SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Fyrfärgssatsen och en introduktion till grafteori

av

Simone Ohlsson

2022 - No K24

Fyrfärgssatsen och en introduktion till grafteori

Simone Ohlsson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jonathan Rohleder

2022

Fyrfärgssatsen och en introduktion till grafteori

Simone Ohlsson

Sammanfattning

Målet med det här arbetet är att ge läsaren en introduktion till grafteori och grundläggande grafteoretiska begrepp där det huvudsakliga fokuset riktas mot färgläggning av grafer. Fyrfärgssatsen säger att en planär graf alltid kan färgläggas med fyra färger eller färre, den ursprungliga formuleringen handlade dock om färgläggning av kartor snarare en grafer. Beviset av fyrfägssatsen är omfattande och ryms inte inom ramen för denna uppsats. Istället återges de huvudsakliga idéerna bakom beviset, där målet är att visa att det inte kan finnas något minimalt motexempel genom att hitta en oundviklig mängd av reducibla konfigurationer. En reducibel konfiguration kan inte ingå i ett minimalt motexempel och åtminstone en konfiguration från varje oundviklig mängd måste ingå i varje planär graf. Av detta följer att om en oundviklig mängd endast består av reducibla konfigurationer så kan det inte finnas något minimalt motexempel och satsen är bevisad. Även färgläggning av grafer med två, tre och fem färger behandlas. Färgläggning med två och tre färger är möjlig för grafer med vissa specifika egenskaper medan färgläggning med fem färger gäller för en godtycklig planär graf. Avslutningsvis undersöks olika färgläggningsalgoritmer och vi kan konstatera att en och samma graf kan få olika färgläggningar beroende på vald algoritm.

Innehållsförteckning

1 Introduktion

Hur många färger behövs för att en karta ska kunna färgläggas på ett sådant sätt att intilliggande länder har olika färger? Frågan formulerades för första gången 1852 av Francis Guthrie som påstod att fyra färger är tillräckligt. Problemet beskrivs som ett av de mest kända problemen inom den del av matematiken som kallas grafteori, och skulle ta mer än hundra år att bevisa. Flera försök till bevis gjordes genom åren innan ett fullständigt bevis gjordes 1976 av Kenneth Appel, Wolfgang Haken och John A. Koch. Beviset accepterades dock inte direkt på grund av att de mycket omfattande beräkningarna hade utförts av en dator. Idag har beviset blivit mer allmänt accepterat men man har fortfarande inte kunnat bevisa satsen utan hjälp av dator. Problemet har blivit känt som *fyrfärgssatsen* [5, 18].

Grafteori är den del inom matematiken som handlar om grafer och deras egenskaper. Det är en relativt ung gren inom matematiken men har under de senaste 100 åren genomgått en stor utveckling och spelar idag en stor roll inom olika delar i samhället [13]. Grafteori kan exempelvis användas för att lösa olika logistiska problem som att planera vägnät, konstruera scheman för exempelvis universitet eller fotbollsligor och optimera bordsplacering.

För att förklara fyrfärgssatsen behöver vi översätta problemet till grafteoretiska termer. För att kunna se till att grannländer får olika färg behöver vi veta vilka länder som gränsar till varandra, det är däremot inte intressant vilken form eller storlekt varje land har. Det gör att vi kan förenkla kartan till en graf där varje hörn motsvarar ett land och varje kant talar om vilka länder som gränsar till varandra [5]. Istället för att färglägga områden kan vi nu färglägga den uppkomna grafens hörn, se Figur 1.

Figur 1: Karta över Polen, Ukraina, Tjeckien, Slovakien, Österrike och Ungern med motsvarande planär graf ritad ovanpå som beskriver hur länderna gränsar till varandra [5]

Uppsatsen inleds med en introduktion till grafteori där relevanta begrepp definieras och exemplifieras. Därefter följer formulering och bevis av satser som beskriver färgläggning med två, tre och fem färger. Fyrfärgssatsen formuleras och idén bakom beviset beskrivs även om satsen inte bevisas i sin helhet. Avslutningsvis tittar vi på olika algoritmer som kan användas för att färglägga grafer.

2 Introduktion till grafteori

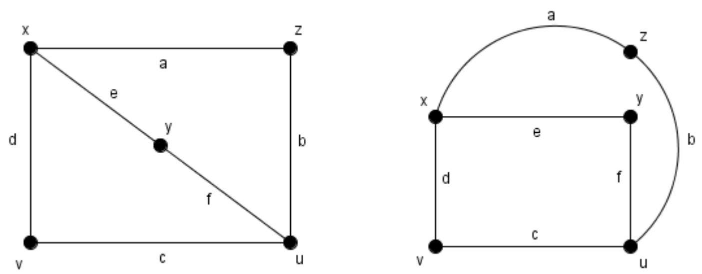
I detta avsnitt kommer viktiga grafteoretiska begrepp att förklaras och definieras. De utvalda begreppen anses ha särskild relevans när det kommer till färgläggning av grafer. Betydelsen av många grafteoretiska begrepp är dock inte standardiserad vilket innebär att ett och samma begrepp kan få olika innebörd beroende på författare.

2.1 Definitioner och exempel

Definition 2.1.1. En graf G består av en mängd *hörn* $V(G)$ och en mängd *kanter* $E(G)$ sådana att $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V \text{ och } x \neq y\}$.

En graf kan ha en ändlig eller oändlig mängd hörn respektive kanter. Här kommer samtliga grafer att vara ändliga.

Varje element i mängden E består av två element från mängden V, varje kant kan därför uttryckas som ett par unika hörn. En geometrisk representation av en graf består av punkter och sträckor där punkterna representerar hörnen och sträckorna beskriver kanterna. En grafs utseende är inte entydigt bestämt, i Figur 2 är graf G och H samma trots att graferna har olika form [6].

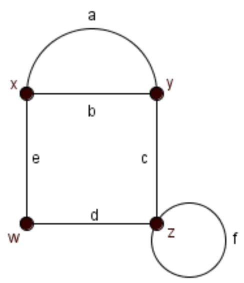


Graf G Graf H

Figur 2: Graf G och graf H består båda av hörnmängden $V = \{u, v, x, y, z\}$ och kantmängden $E = \{\{x, z\}, \{z, u\}, \{u, v\}, \{v, x\}, \{x, y\}, \{y, u\}\}$

Definition 2.1.2. Två hörn x och y kallas *intilliggande* om det finns en kant e sådan att $e = \{x, y\}$. På samma sätt är två kanter e och d *intilliggande* om det finns ett hörn x sådant att $e = \{x, y\}$ och $d = \{x, z\}$. Om $y = z$ är kanterna *parallella*. Dessutom gäller att om det finns en kant e sådan att $e = \{x, x\}$ så är e en *loop*.

De grafer som kommer att studeras här kommer dock varken att ha parallella kanter eller loopar. Definitionerna är formulerade utifrån dessa förutsättningar.



Figur 3: Hörnen x och y är intilliggande. Kanterna a och b är parallella. Kanten f bildar en loop.

Definition 2.1.3. En *delgraf* G' till en graf G består av hörnmängden $V(G') \subseteq V(G)$ och kantmängden $E(G') \subseteq E(G)$. Om en kant e ingår i delgrafen måste även de två hörn som definierar kanten ingå i delgrafen.

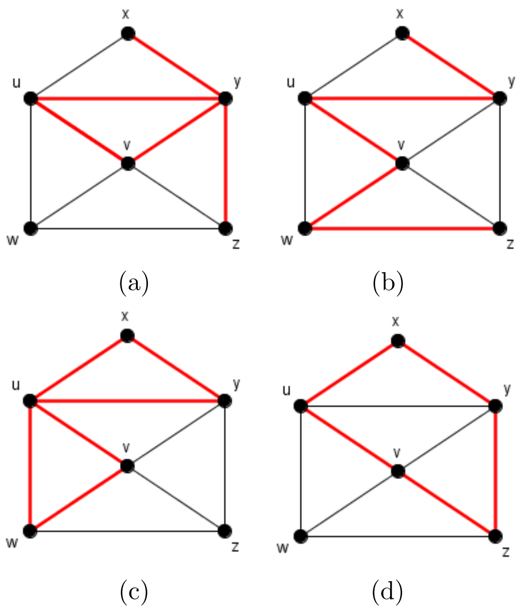
Om en grafs hörn kan delas upp i två disjunkta delmängder sådana att varje kant i grafen består av ett hörn från varje delmängd kallas grafen *bipartit*. Hörn som ingår i samma delmängd får alltså inte vara intilliggande [8].

Definition 2.1.4. Låt G vara en graf med hörnmängden V och kantmängden E. Om det går att bilda en partition av V som består av två delmängder V_1 och V_2 sådana att $E = \{\{v, u\} \mid v \in V_1 \text{ och } u \in V_2\}$ och $V_1 \cup V_2 = V$ och $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ kallas grafen *bipartit*.

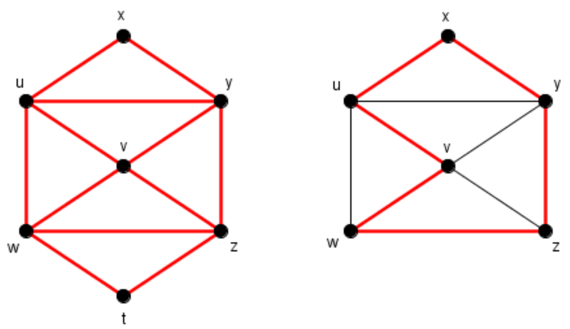
I en graf är det möjligt att göra olika typer av så kallade *vandringar*, vilket kan ses som en förflyttning i den grafiska representationen av grafen, där kanter och hörn växelvis passeras. Det är exempelvis väg, stig, krets och cykel. För vägar och kretsar gäller att varje ingående kant får förekomma endast en gång. För stigar och cykler gäller att varken kanter eller hörn får upprepas. Kretsar och cykler är *slutna* vilket innebär att den har samma start- och slutpunkt [18].

Definition 2.1.5. Låt grafen G bestå av kantmängden $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_q\}$ och hörnmängden $V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\}$. Låt G' vara en delgraf till G med hörnmängden V' och kantmängden E' sådan att $E' \subseteq E$ och $V' \subseteq V$, dessutom $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3, ..., e'_k\}$ och $V' = \{v'_1, v'_2, v'_3, ..., v'_m\}$. Då gäller att grafen G' är en *stig* om $E' = \{\{v'_j, v'_{j+1}\} \mid 1 \leq j < m\}$. Grafen G' är en *cykel* om det dessutom gäller att $\{v'_1, v'_j\} \in E'$. Grafen G' är sluten om $v'_1 = v'_m$. *Längden* på en stig eller cykel definieras av antalet kanter som ingår. För en cykel ges kan längden även ges av antalet hörn som ingår i cykeln då antalet hörn och kanter är lika. En *väg* definieras som en vandring där alla ingående kanter är distinkta, däremot kan ett hörn förekomma flera gånger. Om vägen är sluten, det vill säga börjar och slutar i samma punkt, är vandringen en *krets* [5, 8].

Vad gäller slutna vandringar så finns även vissa kretsar och cykler som har fått speciella namn. Ett exempel är *Eulerkretsar* som är en krets där samtliga kanter i grafen passeras exakt en gång. För att en graf ska kunna ha en Eulerkrets krävs att samtliga hörn har jämn grad [18]. En annan viktig sluten vandring är *Hamiltoncykler* som är en cykel där varje hörn som ingår i grafen passeras exakt en gång. Vad gäller Hamiltoncykler finns ingen specifik egenskap som en graf måste ha för att en Hamiltoncykel ska finnas [18].



Figur 4: (a) är en väg, (b) är en stig, (c) är en krets och (d) är en cykel.



(a) (b)

Figur 5: (a) beskriver Eulerkretsen $\{u, x, y, z, t, w, u, y, v, w, z, v, u\}$ och (b) beskriver Hamiltoncykeln $\{x, y, z, w, v, u, x\}$. Det är inte möjligt att hitta en Eulerkrets i (b).

Definition 2.1.6. Två hörn $x, y \in V$ är *sammanhängande* om det går att finna en stig mellan x och y. Hela grafen är sammanhängande om det till *varje* par hörn $x, y \in V$ går att finna en stig mellan x och y.

Samtliga grafer som kommer att behandlas är sammanhängande enligt Definition 2.1.6.

