



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Pólya's Teorem och dess tillämpningar

av

**Gustav Sidebo**

2022 - No K25



# Pólya's Teorem och dess tillämpningar

Gustav Sidebo

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2022





Stockholms  
universitet

# Pólya's Teorem och dess tillämpningar

Gustav Sidebo  
19940511  
gustav@sidebo.se

Självständigt arbete i Matematik  
Matematiska institutionen - Stockholms universitet  
Handledare: Rikard Bögvad  
VT 2022

# Sammanfattning

Denna uppsats handlar om det som på engelska kallas för ”*Pólya’s Enumeration Theorem*”, vilket fått sitt namn efter matematikern George Pólya. Teoremet publicerades först av J. Howard Redfield 1927, men upptäcktes av Pólya 10 år senare oberoende av Redfield.<sup>1</sup> Grovt sammanfattat handlar teoremet om hur många sätt man kan märka en viss kombinatorisk struktur. Dessa märkningar kan bestå av olika saker beroende på sammanhanget. Det kan vara olika färgningar av en kub, beståndsdelar i en molekyl eller bara siffror som man ger till en viss graf. Mer matematiskt uttryckt handlar det om hur en viss grupp verkar på en mängd. Efter vissa nödvändiga definitioner och satser kommer beviset för teoremet att presenteras, och därefter följer några tillämpningar där det framgår vilken användning man kan ha av det.

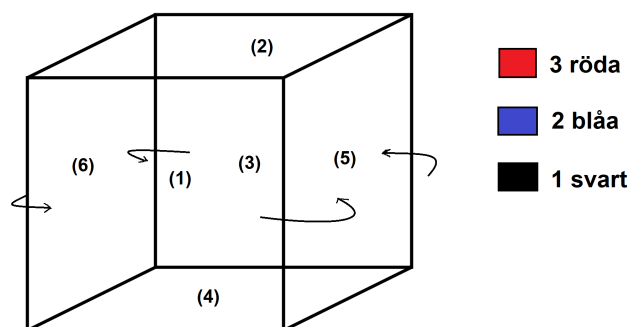
---

<sup>1</sup> G. Pólya, R.C. Read, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds*, Springer-Verlag, New York, 1987, s. 118.

# Innehåll

1	Inledning . . . . .	3
2	Grupper, gruppverkan och Burnside's Lemma . . . . .	4
	2.1 Lemma: . . . . .	5
	2.2 Sats: . . . . .	6
	2.3 Burnside's Lemma: . . . . .	7
3	Representationer och färgningar . . . . .	8
	3.1 Definition: . . . . .	8
	3.2 Sats: . . . . .	8
	3.3 Definition: . . . . .	9
	3.4 Definition, färgningar: . . . . .	9
	3.5 Sats: . . . . .	10
	3.6 Sats: . . . . .	10
4	Cykelindex . . . . .	11
	4.1 Exempel: . . . . .	11
5	Genererande funktioner, och vikten av en cykeltyp . . . . .	13
	5.1 Definition: . . . . .	13
	5.2 Definition: . . . . .	15
	5.3 Sats: . . . . .	15
	5.4 Burnside's lemma, viktad version: . . . . .	17
6	Pólya's teorem: . . . . .	18
	6.1 Sats: . . . . .	18
	6.2 Exempel . . . . .	19
7	Tillämpningar . . . . .	20
	7.1 Beräkning av antalet molekyler . . . . .	20
	7.2 Grafteori . . . . .	25
	7.3 Sats: . . . . .	27
8	Konklusion . . . . .	33
9	Appendix . . . . .	35
	9.1 Cyklopropan . . . . .	35

# 1 Inledning



Figur 1: En kub.

Tag en vanlig kub, med 6 sidor, och anta att vi har 3 olika färger att välja mellan, röd, blå och svart. Antag vidare att vi får använda den röda färgen på 3 sidor, den blåa på 2 och den svarta på bara 1. Hur många sätt kan vi då färga kuben på? En första ansats är att vi låter kuben ligga stilla och bara räknar antalet sätt att färga den. De tre röda färgerna kan vi lägga ut på  $\binom{6}{3}$  olika sätt. För varje sådan färgning har vi sedan 2 blåa färger kvar bland 3 sidor. Totalt blir det alltså  $\binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = 60$  stycken olika färgningar. Problemet är dock att vissa av dessa färgningar kommer vara identiska. Antag till exempel att vi har 3 röda färger på 3 av väggarna, 2 blåa färgningar på botten och locket, och en svart färgning på den sista väggen. Vrider vi nu kuben 90 grader moturs längs den vertikala axeln har vi en ny färgning. I vår första lösning räknas denna färgning som en ny kub, icke-identisk med någon av de andra. Men det är ju uppenbarligen en och samma kub, varför vi med denna lösning kommer räkna vissa färgningar för många gånger.

En bättre idé vore då att börja i andra änden. Vi kollar hur många sätt vi kan vrida och vända kuben på, och sen undersöker vi vad som händer med olika färgningar under dessa transformationer. Det är denna strategi som används i Burnside's lemma och vi börjar med en genomgång av detta.



## 2 Grupper, gruppverkan och Burnside's Lemma

### 2.0.1 Definition:

Låt  $G$  vara en grupp, och låt  $X$  vara en mängd. En gruppverkan  $\phi$  av  $G$  på mängden  $X$  definieras som en avbildning

$$\phi : G \times X \rightarrow X,$$

vilken uppfyller identitets- och kompositionalitetsaxiomen

$$\phi(e, x) = x,$$

$$\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x)$$

för alla  $g_1, g_2 \in G$  och  $x \in X$ . För enkelhetens skull skriver vi ofta bara  $gx$  istället för  $\phi(g, x)$ .<sup>2</sup>

### 2.0.2 Definition:

Vi definierar banan av ett element i  $X$  som

$$Gx = \{y \in X : gx = y, \text{ för något } g \in G\}.$$
<sup>3</sup>

Det är med andra ord alla element som  $x$  kan skickas till under verkan av ett element  $g \in G$ . Om vi tänker på tillbaka på kuben kan vi då låta mängden  $\{1, 2, \dots, 6\}$  stå för sidorna och sedan låter vi gruppen vara mängden av permutationer som skickar olika sidor på varandra. Vi får uppenbarligen endast en bana i det här fallet eftersom varje sida kan skickas till varje annan sida.

### 2.0.3 Lemma:

Låt  $G$  vara en ändlig grupp som verkar på en ändlig mängd  $X$ . Då är banan av  $x$ ,  $Gx$ , en ekvivalensklass, under relationen  $x \sim y$  om  $x \in Gy$ .

**Reflexivitet:** Identitets-elementet  $e$  finns alltid i en grupp, och då har vi att  $ex = x$ , det vill säga  $x \in Gx$ .

**Symmetri:** Anta att  $y \in Gx$ . Då finns  $g \in G$  sådant att  $gx = y$ , och alltså är  $g^{-1}y = x$ . Men då är  $x \in Gy$ .

**Transitivitet:** Anta att  $x \in Gy$  och  $y \in Gz$ . Då finns  $g_1, g_2 \in G$  s.a.  $g_1 y = x$  och

<sup>2</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Group\\_action](https://en.wikipedia.org/wiki/Group_action)

<sup>3</sup> Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics* (sec. ed), Oxford University Press, 2002, s.284. I hela avsnitt 2 använder jag mig av Biggs notation.

$g_2z = y$ . Detta ger  $g_2z = g_1^{-1}x$ , och alltså är  $g_1g_2z = x$ . Men då finns  $g_1g_2 = g \in G$  s.a.  $gz = x$ , det vill säga  $x \in Gz$ .

□

## 2.0.4 Definition:

Stabilisatorn av  $x$  definieras som

$$G_x = \{g \in G : gx = x \text{ för något } x \in X\}.$$

Värt att notera är att denna mängd kommer utgöra en delgrupp av  $G$ . Identitetselementet ingår alltid, och samtidigt gäller för varje  $g_1, g_2 \in G_x$  att  $g_1g_2x = g_1x = x$ , och alltså gäller att  $g_1g_2 \in G_x$ . Dessutom om  $g \in G_x$ , har vi att  $gx = x \Leftrightarrow g^{-1}x = x$ , så  $g^{-1} \in G_x$ . Vi behöver även följande lemma.

## 2.1 Lemma:

Om  $H$  är en delgrupp av  $G$ , utgör de vänstra sidoklasserna  $gH$  ekvivalensklasser under relationen  $g_1 \sim g_2$  om  $g_1 \in g_2H$ .

**Reflexivitet:**  $H$  är en grupp så är  $e \in H$ . För varje sidoklass  $gH$  gäller alltså att  $ge = g \in gH$ .

**Symmetri:** Anta att  $g_1 \in g_2H$ . Då är  $g_1 = g_2g_i$  för något  $g_i \in H$ . Detta ger  $g_2 = g_1g_i^{-1}$ .  $H$  är en grupp så  $g_i^{-1} \in H$ . Alltså är  $g_2 \in g_1H$ .

**Transitivitet:** Anta att  $g_1 \in g_2H$  och  $g_2 \in g_3H$ . Då är  $g_1 = g_2g_i$  för något  $g_i \in H$ . Alltså gäller  $g_1g_i^{-1} = g_2 \in g_3H$ . Då är  $g_1g_i^{-1} = g_3g_j$  för något  $g_j \in H$ , och vi får  $g_1 = g_3g_i g_j$ . Eftersom  $H$  är en grupp är  $g_i g_j \in H$ , och alltså är  $g_1 \in g_3H$ .

□

### 2.1.1 Lemma:

Om  $H$  är en delgrupp av den ändliga gruppen  $G$  och  $g \in G$ , så är  $|H| = |gH|$ .

**Bevis:** Om  $g_i \neq g_j$  och  $g_i, g_j \in H$ , följer att  $gg_i \neq gg_j$ . Andra hållet följer då vi multiplicerar med  $g^{-1}$  från vänster. Alltså är funktionen  $f : H \rightarrow gH$  en bijektion, och  $|H| = |gH|$ .

□

### 2.1.2 Lagrange's teorem:

Om  $H$  är delgrupp av den ändliga gruppen  $G$  så är  $\frac{|G|}{|H|} = |G : H|$  ett heltal.  $|G : H|$  brukar kallas indexet av gruppen  $H$  i  $G$ .<sup>4</sup>

**Bevis:** Enligt lemma 2.1 utgör de vänstra sidoklasser  $gH$  en partition av  $G$ . Enligt lemma 2.1.1 är varje sidoklass lika stor. Då följer resultatet direkt. □

### 2.2 Sats:

Låt  $\alpha$  vara en gruppverkan av en ändlig grupp  $G$  på en ändlig mängd  $X$ . Då gäller att  $|G_x| \times |Gx| = |G|$ . Om  $x$  och  $y$  är två element i samma bana, så gäller dessutom att  $|G_x| = |G_y|$ .

