komplexa talen, trots Descartes och Wallis försök. Flera matematiker genom historien har försökt finna en geometrisk tolkning till problemet men ingen har lyckats. Casper Wessel (1745-1818) var en norsk/dansk matematiker och han var även den första att lösa problematiken. Wessel var en lantmätare och ingen matematiker, därför blir det än mer anmärkningsvärt i historien då han var den som först lyckades lösa en geometrisk tolkning till det komplexa talet $\sqrt{-1}$. (Katz, 2008, s.795-796)

Året 1797 publicerade Wessel sitt verk *Om directionens analytiske betegnelse f*ör Kungliga Danska Vetenskapsakademien. Wessel fick stöttning av ordförande för vetenskap sektionen på akademin för att skriva sitt verk, men det intellektuella innehållet i arbetet var var helt från Wessel. Wessel försökte i sitt verk att representera de komplexa talen med hjälp av vektorer i planet, inte som punkter. (Nahin, 1998, s.48-60)

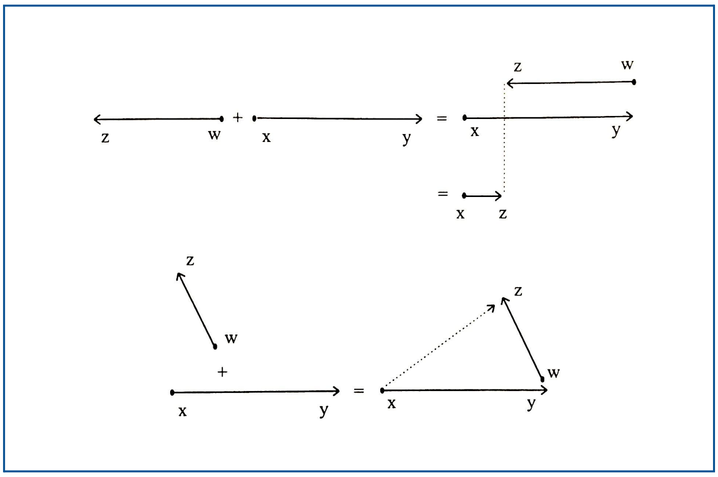
Wessel skrev sitt verk på danska vilket gav som följd att verket inte blev lästes av särskilt många andra än danskar. Det kom därför att ta ungefär 100 år innan verket blev upptäckt och Wessel blev utnämnd till att först finna en geometrisk tolkning av de komplexa talen. Detta var inte förens då Gauss använde sig av samma geometriska tolkning ungefär 100 år senare då han la fram sitt bevis för bland annat Algebrans fundamentalsats, då fick Wessels tolkning av de komplexa talen acceptans av den matematiska världen. (Katz, 2008, s.795-796)

Som vi kan beskåda i figur 8 ser vi enkelheten med Wessels geometriska tolkning av de komplexa talen, till skillnad från Wallis försök. För oss i nutid och även för Wessel är de komplexa talen antingen punkterna $a + ib$ i det komplexa talplanet kallad rektangulär form, eller så är det den riktade radievektorn från origo till punkten $a + ib$ kallad kartesisk form. Ett annat alternativt är polär form där de komplexa talen uttrycks med termer av radievektorns längd och polära vinkeln, som är vinkeln mätt moturs från x-axeln till radievektorn. (Nahin, 1998, s.48-60)



FIGUR 8
(Nahin, 1998, s.49)

Men hur kom Wessel fram till dessa tolkningar ovan för att beskriva komplexa tal? Wessel börjar sitt verk med att beskriva vektoraddition. Han förklarade det som så att om vi har två vektorer som båda ligger parallellt, så kan vi addera vektorerna med varandra genom att lägga den enas startpunkten vid den andras slutpunkt. Wessel inser att två icke parallella vektorer bör följa samma regel, det syns i figur 9. (Nahin, 1998, s.48-60)



FIGUR 9
(Nahin, 1998, s.51)