Definition 2.1.7. Låt G vara en graf utan loopar, och $V(G)$ och $E(G)$ dess hörnmängd respektive kantmängd. Låt $x \in V(G)$ vara ett hörn. Antalet intilliggande hörn till x, alltså antalet $y \in V(G)$ sådana att $e = \{x, y\}$ där $e \in E(G)$, kallas för hörnets *grad*. Graden för ett hörn x betecknas $d(x)$ medan grafens maximala grad betecknas $\Delta(G)$, det vill säga den högsta grad något hörn i grafen har [5].

Definition 2.1.8. En *planär* graf är en tvådimensionell graf som kan ritas i planet på ett sådant sätt att inga kanter korsar varandra, de möts endast i gemensamma hörn [6].

En planär graf delar in planet i ett ändligt antal *områden* som begränsas av grafens kanter. Observera att det även bildas ett yttre område som är oändligt stort [5, 13]. Graden av ett område definieras som antalet kanter som begränsar området. En kant som har samma område på var sida räknas två gånger. Graden av ett område f betecknas $d(f)$ [6].

Innan vi formulerar nästa definition behöver vi införa ett antal beteckningar. Vi låter p, q och r representera antalet hörn, kanter och områden i en graf. I de fall då flera grafer behandlas samtidigt specificeras beteckningarna ytterligare, exempelvis används beteckningarna $p(G)$ och $p(G^*)$ för att skilja på antalet hörn i grafen G respektive G^*.

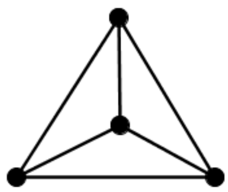
Definition 2.1.9. Om G är en graf kan den duala grafen G^* definieras på följande sätt. Till varje område f i G finns ett motsvarande hörn v^* i G^*, och till varje kant e i G finns en motsvarande kant e^* i G^*. Två hörn v^* och u^* i G^* är intilliggande och sammanlänkade av kanten e^* om och endast om områdena f och g i G separeras av kanten e.

Vidare följer att antalet hörn $p(G^*)$ i G^* är lika med antalet områden $r(G)$ i G. Antalet kanter $q(G^*)$ i G^* är lika med antalet kanter $q(G)$ i G. Dessutom gäller att graden av hörn v^* i G^* är lika med graden av motsvarande område f i G.

$$p(G^*) = r(G),\ q(G^*) = q(G) \text{ och } d_{G^*}(v^*) = d_G(f).$$

Definition 2.1.10. En graf är *triangulär* om samtliga områden, inklusive grafens yttre område, begränsas av tre kanter. För en *kubisk* graf gäller att varje hörn är av grad 3.

Det gäller att en graf är triangulär om och endast om dess duala graf är kubisk.



Figur 6: Grafen är triangulär.

3 Färgläggningar

För att lösa olika typer av grafteoretiska problem kan man använda sig av *färgläggning*. En graf kan färgläggas på olika sätt, man kan färglägga hörnen, kanterna eller områdena. För att en färgläggning ska vara giltig krävs att intilliggande hörn (eller kanter eller områden) inte får samma färg. I den här uppsatsen kommer endast färgläggning av hörn att behandlas.

Vad krävs för att en graf ska kunna färgläggas med två, tre respektive fem färger? Att fem färger är tillräckligt för att färglägga en planär graf är en svagare variant av fyrfärgssatsen, men med ett betydligt enklare bevis. För att två eller tre färger ska vara tillräckligt krävs att grafen som ska färgläggas har några specifika egenskaper utöver att vara planär.

3.1 Två färger

För att det ska vara tillräckligt med endast två färger för att färglägga en planär graf krävs att grafen är bipartit. Om grafen är bipartit kan dess hörn delas upp i två disjunkta delmängder där varje kant har ett hörn i varje delmängd. Genom att tilldela en färg till alla hörn som ingår i samma delmängd kommer alla hörn att färgläggas med hjälp av endast två färger och varje hörn kommer vara intilliggande med hörn av annan färg eftersom intilliggande hörn ingår i olika delmängder enligt definitionen av bipartita grafer [5].

Med hjälp av Sats 3.1.1 [5, 8] kan vi avgöra om en graf är bipartit eller inte.

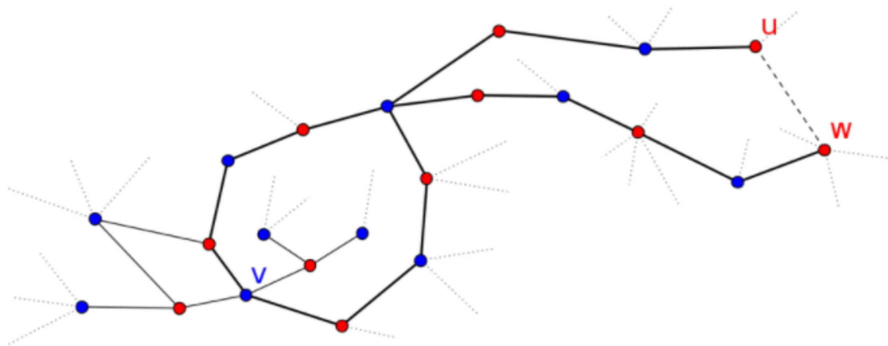
Sats 3.1.1. *En graf är bipartit om och endast om den inte innehåller någon cykel av udda längd.*

En stig eller cykel är av udda längd om det ingår ett udda antal kanter (Definition 2.1.5). Beviset delas upp i två delar. Först bevisas att en graf är bipartit om den inte innehåller en udda cykel, därefter bevisas det omvända det vill säga att en graf innehåller inte en udda cykel om den är bipartit.

Bevis. Utgå från en graf och anta att den inte har någon cykel av udda längd. Låt ett godtyckligt hörn v färgläggas med någon färg, exempelvis blå. Därefter färgläggs de hörn som är intilliggande till v med en annan färg, exempelvis röd. De hörn som nu är intilliggande till de hörn som färgats röda får färgen blå. Det är endast de hörn som inte redan fått en färg som färgläggs. Detta upprepas sedan till dess att alla intilliggande hörn har blivit färglagda. Vi behöver nu bevisa att (1) inga intilliggande hörn får samma färg och att (2) samtliga hörn i grafen blir färglagda.

(1): Låt u och w vara godtyckliga hörn i grafen med samma färg. Eftersom grafen är sammanhängande finns det en stig mellan hörnen v och u. På samma sätt finns även en stig mellan v och w. Eftersom v är gemensam för de två stigarna finns en stig mellan u och w. Stigarna mellan v och u samt mellan v och w kommer båda att ha antingen udda eller jämn längd eftersom u och w har samma färg. Det innebär att längden på stigen mellan u och w är jämn. Om hörnen u och w är intilliggande innebär det att det finns en kant $\{u, w\}$ i grafen, men den kanten skulle göra att det bildas en cykel av udda längd och någon sådan finns inte i grafen enligt det inledande antagandet. Alltså kan inte två intilliggande hörn ha samma färg.

(2): Låt z vara ett godtyckligt hörn i grafen. Eftersom grafen är sammanhängande finns en stig från v till z. Alla hörn som ingår i denna stig kommer att färgläggas med alternerande färger enligt ovan. Alltså kommer samtliga hörn i grafen att färgläggas.



Figur 7: Illustration av bevis av Sats 4.1.1 [4]

.

Låt oss nu bevisa det omvända, det vill säga att en graf inte innehåller en udda cykel om den är bipartit.

Låt G vara en bipartit graf och låt $C = (V, E)$ vara en cykel i grafen där $V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\}$ och $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{v_1, v_p\}$. Eftersom grafen är bipartit kan hörnen färgläggas med två färger på ett sådant sätt att intilliggande hörn får olika färg. Låt v_1 vara blå, då kommer v_2 att få den andra färgen, exempelvis röd. v_3 blir sedan blå och så vidare. Eftersom cykelns hörn har alternerande färgläggning kommer alla hörn v_i där i är udda att vara blåa eftersom v_1 är blå och följaktligen blir alla hörn v_i där i är jämnt röda. Det sista hörnet i cykeln, v_n, kommer att bli blått om n är udda och rött om n är jämnt. Men eftersom v_1 och v_n är intilliggande kan inte v_n vara blå eftersom grafen är bipartit enligt det inledande antagandet. n måste alltså vara jämnt vilket innebär att inga udda cykler kan finnas. $\square$

3.2 Tre färger

För att en graf ska kunna färgläggas med endast tre färger krävs att grafen har vissa specifika egenskaper. Det finns flera olika satser som beskriver färgläggning med tre färger. En sats [7] kommer här att bevisas medan en annan [12] endast formuleras och exemplifieras.

Innan vi formulerar och bevisar satserna för färgläggning med tre färger behöver vi definiera några nya begrepp samt formulera och bevisa ett antal hjälpsatser och lemman [5, 7, 8].

Lemma 3.2.1. *För en graf G med hörnmängden $V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\}$ gäller att summan av graden av samtliga hörn är lika med dubbla antalet kanter q i G:*

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q.$$

Dessutom gäller att för en planär graf G med områdesmängden $F = \{f_1, f_2, f_3, ..., f_r\}$ är även summan av graden av samtliga områden är lika med dubbla antalet kanter q i G:

$$\sum_{i=1}^{r} d(f_i) = 2q$$

Bevis. Formeln för summan av samtliga hörns respektive områdens grad bevisas var för sig.

(1) Varje kant består av två hörn. Låt oss halvera varje kant, vi kommer då att ha totalt $2q$ halvkanter där varje halvkant angränsar till endast ett hörn. Summan av hörnens grad kommer därför att vara lika med antalet halvkanter, alltså $2q$.

(2) Låt G vara en planär graf och G^* den duala grafen till G. Varje område f i G motsvaras av ett hörn v^* i G^*. Enligt Definition 2.1.9 gäller att $r(G) = p(G^*)$ där $r(G)$ är antalet områden i G och $p(G^*)$ är antalet hörn i G^*, samt att antalet kanter q i G och G^* är lika, $q(G) = q(G^*)$. Vi får då från (1) och Definition 2.1.9 att

$$\sum_{i=1}^{r(G)} d(f_i) = \sum_{i=1}^{p(G^*)} d(v_i^*) = 2q(G^*) = 2q(G) = 2q$$

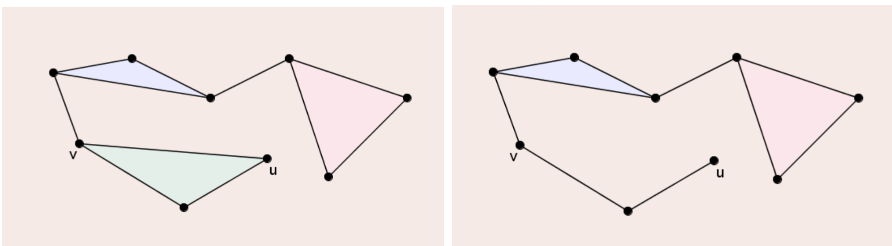
□

Euler formulerade ett samband mellan antalet hörn, kanter och områden i en graf. Satsen kallas Eulers formel och bevisas genom induktion.

Sats 3.2.2. (Eulers formel) *Låt G vara en sammanhängande planär graf. Om grafen G har p hörn, q kanter och r områden så gäller: $p - q + r = 2$.*

Bevis. Basfall: Låt grafen helt sakna kanter så att $q = 0$. Eftersom grafen är sammanhängande innebär det att grafen består av endast ett hörn, $p = 1$, och ett område, $r = 1$. Vi får $p - q + r = 1 - 0 + 1 = 2$ vilket uppfyller Eulers formel. Induktionsantagande: Antag att satsen $p - q + r = 2$ stämmer för alla sammanhängande planära grafer med k kanter eller färre. Visa att satsen även stämmer om antalet kanter är $k + 1$, alltså för en godtycklig sammanhängande planär graf G med p hörn och $q = k+1$ kanter. Låt kanten $\{v, u\}$ vara en kant i grafen G. Genom att ta bort kanten $\{v, u\}$ får vi en ny graf som vi kallar H. Den nya grafen H har p hörn och $q-1 = k$ kanter. H har en kant färre än G eftersom $\{v, u\}$ inte ingår i H. Vi behöver titta på två fall: (1) H är sammanhängande (se Figur 8) och (2) H är inte sammanhängande (se Figur 9).

(1): Om H är sammanhängande innebär det att det finns en stig mellan hörnen v och u. Det innebär också att områdena på vardera sida om $\{v, u\}$ i G måste vara olika områden. Det gör att antalet områden i H är $r - 1$ eftersom de två områdena på vardera sida om $\{v, u\}$ slås ihop till ett område när den kanten tas bort. H är alltså en graf med p hörn, $q - 1 = k$ kanter och $r - 1$ områden. Vi får $p - (q - 1) + (r - 1) = 2$ enligt induktionsantagandet eftersom antalet kanter är lika med k. Förenkling av vänsterledet ger $2 = p - (q - 1) + (r - 1) = p - q + r$.