**Bevis:** Vi visar att  $|G : G_x| = |Gx|$ . Då följer resultatet direkt av Lagrange's teorem. Låt  $L$  vara mängden av vänstra sidoklasser  $gG_x$ . Vi skapar en funktion  $f : Gx \rightarrow L$  enligt

$$f(y) = gG_x$$

där  $gx = y$ .

Denna funktion är väldefinierad. Anta att  $g_1, g_2 \in G$  är sådana att  $g_1x = g_2x = y$  för något  $y \in X$ . Då har vi att  $g_2^{-1}g_1x = x$  och alltså är  $g_2^{-1}g_1 \in G_x$ . Då följer att  $g_1 \in g_2G_x$ . På grund av symmetrin följer då också att  $g_2 \in g_1G_x$ , och alltså kommer alla  $g \in G$  sådana  $gx = y$  tillhöra samma sidoklass.

Om  $f$  dessutom är bijektiv följer att  $|G : G_x| = |Gx|$ .

**Injektivitet:** Anta att  $f(y_1) = f(y_2)$ , där  $y_1, y_2 \in Gx$ . Då gäller att

$$g_1G_x = g_2G_x \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in G_x \Rightarrow g_1x = g_1(g_1^{-1}g_2)x = g_2x \Rightarrow g_1 = g_2$$

och alltså är  $y_1 = y_2$ .

**Surjektivitet:** Låt nu  $g_1G_x$  vara en sidoklass, där  $g_1x = y$  och  $g \in G_x$ . Då är  $g_1gx = g_1x = y$ . Alltså är  $y \in Gx$  och alltså finns ett  $y$  sådant att  $f(y) = g_1G_x$ .

Om  $x$  och  $y$  är i samma bana gäller att  $|Gx| = |Gy|$ . Vårt resultat ger då att

$$|Gx||G_x| = |Gy||G_y| = |G| \Rightarrow |G_x| = |G_y|. \quad \square$$

---

<sup>4</sup> Biggs, s.274.

### 2.2.1 Definition:

Slutligen definierar vi även fixpunktsmängden av  $g$  som

$$F(g) = \{x \in X : gx = x \text{ för något } g \in G\}.$$

Nu har vi alla nödvändiga definitioner på plats. Vi kommer nu titta på mängden av par sådana att

$$S = \{(g, x) : gx = x\},$$

och vi ska räkna hur stor denna mängd är. För det ändamålet bildar vi sanningsfunktionen

$$v(\text{påstående}) = \begin{cases} 1 & \text{om sant} \\ 0 & \text{om falskt.} \end{cases}$$

När vi sedan räknar mängden kommer vi använda oss av det faktum att produkten av två summor kommuterar. Det vill säga

$$\sum_{x \in X} \sum_{g \in G} v(gx = x) = \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} v(gx = x).$$

Enligt definition **2.0.4** och **2.2.1** kan detta skrivas om till

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|.$$

Låt nu  $D \subseteq X$  där vi har ett element från varje bana i  $X$ . Enligt **2.0.3** kommer uppdelning av  $X$  i banor utgöra en partition, och alltså gäller att

$|\sum_{x \in X} | = |\sum_{x \in D} \sum_{y \in Gx} |$ . Utvecklar vi vänsterledet får vi, enligt sats **2.2**,

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in D} \sum_{y \in Gx} |G_y| = \sum_{x \in D} |Gx| |G_x| = \sum_{x \in D} |G|.$$

Sätter vi detta lika med högerledet får vi alltså att

$$\sum_{x \in D} |G| = \sum_{g \in G} |F(g)|,$$

vilket ger oss följande lemma.

### 2.3 Burnside's Lemma:

Låt  $G$  vara en ändlig grupp som verkar på en ändlig mängd  $X$ . Då gäller att antalet banor  $t$  i  $X$  är

$$t = \left| \sum_{x \in D} | \right| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|.$$

### 3 Representationer och färgningar

I exemplet med kuben valde vi att märka sidorna med färger. Vi skulle kunnat fråga oss hur många sätt vi färgar till exempel hörnen istället. Beroende på vad vi är intresserade av kommer olika permutationer vara relevanta. Vill vi färga sidorna är det naturligt att låta dessa ingå i vår mängd  $X$ , och sedan permutera dessa. Vill vi istället färga hörnen väljer vi med fördel dessa som våra objekt i  $X$  som permuteras. I detta avsnitt antar vi att  $G$  är en ändlig grupp som verkar på en ändlig mängd  $X$ , och vi kommer fortsätta hålla oss till det antagandet.

#### 3.1 Definition:

En representation  $\pi$  är en grupphomomorfi sådan att

$$\pi : G \rightarrow S_X,$$

där  $S_X$  är alla permutationer vi kan bilda utav mängden  $X$ , alltså symmetrigruppen.<sup>5</sup> Eftersom det är en homomorfi ska identitets- och kompositionsaxiomet gälla. Det vill säga

$$\pi(e) = Id_X,$$

$$\pi(g_1g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2).$$

#### 3.2 Sats:

$\phi : G \times X \rightarrow X$  är en gruppverkan  $\Leftrightarrow \pi : G \rightarrow S_X$  är en grupphomorfi.

**Bevis:** Vi visar först  $\Rightarrow$ . Eftersom  $G$  är en grupp så har varje  $g \in G$  en invers  $g^{-1} \in G$ . Detta innebär att vi kan se på varje  $g$  som en bijektiv funktion  $x \mapsto gx \in X$ , från  $X$  till sig själv. Men detta är just definitionen av vad en permutation är, och alltså kommer varje  $g$  inducera en viss permutation av elementen i  $X$ . För varje  $x \in X$  gäller att  $\phi(e, x) = x$ , och alltså kommer  $\pi(e) = Id_x$ . För kompositionalitet får vi

$$\pi(g_1)\pi(g_2)(x) = \pi(g_1)(\pi(g_2)(x)) = \phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1g_2, x) = \pi(g_1g_2)(x)$$

för ett godtyckligt element  $x \in X$ , och alltså är  $\pi$  en grupphomorfi. För  $\Leftarrow$  går vi baklänges. Varje permutation som ett visst  $g$  skickas på kommer ge upphov till en viss verkan  $\phi$  på  $X$ , och vi definierar den som  $\phi(g, x) := \pi(g)$ . Enligt antagandet gäller att  $\pi(e) = Id_X$ , och alltså gäller för varje  $x \in X$  att  $\phi(e, x) = x$ . Kompositionalitet

---

<sup>5</sup> J.W. Nienhuys, *de Bruijn's combinatorics*, Classroom notes, March 20, 2012, s. 40-41.  
<https://vixra.org/pdf/1208.0223v1.pdf>

ger

$$\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \pi(g_1)(\pi(g_2)(x)) = \pi(g_1)\pi(g_2)(x) = \pi(g_1g_2)(x) = \phi(g_1g_2, x)$$

och alltså är  $\phi$  en gruppverkan.

□

### 3.3 Definition:

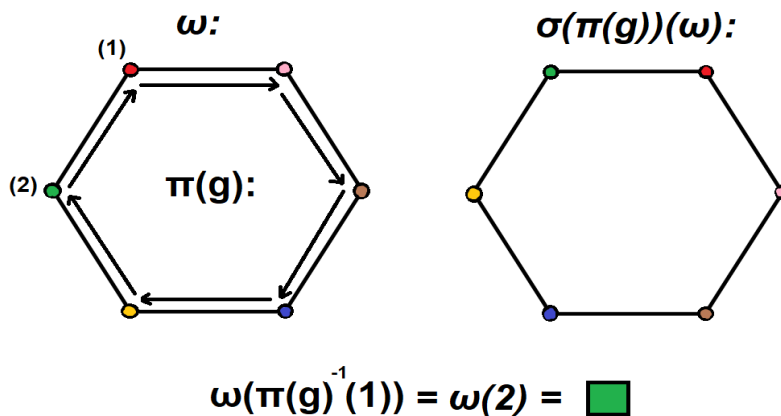
Låt  $\pi : G \rightarrow S_X$  vara en representation, där  $G$  som vanligt är vår grupp och  $X$  mängden den verkar på. Om  $\pi$  är injektiv kallas  $\pi$  för en *trogen* representation.

### 3.4 Definition, färgningar:

Vi antar återigen att  $\pi : G \rightarrow S_X$  är en representation, som dessutom är trogen. Vi vill färga elementen i  $X$ . Låt antalet färger vara en ändlig mängd  $K = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ , där vi antar att vi har minst två färger, alltså  $r \geq 2$ . En färgning är då en funktion  $\omega : X \rightarrow K$ , och mängden av alla färgningar betecknar vi med  $\Omega$ .

Vi definierar en till representation  $\sigma : G \rightarrow S_\Omega$  enligt

$$\sigma(\pi(g))(\omega)(x) = \omega(\pi(g)^{-1}(x)).$$



Figur 2: Exempel på en representation  $\sigma$  av symmetrigruppen till en 6-hörning. Elementet  $\pi(g)$  är här en rotation 60 grader medurs.

Denna representation kan alltså ses som en verkan  $\varphi : G \times \Omega \rightarrow \Omega$  som helt och hållet bestäms av  $G$ 's verkan på  $X$ .

### 3.5 Sats:

Representationen  $\sigma$  är trogen.

**Bevis:** Först kontrollerar vi att det verkligen är en representation. Vi får

$$\sigma(\pi(e))\omega(x) = \omega(\pi(e)^{-1}(x)) = \omega(ex) = \omega(x),$$

så under identitets-elementet kommer  $\sigma$  inte göra någonting med färgningen. För komposition gäller att

$$(\sigma(\pi(g_1g_2))(\omega))(x) = \omega(\pi(g_1g_2)^{-1}(x)) = \omega(\pi(g_2^{-1}g_1^{-1})(x)).$$

Å andra sidan har vi

$$\begin{aligned} \sigma(\pi(g_1))\sigma(\pi(g_2))(\omega)(x) &= \sigma(\pi(g_1))(\sigma(\pi(g_2))(\omega))(x) = \\ &= \sigma(\pi(g_2))(\omega(\pi(g_1)^{-1}(x))) = \omega(\pi(g_2)^{-1}\pi(g_1)^{-1}(x)) = \omega(\pi(g_2^{-1}g_1^{-1})(x)) \end{aligned}$$

och alltså är båda axiomen uppfyllda. Antag nu att  $\sigma(\pi(g_1)) = \sigma(\pi(g_2))$ . Då gäller att

$$\sigma(\pi(g_1))(\omega)(x) = \sigma(\pi(g_2))(\omega)(x) \Leftrightarrow \omega(\pi(g_1)^{-1}(x)) = \omega(\pi(g_2)^{-1}(x))$$

för alla  $\omega \in \Omega$  och alla  $x \in X$ . Låt nu  $\omega$  vara en färgning som ger en unik färg till ett visst  $x$ . För varje  $x$  kan vi hitta en sådan färgning, eftersom antalet färger var minst 2, och då följer att  $\pi(g_1)^{-1}(x) = \pi(g_2)^{-1}(x)$  för alla  $x \in X$ , och alltså gäller  $\pi(g_1) = \pi(g_2)$ . Men då är  $\sigma$  injektiv och alltså trogen. □

### 3.6 Sats:

Låt förutsättningarna vara som i 3.4. Vi definierar en ny fixpunktmängd som  $F(\sigma(\pi(g))) = \{\omega \in \Omega : \sigma(\pi(g))(\omega) = \omega\}$ . Låt  $(...xyz...)$  vara en cykel i  $\pi(g)$ . Då kommer  $\omega \in F(\sigma(\pi(g)))$  ge samma färg till alla element i denna cykel.