Detta är dock inget nytt i historien då Wallis hade en liknande idé, det som Wessel bidrog med var att se hur en multiplikation av vektorer såg ut. Han insåg att produkten av två tal har samma förhållande till varje faktor som den andra faktorn har till 1:

$$\frac{-6}{3} = -2 = -\frac{2}{1} \quad och \quad \frac{-6}{-2} = 3 = \frac{3}{1}$$

Så med förutsättningen att det finns ett enhets riktat linjesegment påstod Wessel att produkten av två vektorer bör ha två olika egenskaper. Den första egenskapen och direkt överensstämmande med reella tal, bör produktens längd vara produkten av längden på den individuella vektorn. Den andra egenskapen handlar om vektorns riktning. Här påstådde Wessel att vektorprodukten skulle skilja sig i riktning från varje vektor faktor med samma vinkel belopp som den andra vektorfaktorn skiljer sig i riktning jämfört med enhet riktade linjesegmentet. (Nahin, 1998, s.48-60)

Så då Wessel kom på denna tvåstegsoperation har multiplicering av två vektorer inneburit att multiplicera de två vektorernas längder där längden alltid bör anses vara ett positiv värde, samt att addera de två vektorernas vinklar. Denna tvåstegsoperation av vektorer bestämmer vektor produktens längd och riktningsvinkel, det är även denna definition av produkt som ger oss förklaringen till vad $\sqrt{-1}$ betyder geometriskt. (Nahin, 1998, s.48-60)

Vi antar att det finns en vektor som representerar $\sqrt{-1}$, vektorns längd är l och riktningsvinkel är θ:

$$\sqrt{-1} = l \angle \theta.$$

Om vi multiplicerar $\sqrt{-1}$ med sig själv har vi då:

$$-1 = l^2 \angle 2\theta,$$

eller då $-1 = 1 \angle 180°$, så måste:

$$l^2 \angle 2\theta = 1 \angle 180°.$$

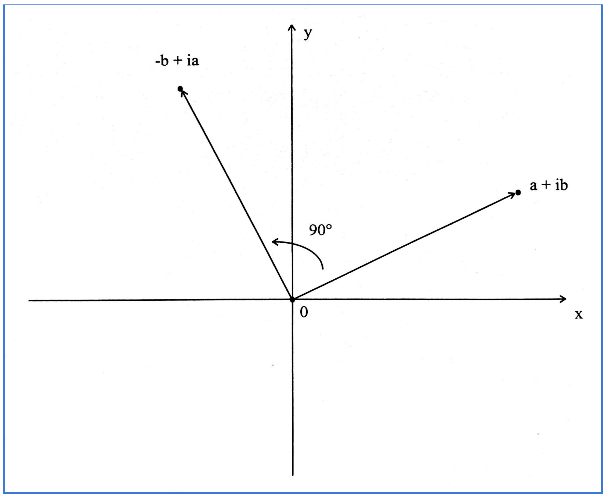
Vidare behöver:

$$l^2 = 1 \, och \, 2\theta = 180°$$
$$\Rightarrow$$
$$l = 1 \, och \, \theta = 90°.$$

Detta säger att $\sqrt{-1}$ är den vektor av längden ett som pekar rakt upp längst den vertikala axeln, eller:

$$i = \sqrt{-1} = 1 \angle 90°.$$

Wessel blir historiskt ihågkommen som den första att associera en axel vinkelrät mot den vertikala axeln som den imaginära axeln. Detta kan vi beskåda i figur 10 där ritas vektorn $a + ib$ in i det komplexa talplanet. En multiplicering med i ger en rotation med $90°$ moturs till vektorn $-b + ia$, $i(a + ib) =- b + ia$. Med grund i just denna egenskap benämns ofta $\sqrt{-1}$ till att vara rotations operatorn. (Nahin, 1998, s.48-60)



FIGUR 10
(Nahin, 1998, s.54)