Graf G Graf H

Figur 8: Fall 1: Den nya grafen H är sammanhängande. När kanten $\{v, u\}$ tas bort blir antalet kanter och antalet områden ett mindre. Antalet hörn är oförändrat.

(2): Vårt induktionsantagande gäller för sammanhängande grafer, grafen H måste därför delas upp i två delgrafer som var och en är sammanhängande. Låt oss kalla delgraferna H_v och H_u där $v \in H_v$ och $u \in H_u$. p_v, q_v och r_v är antalet hörn, kanter och områden i H_v medan p_u, q_u och r_u är motsvarande i

H_u. Vi får då att följande gäller för G med p hörn, q kanter och r områden:

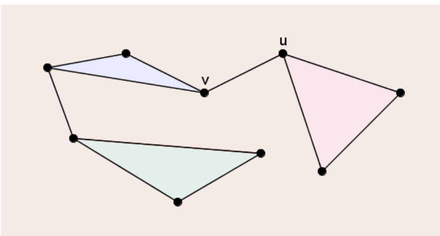
$$\begin{aligned}
p &= p_v + p_u, \\
q &= q_v + q_u + 1, \\
r &= r_v + r_u - 1.
\end{aligned}$$

Antalet hörn p i G kommer att vara summan av antalet hörn i delgraferna H_v och H_u. Antalet kanter q i G kommer att vara summan av antalet kanter i H_v och H_u plus ett, eftersom en kant togs bort från G när H_v och H_u bildades. Antalet områden r i G kommer att vara summan av antalet områden i H_v och H_u minus ett, eftersom det oändliga yttre området tillhör båda delgrafernas områden och därmed räknas två gånger.

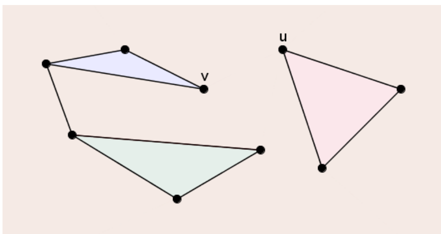
Både H_v och H_u har k eller färre kanter eftersom G har $q = k + 1$ kanter. Induktionsantagandet gäller därmed och ger $p_v - q_v + r_v = 2$ och $p_u - q_u + r_u = 2$. Vi får att:

$$\begin{aligned}
p - q + r &= (p_v + p_u) - (q_v + q_u + 1) + (r_v + r_u - 1) \\
&= p_v + p_u - q_v - q_u - 1 + r_v + r_u - 1 \\
&= (p_v - q_v + r_v) + (p_u - q_u + r_u) - 2 \\
&= 2 + 2 - 2 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Slutsats: Enligt induktionsprincipen gäller Eulers formel för alla sammanhängande planära grafer med q kanter där $q \in \mathbb{N}$.



Graf G



Graf H

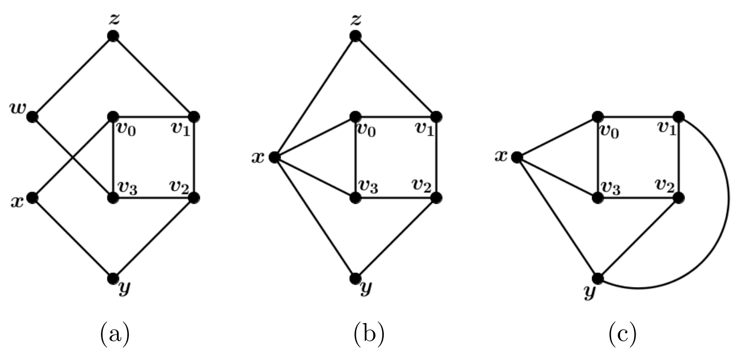
Figur 9: Fall 2: Den nya grafen H är inte sammanhängande. När kanten $\{v, u\}$ tas bort minskar antalet kanter med ett medan antalet hörn och områden är oförändrat.

$\square$

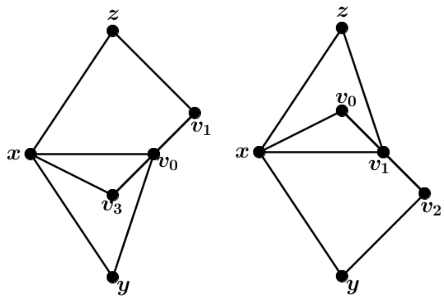
Följande lemma kan användas för att visa att en graf med vissa specifika egenskaper saknar trianglar. Detta är nödvändigt för att bevisa Sats 3.2.7 som beskriver färgläggning med tre färger.

Lemma 3.2.3. *Låt G vara en planär graf med ett område f av grad 4, där hörnen v_0, v_1, v_2 och v_3 definierar området. Vidare gäller att kanterna $\{v_0, v_2\}$, $\{v_1, v_3\} \notin E(G)$, där $E(G)$ är grafens kantmängd. Genom att identifiera hörnen v_i och v_{i+2} där $i \in \{0, 1\}$ bildas en ny graf G_i. Om antalet trianglar ökar i både G_0 och G_1 gäller att det i G finns en triangel $v_i v_{i+1} x$ för något hörn x i G och något $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Index i är modulo 4.*

Bevis. Utgå från att G är en planär graf, f är ett område av grad 4 vars hörn uppfyller de egenskaper som anges i lemmat, samt att graferna G_0 och G_1 bildas genom att identifiera hörnen v_i och v_{i+2} där $i \in \{0, 1\}$. Om antalet trianglar ökar i G_0 måste det finnas en stig $v_0 x y v_2$, där x och y är två godtyckliga med varandra intilliggande hörn som inte ingår i f, som bildar en triangel när v_0 identifieras med v_2. På samma sätt måste det finnas en stig $v_1 w z v_3$ i G_1 som bildar en triangel när v_1 identifieras med v_3, även här gäller att w och z är två godtyckliga med varandra intilliggande hörn som inte ingår i f. För att inte bryta mot G:s planäritet måste det gälla att kanterna $\{x, y\}$ och $\{w, z\}$ är intilliggande, de kommer alltså att ha ett hörn gemensamt, låt exempelvis $x = w$. Detta resulterar i att det måste finnas en triangel $v_i v_{i+1} x$ i G. Dessutom gäller att y och z kan vara samma hörn. Se Figur 10-12.

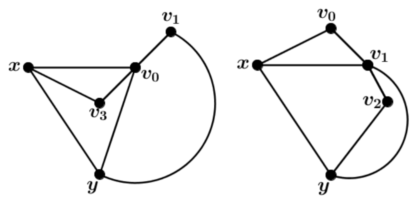


Figur 10: (a) är inte en giltig graf G eftersom två kanter korsar varandra. Kanterna $\{x, y\}$ och $\{w, z\}$ måste ha ett gemensamt hörn, exempelvis $x = w$. (b) är en möjlig graf G där $x = w$. (c) är en möjlig graf G där $x = w$ och $y = z$.



(a) (b)

Figur 11: Båda graferna utgår från den variant av grafen G där $x = w$. (a) visar grafen G_0 som bildas när hörnen v_0 och v_2 identifieras. (b) visar grafen G_1 som bildas när hörnen v_1 och v_3 identifieras.



(a) (b)

Figur 12: Båda graferna utgår från den variant av grafen G där $x = w$ och $y = z$. (a) visar grafen G_0 som bildas när hörnen v_0 och v_2 identifieras. (b) visar grafen G_1 som bildas när hörnen v_1 och v_3 identifieras.

□

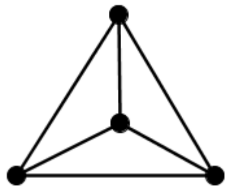
Definition 3.2.4. En graf G sägs vara *k-kritisk* om G inte kan färgläggas med $k-1$ färger men varje äkta delgraf till G kan färgläggas med $k-1$ färger.

Vidare kan följande lemma formuleras för 4-kritiska grafer. Beviset finns att läsa i sin helhet i [9]. Se Figur 13 för ett exempel på en 4-kritisk graf.

Lemma 3.2.5. *Om grafen G är en 4-kritisk graf med p hörn gäller*

$$q \geq \frac{5p-2}{3}$$

där q är antal kanter i G.



Figur 13: Grafen är 4-kritisk eftersom den *inte* kan färgläggas med tre färger, medan varje äkta delgraf kan färgläggas med tre färger. Grafen uppfyller därmed Lemma 3.2.5 eftersom $p = 4$ och $q = 6$ ger

$$6 \geq \frac{5 \cdot 4 - 2}{3} = 6.$$

Definition 3.2.6. Att *identifiera* två hörn innebär att hörnen och dess angränsande kanter tas bort och ersätts av ett nytt hörn som är intilliggande med samtliga hörn som tidigare var intilliggande med minst ett av de två borttagna hörnen [7].

I följande del förekommer skrivsättet $G = H - v$. Minustecknet innebär i det här fallet att ett hörn v (och dess angränsande kanter) har tagits bort från H och då har en ny graf G bildats. På samma sätt innebär $G + v = H$ att ett hörn v har adderats till grafen G och bildat den nya grafen H. Observera dock att $G + v = H$ inte är entydigt bestämt eftersom det inte framgår hur många kanter som adderas när v läggs till.

Nu har det blivit dags att formulera och bevisa en sats för färgläggning med tre färger [7].

Sats 3.2.7. *Låt G vara en planär graf utan parallella kanter och loopar, samt utan triangulära områden. Låt H vara en graf sådan att $G = H - v$ där v är ett hörn av grad mindre eller lika med 4. Då kan H färgläggas med tre färger.*

Bevis. Låt G och H vara grafer för vilka gäller att $G = H - v$ där v är ett hörn av grad 4 eller mindre, $d(v) \leq 4$. Antag att H är den graf med minimalt antal kanter och hörn som inte kan färgläggas med tre färger och som uppfyller satsens förutsättningar. Grafen G är en äkta delgraf till H och vi låter H ha p hörn och q kanter. Det medför att grafen G har $p - 1$ hörn och $q - d(v)$ kanter där $d(v)$ är graden av v, dessutom låter vi r beteckna antalet områden i G. Enligt vårt antagande är H den minsta graf av given typ som inte kan färgläggas med tre färger. H kommer att vara 4-kritisk om varje äkta delgraf till H kan färgläggas med tre färger. En äkta delgraf till H där hörnet v ingår kommer alltid att vara av samma typ som H och kan därmed färgläggas med tre färger eftersom H är minimal. En äkta delgraf till H där v inte ingår kan också färgläggas med tre färger eftersom en sådan delgraf kan få samma färgläggning som de delgrafer där v ingår och $d(v) = 0$. Därmed är H 4-kritisk enligt Definition 3.2.4. Eftersom H är 4-kritisk kan vi tillämpa Lemma 3.2.5 som säger att $q \geq \frac{5p-2}{3}$. Vi behöver nu skilja på två fall. I det första fallet (1) har grafen G inget område av grad 4, medan i det andra fallet (2) har G åtminstone ett område av grad 4.

(1): G saknar områden av grad 4, alltså är samtliga områden av grad minst 5. Från Lemma 4.2.1 får vi att summan av graden av samtliga områden är lika med dubbla antalet hörn. Eftersom summan kommer vara åtminstone $5r$ får vi för G

$$2(q - d(v)) = \sum_{i=1}^{r} d(f_i) \geq 5r,$$

vilket är ekvivalent med

$$r \leq \frac{2(q - d(v))}{5}.$$

Vi tillämpar nu Eulers formel (Sats 3.2.2) som säger $p - q + r = 2$ där p är antal hörn, q är antal kanter och r är antal områden och sätter in motsvarande för grafen G i formeln. Det ger

$$(p - 1) - (q - d(v)) + r = 2 \iff p - q + r + d(v) - 1 = 2.$$

Sätt in uttrycket för r i formeln och lös ut q. Vi får

$$\begin{aligned} p - q + \frac{2(q - d(v))}{5} + d(v) - 1 \geq 2 &\iff 5p - 5q + 2q - 2d(v) + 5d(v) - 5 \geq 10 \\ &\iff 5p + 3d(v) - 15 \geq 3q \\ &\iff q \leq \frac{5p + 3d(v) - 15}{3}. \end{aligned}$$

Vi såg tidigare att vi kan tillämpa Lemma 3.2.5 eftersom H är 4-kritisk, lemmat säger att $q \geq \frac{5p-2}{3}$. Eftersom $d(v) \leq 4$ gäller att

$$\frac{5p + 3d(v) - 15}{3} < \frac{5p - 2}{3}.$$

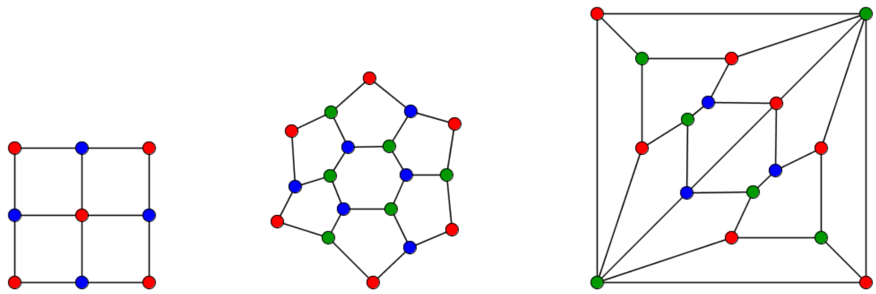
Detta leder till en motsägelse eftersom det inte kan gälla att $q \leq \frac{5p+3d(v)-15}{3}$ och $q \geq \frac{5p-2}{3}$ samtidigt. Antagandet är alltså falskt vilket innebär att H kan färgläggas med tre färger.