**Bevis:** Definitionen av fixpunktmängden ger oss att

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \sigma(\pi(g))(\omega)(z) = \omega(\pi(g)^{-1}(z)) = \omega(y) = \\ &= \sigma(\pi(g))(\omega)(y) = \omega(\pi(g)^{-1}(y)) = \omega(x) = \dots \end{aligned}$$

Vi kan fortsätta så tills vi kommit hela vägen runt, och alltså måste alla element i samma cykel tilldelas samma färg. □

## 4 Cykelindex

Vi såg att varje element inom samma cykel för någon viss permutation kommer tilldelas samma färg när vi tittar på en färgning i gruppelementets fixpunktsmängd. Detta kommer visa sig vara användbart när vi vill räkna antalet icke-identiska färgningar, vilket motiverar följande definitioner.

### 4.0.1 Definition:

Låt  $\alpha$  vara en permutation av  $n$  element. Då är  $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$   $\alpha$ 's cykeltyp, där  $\alpha_1$  är antalet 1-cykler i  $\alpha$ ,  $\alpha_2$  antalet transpositioner, och så vidare.

### 4.0.2 Definition:

Vi låter som vanligt  $\pi : G \rightarrow S_X$  vara representationen som induceras av  $G$ , och låt  $\alpha = \pi(g)$  vara en permutation med cykeltyp  $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$ . Då definierar vi *cykelmonomet* av  $g$  som

$$p_{g,\pi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

där  $x_1, x_2, \dots, x_n$  är variabler i en polynomring.<sup>6</sup>

### 4.0.3 Definition:

Låt förutsättningarna vara som i 4.0.2 där  $\pi$  är en representation. Då definierar vi *cykelindexet* av  $G$  under  $\pi$  som

$$P_{G,\pi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p_{g,\pi}(x_1, x_2, \dots, x_n).<sup>7</sup>$$

## 4.1 Exempel:

Vi tittar på vårt tidigare exempel på sida 3 med permutationer av sidorna på en kub. Vi går först igenom hela gruppen av permutationer. Enligt vårt antagande är varje  $g \in G$  någon rotation av kuben, och denna verkan  $\phi$  kommer att inducera en permutation av sidorna. Vi märker sidorna med siffror som i bilden på sida 3 och låter  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  vara mängden av dessa. Då är vår representation  $\pi : G \rightarrow S_X$  trogen. Anta att  $g_1 \neq g_2$ . Då finns något  $x$  så att  $\phi(g_1, x) \neq \phi(g_2, x)$  och alltså är  $\pi(g_1) \neq \pi(g_2)$ , det vill säga  $\pi$  är injektiv. Uppenbarligen gäller att  $|Gx| = 6$  för godtyckligt  $x \in X$ . Samtidigt kan vi också lätt se att  $|G_x| = 4$ . Låser vi en sida, så måste också axeln mellan mittpunkten på denna sida och den motsatta fixeras,

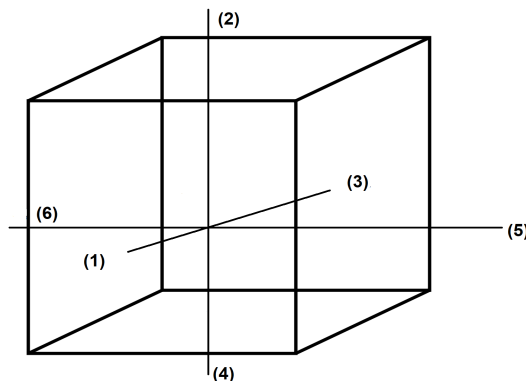
---

<sup>6</sup> Jag har i konsultation med min handledare hittat på denna terminologi, av bekvämlighetsskäl.

<sup>7</sup> De Bruijn, s. 41



så kan vi snurra de övriga sidorna 4 gånger. Alltså har vi  $|G| = |Gx| \cdot |G_x| = 24$  stycken permutationer. Vi går igenom dessa i tur och ordning.



Figur 3: Kub med axlar.

- Vridning längs den horisontella axeln genom sidorna (5) och (6):  
 $(1234)$ ,  $(13)(24)$ ,  $(1432)$ . Cykelmonom:  $x_1^2 x_4$ ,  $x_1^2 x_2^2$ .
- Vridning längs axeln i djupled genom sidorna (1) och (3):  
 $(2546)$ ,  $(24)(56)$ ,  $(2645)$ . (Cykelmonom samma som ovan.)
- Vridning längs den vertikala axeln genom sidorna (2) och (4):  
 $(1536)$ ,  $(13)(56)$ ,  $(1635)$ .
- Vridning längs vertikala axeln och sedan horisontella:  
 $(152)(364)$ ,  $(15)(24)(36)$ ,  $(154)(236)$ ,  
 $(162)(354)$ ,  $(16)(24)(35)$ ,  $(164)(235)$ . Cykelmonom:  $x_3^2$ ,  $x_2^3$ .
- Vridning längs horisontella axeln och sedan vertikala:  
 $(125)(346)$ ,  $(12)(34)(56)$ ,  $(126)(345)$ ,  
 $(146)(253)$ ,  $(14)(23)(56)$ ,  $(145)(263)$ .
- Vridning längs djupleds-axeln och sedan vertikala:  
 $(13)(25)(46)$ ,  $(13)(26)(45)$ .

Lägger vi ihop alla dessa permutationer tillsammans med identitetselementet, vars cykelmonom är  $x_1^6$ , får vi 24 stycken permutationer. Vi kan göra en tabell av bidragen till cykelindexet för varje permutation  $\pi(g)$ .

$g$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$p_{g,\pi}$
id	6	-	-	-	-	-	$x_1^6$
(1234)	2	-	-	1	-	-	$x_1^2 x_4$
...	...	...	...	...	...	...	...
(13)(24)	2	2	-	-	-	-	$x_1^2 x_2^2$
...	...	...	...	...	...	...	...
(12)(34)(56)	-	3	-	-	-	-	$x_2^3$
...	...	...	...	...	...	...	...
(125)(346)	0	-	2	-	-	-	$x_3^2$
...	...	...	...	...	...	...	...

Gör vi denna lista komplett och lägger ihop alla bidrag får vi för vår kub cykelindexet

$$P_{G,\pi}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2 x_4 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2),$$

där koefficienterna framför varje monom anger hur många  $g$  vi har av den typen.

## 5 Genererande funktioner, och vikten av en cykeltyp

I många sammanhang när man vill räkna antalet icke-identiska färgningar det finns av en viss kombinatorisk figur så är man intresserad av en specifik typ av färgning. I fallet med kuben i inledning var vi intresserade av färgningen med 3 röda sidor, 2 blå och 1 svart. Men vi hade lika gärna kunnat fråga oss hur många färgningar det fanns med 2 röda, 2 blåa och 2 svarta sidor. För att täcka alla möjliga olika fall kommer vi utrusta oss med genererande funktioner.

### 5.1 Definition:

Låt  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vara variabler i en polynomring  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , och låt  $u_\alpha, \dots, u_{\alpha^*}$  vara koefficienter i en kommutativ ring  $R$ . Då definierar vi en genererande funktion  $U$  som uttrycket

$$U(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\alpha} u_{\alpha} x^{\alpha}$$

där  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  är en  $n$ -tupel, och  $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ .<sup>8</sup> Motsvarande definition för bara en variabel  $x$  blir liknande, men då har vi ett 1-dimensionellt index istället för tuplar.

<sup>8</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial\\_ring](https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_ring)

### 5.1.1 Exempel, växling:

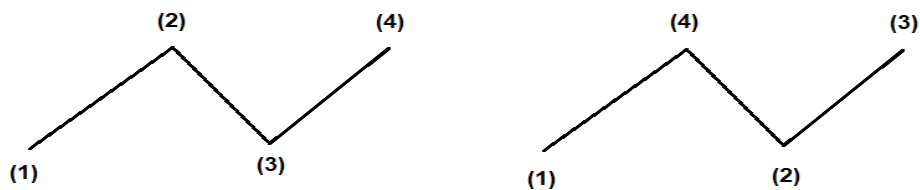
Denna typ av uttryck är användbara i många kombinatoriska sammanhang. Antag att vi vill växla in 10 kronor mot 1-kronor, 2-kronor och 5-kronor, och vi vill veta hur många sätt det kan göras på. Låt  $(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})$  vara antalet 1-kronor, där 1 står för ingen 1-krona,  $x$  för en 1-krona, och så vidare. På samma sätt låter vi  $(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{10})$  vara antalet 2-kronor, och  $(1 + x^5 + x^{10})$  antalet 5-kronor. Om vi nu multiplicerar ihop alla dessa uttryck får vi en genererande funktion

$$\begin{aligned} U(x) &= (1 + x + \dots + x^{10})(1 + x^2 + \dots + x^{10})(1 + x^5 + x^{10}) \\ &= x^{30} + x^{29} + 2x^{28} + \dots + 10x^{10} + \dots + x + 1. \end{aligned}$$

Här betyder alltså  $+$ -tecknet helt enkelt "eller", och när vi multiplicerar ihop alla kombinationer får vi att totala antalet sätt att få ihop 10 kronor är 10. Vår genererande funktion är alltså egentligen inte en funktion, eftersom vi aldrig stoppar in någonting i  $U$  och får ut något annat, utan vi räknar bara koefficienterna. Det enda vi är intresserade av är att kunna manipulera uttrycken, så att vi kan samla ihop koefficienterna av samma typ. Vi behöver alltså bara en kommutativ ring, oftast bara heltalen  $\mathbb{Z}$ .