4.3. Den moderna notationen och de komplexa talen som vi känner dem idag

Efter att Wessels arbete gick in i glömska i ungefär 100 år har flera andra matematiker lyckats med en geometrisk tolkning av de komplexa talen, hel oberoende av Wessels arbete. Vi har bland annat den schweiziske Jean-Robert Argand (1768-1822) som dog endast 4 år efter Wessel. Trots detta så gick båda deras arbeten in i glömska och Argand och Wessel hörde aldrig något om varandra, trots deras likartade teorier om komplexa plan och den imaginära axeln. (Nahin, 1998, s.73-74)

Ett ytterligare arbete upptäcktes året 1828, denna gång publicerat av pastor John Warren (1796-1852). En som uppmärksammade Warrens arbete var bland annat den irländske William Rowan Hamilton (1805-1865), som efter uppmaningar 1829 läste Warrens arbete. Efter Hamiltons läsning av Warrens text avvisade han Warrens geometriska tillvägagångssätt och Hamilton var säker på att han kunde göra det bättre själv. Hamiltons ansåg att det komplexa talet $\sqrt{-1}$ borde ha en ren algebraisk tolkning, inte en geometrisk. (Nahin, 1998, s.77-81)

4.3.1. William Rowan Hamilton (1805- 1865) - Fann den moderna definitionen

Efter att Hamilton läst Warrens text så tog han sitt missnöje i sina egna händer och år 1835 presenterade Hamilton för den irländska akademin sitt verk *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples: with a Preliminary Essay on Algebra as a Science of Pure Time* (Nahin, 1998, s.77-81). Vid denna tid betraktades ett komplext tal som $a + ib$ eller $a + b\sqrt{-1}$, som bestäms helt av de reella talen a och b. Vid denna typ av betraktning av komplexa tal föll det naturligt för Hamilton att representera de komplexa talen som de ordnade reella tal paret (a, b) (Eves, 1976, s.389-390). Han definierade också i hans verk addition och multiplikation av två tal par:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

Hamilton visste vidare att det var såhär de komplexa talen fungerade. Han skrev då paret (a, b) i stället för $a + b\sqrt{-1}$. Hamilton valde dock att skriva på detta sätt då han ansåg att det såg bättre ut, detta då han undvek talet $\sqrt{-1}$ i sin notation. Fortsättningsvis definierade Hamilton de reella talet a som paret $(a, 0)$, detta kan vi tänka som ett komplext tal som $a + 0\sqrt{-1}$. Hamilton fick då från definition av multiplikation ovan:

$$a(c, d) = (a, 0)(c, d) = (ac, ad)$$

om vi sätter $a = -1$ ger det oss:

(17) $$-1(c,d) = (-1,0)(c,d) = (-c,-d) = -(c,d)$$

Om vi nu tittar på definitionen av multiplikation och multiplikation av de ordnade talparet $(0,b)$ som beskriver det komplexa talet $0 + b\sqrt{-1}$:

$$b(c,d) = (0,b)(c,d) = (-bd, bc)$$

Om vi sätter $b = 1$ får vi med definitionen av multiplikation:

(18) $$(0,1)^2(c,d) = (0,1)(0,1)(c,d) = (0,1)(-d,c) = (-c,-d) = -(c,d)$$

Vi kan nu konstatera från (17) och (18) att:

$$(0,1)^2(c,d) = -1(c,d) \quad \Rightarrow \quad (0,1)^2 = -1.$$

Med detta följer att:

$$(0,1) = \sqrt{-1}.$$

Med detta blir Hamilton den första att finna det moderna begreppet av komplexa tal. ((Nahin, 1998, s.77-81) och (Eves, 1976, s.389-390))

4.3.2. Karl Friedrich Gauss (1777-1855) - Bestämde begreppet komplexa tal

Tiden då Hamilton publicerat sina ideer om de komplexa talen hade redan en annan matematikern Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicerat sina egna geometriska ideer om de komplexa talen, detta vid året 1831 i Gauss verk *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secund*. Detta var flera år innan Wessels verk kom att återuppväckas vilket gör Gauss idéer om de komplexa talen helt oberoende av Wessels arbete. Precis som många av Gauss verk hade han redan haft sina idéer om de komplexa talen vid 1796 innan Wessel, men inte valt att publicera dem förens han kände att allt var helt korrekt. (Nahin, 1998, s.81-83)