(2): G har ett område av grad 4 med hörnen v_0, v_1, v_2 och v_3 sådana att

$\{v_0, v_2\}, \{v_1, v_3\} \notin E(G)$, därmed är förutsättningarna för Lemma 3.2.3 uppfyllda. Enligt Lemma 3.2.3 får vi graferna G_0 och G_1 genom att identifiera hörnen v_0 och v_2 respektive v_1 och v_3. Eftersom grafen G enligt satsen saknar trianglar kan vi utifrån lemmat dra slutsatsen att åtminstone en av graferna G_0 och G_1 också saknar trianglar. Låt oss anta att G_0 saknar trianglar. H är enligt antagandet den minsta graf som inte kan färgläggas med tre färger. Genom att identifiera v_0 och v_2 bildas en ny graf med ett hörn färre än H. Denna nya graf kan betecknas $H_0 = G_0 + v$ och är en planär graf utan trianglar plus ett hörn av grad 4 eller mindre. H_0 är alltså av samma typ som H och kan därmed färgläggas med tre färger eftersom H är minimal. Vi kan nu återgå till H utan att förstöra färgläggningen eftersom v_0 och v_2 inte är intilliggande hörn och därmed kan ha samma färg. Vi har visat att det finns en möjlig färgläggning av H med tre färger vilket motsäger vårt inledande antagande. $\square$

I det fall då en äkta delgraf till H innehåller v och $d(v) = 0$ får vi ett specialfall av satsen. Hörnet v kan då få en godtycklig färg eftersom v inte är sammanhängande med resten av grafen. Vi kan avlägsna v helt utan att det påverkar färgläggningen av resten av delgrafen, och få en ny graf med egenskapen att den helt saknar triangulära områden. Detta fall har fått en egen sats och kallas Grötzschs sats efter den tyske matematikern Herbert Grötzsch (1902-1993) [15]. Ett fullständigt bevis av Grötzschs sats får inte plats inom ramen för den här uppsatsen men finns att läsa i exempelvis [12]. Här ges istället ett antal exempel för att troliggöra satsen, se Figur 14.

Sats 3.2.8. (Grötzschs sats) *Varje planär graf utan triangulära områden kan färgläggas med tre färger.*



Exempel 1 Exempel 2 Exempel 3

Figur 14: Tre exempel på grafer som saknar triangulära områden och som alla kan färgläggas med tre färger.

3.3 Fem färger

Fyrfärgssatsen säger att fyra färger är tillräckligt för att färglägga en planär graf. En graf som kan färgläggas med som mest fyra färger kommer alltid också kunna färgläggas med fem färger.

För att bevisa att fem färger är tillräckligt för att färglägga en planär graf behöver vi formulera ett par nya lemman. Dessutom behöver vi definiera ett nytt begrepp [5, 6, 18].

Lemma 3.3.1. *Låt G vara en planär graf med åtminstone tre hörn, utan parallella kanter och loopar. Hörnen är av grad minst 3. Då gäller $q \leq 3p - 6$ där p är antal hörn och q är antal kanter.*

Bevis. Låt G vara en planär graf med antal hörn $p \geq 3$. Dessutom gäller att $d(f) \geq 3$ för alla $f \in F(G)$ där $F(G)$ är mängden områden i G. Av Lemma 3.2.1 och Sats 3.2.2 (Eulers formel) följer

$$2q = \sum_{i=1}^{r} d(f) \geq 3r = 3(q - p + 2) \iff q \leq 3p - 6.$$

□

Dessutom gäller att $q = 3p - 6$ för triangulära grafer eftersom varje område då är av grad exakt 3.

Lemma 3.3.2. *Varje planär graf har ett hörn av grad 5 eller lägre.*

Bevis. Utgå från en planär graf G med hörnmängden $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\}$. Låt antalet kanter i G vara q och antalet områden r. Antag att samtliga hörn i grafen har grad minst 6. Lemma 3.2.1 ger oss

$$2q = d(v_1) + d(v_2) + ... + d(v_p) \geq 6 + 6 + ... + 6 = 6p.$$

Efter division med 2 får vi att $q \geq 3p$. Dessutom får vi från Lemma 3.3.1 att $q \leq 3p - 6$. Enligt detta får vi att $q \geq 3p$ samtidigt som $q \leq 3p - 6$ vilket leder till en motsägelse eftersom $3p - 6 < 3p$. Vårt antagande kan därmed inte vara sant vilket innebär att det måste finnas åtminstone ett hörn med grad 5 eller lägre. □

Definition 3.3.3. Utgå från en graf som har färglagts på ett sådant sätt att inga två intilliggande hörn har samma färg. En *kempekedja* eller ett *kempenät* är en maximalt sammanhängande delgraf som består av endast två färger. Att delgrafen är *maximalt* sammanhängande innebär att de hörn som är intilliggande till delgrafen, och som inte ingår i själva delgrafen, inte har någon av de två färgerna som ingår i delgrafen.

intilliggande hörnen till delgrafen inte har någon av de två färger som ingår i delgrafen.

Med hjälp av kempekedjor bevisar vi nu femfärgssatsen med hjälp av induktion [5, 18].

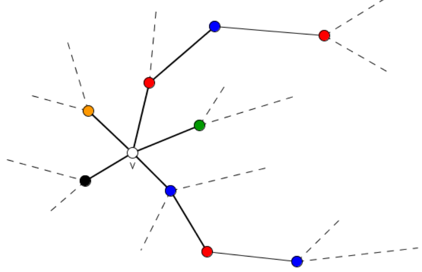
Sats 3.3.4. (Femfärgssatsen) *Varje planär graf kan färgläggas med fem eller färre färger.*

Bevis. Basfall: Grafen består av endast ett hörn, alltså är en färg tillräckligt. Induktionsantagande: Antag att satsen stämmer för grafer med p hörn. Visa att satsen även stämmer för en graf med $p+1$ hörn. Enligt Lemma 3.3.2 vet vi att grafen har ett hörn v av grad 5 eller lägre. Antag att hörnet v och dess tillhörande kanter tas bort från grafen, då återstår en graf med p hörn som enligt induktionsantagandet kan färgläggas med fem färger eller färre. Låt oss färglägga grafen med fem färger på ett sådant sätt att två intilliggande hörn inte får samma färg, och sätt sedan tillbaka hörnet v på sin plats för att återfå den ursprungliga grafen med $p+1$ hörn. Vi behöver visa att de intilliggande hörnen till v kan färgläggas med fyra färger eller färre så att det alltid blir åtminstone en färg över till hörn v. Vi tittar på två fall: (1) v är av grad 4 eller mindre och (2) v är av grad 5.

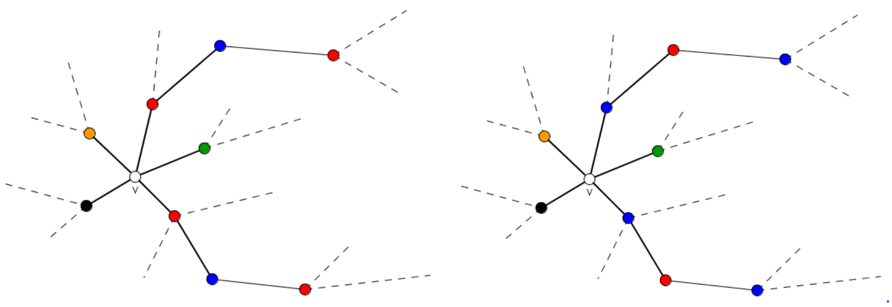
(1): Om v är av grad 4 eller mindre har de intilliggande hörnen färglagts med som mest fyra färger vilket innebär att det återstår åtminstone en färg till v. Hela grafen kan därmed färgläggas med fem färger eller färre.

(2): Antag att de fem intilliggande hörnen till v har färglagts med olika färger, låt exempelvis hörnen få färgerna röd, grön, blå, svart och orange (se Figur 15). Om det röda och blå hörnet inte tillhör samma röd-blå kempekedja kan färgerna i den ena kedjan byta plats så att de röda hörnen blir blå och de blå hörnen blir röda. De fem hörnen kommer då att ha färgläggningen röd-grön-röd-svart-orange eller blå-grön-blå-svart-orange, vilket innebär att det blir en färg över till hörn v (se Figur 16). Om det röda och blå hörnet däremot tillhör samma röd-blå kempekedja så innebär det att den kedjan kommer att separera det gröna och det svarta hörnet från varandra (se Figur 17). Det gröna och svarta hörnet kan därför inte tillhöra samma grön-svarta kempekedja vilket innebär att ett av dessa hörn kan byta färg enligt samma princip som ovan.

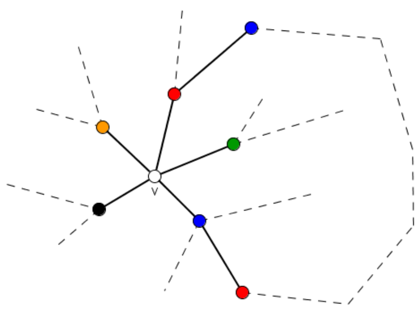
Slutsats: Enligt induktionsprincipen gäller satsen för alla $p \in \mathbb{Z}_+$. En planär graf kan alltid färgläggas med fem färger eller färre.



Figur 15: Alla intilliggande hörn till v har olika färger.



Figur 16: Det röda och blå hörnet som är intilliggande till v ingår inte i samma kempekedja, ett av dessa hörn (och tillhörande kempekedja) kan därför omfärgas och vi får någon av ovanstående färgläggningar.



Figur 17: Det röda och blå hörnet som är intilliggande till v ingår i samma Kempekedja. Det innebär att det gröna och svarta hörnet inte kan ingå i samma kempekedja, därmed kan ett av dessa hörn (och tillhörande kempekedja) omfärgas och vi har frigjort en färg till v.

$\square$

4 Fyrfärgssatsen

År 1852 frågade sig Francis Guthrie hur många färger som behövs för att färglägga en karta. Han menade att fyra färger var tillräckligt för att åstadkomma en godkänd färgläggning. Det till synes enkla problemet visade sig vara betydligt mer komplicerat att bevisa. Flera matematiker tog sig an uppgiften att försöka bevisa påståendet, dock utan framgång. Det första fullständiga beviset gjordes 1976 av Kenneth Appel, Wolfgang Haken och John A. Koch, alltså mer än 100 år efter att problemet först formulerades. Då beviset innehåller omfattande beräkningar är det nödvändigt att ta hjälp av datorer, något som gjorde att beviset till en början mötte visst motstånd. Idag är det dock allmänt accepterat och har på senare tid även förenklats något, även om datorberäkningar fortfarande är nödvändigt.

Sats 4.0.1. (Fyrfärgssatsen) *Varje planär graf kan färgläggas med fyra färger eller färre.*

I följande avsnitt presenteras Kempes misslyckade försök till att bevisa satsen. Därefter presenteras idéerna bakom det faktiska beviset av fyrfärgssatsen. Beviset är för omfattande för att rymmas i den här uppsatsen men finns att läsa här [2, 3].