### 5.1.2 Exempel, grafer:

En märkt graf är en graf där alla hörn blivit unikt färgade med en siffra. En icke-märkt graf är då en graf där vi inte tar hänsyn till färgningen av hörnen.



Figur 4: Två icke-identiska märkta grafer.

Vi går igenom exakta villkoren för då två icke-märkta grafer är ekvivalenta senare, men vi ser i figur 4 att de två graferna uppenbarligen är ekvivalenta om vi ignorerar färgningarna.

Vi vill räkna antalet märkta grafer med  $h$  hörn och  $k$  kanter. Totala antalet kanter som går att bilda av  $h$  hörn blir  $N = \binom{h}{2}$  stycken. Vi väljer sedan de kanter vi vill ha, och får att antalet grafer blir  $\binom{N}{k} = \binom{\binom{h}{2}}{k}$ . Vi kan då skapa en genererande

funktion  $G_h(x)$ , vars koefficienter framför en viss term  $x^k$  anger antalet grafer med  $h$  hörn och  $k$  kanter.<sup>9</sup> För ett givet  $h$  blir alltså den genererande funktionen

$$G_h(x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k = (1+x)^N$$

där  $N = \binom{h}{2}$ . Ett val av en 1:a i produkten innebär alltså här ”icke-kant” och ett val av  $x$  innebär kant. Om vi då har till exempel  $h = 6$  hörn, får vi uttrycket

$$\sum_{k=0}^{\binom{6}{2}} \binom{\binom{6}{2}}{k} x^k = (1+x)^{15} = x^{15} + 15x^{14} + \dots + 6435x^7 + \dots$$

Det blir långt, men använder vi wolfram alpha kan vi till exempel se att vi får termen  $6435x^7$ , och alltså finns det 6435 stycken icke-identiska märkta grafer med 7 kanter och 6 hörn.

## 5.2 Definition:

Låt förutsättningarna vara som i definition 3.4. För ett  $\omega \in \Omega$  definierar vi *vikten*, även kallad *indikatorn*, som

$$\text{ind}(\omega) = f_1^{n_1} f_2^{n_2} \dots f_r^{n_r}$$

där  $n_1$  är antalet element i  $X$  som får färg  $f_1$ ,  $n_2$  antalet som får  $f_2$ , och så vidare.<sup>10</sup>

### 5.2.1 Definition:

Antag nu att vi väljer en godtycklig delmängd  $A$  av antalet färgningar  $\Omega$ . Vi definierar då en genererande funktion enligt

$$U_A(f_1, f_2, \dots, f_r) = \sum_{\omega \in A} \text{ind}(\omega).^{11}$$

Notera här att våra  $f_1, f_2, \dots, f_r$  både är färgerna i  $K$  och variablerna i en polynomring.

## 5.3 Sats:

Vi antar återigen att förutsättningarna är som i definition 3.4. Låt  $\alpha = \pi(g) \in S_X$  vara en given permutation, med cykelmonomet  $p_{g,\pi}(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k}$ . Vi

<sup>9</sup> F. Harary and E. Palmer, *Graphical Enumeration*, Academic Press, New York, 1973, s. 3.

<sup>10</sup> Biggs, s.401

<sup>11</sup> Ibid

definierar även  $B_g \subseteq \Omega$  som  $B_g = F(\sigma(\pi(g)))$ . Då är

$$U_{B_g}(f_1, f_2, \dots, f_r) = p_{g,\pi}\left(\sum_{f \in K} f^1, \sum_{f \in K} f^2, \dots, \sum_{f \in K} f^k\right).$$

**Bevis:** Per definition är

$$U_{B_g}(f_1, f_2, \dots, f_r) = \sum_{\omega \in B_g} \text{ind}(\omega).$$

Om  $\omega \in F(\sigma(\pi(g)))$  måste varje element i  $X$  inom samma cykel i  $\pi(g)$  tilldelas samma färg, enligt sats **3.6**. Om vi då har  $\alpha_1$  1-cykler har vi  $|K| = r$  val för varje sådan cykel. Antalet möjliga kombinationer blir alltså  $(f_1 + f_2 + \dots + f_r)^{\alpha_1}$ . För transpositionerna gäller samma princip, men då är det 2 element som får samma färg, och vi får alltså  $(f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_r^2)^{\alpha_2}$  möjliga kombinationer. Samma princip gäller för resterande cykeltyper. Produkten av termerna för varje cykeltyp ger då totala antalet färgningar  $\omega \in F(\sigma(\pi(g)))$ . Alltså gäller

$$\begin{aligned} U_{B_g}(f_1, f_2, \dots, f_r) &= \sum_{\omega \in B_g} \text{ind}(\omega) = \\ &= (f_1 + f_2 + \dots + f_r)^{\alpha_1} (f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_r^2)^{\alpha_2} \dots (f_1^k + f_2^k + \dots + f_r^k)^{\alpha_k} = \\ &= p_{g,\pi}\left(\sum_{f \in K} f^1, \sum_{f \in K} f^2, \dots, \sum_{f \in K} f^k\right). \end{aligned}$$

□

Det är behändigt ibland att göra förkortningen  $\sum_{f \in K} f^n = \rho_n$ , så att

$$p_{g,\pi}\left(\sum_{f \in K} f^1, \sum_{f \in K} f^2, \dots, \sum_{f \in K} f^k\right) = p_{g,\pi}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k).$$

Vi kommer använda detta i avsnitt **6**.

### 5.3.1 Lemma:

Låt den ändliga gruppen  $G$  verka på en ändlig mängd  $X$  och en ändlig mängd färgningar  $\Omega$ , där antalet färger är  $K = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ ,  $r \geq 2$ . Låt  $\pi : G \rightarrow S_X$  vara representationen inducerad av  $G$ 's verkan på  $X$ , och låt  $\sigma$  vara representationen definierad som i **3.4**. Om  $\omega_1$  och  $\omega_2$  är i samma bana i  $\Omega$  så är

$$\text{ind}(\omega_1) = \text{ind}(\omega_2).$$

**Bevis:** Om  $\omega_1$  och  $\omega_2$  är i samma bana, så att  $\omega_1 = \sigma(\pi(g))(\omega_2)$ , får vi enligt definitionen av  $\sigma$  att

$$\omega_1(x) = \sigma(\pi(g))(\omega_2)(x) = \omega_2(\pi(g)^{-1}(x))$$

för varje  $x \in X$ . Eftersom  $\pi(g)^{-1}$  är en bijektiv funktion kommer då  $\omega_1$  och  $\omega_2$  innehålla precis samma val av färger, det vill säga

$$\text{ind}(\omega_1) = f_1^{n_1} f_2^{n_2} \dots f_r^{n_r} = \text{ind}(\omega_2).$$

□

### 5.3.2 Lemma:

Låt förutsättningarna vara som i 3.4. Då är  $|G\omega| \times |G_\omega| = |G|$ . Om  $\omega$  och  $\omega^*$  är i samma bana gäller dessutom att  $|G_\omega| = |G_{\omega^*}|$ .

**Bevis:** Se sats 2.2.

Vi är nu nästan redo att formulera och bevisa Pólya's teorem. Men först behöver vi ett lemma.

### 5.4 Burnside's lemma, viktad version:

Låt förutsättningarna vara som i definition 3.4. Vi har alltså en grupp  $G$  som verkar på  $X$  och färgningarna  $\omega \in \Omega$ , vilket inducerar de trogna representationerna  $\pi$  och  $\sigma$ . Vi låter  $D \subseteq \Omega$  vara en delmängd där vi har en representant  $\omega$  från varje bana i  $\Omega$ . Banan definieras här som vanligt som en ekvivalensklass. Två färgningar är i samma bana om  $\omega_1 = \sigma(\pi(g))(\omega_2)$  för något  $g \in G$ . Då gäller det att

$$\sum_{\omega \in D} \text{ind}(\omega) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\omega \in F(\sigma(\pi(g)))} \text{ind}(\omega).$$

**Bevis:** Notera likheterna med Burnside's lemma 2.3. Istället för att bara räkna antalet banor har vi en funktion som är konstant på varje element i samma bana, enligt lemma 5.3.1. Sätter vi  $\text{ind}(\omega) = 1$  får vi alltså vårt förra lemma.

Beviset bygger på samma princip som för den icke-viktade varianten. Vi kommer återigen räkna en mängd av par, men vi är nu intresserade av  $S^* = \{(g, \omega) : \sigma(\pi(g))(\omega) = \omega\}$ . Återigen skapar vi en räknefunktion, modifierad på uppenbart

vis, men sedan multiplicerar vi den också med vår indikator. Vi vill alltså räkna mängden  $\sum_{(g,\omega) \in S^*} \text{ind}(\omega)$ . Vi får då att

$$\sum_{\omega \in \Omega} \sum_{g \in G} v(\sigma(\pi(g))(\omega) = \omega) \text{ind}(\omega) = \sum_{g \in G} \sum_{\omega \in \Omega} v(\sigma(\pi(g))(\omega) = \omega) \text{ind}(\omega).$$

I vänsterledet räknar vi antalet  $G_\omega = \{g \in G : \sigma(\pi(g))(\omega) = \omega\}$ , och i högerledet antalet  $F(\sigma(\pi(g))) = \{\omega \in \Omega : \sigma(\pi(g))(\omega) = \omega\}$ . Alltså har vi att

$$\sum_{\omega \in \Omega} \sum_{g \in G_\omega} \text{ind}(\omega) = \sum_{g \in G} \sum_{\omega \in F(\sigma(\pi(g)))} \text{ind}(\omega).$$

Uppdelningen av  $\Omega$  i banor är en partition, och alltså har vi att  $|\sum_{\omega \in \Omega}| = |\sum_{\omega \in D} \sum_{\omega^* \in G_\omega}|$ . Detta ger

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{g \in G_\omega} \text{ind}(\omega) &= \sum_{\omega \in D} \sum_{\omega^* \in G_\omega} \sum_{g \in G_{\omega^*}} \text{ind}(\omega^*) = \\ &= \sum_{\omega \in D} \sum_{\omega^* \in G_\omega} |G_{\omega^*}| \text{ind}(\omega^*) = \\ &= (\text{enligt lemma 5.3.1, 5.3.2}) \sum_{\omega \in D} \sum_{\omega^* \in G_\omega} |G_\omega| \text{ind}(\omega) = \\ &= \sum_{\omega \in D} |G_\omega| |G_\omega| \text{ind}(\omega) = \sum_{\omega \in D} |G| \text{ind}(\omega). \end{aligned}$$

Alltså har vi att

$$\begin{aligned} |G| \sum_{\omega \in D} \text{ind}(\omega) &= \sum_{g \in G} \sum_{\omega \in F(\sigma(\pi(g)))} \text{ind}(\omega) \Leftrightarrow \\ \sum_{\omega \in D} \text{ind}(\omega) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\omega \in F(\sigma(\pi(g)))} \text{ind}(\omega). \end{aligned}$$