Gauss uppfattning av de komplexa talen kom att utvecklas över tid. Han började från att anse att de komplexa talen kanske inte är fullständiga, vidare insåg han att så inte var fallet. Begreppet "komplexa tal" var något som Gauss kom på och har gett följd att det komplexa talplanet kallas ibland för "Gaussplanet", samt att de komplexa talen $a + ib$ med a och b som heltal kallas "Gaussiska heltal". (Nahin, 1998, s.81-83)

I Gauss verk från 1831 fokuserade han på att beredda talteorin till mängden av komplexa tal $a + ib$. Gauss skapade en geometrisk tolkning av de komplexa talen, samt att han illustrerade de komplexa talen i det vi nu kallar komplexa talplanet. Värdet på de imaginära talen representerades i y-axeln medan värdet på de reella talen representerades i x-axeln. Enligt Gauss kunde ett komplext tal identifieras, i det komplexa talplanet, som en punkt. (Nahin, 1998, s.81-83)

Gauss använde sig även också av de komplexa talen när han publicerade sina bevis för algebrans fundamentalsats. Gauss blev så fascinerad av algebrans fundamentalsats - att varje polynom med reella koefficienter har en reell eller komplex rot - vilket resulterade i att Gauss publicerade hela fyra olika bevis för satsen. Som historien berättat tidigare så blev Wessels geometriska tolkning av de komplexa talen accepterat då Gauss använde sig av samma tolkning, Gauss använde sig tydligast av den geometriska tolkningen av de komplexa talen i det sista bevis för Algebrans fundamentalsats. I det sista beviset antog Gauss att alla var så bekväma med den geometriska tolkningen av de komplexa talen och att han i beviset till och med tillät att polynomets koefficienter kunde vara komplexa. (Katz, 2008, s.796-797)

Det Gauss kom fram till i slutet var att de komplexa talen har studerats från fel synvinkel och därför blivit dolts i mystik och mörker. Att det är till stor del den opassande terminologin som borde bli beskylld. Om vi hade kallat $+ 1, - 1 \; och \sqrt{- 1}$ för namn likt direkt, invers och lateral i stället för positiv, negativ och imaginär, skulle det inte funnits lika stor plats för sådan oklarhet som existerat. Efter Gauss så accepterades $\sqrt{- 1}$ som en berättigad beteckning och efter Gauss doktorsexamen fick man höra i gratulationstalet "Du har gjort det omöjliga möjligt.". (Nahin, 1998, s.81-83)

Referenser:

Alekseev, V.B., Arnold, V.I. & Khovanskii, A. (2004). *Abel's therorem in problems and solutions based on the lectures of professor V.I* Boston: Kluwer Academic Publisher

Boyer, C., Merzbach, U. (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Burton, D.M. (1985). *The history of mathematics: an introduction*. Boston: Allyn and Bacon.

Eves, H.W. (1976). *An introduction to the history of mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Hodgkin, L. (2005). *A history of mathematics: from Mesopotamia to modernity.* Oxford University Press on Demand.

Katz, V.J. (2008). *History of Mathematics: an introduction.* Harlow, Essex: Pearson Education.

McClenon, R.B. (1923). Contribution of Leibniz to the History of Complex Numbers; The American Mathematical Monthly; Vol 30, No 7.

Nahin, Paul J. (1998) *An imaginary tale: the story of [the square root of minus one]*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Rothman, T. (2013). *Cardano v Tartaglia: The Great Feud Goes Supernatural.* arXiv preprint arXiv:1308.2181.

Stillwell, J. (2001). *Mathematics and its history*. New york: Springer.

Wikström, F. (2014). *Funktionsteori.* Lund: studentlitteratur.