4.1 Kempes "bevis"

Den engelske matematikern Alfred Bray Kempe publicerade år 1879 vad som under ett decennium kom att anses vara ett bevis av fyrfärgssatsen. Även om Kempes "bevis" skulle visa sig inte hålla så innehöll det vissa användbara idéer som skulle visa sig vara relevanta både för att så småningom göra ett fullständigt bevis av fyrfärgssatsen men också för beviset av femfärgssatsen, exempelvis begreppet *kempekedja* (se Definition 3.3.3) som bär hans namn [17, 18].

Kempes "bevis"
"Beviset" bygger på induktion och idén är densamma som för beviset av femfärgssatsen [11, 18]. Enligt Lemma 3.3.2 vet vi att det finns åtminstone ett hörn av grad 5 eller lägre i grafen.

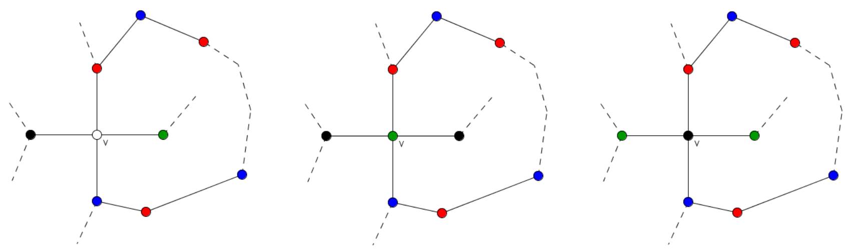
Basfall: För en graf med endast ett hörn är det uppenbart att fyra färger är tillräckligt för att färglägga grafen. Induktionsantagande: Låt oss anta att satsen stämmer för en graf med p hörn. Vi ska nu visa att satsen även stämmer för en graf med $p + 1$ hörn.

Vi utgår från en graf med $p + 1$ hörn. Enligt Lemma 3.3.2 finns åtminstone ett hörn av grad 5 eller lägre, låt oss kalla det hörnet för v. Antag nu att hörnet v och dess intilliggande kanter tas bort från grafen så att en mindre graf bildas med p hörn. Den nya grafen kan färgläggas med fem färger enligt vårt induktionsantagande. Vi behöver nu visa att de hörn som var intilliggande till v kan färgläggas på ett sådant sätt att det alltid blir en färg över till v när vi sätter tillbaka hörnet v och återgår till den ursprungliga grafen med $p+1$ hörn.

Om hörn v är av grad 3 eller lägre är det uppenbart att fyra färger är tillräckligt för att färglägga v och dess tre intilliggande hörn.

Vi behöver nu undersöka de fall då hörnet v är av grad 4 eller 5.

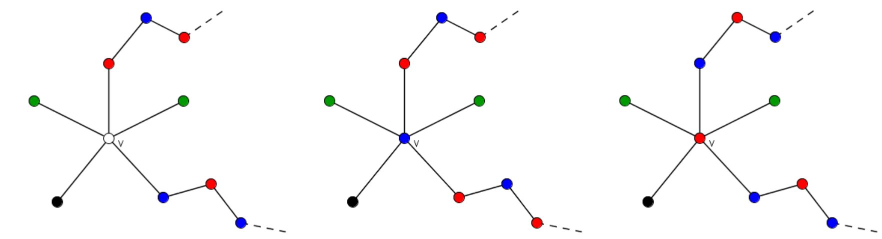
Låt v vara ett hörn med grad 4. Grafen utan hörnet v har p hörn och kan enligt induktionsantagandet färgläggas med fyra färger. När vi återinför hörnet v i grafen behöver vi visa att de fyra intilliggande hörnen till v kan färgas om på ett sådant sätt att det alltid blir en färg över till v samtidigt som färgläggningen inte får förstöras. Låt säga att de fyra hörnen har fått färgerna röd, grön, blå och svart. Om det röda och blå hörnet tillhör samma kempekedja innebär det att det finns en röd-blå delgraf där båda dessa hörn ingår. Därmed kan det gröna och svarta hörnet *inte* ingå i samma grön-svarta kempekedja eftersom det då skulle innebära att kanter korsar varandra vilket inte är tillåtet för planära grafer. Det gröna hörnet kan därför omfärgas till svart eller det svarta hörnet kan ändras till grön så att v kan färgläggas med den färg som blir över (se Figur 18). Motsvarande omfärgning kan göras av det röda eller blå hörnet om det istället är det gröna och svarta hörnet som ingår i samma kempekedja.



Figur 18: Alla fyra färger har använts för att färglägga de intilliggande hörnen till v (vänster). Om det röda och blå hörnet ingår i samma kempekedja kan inte det gröna och svarta hörnet samtidigt ingå i samma kempekedja, det gröna eller svarta hörnet kan därmed omfärgas och vi får en ledig färg till v (mitten och höger).

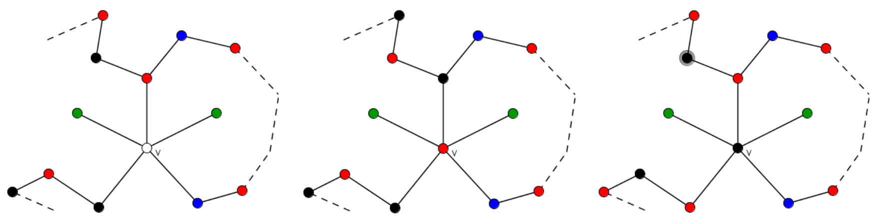
Låt nu v vara ett hörn med grad 5. På samma sätt som tidigare kan grafen färgläggas med fyra färger när vi tagit bort hörnet v, enligt induktionsantagandet. Låt säga att de fem intilliggande hörnen har fått färgerna röd, grön, blå, svart och grön (medurs). Vi behöver visa att det även i det här fallet går att färga om de intilliggande hörnen till v så att det blir en färg över. Vi skiljer på tre fall.

(1): Antag att det röda och blå hörnet *inte* ingår i samma kempekedja. Det gör att vi kan byta plats på röd och blå i en av dessa två kedjor och därmed frigöra en av dessa färger till hörn v (se Figur 19).



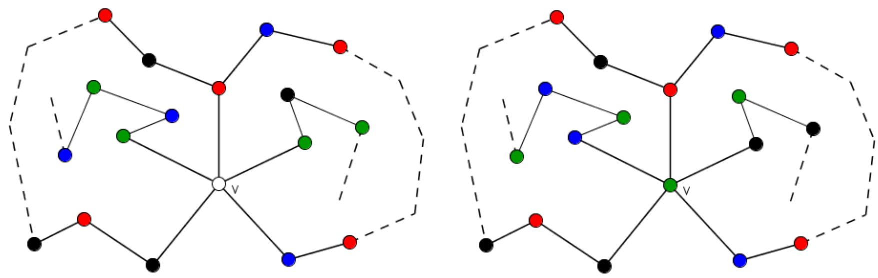
Figur 19: Om det röda och blå hörnet inte ingår i samma kempekedja kan ett av dessa hörn omfärgas och frigöra en färg till v.

(2): Antag nu att det röda och blå hörnet *ingår* i samma kempekedja. Om vi försöker byta plats på röd och blå kommer det intilliggande (till v) röda hörnet att bli blått samtidigt som det intilliggande (till v) blå hörnet blir rött, därmed har ingen färg frigjorts till v. Betrakta nu det röda och svarta hörnet och antag att dessa hörn inte ingår i samma röd-svarta kempekedja. Då kan färgbytet istället göras i någon av dessa kedjor och därmed frigöra antingen röd eller svart till v, beroende på i vilken kedja vi byter plats på färgerna (se Figur 20).



Figur 20: Om det röda och blå hörnet ingår i samma kempekedja samtidigt som det röda och svarta hörnet inte ingår i samma kempekedja så kan antingen det röda eller svarta hörnet omfärgas och frigöra en färg till v.

(3): Antag att det röda och blå hörnet ingår i samma röd-blå kempekedja. Dessutom gäller att det röda hörnet samtidigt ingår i en röd-svart kempekedja tillsammans med det svarta hörnet. Dessa kempekedjor gör att det gröna hörnet, som omringas av den röd-blå kempekedjan, och det svarta hörnet inte kan ingå i samma grön-svarta kempekedja. Därmed kan detta gröna hörn omfärgas till svart. På samma sätt kan inte heller det gröna hörnet, som omringas av den röd-svarta kempekedjan, och det blå hörnet ingå i samma grön-blå kempekedja. Det gör att detta gröna hörn kan bytas ut mot blå. Därmed har vi bytt ut de gröna hörnen mot svart respektive blå utan att bryta mot reglerna för färgläggning. Hörnet v kan alltså få färgen grön (se Figur 21).

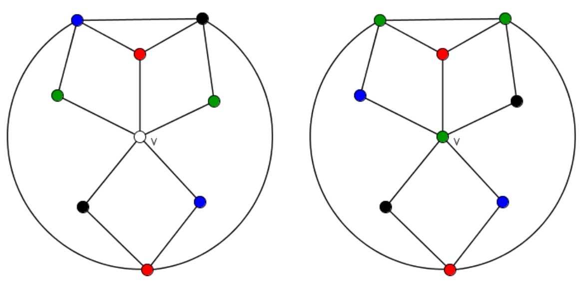


Figur 21: De två hörnen kan omfärgas till den andra färgen i respektive kempekedja och därmed frigöra grön till v.

Kempe ansåg att dessa fall var de enda möjliga och menade att beviset var färdigt. År 1879 publicerade han beviset men elva år senare fann den engelske matematikern Percy John Heawood ett motexempel som ogiltigförklarade Kempes bevis [11, 16].

Heawoods motexempel

Betrakta grafen i Figur 22. Grafen faller inte inom ramarna för fall 1 eftersom det röda och blå hörnet i vår graf ingår i samma röd-blå kempekedja. Vi befinner oss inte heller i fall 2 eftersom det finns en röd-svart kempekedja. Vår graf måste alltså passa in på fall 3 och vi kan göra den omfärgning som beskrivs i (3). Precis som i (3) ingår inte grön och svart i samma kempekedja, liksom grön och blå inte ingår i samma kempekedja. De gröna hörnen kan därmed bytas ut mot svart respektive blå vilket gör att hörnet v kan få färgen grön. Men denna omfärgning resulterar i att vi får två intilliggande hörn som båda är gröna. Detta är inte tillåtet och vi har hittat ett fall där Kempes resonemang inte håller.



Figur 22: Heawoods motexempel där två intilliggande hörn får samma färg om man följer Kempes resonemang.

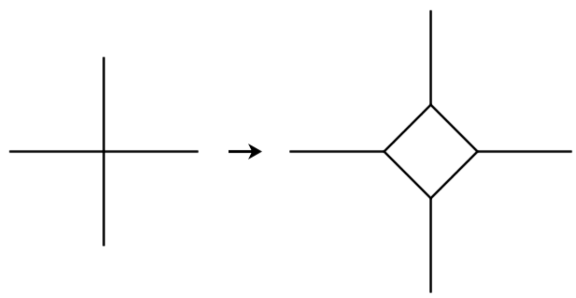
4.2 Om beviset av fyrfärgssatsen

Beviset av fyrfärgssatsen går ut på att visa att det inte är möjligt att finna ett minimalt motexempel, det vill säga en minimal graf som kräver fem färger för att kunna färgläggas. Enligt Lemma 3.3.2 måste en planär graf ha åtminstone ett hörn av grad 5 eller mindre. Kempe bevisade att en graf med ett hörn av grad 3 eller 4 inte kan ingå i ett minimalt motexempel. Däremot misslyckades han att visa att det även gäller för en graf med ett hörn av grad 5. Hörn av grad 0 bortser vi från då ett sådant hörn skulle göra grafen icke-sammanhängande. Vi kommer i fortsättningen av det här avsnittet att anta att en godtycklig graf G saknar hörn av grad mindre än 5. Dessutom kommer grafen G att antas vara triangulär, vilket följer av följande lemma [18].

Definition 4.2.1. För en *kubisk karta* gäller att exakt tre områden möts i varje punkt (hörn), se även Definition 2.1.10.

Lemma 4.2.2. Om fyra färger är tillräckligt för att färglägga områdena på varje kubisk karta, så är fyra färger även tillräckligt för att färglägga samtliga kartor i planet vars områden är sammanhängande.

Bevis. Antag att en karta består av åtminstone en punkt där mer än tre områden möts. Genom att addera ett nytt område i denna punkt, sådant att det angränsar till samtliga områden som tidigare möttes i denna punkt, samt att det nu är endast tre områden som möts i varje punkt (se Figur 23). Om den nya kartan kan färgläggas med fyra färger så kan även den ursprungliga det. De ursprungliga områdena är intilliggande i både den nya och den ursprungliga kartan. Det innebär att färgläggningen av den nya kartan kan överföras till den ursprungliga.