□

## 6 Pólya's teorem:

### 6.1 Sats:

Låt förutsättningarna vara som i definition 3.4. Vi har återigen delmängden  $D$  med ett element ur varje bana i  $\Omega$ . Vi har även fixpunktmängden  $B_g = F(\sigma(\pi(g)))$  definierad som i sats 5.3. Då är

$$U_D(f_1, f_2, \dots, f_n) = P_{G,\pi}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n).$$

**Bevis:** Vi packar helt enkelt upp våra definitioner. Vi får att

$$\begin{aligned} & \text{(enligt definition 5.2.1)} \quad U_D(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_{\omega \in D} \text{ind}(\omega) = \\ & \text{(enligt lemma 5.4)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\omega \in F(\sigma(\pi(g)))} \text{ind}(\omega) = \\ & \text{(enligt sats 5.3)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_{B_g}(f_1, f_2, \dots, f_r) = \\ & = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p_{g,\pi} \left( \sum_{f \in K} f^1, \sum_{f \in K} f^2, \dots, \sum_{f \in K} f^k \right) = \\ & = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p_{g,\pi}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = \\ & \text{(enligt definition 4.0.3)} = P_{G,\pi}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n). \end{aligned}$$

□

## 6.2 Exempel

Vi återvänder till vår kub. Nu är  $K = \{r, b, s\}$ , där  $r$  står för röd,  $b$  för blå och  $s$  för svart. Samma regler gäller för färgningen. Vi ska alltså färga 3 sidor röd, 2 blå och 1 svart, och vi vill ta reda på hur många olika kuber det finns med den färgningen. Enligt avsnitt 4.1 är cykelindexet för kuben

$$P_{G,\pi}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

Enligt 4.1 hade vi också att representationen  $\pi$  var trogen. Vi har dessutom att  $|K| = |\{r, b, s\}| = 3$ , och alltså kommer representationen  $\sigma$  definierad som i 3.4 vara trogen. Då är alla förutsättningar uppfyllda för att använda Pólya's teorem, och vi får att

$$\begin{aligned} U_D(r, b, s) &= P_{G,\pi}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6) = \\ &= \frac{1}{24}((r + b + s)^6 + 6(r + b + s)^2(r^4 + b^4 + s^4) + \\ &+ 3(r + b + s)^2(r^2 + b^2 + s^2)^2 + 6(r^2 + b^2 + s^2)^3 + 8(r^3 + b^3 + s^3)^2). \end{aligned}$$



Det blir ett väldigt långt uttryck, men vi är bara intresserade av koefficienterna framför  $r^3b^2s$ . Vi kan då notera att just denna produkt endast kan komma ifrån utvecklingen av  $(r + b + s)^6$  och  $(r + b + s)^2(r^2 + b^2 + s^2)^2$ . I alla övriga produkter kommer någon av potenserna för  $r, b$  och  $s$  bli för stor.

I utvecklingen av  $(r + b + s)^6$  kan vi välja 3 parenteser där vi väljer  $r$ , två parenteser där  $b$  väljs, och sedan väljer vi  $s$  i den sista. Detta kan göras på  $\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 60$  olika sätt.

I utvecklingen av  $(r + b + s)^2(r^2 + b^2 + s^2)^2$  måste vi välja vår svarta färg i någon av parenteserna  $(r + b + s)$ . Därefter måste vi välja  $r$  i den andra parenteserna av den formen, för att få  $r^3$ . Vi har sedan två val av parenteser för vårt  $b^2$ . Detta kan alltså göras på  $2 \cdot 2 = 4$  olika sätt.

När vi tar hänsyn till koefficienterna framför parenteserna ser vi att vi alltså totalt får  $\frac{60+3\cdot 4}{24}r^3b^2s = 3r^3b^2s$ , det vill säga 3 stycken kuber av vår önskade typ.

Vi kan också använda wolfram alpha och skriva ut hela uttrycket.

$$\begin{aligned} U_D(r, b, s) = & b^6 + b^5r + b^5s + 2b^4r^2 + 2b^4rs + 2b^4s^2 + 2b^3r^3 + \\ & + 3b^3r^2s + 3b^3rs^2 + 2b^3s^3 + 2b^2r^4 + \underline{3b^2r^3s} + 6b^2r^2s^2 + \\ & + 3b^2rs^3 + 2b^2s^4 + br^5 + 2br^4s + 3br^3s^2 + 3br^2s^3 + 2brs^4 + \\ & + bs^5 + r^6 + r^5s + 2r^4s^2 + 2r^3s^3 + 2r^2s^4 + rs^5 + s^6. \end{aligned}$$

Här ser vi alltså direkt hur många icke-identiska kuber vi har för varje typ färgning. Vi kan till exempel notera att vi får flest kuber då vi har 2 stycken av varje färg. Mycket riktigt får vi också 3 stycken olika kuber av vår önskade typ.

## 7 Tillämpningar

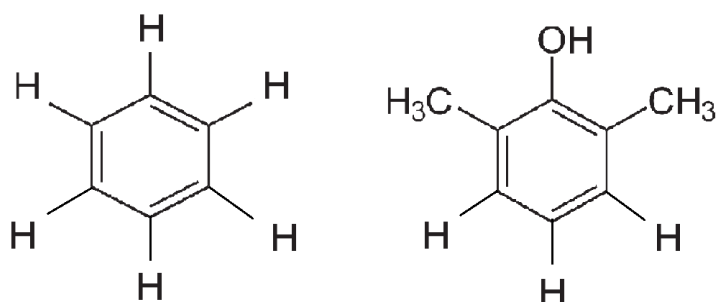
Det finns många tillämpningar av Pólyas teorem. Vi går igenom två exempel från kemin och avslutar uppsatsen med en tillämpning i grafteori.

### 7.1 Beräkning av antalet molekyler

#### 7.1.1 Xylenol

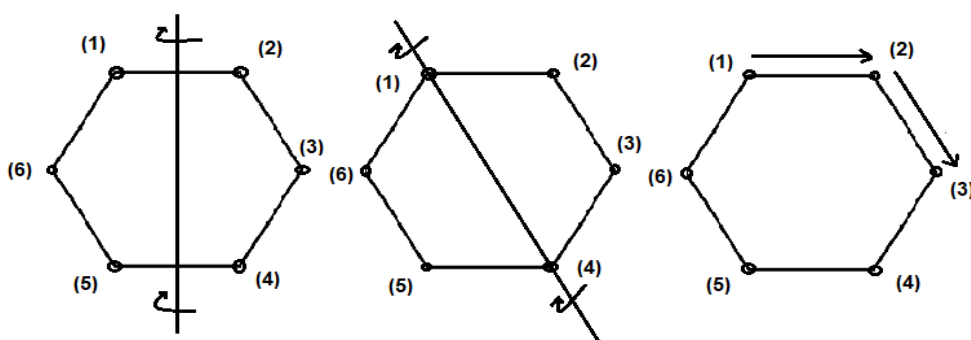
En Benzenring är en organisk förening med formel  $C_6H_6$ . Xylenol är ett derivat

av Benzenringen som kan bildas genom att två väteatomer blivit ersatta med två metylgrupper  $CH_3$  och en väteatom med en hydroxylgrupp  $OH$ .<sup>12</sup>



Figur 5: Benzenring och exempel på Xylenol.

Vi vill ta reda på hur många typer av Xylenol som finns. Molekylen har en platt struktur, så vi kan vrida och vända på hur vi vill. Vi låter vår mängd  $X$  vara hörnen på hexagonen, och vi har en grupp  $G$  som utgör rotationer och speglingar av densamma. Uppenbarligen är då representationen  $\pi : G \rightarrow S_X$  trogen. Vidare ser vi på atomerna bundna till kolen vid varje hörn i hexagonen som färgningar. Färgen  $m$  får stå för metylgruppen  $CH_3$  och  $h$  för hydroxylgruppen  $OH$ . Ett val av väte betecknar vi helt enkelt med 1. Då är antalet färger  $|K| = |\{m, h, 1\}| = 3$ , och alltså är representation  $\sigma : G \rightarrow S_\Omega$  trogen. Alltså är alla förutsättningar uppfyllda för att använda Pólya's teorem. Vi börjar med att gå igenom alla permutationer  $\pi(g) \in S_X$ .



Figur 6: Rotationer och speglingar av en regelbunden hexagon.

<sup>12</sup> <https://en.wikipedia.org/wiki/Xylenol>

Den relevanta gruppen i det här fallet blir  $D_6$ , vilket är namnet på gruppen av symmetrier för en regelbunden hexagon.<sup>13</sup> Detta utgör också ett exempel på en *dihedral* grupp.<sup>14</sup>

- Spegling kring axel som löper från mitten av en sida till motsatta sidan: **(12)(36)(45)**, **(14)(23)(56)**, **(16)(25)(34)**. Cykelmonom:  $x_2^3$ .
- Spegling kring axel som löper från ett hörn till motsatt hörn: **(26)(35)**, **(13)(46)**, **(15)(24)**. Cykelmonom:  $x_1^2x_2^2$ .
- Rotation 60 grader åt höger: **(123456)**, **(135)(246)**, **(14)(25)(36)**, **(153)(264)**, **(165432)**. Cykelmonom:  $x_6, x_3^2, x_2^3$ .