Figur 23: Om den nya kartan (till höger) kan färgläggas med fyra färger kommer även färgläggningen att hålla för den ursprungliga kartan (till vänster).

□

Eftersom den duala grafen till en kubisk karta är en triangulär graf följer det av lemmat att det är tillräckligt att visa att fyra färger är tillräckligt för att färglägga en triangulär graf.

Kempe lyckades bevisa att en graf med ett hörn av grad 4 eller mindre inte kan ingå i ett minimalt motexempel, det vill säga en minimal graf som kräver fem färger för att kunna färgläggas. För att slutföra beviset är det nödvändigt att visa att inte heller ett hörn av grad 5 kan ingå i ett minimalt motexempel. För att göra det behöver vi studera hörn av grad 5 och dess omgivning, vi behöver studera olika *konfigurationer*. En konfiguration är en delgraf som består av ett antal hörn och de kanter som löper mellan hörnen [4]. Kempe visade att en graf som innehåller en konfiguration i vilken det ingår ett hörn av grad 4 eller mindre inte kan ingå i ett minimalt motexempel.

För att hitta dessa konfigurationer använder vi oss av en metod som kallas *urladdning*, som först introducerades av Heesch [4]. Metoden går ut på att tilldela varje hörn i grafen en viss laddning som sedan flyttas mellan hörnen enligt givna regler. Tilldela varje hörn laddningen $6 - i$ där i är varje hörns grad. Det gör att hörn av grad 5 får laddningen $+1$, hörn av grad 6 har ingen laddning, hörn av grad 7 får laddningen -1 och så vidare. Från Lemma 4.2.3 får vi att grafens totala laddning alltid kommer att vara lika med 12 [6].

Lemma 4.2.3. Om varje hörn i en triangulär graf G tilldelas laddningen $6 - i$ kommer grafens totala laddning att vara

$$\sum_{i=1}^{\Delta(G)} (6 - i)p_i = 12,$$

där p_i är antal hörn med grad i och $\Delta(G)$ är grafens maximala grad.

Bevis. Från Lemma 3.3.1 får vi att $q = 3p - 6$ för triangulära grafer, där p är antal hörn i grafen och q är antal kanter.

Alla hörn av grad 1 är intilliggande med en kant, vi låter p_1 beteckna antalet hörn av grad 1. På samma sätt låter vi p_2 beteckna antalet hörn av grad 2, det vill säga antalet hörn som är intilliggande med två kanter, och så vidare. Dessutom gäller att varje kant löper mellan två hörn. Vi får följande ekvation

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + ... = 2q,$$

där p_i är antal hörn av grad i och q är antal kanter. Dessutom gäller att grafens totala antal hörn p ges av

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... = p.$$

Multiplicera ekvationen i Lemma 3.3.1 med 2 och substituera sedan ovanstående uttryck för hörn och kanter in i ekvationen,

$$2q = 2(3p - 6) = 6p - 12,$$

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + ... = 6(p_1 + p_2 + p_3 + ...) - 12.$$

Efter förenkling får vi

$$5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 - p_7 - 2p_8 - ... = 12.$$

Observera att p_6-termen försvinner eftersom hörnen av grad 6 inte bidrar till grafens totala laddning. Denna ekvation kan nu skrivas

$$\sum_{i=1}^{\Delta(G)} (6 - i)p_i = 12.$$

□

Efter att varje hörn fått respektive laddning tilldelad försöker vi urladda grafen, det vill säga göra så att alla hörn har laddning 0 eller negativ laddning genom att metodiskt omfördela laddningarna. Det gäller dock att det alltid kommer att finnas hörn med positiv laddning i grafen eftersom den totala laddningen är konstant och positiv. Konfigurationerna som finns omkring de positivt laddade hörnen bildar en mängd konfigurationer med den egenskapen att om en triangulär graf inte innehåller någon av dessa konfigurationer så kommer grafen att urladdas av den givna urladdningsproceduren. Men i och med att detta inte är möjligt kan vi dra slutsatsen att varje triangulär graf måste innehålla åtminstone en av konfigurationerna. Vi har alltså funnit en *oundviklig mängd* konfigurationer [4, 6].

Kempe lyckades hitta en oundviklig mängd bestående av fyra konfigurationer, det vill säga hörnen av grad 2, 3, 4 och 5. Dock kunde han inte bevisa att konfigurationen som består endast av ett hörn av grad 5 är reducibel. Flera matematiker har utvecklat Kempes oundvikliga mängd. Exempelvis visade Wernicke (1904) att ett hörn av grad 5 med ett intilliggande hörn av grad 5 eller 6 inte kan förekomma i ett minimalt motexempel, och sedan förbättrades denna oundvikliga mängd ytterligare av Franklin (1923) som visade att ett hörn av grad 5 med två intilliggande hörn av grad 5 eller 6 inte kan ingå i ett minimalt motexempel. Varken Wernickes eller Franklins oundvikliga mängder är reducibla, de måste utökas till större och fler konfigurationer. När Appel, Haken och Koch publicerade sitt bevis 1976 hade de tagit fram en oundviklig mängd med 1936 konfigurationer vars reducerbarhet kontrollerades med hjälp av datorer. Det har dock i efterhand visat sig att alla 1936 konfigurationer inte var distinkta, så efter förbättringar av både Appel, Haken och Koch själva men också av andra forskare har man kunnat minska ner antalet reducibla konfigurationer i den oundvikliga mängden till 633 [18].

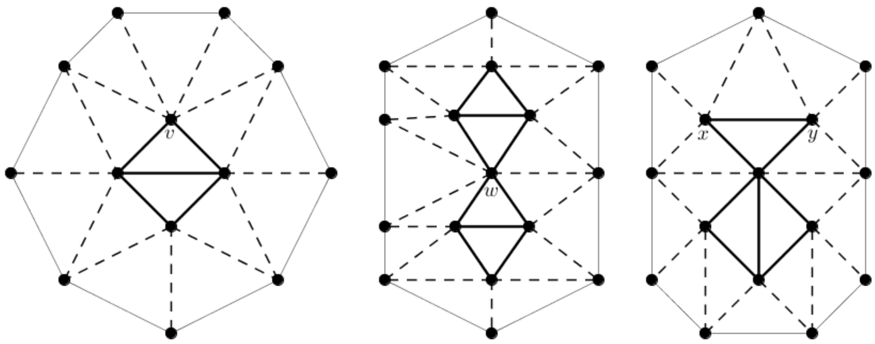
Det finns flera olika urladdningsprocedurer som beskriver hur laddningen ska fördelas, en av dem beskrivs här nedan.

En urladdningsprocedur går ut på att varje positivt laddat hörn (alltså alla hörn av grad 5) ger $\frac{1}{5}$ av sin laddning till varje intilliggande hörn av grad minst 7. Vi kan visa att denna procedur ger en oundviklig mängd konfigurationer genom att anta att samtliga intilliggande hörn till ett hörn av grad 5 är av grad 7. Varje hörn av grad 5 skulle då bli urladdad och ha laddningen 0. Eftersom den totala laddningen alltid är positiv (och exakt lika med 12) måste det finnas hörn som tidigare hade negativ laddning men som nu har fått positiv laddning. Ett hörn av grad 7 måste motta laddning från åtminstone sex hörn av grad 5 för att bli positivt laddad. Men för att ett hörn av grad 7 ska kunna ha åtminstone sex intilliggande hörn av grad 5 så måste det finnas par av hörn av grad 5 som är intilliggande, men några sådana finns inte enligt vårt inledande antagande. Alltså måste det finnas hörn av grad 5 som har intilliggande hörn av grad 5 eller 6. Detta är Wernickes oundvikliga mängd som nämnts tidigare.

När man hittat en oundviklig mängd behöver man kontrollera så att samtliga ingående konfigurationer är *reducibla*. En reducibel konfiguration är en konfiguration som inte kan ingå i ett minimalt motexempel. Kempe bevisade att konfigurationer som innehåller ett hörn av grad 3 eller 4 inte kan ingå i ett minimalt motexempel och därmed är reducibla. För att slutföra Kempes bevis behöver vi visa att varje konfiguration som innehåller ett hörn av grad 5 är reducibel och därmed inte kan ingå i ett minimalt motexempel. Ett minimalt motexempel kan inte innehålla en reducibel konfiguration men måste innehålla åtminstone en konfiguration från varje oundviklig mängd. För att visa att inget minimalt motexempel existerar, och därmed bevisa satsen, räcker det att hitta en oundviklig mängd vars samtliga konfigurationer är reducibla [4, 6, 18].

Heesch upptäckte tre sammansättningar av hörn som verkade utgöra ett hinder för att kunna bevisa att en konfiguration var reducibel, se Figur 24 [2, 4].

- Hörn som är intilliggande med fyra hörn i den omgivande cykeln (four-legger vertices).
- Hörn med tre intilliggande hörn i den omgivande cykeln, där de tre hörnen på cykeln inte är sammanhängande. Dessutom gäller att om detta hörn tas bort kommer konfigurationen inte längre att vara sammanhängande (three-legger articulation vertices).
- Ett par av hörn av grad 5 som endast har ett annat intilliggande hörn i konfigurationen (hanging 5-5-pairs).



Figur 24: Konfigurationerna i varje graf är markerade med tjocka linjer, cykeln runt varje konfiguration är markerad med tunna linjer och kanterna som sammanbinder konfigurationen och cykeln har streckade linjer. Hörnet v (vänster) är intilliggande till fyra hörn på cykeln (four-legger vertex). Hörnet w (mitten) angränsar till tre hörn på cykeln som inte är sammanhängande (three-legger articulation vertex). Hörnen x och y är av grad 5 och angränsar endast till ett annat hörn i konfigurationen (hanging 5-5-pair) [2, 4].

Man har inte bevisat ett en konfiguration som innehåller något av ovanstående hinder aldrig kan vara reducibel, men man har heller aldrig lyckats visa att en sådan konfiguration är reducibel. Därför kan man anta att det är rimligt att undvika dessa konfigurationer. Efter en urladdningsprocedur undersöks de positivt laddade hörnen och dess omgivning för att säkerställa att det inte finns någon sammansättning av hörn som utgör hinder för reducerbarhet. Om man upptäcker ett hinder behöver man korrigera urladdningsproceduren för att kunna undvika det [4].

Det är dock inte självklart att konfigurationen är reducibel bara för att det inte finns något hinder. För att kontrollera konfigurationernas reducerbarhet använde man sig av datorer. Metoden bygger på Kempes resonemang och går ut på att man tar bort den aktuella konfigurationen från grafen, antar att den mindre grafen kan färgläggas med fyra färger och visar sedan att färgläggningen kan utvidgas att gälla för hela grafen (induktion). En konfiguration omges av en cykel (även begreppet ”ring” förekommer i litteraturen). Det är en delgraf som består av de hörn som är intilliggande till de hörn som ingår i konfigurationen (se Figur 24 för konfigurationer och cykler). Färgläggningen av den omgivande cykeln måste matcha konfigurationens färgläggning, därför undersöker man varje möjlig färgläggning av cykeln och kontrollerar om varje färgläggning kan utvidgas till hela grafen. I vissa fall kan färgläggningen direkt utvidgas medan man i andra måste omfärga cykeln med hjälp av kempekedjor [18]. Ofta beskrivs en konfiguration utifrån längden på den omgivande cykeln, där längden på cykeln definieras av antalet hörn som ingår i den. Exempelvis är en 14-cykel-konfiguration en konfiguration vars omgivande cykel är av längden 14. Det finns ett samband mellan längden av en cykel som omger en konfiguration och hur lång tid det tar att undersöka om konfigurationen är reducibel. En konfiguration i en 14-cykel (cykel med längd 14) tog i genomsnitt 25 minuter att kontrollera reducerbarhet med dåtiden datorkapacitet, medan en konfiguration i en 18-cykel krävde mer än 100 timmar. Man har dock kunnat visa att det räcker att kontrollera konfigurationer i n-cykler där $n \leq 14$ [4].

5 Algoritmer för färgläggning

För att lösa olika typer av grafteoretiska problem kan man använda sig av algoritmer. En algoritm är en systematisk procedur som genom ett antal steg leder fram till en lösning. De ingående stegen ska vara entydiga.

I det här avsnittet kommer vi att titta på ett antal algoritmer som kan användas för att färglägga grafer. Vi kommer att gå igenom ett exempel på en *girig algoritm*, samt *DSatur-algoritmen* och *RLF-algoritmen*. Den giriga algoritmen kommer vi att studera mer i detalj medan de övriga två behandlas mer översiktligt [10].