Tillsammans med identitets-elementet blir detta hela vår grupp. Vi ser då att cykelindexet blir

$$P_{D_6}(x_1, x_2, \dots, x_6) = \frac{1}{12}(x_1^6 + 4x_2^4 + 3x_1^2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_6).$$

Vi låter  $D \subseteq \Omega$  vara en delmängd med en färgning  $\omega$  från varje bana i  $\Omega$ . Enligt sats **6.1** är då

$$\begin{aligned} U_D(m, h, 1) &= P_{D_6}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_6) = \\ &= \frac{1}{12}((m+h+1)^6 + 4(m^2+h^2+1^2)^4 + 3(m+h+1)^2(m^2+h^2+1^2)^2 + \\ &\quad + 2(m^3+h^3+1^3)^2 + 2(m^6+h^6+1^6)). \end{aligned}$$

Vi är bara intresserade av färgningar med  $\text{ind}(\omega) = m^2h$ , eftersom detta var definitionen på Xylenol. Då kan vi se att termerna  $(m^2+h^2+1^2)^4$ ,  $(m^3+h^3+1^3)^2$  och  $(m^6+h^6+1^6)$  går bort, eftersom vi i utvecklingen av dessa produkter inte får något  $m^2h$ . I utvecklingen av  $(m+h+1)^6$  väljer vi ut två parenteser där  $m$  förekommer, vilket kan göras på  $\binom{6}{2} = 15$  olika sätt, och därefter väljer vi ett  $h$ , vilket kan göras på  $\binom{4}{1} = 4$  sätt. Alltså får vi  $\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 15 \cdot 4 = 60$  stycken  $m^2h$  från denna produkt. I  $(m+h+1)^2(m^2+h^2+1^2)^2$  måste vi välja vårt  $h$  i någon av  $(m+h+1)^2$ , eftersom det bara fick förekomma en sådan, och alltså får vi välja vårt  $m^2$  i  $(m^2+h^2+1^2)^2$ , och även där har vi två val. Alltså får vi  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$  stycken  $m^2h$  i utvecklingen av denna produkt. Detta ger

$$\frac{1}{12}(3 \cdot 2 \cdot 2 + 60) = \frac{72}{12} = 6$$

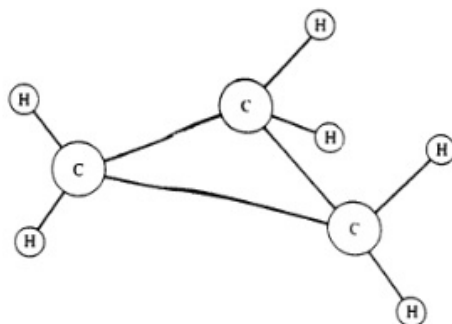
olika typer av Xylenol.

<sup>13</sup> <https://mathworld.wolfram.com/DihedralGroupD6.html>

<sup>14</sup> Biggs, s. 394.

### 7.1.2 Cyklopropan

Vi tar ett lite svårare exempel. Vi vill undersöka hur många derivat det finns av cyklopropan, när vi får byta ut väteatomerna mot antingen fluor- eller jodatomer, och kolatomerna kan ersättas med radioaktiva kolatomer. Molekylen ser ut som följande:<sup>15</sup>



Figur 7: Cyklopropan

Vi låter våra färger vara  $K = \{C, C^*, H, IF\}$ , där  $C$  står för kol,  $C^*$  radioaktivt kol,  $H$  väte,  $I$  jod och  $F$  fluor.

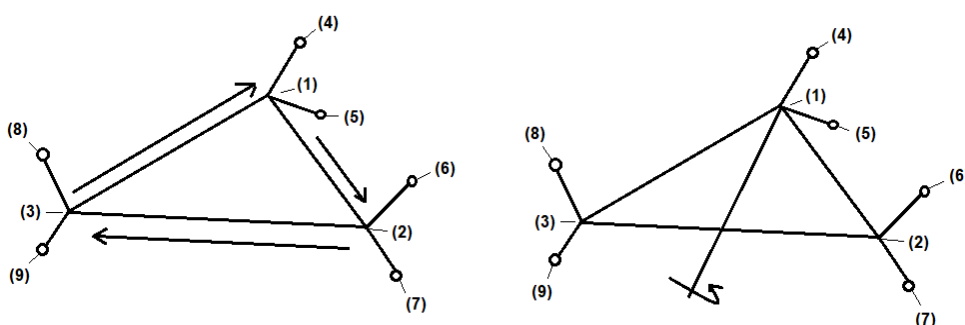
Här kan vi inte använda vårt teorem på vanligt vis, eftersom det finns begränsningar på vilka atomer (alltså färgningar) som får hamna vart. Det fungerar alltså inte att hitta cykelindexet och sedan leta efter antalet koefficienter framför olika termer. Säg att vi till exempel har 5 st  $C^2C^*H^2I^2F^2$ , där  $C^*$  står för radioaktivt kol. Då skulle dessa radioaktiva kolatomer kunna vara placerade vid någon av de yttre atomerna, vilket inte är tillåtet, och alltså kommer vi räkna alldeles för många av just den här typen. Molekylen har dock den struktur den har, så vårt cykelindex kommer inte att förändras på grund av restriktionerna på våra färgningar. Det vi får göra är alltså att för varje typ av permutation betrakta å ena sidan färgningarna för den inre ringen av kolatomer, och å andra sidan den yttre ringen av väteatomer, och sedan multiplicera ihop resultaten. Se appendix 9.1 för mer detaljer om varför detta fungerar. Vi börjar som vanligt med att beräkna cykelindexet.

Ser man bara på figuren som en graf kommer vår grupp att bli kryssprodukten av  $D_3 \times S_2 \times S_2 \times S_2$ , som har  $6 \cdot 8 = 48$  element. Situationen blir dock annorlunda på grund av att vi har en molekyl och inte en graf. Vi kan helt enkelt inte byta plats

<sup>15</sup> Pólya, R.C. Read, s. 125.

på två väteatomer bundna till en kolatom utan att förstöra hela molekylen. Därför kommer vi endast att titta på rotationer och speglingar av den inre ringen.

Vi låter  $X = \{1, 2, 3\}$  vara mängden av hörn i den inre ringen, och  $Y = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  vara hörnen i den yttre ringen. Vår grupp  $G$  kommer verka på både  $X$  och  $Y$  och detta kommer inducera två representationer  $\pi_X : G \rightarrow S_X$  och  $\pi_Y : G \rightarrow S_Y$ . Vi låter  $x_1, x_2, \dots$  och  $y_1, y_2, \dots$  vara respektive variabler i respektive polynomring för cykelmonomen. Vår grupp kommer att bli den dihedrala gruppen  $D_3$ .



Figur 8: Spegling och rotation av cyklopropan

- Rotation 120 grader medurs:  
 $(123) \mapsto (123) \times (468)(579)$ .  
 $(132) \mapsto (132) \times (486)(597)$ . Cykelmonom:  $x_3y_3^2$
- Spegling längs median av triangeln:  
 $(1)(23) \mapsto (1)(23) \times (45)(69)(78)$ .  
 $(13)(2) \mapsto (13)(2) \times (49)(58)(67)$ .  
 $(12)(3) \mapsto (12)(3) \times (47)(56)(89)$ . Cykelmonom:  $x_1x_2y_2^3$

Slutligen har vi identitetslement vars cykelmonom blir  $x_1^3y_1^6$ . Vårt cykelindex blir då

$$P_{D_3, \pi} = \frac{1}{6}(x_1^3y_1^6 + 3x_1x_2y_2^3 + 2x_3y_3^2).$$

Vi delar upp våra färger så att  $K = K_X \cup K_Y$ , där  $K_X = \{C, C^*\}$  och  $K_Y = \{H, I, F\}$ . Då är  $|K_Y| > |K_X| \geq 2$  och alltså kommer representationerna  $\sigma_X$  och  $\sigma_Y$

definierade enligt **3.4** vara trogna. Alltså kan vi använda Pólya's teorem. Nu är vi dock inte intresserade av någon specifik färgning, utan vi vill bara veta hur många olika icke-identiska färgningar det finns. Som vanligt är  $D \subseteq \Omega$  en delmängd med en representant  $\omega$  från varje bana. Sätter vi alla färger som "1" i vår genererande funktion får vi  $|D|$ . Sats **6.1** ger då

$$\begin{aligned} U_D(1, 1, 1, 1, 1) &= \frac{1}{6}((1+1)^3(1+1+1)^6 + 3(1+1)(1^2+1^2)(1^2+1^2+1^2)^3 \\ &\quad + 2(1^3+1^3)(1^3+1^3+1^3)^2) = \\ &= \frac{1}{6}(2^3 \cdot 3^6 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 2 \cdot 3^2) = \frac{1}{6}(6192) = 1032 \end{aligned}$$

stycken olika derivat av cyklopropan.

## 7.2 Grafteori

Vi såg i **5.1.2** att den genererande funktionen för antalet märkta grafer var relativt enkel. Om vi däremot har en graf som inte är märkt blir problemet svårare, då vissa grafer kan permuteras till andra grafer genom permutationer av kanterna. Här lämpar sig Pólya's teorem naturligt, eftersom vi då istället är intresserade av antalet ekvivalensklasser av en viss typ av graf med  $h$  hörn och  $k$  kanter.

Idén är då att vi tittar på permutationsgruppen som permuterar par av hörn, och vi låter färgningen vara "kant" eller "inte kant". Mer precist så låter vi  $X = \{1, 2, \dots, h\}$  vara antalet hörn i vår graf  $\Gamma$ , och vi betecknar totala antalet kanter med  $X^{(2)}$ .<sup>16</sup> Givetvis gäller då  $|X^{(2)}| = \binom{h}{2}$ . Mängden av färger blir i detta fall  $K = \{1, x\}$ , där 1 står för icke-kant och  $x$  för kant. Vår färgningsfunktion  $\omega$  kommer då att beskriva en viss graf, och  $\Omega$  kommer att bli mängden av alla sådana färgningar, för ett visst antal  $h$  hörn. Antalet ekvivalensklasser, alltså banor i  $\Omega$ , blir då antalet grafer  $\Gamma$  för ett visst  $h$ .

### 7.2.1 Definition:

Vi låter  $G$  vara symmetrigruppen av en ändlig mängd  $X$ , så att varje  $g \in G$  är någon permutation  $\alpha \in S_X$ . För att permutera kanterna kommer vi att skapa en representation  $\pi : G \rightarrow S_{X^{(2)}}$ , där  $S_{X^{(2)}}$  är symmetrigruppen av kanterna som går att bilda av  $X$ , definierad som

$$\pi(g)\{x, y\} = \{gx, gy\}.$$

<sup>16</sup> F. Harary and E. Palmer, s. 82-84.

där  $x$  och  $y$  är hörn i  $X$ .

### 7.2.2 Sats:

Låt  $X$  vara en ändlig mängd där  $|X| > 2$ , och låt  $G$  vara symmetrigruppen  $S_X$ . Då är representationen  $\pi : G \rightarrow X$  definierad som i 7.2.1 trogen.