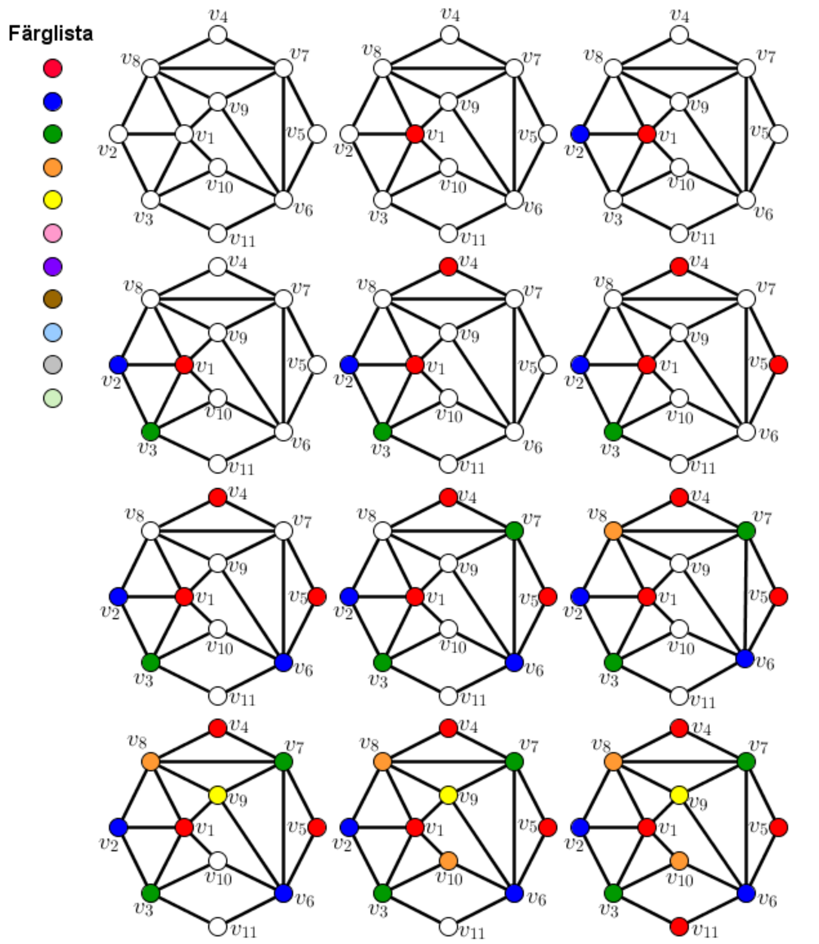
5.1 Girig färgläggning

En *girig* algoritm har den egenskapen att varje steg i proceduren baseras på vad som ger bäst resultat utifrån den information som finns i närområdet. Ingen hänsyn tas till huruvida valet leder till ett optimalt resultat eller ej. En girig algoritm backar heller aldrig för att göra om ett steg för att optimera utfallet.

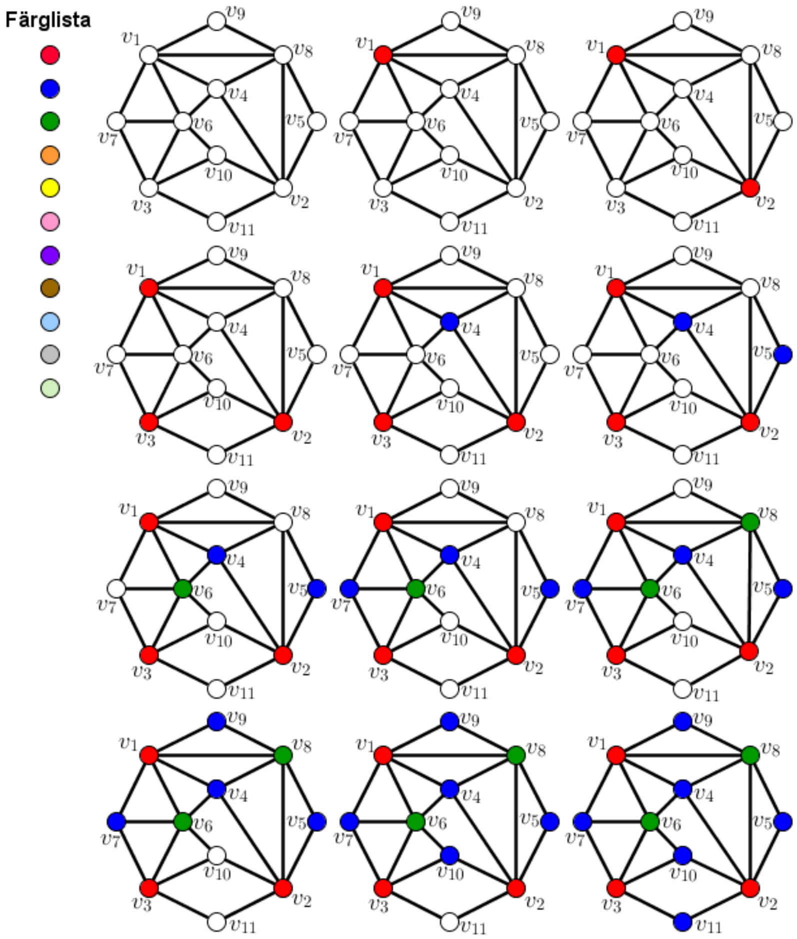
Att färglägga en graf utifrån en girig algoritm brukar kallas *girig färgläggning*. Algoritmen består av följande steg:

1. Ordna samtliga hörn v i en lista.
2. Skapa även en lista med ett antal färger, antalet färger ska vara lika många som antalet hörn.
3. Hörnen ska nu färgläggas enligt följande:
    - Börja med det första hörnet i listan, v_1. Vi färglägger v_1 med den första färgen i listan över färger.
    - Gå vidare till v_2. Studera de intilliggande hörnen till v_2 och hur de är färglagda. Färglägg v_2 med den första lediga färgen i färglistan som inte redan används av något intilliggande hörn.
    - Fortsätt att metodiskt gå igenom alla på samma sätt tills samtliga hörn är färglagda. I varje steg letar vi upp nästa hörn i listan och tilldelar det första lediga färg.

Exempel 5.1.1 Figur 25 och 26 visar hur en graf färgläggs med den giriga färgläggningsalgoritmen. Hörnens ordning är olika i de två exemplen vilket leder till att olika många färger behövs för att färglägga grafen.



Figur 25: Den giriga färgläggningsalgoritmen ger en färgläggning med fem färger i det här fallet.



Figur 26: Den giriga färgläggningsalgoritmen ger en färgläggning med tre färger i det här fallet.

I exemplet ser vi att antalet använda färger är beroende av hur vi har ordnat hörnen. Därmed kommer sättet vi ordnat hörnen på att vara avgörande för om vi hittar den färgläggning som kräver minimalt antal färger eller inte. Man kan visa att det alltid finns ett sätt att ordna hörnen på för att färgläggningen ska vara optimal [5].

Definition 5.1.2. Att en färgläggning är *optimal* innebär att man använt minsta möjliga antal färger för att färglägga en graf.

Sats 5.1.3. *För varje graf G finns ett sätt att ordna hörnen på så att den* *giriga färgläggningsalgoritmen ger en optimal färgläggning.*

Bevis. Antag att G är optimalt färglagd. Vi skapar en lista över de färger som används i den optimala färgläggningen. Vi ska nu skapa en lista över hörnen där ordningen bestäms av vilken färg respektive hörn har i den optimala färgläggningen. Först listar vi de hörn som har den första färgen, följt av de hörn som har den andra färgen och så vidare. Efter att alla hörn listats utför vi den giriga färgläggningsalgoritmen på grafen med hörnen ordnade enligt ovan. Hörnen som är först på listan kommer att få den första färgen (precis som de hade innan) eftersom de inte kan vara intilliggande. De hörn som tidigare hade den andra färgen i listan kommer att kunna färgläggas med antingen den första eller andra färgen, beroende på om de har något intilliggande hörn som fått den första färgen. Vidare kan sägas att ett hörn som tidigare hade färg n i den optimala färgläggningen kommer att få någon av färgerna 1, 2, 3, ..., n. Ett hörn som hade färg n i den optimala färgläggningen kan inte ha ett intilliggande hörn med färg n. Denna ordning på hörnen ger alltså en färgläggning där man använder lika många färger som i den optimala färgläggningen. □

Definition 5.1.4. Det *kromatiska talet* för en graf G anger det minsta antal färger som krävs för att färglägga grafen, det brukar betecknas $\chi(G)$.

Som vi har sett är det inte säkert att den uppkomna färgläggningen är optimal. Däremot kommer antalet använda färger K alltid att ligga inom ett givet intervall, oavsett val av ordning på hörnen. Det gäller nämligen att $\chi(G) \leq K \leq \Delta(G) + 1$ där $\chi(G)$ är det kromatiska talet och $\Delta(G)$ är grafens maximala grad [5].

Sats 5.1.5. *För att färglägga en graf G med den giriga färgläggningsalgoritmen krävs K färger, för K gäller $\chi(G) \leq K \leq \Delta(G) + 1$.*

Bevis. Eftersom det kromatiska talet $\chi(G)$ är det minsta antal färger som en graf G kan färgläggas med måste det gälla att $K \geq \chi(G)$. Vi behöver alltså visa att $K \leq \Delta(G) + 1$ oavsett hörnens ordning.

Betrakta något hörn v i G. Graden av v, $d(v)$, är detsamma som antalet intilliggande hörn till v. För varje hörn gäller att i värsta fall har samtliga intilliggande hörn till v olika färger, då måste v färgläggas med en ny färg vilket innebär att vi efter att v har färglagts har använt totalt $d(v) + 1$ färger. Graden av ett godtyckligt hörn v måste vara mindre eller lika med än grafens maximala grad, alltså $d(v) \leq \Delta(G)$. Av detta följer att antalet färger som v och dess omgivning behöver är mindre eller lika med $\Delta(G) + 1$.

Vi får att antalet färger K ligger i intervallet $\chi(G) \leq K \leq \Delta(G) + 1$. □

Genom att färglägga en graf med hjälp av en girig algoritm kan man inte vara säker på att man har hittat den optimala färgläggningen och därmed använt så få färger som möjligt. Däremot kan man vara säker på att antalet använda färger som mest kommer att vara $\Delta(G) + 1$.

Det finns även andra exempel på giriga algoritmer inom grafteori som inte har med färgläggning att göra. Det är exempelvis Kruskals algoritm och Prims algoritm som båda kan användas till att hitta ett minimalt uppspännande träd i en sammanhängande och viktad graf [14].

5.2 Fler algoritmer

Två andra exempel på färgläggningsalgoritmer är DSatur-algoritmen och RLF-algoritmen [10].

DSatur-algoritmen
DSatur-algoritmen har vissa likheter med den giriga färgläggningsalgoritmen. I båda algoritmerna går man igenom samtliga hörn och tilldelar varje hörn första lediga färg från en lista över färger. Det finns dock en viktig skillnad när det gäller hur hörnens ordning väljs. För den giriga färgläggningsalgorimen är hörnens ordning redan bestämd innan färgläggningen börjar, dessutom är ordningen helt slumpmässig, medan man i DSatur-algoritmen bestämmer ordningen allteftersom färgläggningen görs. DSatur-algoritmen kan beskrivas med följande steg:

1. Skapa en lista med ett antal färger, antalet färger ska vara lika många som antalet hörn.

2. Hörnen ska nu färgläggas enligt följande:

    - Lokalisera hörnet av högst grad och tilldela detta hörn den första lediga färgen i listan.
    - Bland de intilliggande hörnen till det precis färglagda hörnet, hitta det hörn av högst grad. Vid flera hörn av samma grad kan ett hörn väljas slumpvis. Tilldela detta hörn den andra färgen i listan.
    - Hitta det hörn, bland dem som ännu inte färglagts, som har flest olika färger på sina intilliggande hörn. Om det finns ett eller flera hörn som har minst två intilliggande hörn som blivit färglagda gå till (1), annars (2).