**Bevis:** Vi kollar först att det är en representation. Att identitetsselementet skickas på identitetsselementet är rätt uppenbart. Om alla hörnen skickas på sig själva kommer kanterna bestående av hörnen också göra det. Samtidigt har vi att

$$\begin{aligned}\pi(g_1 g_2)\{x, y\} &= \{g_1 g_2 x, g_1 g_2 y\} = \{g_1(g_2 x), g_1(g_2 y)\} = \\ &= \pi(g_1)\{g_2 x, g_2 y\} = \pi(g_1)\pi(g_2)\{x, y\}\end{aligned}$$

och alltså gäller kompositionalitetsaxiomet. Antag nu att  $g_1 \neq g_2$ , men att  $\pi(g_1) = \pi(g_2) \Leftrightarrow \pi(g_2^{-1} g_1) = \pi(e)$ . Alltså ska det gälla att  $g_2^{-1} g_1 \neq e$ . Vi sätter  $g = g_2^{-1} g_1$ . Då gäller att

$$\pi(g)\{x, y\} = \{gx, gy\} = \{x, y\}.$$

för alla  $x, y \in X$ . Eftersom  $g \neq e$  och  $g$  verkar troget finns ett hörn  $x \in X$  sådant att  $gx \neq x$ . Låt  $y, z \in X$  vara två andra distinkta hörn. Då följer att

$$\pi(g)\{x, y\} = \{gx, gy\} = \{x, y\} \Rightarrow gx = y.$$

Men vi har också att

$$\pi(g)\{x, z\} = \{gx, gz\} = \{x, z\} \Rightarrow gx = z$$

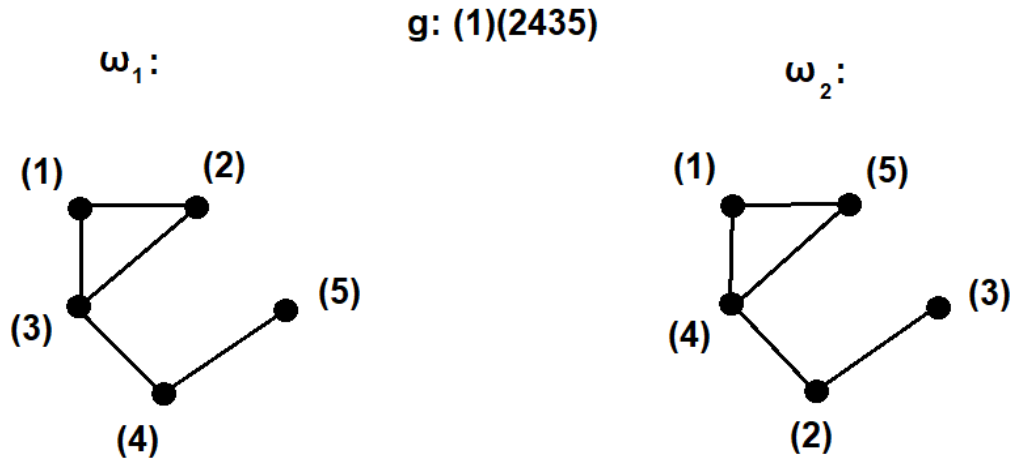
vilket är omöjligt, eftersom  $G$  är en grupp. Alltså är  $\pi$  injektiv, det vill säga trogen.  $\square$

### 7.2.3 Definition:

Låt  $\pi$  vara definierad som i 7.2.1 och låt  $\Omega$  vara mängden av färgningar  $\omega$  definierad som i 7.2, där  $K = \{1, x\}$ . En graf  $\Gamma$  är då en färgning av hörnen. Två grafer är ekvivalenta om och endast om det finns två färgningar  $\omega_1$  och  $\omega_2$  i  $\Omega$  och en permutation  $g \in G$  sådana att

$$\omega_1(\pi(g))\{x, y\} = \omega_1\{gx, gy\} = \omega_2\{x, y\}$$

för alla  $\{x, y\}$  i  $X^{(2)}$ .



Figur 9: Två färgningar  $\omega_1$  och  $\omega_2$ , vars motsvarande två grafer är i samma bana under  $g$ .

### 7.3 Sats:

Cykelindexet för antalet icke-märkta grafer med  $h$  hörn ges av

$$P_{S_h^{(2)}}(s_1, s_2, \dots) = \frac{1}{h!} \sum_{\alpha} \frac{h!}{\prod k^{\alpha_k} \alpha_k!} \prod_{\substack{k: \\ 2k+1 \leq h}} s_{2k+1}^{k\alpha_{2k+1}} \prod_{\substack{k: \\ 2k \leq h}} (s_k s_{2k}^{k-1})^{\alpha_{2k}} s_k^{k \binom{\alpha_k}{2}} \prod_{r < t} s_{[r,t]}^{\alpha_r \alpha_t}.$$

Här är  $\alpha$  en viss cykeltyp  $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots h^{\alpha_h}]$ ,  $(r, t) = \gcd(r, t)$ ,  $[r, t] = \text{lcm}(r, t)$ . Talet  $k$  i första produkten  $\prod$  går från 1 till  $h$ .<sup>17</sup>

**Bevis:** Vi går igenom varje term för sig.

Vår grupp  $G$  var enligt antagandet  $S_X$ . Samtidigt var representationen  $\pi : S_X \rightarrow S_X^{(2)}$  injektiv. Om  $h$  är antalet element i  $X$  så innehåller symmetrigruppen  $S_X$   $h!$  element. Då följer också av injektiviteten att bilden av  $\pi$  är lika stor, det vill säga  $|\pi(S_X^{(2)})| = h!$ . Alltså blir vårt  $\frac{1}{|G|} = \frac{1}{h!}$ .

Ta nu en cykeltyp  $\alpha : [1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots h^{\alpha_h}]$ . Vi vill ta reda på hur många permutationer det finns med denna cykeltyp. Vi kan tänka oss att vi har en blankett med  $h$  tomma

<sup>17</sup> Ibid, s. 84.



platser. Dessa platser kommer dessutom grupperas in enligt cykeltypen  $\alpha$  så att

$$\underbrace{(-)\dots(-)}_{\alpha_1} \underbrace{(-)\dots(-)}_{\alpha_2} \dots \overbrace{(-)\dots(-)}^h \dots \underbrace{(-)\dots(-)}_{\alpha_h}$$

där  $1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + h\alpha_h = h$ . Vi kan välja vår första plats på  $h$  olika sätt, därefter har vi  $(h-1)$  val, och så vidare. Totalt finns det alltså  $h!$  olika sätt att placera ut våra hörn. Men hur många av dessa permutationer är då ekvivalenta?

För en viss cykel med längd  $k$  gäller att  $(12\dots k) = (k12\dots)$ , och alltså kan vi skapa  $k$  cykler av just denna längd. Om det då finns  $\alpha_k$  stycken cykler av längd  $k$  måste vi alltså dela  $h!$  med  $k^{\alpha_k}$ . Går vi igenom varje cykel får vi alltså  $\frac{h!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots h^{\alpha_h}}$  olika permutationer.

Men vi skiljer inte heller på  $(123\dots)(456\dots)$  och  $(456\dots)(123\dots)$ . Om vi då har  $\alpha_k$  cykler av längd  $k$  kan vi alltså flytta runt alla dessa cykler på  $\alpha_k!$  olika sätt och fortfarande ha samma permutation. Totalt finns det alltså

$$\frac{h!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots h^{\alpha_h} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_h!} = \frac{h!}{\prod_{k=1}^h k^{\alpha_k} \alpha_k!}$$

olika permutationer med cykeltyp  $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots h^{\alpha_h}]$ .

Restererande termer handlar om hur en permutation  $\alpha$  i  $S_h$  med cykeltyp  $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots h^{\alpha_h}]$  inducerar en annan permutation  $\pi(\alpha)$  i  $S_h^{(2)}$ . Idén är då att vi delar upp antalet kanter i två mängder; dels mängden av kanter där alla kanter förekommer i samma delcykel i  $\alpha$ , och dels mängden av kanter där vardera hörn befinner sig i två olika delcykler i  $\alpha$ . Detta är de enda alternativen, så när vi gått igenom dessa fall har vi gått igenom alla möjliga kanter.

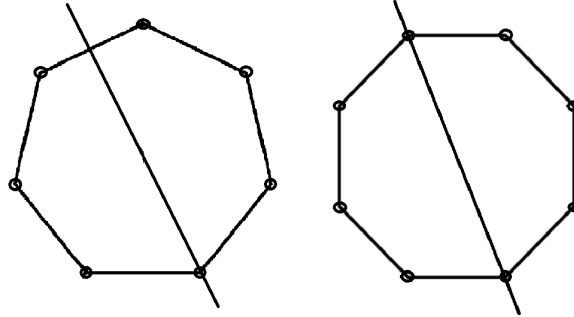
Vi börjar med mängden av kanter i samma cykel. Låt  $\beta$  var en godtycklig cykel av längd  $k$ , där vi antar att  $k$  är ett udda heltal. Antalet kanter som går att bilda av cykeln  $\beta$  kommer innehålla  $\binom{k}{2}$  element. Varje sådan kant kommer att permuteras enligt

$$\{x, y\} \rightarrow \{\beta(x), \beta(y)\}.$$

Eftersom  $\beta$  nu är cyklisk, vet vi att

$$\{\beta^k(x), \beta^k(y)\} = \{x, y\}.$$

Om vi kan applicera  $\beta$  ett antal gånger  $l < k$  där  $\beta^l(x) = y$  och  $\beta^l(y) = x$ , så finns det cykler av längd  $l$  i permutationen av kanterna. Dessutom kommer det gälla att  $\beta^{2l}(x) = x$ . Enligt Lagrange's teorem **2.1.2** kommer då  $2l$  dela  $k$ . Men eftersom  $k$  är udda är detta omöjligt.



Figur 10: En hepta- och oktagon. I den senare verkar  $\pi(r)^4$  som identiteten på den angivna kanten, där  $r$  är rotation 45 grader medurs.

Varje delcykel i  $\pi(\beta)$  kommer alltså innehålla  $k$  element. Alltså är antalet cykler  $q$  av längd  $k$  i  $\pi(\beta)$

$$q = \binom{k}{2} / k = \frac{k-1}{2}.$$

Om  $k$  istället är ett jämnt heltal får vi, på grund av symmetriskäl, en cykel av längd  $k/2$ . Det finns alltså bara ett sätt  $x$  och  $y$  kan mötas på, och för resterande kanter har vi samma princip som i förra fallet. Detta ger oss

$$qk = \binom{k}{2} - \frac{k}{2} \Leftrightarrow q = \frac{k-2}{2}.$$

Alltså har vi 1 cykel av längd  $k/2$  och  $\frac{k-2}{2}$  cykler av längd  $k$  i permutationen  $\pi(\beta)$ . Alltså får vi cykelmonomen

$$x_k^{\alpha_k} \rightarrow s_k^{\alpha_k(k-1)/2} \quad \text{då } k \leq h \text{ är udda,}$$

$$x_k^{\alpha_k} \rightarrow (s_{k/2} s_k^{(k-2)/2})^{\alpha_k} \quad \text{då } k \leq h \text{ är jämnt.}$$

Nu tittar vi på den andra gruppen, där vardera hörnen befinner sig i två olika delcykler  $\beta$  och  $\gamma$ , med längd  $r$  och  $t$ , där  $r < t < h$ . Vi antar att hörnet  $x$  befinner sig i  $\beta$ -cykeln och  $y$  i  $\gamma$ -cykeln. Då får vi att varje kant permuteras enligt

$$\{x, y\} \rightarrow \{\beta(x), \gamma(y)\}.$$

Nu vill vi hitta ett tal  $l$  sådant att

$$\{\beta^l(x), \gamma^l(y)\} = \{x, y\}.$$

Eftersom vi nu har två olika cykler måste detta  $l$  vara  $r$  och  $t$ :s minsta gemensamma multipel, som vi betecknar  $[r, t]$ . Vi kan totalt bilda  $rt$  stycken kanter med ett hörn från  $\beta$  och ett hörn från  $\gamma$ . Alltså blir antalet  $q$  inducerade cykler av längd  $[r, t]$  lika med

$$q[r, t] = rt \quad \Leftrightarrow \quad q = \frac{rt}{[r, t]} = (r, t),$$

alltså största gemensamma delaren av  $r$  och  $t$ . Om det dessutom finns  $\alpha_r$   $\beta$ -cykler och  $\alpha_t$   $\gamma$ -cykler, får vi multiplicera  $(r, t)$  med  $\alpha_r \alpha_t$ .