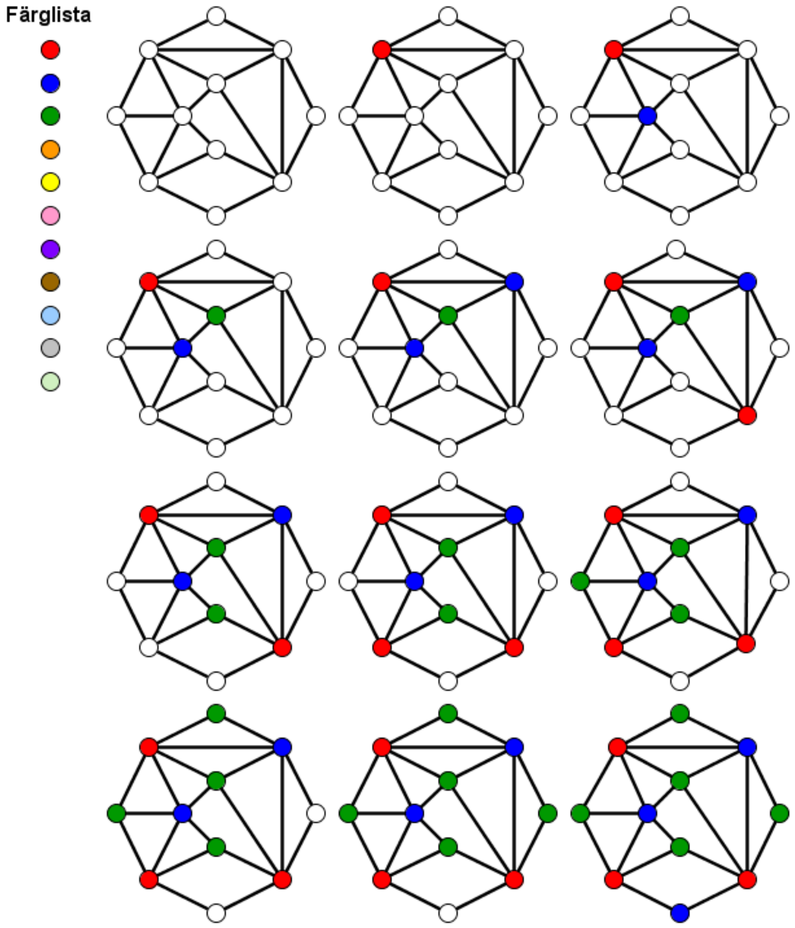
      (1) Bland de hörn som har åtminstone två färglagda grannar, lokalisera det med högst grad och tilldela detta hörn den första lediga färgen som inget intilliggande hörn har. Om flera hörn är av samma grad kan ett hörn väljas slumpvis.

(2) Samtliga hörn är intilliggande till som mest ett färglagt hörn. Lokalisera det hörn av högst grad (som har en färglagd granne) och tilldela detta hörn den första lediga färgen som inget intilliggande hörn har. Vid lika väljs ett hörn slumpvis.

- Upprepa föregående steg tills hela grafen är färglagd.

Följande exempel visar resultatet när grafen från Exempel 5.1.1. färgläggs enligt DSatur-algoritmen.

Exempel 5.2.1. I Figur 27 visas hur grafen färgläggs steg för steg med DSatur-algoritmen.



Figur 27: Grafen färgläggs med tre färger enligt DSatur-algoritmen.

Namnet *DSatur* är en förkortning av ”degree of saturation” (grad av mättnad, min översättning). Genom att färglägga en graf enligt DSatur-algoritmen kommer de hörn som har flest olika färger på de intilliggande hörnen, och därmed är mest begränsade vad gäller att hitta en ledig färg, att färgläggas först. De hörn som färgläggs senare i algoritmen är därför inte lika begränsade och kommer troligtvis att kunna färgläggas med någon tidigare använd färg. I och med att hörnens ordning bestäms under färgläggningens gång kommer spridningen mellan antalet använda färger att vara mindre jämfört med den giriga algoritmen där antalet färger kan variera mycket beroende på vald ordning. Man kan visa att DSatur-algoritmen ger en optimal färgläggning för bipartita grafer, cykelgrafer och hjulgrafer.

RLF-algoritmen

RLF-algoritmen skiljer sig från den giriga färgläggningsalgoritmen och DSatur-algoritmen på så sätt att istället för att färglägga ett hörn i taget så färgläggs grafen med en färg i taget. Algoritmen [1] kan beskrivas med följande steg:

1. Skapa en lista med ett antal färger, antalet färger ska vara lika många som antalet hörn.

2. Låt C_i beteckna mängden hörn som fått färg i, där $i = 1, 2, 3, \ldots$. C_1 kommer därmed att vara mängden hörn som fått den första färgen i listan, C_2 är mängden av hörn med den andra färgen och så vidare. Låt X vara mängden hörn som inte blivit färglagda och Y mängden icke färglagda hörn som har minst ett intilliggande hörn i C_i, där $i = 1, 2, 3, \ldots$. Inledningsvis gäller att $X = V(G)$ där $V(G)$ är hörnmängden i grafen G och $Y = \emptyset$.

3. Låt $i = 1$ och färglägg hörnen enligt följande:

   - Välj det hörn $v \in X$ som är av högst grad. Vid flera hörn av samma grad väljs ett hörn v slumpmässigt bland dessa. Flytta v till C_i samtidigt som de intilliggande hörnen till v flyttas till Y.
   - Bland de återstående hörnen i X välj det hörn u som har flest intilliggande hörn i Y. Vid lika väljs det hörn som har minst antal intilliggande hörn i X. Hörnet u flyttas till C_i och alla hörn som är intilliggande till u flyttas till Y. Upprepa detta steg tills $X = \emptyset$.
   - Samtliga hörn i Y flyttas tillbaka till X så att X innehåller alla icke färglagda hörn och $Y = \emptyset$. Öka i med 1.

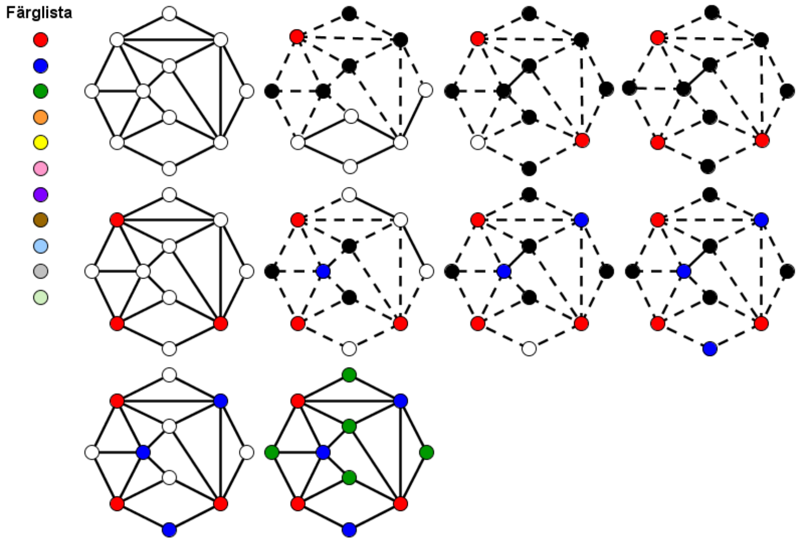
4. Upprepa ovanstående punkter, men med den skillnaden att de färglagda hörnen nu flyttas till C_{i+1} och därmed får nästa färg i listan.

5. När både $X = \emptyset$ och $Y = \emptyset$ är alla hörn färglagda.

Här följer ett exempel på en färgläggning som gjorts med hjälp av RLF-algoritmen.

Grafen som använts är densamma som i Exempel 5.1.1 och Exempel 5.2.1.

Exempel 5.2.2. I Figur 28 visas hur grafen färgläggs steg för steg med RLF-algoritmen.



Figur 28: Grafen färgläggs med tre färger enligt RLF-algoritmen. Vita hörn ingår i X, svarta hörn ingår i Y och färglagda hörn ingår i någon mängd C_i.

RLF-algoritmen är en förkortning av ”recursive largest first” (rekursiv störst först, min översättning). Likt DSatur-algoritmen kommer de hörn som är mest begränsade när det kommer till färgläggning att prioriteras. Dessutom visar det sig att RLF-algoritmen, precis som DSatur-algoritmen, ger en optimal färgläggning för bipartita grafer, cykelgrafer och hjulgrafer [10].

Observera att både DSatur-algoritmen och RLF-algoritmen ger samma färgläggning i Exempel 5.2.1 och 5.2.2. Det gäller dock inte alltid, men kan inträffa beroende på vald graf.

6 Diskussion

I den inledande delen av uppsatsen definieras begrepp som anses relevanta för hela arbetet. Vissa begrepp som främst dyker upp i specifika avsnitt definieras istället under det avsnitt där det kommer att behandlas.

Därefter behandlas färgläggningar med två, tre och fem färger. Satser som beskriver olika färgläggningar formuleras och bevisas, liksom ett antal nödvändiga lemman. Det visar sig att en graf kan färgläggas med två färger om grafen är bipartit. En sats som endast nämns är Grötzschs sats för färgläggning med tre färger. Grötzschs sats är ett specialfall av den sats för färgläggning med tre färger som beskrivs mer detaljerat i avsnittet. Anledningen till att Grötzschs sats inte bevisas är att det inte skulle rymmas varken inom den tänkta nivån på uppsatsen eller inom tidsramen. För färgläggning med fem färger formuleras och bevisas femfärgssatsen som är en svagare variant av fyrfärgssatsen, men med ett enklare bevis. Här introduceras Kempe för första gången och begreppet kempekedja definieras. Även om Kempe inte lyckades att bevisa fyrfärgssatsen har han bidragit med många viktiga delar till beviset.

Fyrfärgssatsen bevisas inte i sin helhet då beviset är för omfattande för att få plats i den här uppsatsen. Däremot beskrivs idéerna kring beviset där begreppen oundviklig mängd, reducibla konfigurationer och urladdning är centrala.

Avslutningsvis behandlas ett antal algoritmer för färgläggning. Vi ser exempelvis att antalet färger som behövs för att färglägga en graf med den giriga färgläggningsalgoritmen är helt beroende av vilken ordning vi valt på hörnen.

För att bevisa de olika satserna används olika typer av bevismetoder, till exempel induktionsprincipen och motsägelsebevis. Genom hela uppsatsen kompletteras text och formler med förklarande figurer. Uppsatsen har skrivits som ett led i att nå en lärarexamen i matematik med inriktning mot gymnasieskolan. Därför har språket och innehållet anpassats för att passa gymnasieelever och uppsatsen kan därför användas som ett komplement i matematikundervisningen.

7 Litteratur

[1] Adegbindin, M., Hertz, A. & Bellaïche, M. (2016). A new efficient RLF-like algorithm for the vertex coloring problem. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 26(4):441-456.

[2] Appel, K. & Haken, W. (1977). Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3):429-490.

[3] Appel, K., Haken, W. & Koch, J. (1977). Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3):491-567.

[4] Appel, K. & Haken, W. (1977). The solution of the four-color-map problem. *Scientific American*, 237(4):108-121.

[5] Bagge, J. & Nicklasson, L. (2018-2019). *Grafteori med inriktning på färgläggning.* Stockholm: KTH och Stockholms universitet.

[6] Bondy, J. A. & Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory.* Berlin: Springer.

[7] Borodin, O. V., Kostochka, A. V., Lidický, B. & Yancey, M. (2012). Short proofs of coloring theorems on planar graphs. *European Journal of Combinatorics*, 36(2014):314-321.

[8] Diestel, R. (2017). *Graph Theory.* Berlin: Springer.

[9] Kostochka, A. & Yancey, M. (2012). Ore's conjecture for $k = 4$ and Grötzsch's theorem. *Combinatorica*, 34(3)(2014)323-329.

[10] Lewis, R.M.R. (2016). *A guide to graph colouring.* Berlin: Springer.

[11] Math at Andrews (u.å.). *Graph theory 8: Four color theorem (Kempe's proof).* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=adZZv4eEPs8

[12] Nabiha, A. (2012). *Grötzsch's theorem.* Waterloo, Ontario, Canada: University of Waterloo.

[13] Vaderlind, P. (2016). *Matematiska utmaningar.* Lund: Studentlitteratur AB. Hämtad från: https://www.studentlitteratur.se/globalassets/inriver /resources/matematiska-utmaningar—kap.-15-16.pdf

[14] Wikipedia contributors. Greedy algorithm - Wikipedia, the free encyclopedia, 2022.

[15] Wikipedia contributors. Herbert Grötzsch - Wikipedia, the free encyclopedia, 2022.

[16] Wikipedia contributors. Four color theorem - Wikipedia, the free encyclopedia, 2022.

[17] Wikipedia contributors. Kempe chain - Wikipedia, the free encyclopedia, 2022.

[18] Wilson, R. A. (2002). *Graphs, Colourings and the Four-graph theorem*. New York: Oxford University Press Inc.