I specialfallet då  $r = t = k$ , får vi  $[r, t] = (r, t) = k$ . I det fallet kan vi sätta ihop en  $\beta$ -cykel med en  $\gamma$ -cykel på  $\binom{\alpha_k}{2}$  olika sätt. Sammanlagt bidrar denna mängd av kanter alltså med

$$\begin{aligned} x_r^{\alpha_r} x_t^{\alpha_t} &\rightarrow s_{[r,t]}^{(r,t)\alpha_r\alpha_t} \quad \text{då } r \neq t, \\ x_k^{\alpha_k} &\rightarrow s_k^{k\binom{\alpha_k}{2}} \quad \text{då } r = t = k. \end{aligned}$$

Nu har vi gått igenom alla möjliga fallen. En viss permutation i  $S_h$  med cykeltyp  $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots h^{\alpha_h}]$  kommer alltså inducera en ny permutation i  $S_h^{(2)}$  under  $\pi$  enligt

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_h^{\alpha_h} \rightarrow \prod_{k \text{ udda}} s_k^{\alpha_k(k-1)/2} \prod_{k \text{ jämnt}} (s_{k/2} s_k^{(k-2)/2})^{\alpha_k} s_k^{k\binom{\alpha_k}{2}} \prod_{r < t < h} s_{[r,t]}^{(r,t)\alpha_r\alpha_t}.$$

För att mer smidigt dela upp i fallen då  $k$  är udda respektive jämnt kan vi sätta  $k = 2t$  och  $k = 2t + 1$  i de två första produkterna, och sen byta tillbaka till  $k$ . Summerar vi över alla cykeltyper i  $S_h$  får vi vårt resultat.

□

### 7.3.1 Exempel, grafteori

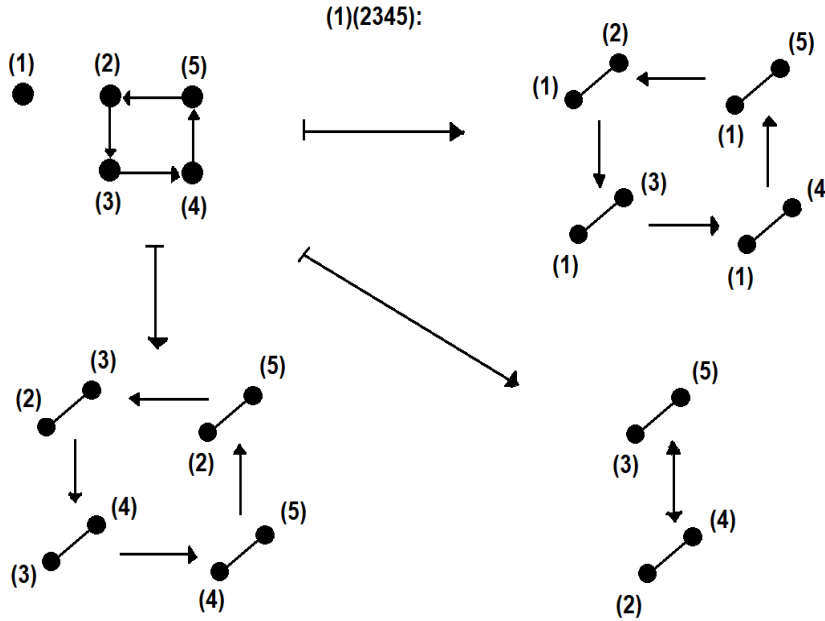
Vi kan använda vår sats för att beräkna antalet icke-märkta grafer med 5 hörn. Cykelindexet av  $S_5$  ges av

$$P_{S_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{120}(x_1^5 + 30x_1x_4 + 20x_1^2x_3 + 10x_1^3x_2 + 20x_2x_3 + 15x_2^2x_1 + 24x_5).^{18}$$

Vi går igenom varje term och kollar vilket nytt cykelindex det inducerar under

<sup>18</sup> F. Harary and E. Palmer, s. 249.

representation  $\pi$ , definierad som i 7.2.1.



Figur 11: Exempel på permutation av kanterna under representationen  $\pi$ , där permutationen har cykeltyp  $x_1x_4$ .

För detta ändamål använder vi sats 7.3. Detaljerna utelämnas.

$$x_1^5 \rightarrow s_1^{10}, \quad x_1x_4 \rightarrow s_2s_4^2, \quad x_1^2x_3 \rightarrow s_1s_3^2s_3 = s_1s_3^3, \quad x_1^3x_2 \rightarrow s_1^3s_2^3s_1 = s_1^4s_2^3,$$

$$x_2x_3 \rightarrow s_1s_3s_6, \quad x_2^2x_1 \rightarrow s_1^2s_2^2s_2^2 = s_1^2s_2^4, \quad x_5 \rightarrow s_5^2.$$

Alltså blir vårt cykelindex under representationen  $\pi$  lika med

$$P_{S_5, \pi}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = \frac{1}{120}(s_1^{10} + 30s_2s_4^2 + 20s_1s_3^3 + 10s_1^4s_2^3 + 20s_1s_3s_6 + 15s_1^2s_2^4 + 24s_5^2).$$

Alla förutsättningar för att använda Pólya's teorem är uppfyllda, och vi använder därför sats 6.1. Vi låter som vanligt  $D \subseteq \Omega$  vara en delmängd med en representant  $\omega$  från varje bana i  $\Omega$ . Valet av färger kommer vara  $K = \{1, x\}$ , tolkade som i 7.2. Då får vi

$$U_D(1, x) = \frac{1}{120}((1+x)^{10} + 30(1+x^2)(1+x^4)^2 + \dots).$$

Uttrycket blir väldigt långt, men använder vi wolfram alpha kan vi dock se att vi

får det relativt enkla uttrycket

$$U_D(1, x) = x^{10} + x^9 + 2x^8 + 4x^7 + 6x^6 + 6x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + 1$$

i slutändan. Här kan vi alltså enkelt läsa av hur många grafer det finns av varje typ, givet 5 hörn.

Variabel	Antal kanter	Antal grafer med 5 hörn
$x^{10}$	10	1
$x^9$	9	1
$x^8$	8	2
$x^7$	7	4
$x^6$	6	6
$x^5$	5	6
$x^4$	4	6
$x^3$	3	4
$x^2$	2	2
$x^1$	1	1
1	0	1

## 8 Konklusion

Vi har gått igenom beviset för Pólya's teorem och sett hur det kan tillämpas inom kemi och grafteori. Detta är givetvis ett väldigt begränsat urval. Dels finns det utvidgningar av teoremet som kan användas på annorlunda men snarlika problem, och dels är omfattningen av alla de problem där Pólya's teorem kan användas mycket större än vad som antytts här.<sup>19,20</sup> Tillämpningarna inom grafteori är långtgående och de resultat som kan fås inom detta område kan dessutom användas inom till exempel statistisk mekanik.<sup>21</sup> Teoremet har även en del oväntade tillämpningar inom musikteori.<sup>22</sup> Men allt detta skulle vara för mycket att gå igenom här. Jag vill tacka min handledare Rikard Bögvad för goda råd och hjälp under arbetets gång.

---

<sup>19</sup> De bruijn, s. 51-66.

<sup>20</sup> F. Harary and E. Palmer, *Graphical Enumeration*.

<sup>21</sup> Ibid, s. 177..

<sup>22</sup> G. Pólya, R.C. Read, s. 135.

## Referenser

F. Harary and E. Palmer, *Graphical Enumeration*, Academic Press, New York, 1973.

G. Pólya, R.C. Read, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds*, Springer-Verlag, New York, 1987.

J.W. Nienhuys, *de Bruijn's combinatorics*, Classroom notes, March 20, 2012.

<https://vixra.org/pdf/1208.0223v1.pdf>

Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics* (sec. ed), Oxford University Press, 2002.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Group\\_action](https://en.wikipedia.org/wiki/Group_action)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial\\_ring](https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_ring)

<https://en.wikipedia.org/wiki/Xylenol>

<https://mathworld.wolfram.com/DihedralGroupD6.html>

## 9 Appendix

### 9.1 Cyklopropan

Nedan följer bakomliggande teori om varför vår metod i **7.1.2** fungerar. Jag håller mig till mängderna  $X$  och  $Y$  för att göra det mer åskådligt och enkelt, men i teorin skulle vi kunna ha fler mängder.

Låt  $Z = X \cup Y$  där  $X$  och  $Y$  är ändliga och disjunkta. Låt gruppen  $G$  verka på  $Z$  enligt

$$gz = \begin{cases} gx & \text{då } z \in X \\ gy & \text{då } z \in Y \end{cases}$$

där  $g \in G$ . Denna verkan kommer inducera två representationer  $\pi_X : G \rightarrow S_X$  och  $\pi_Y : G \rightarrow S_Y$ .

Låt  $K_X$  vara färger som tilldelas element i  $X$  och likadant för  $K_Y$ . Då definierar vi färgfunktionerna  $\omega_X : X \rightarrow K_X$  och  $\omega_Y : Y \rightarrow K_Y$ , där  $\omega_X \in \Omega_X$  och  $\omega_Y \in \Omega_Y$ . Vi låter alltså  $\Omega = \Omega_X \times \Omega_Y$  och de färgningar vi tittar på är  $\omega = (\omega_X, \omega_Y) \in \Omega_X \times \Omega_Y$ .

Vi definierar en verkan av  $G$  på färgningar  $\omega$  som

$$g\omega(z) = \begin{cases} \omega_X(g^{-1}z) & \text{då } z \in X \\ \omega_Y(g^{-1}z) & \text{då } z \in Y \end{cases}$$

Denna verkan kommer inducera två representationer  $\sigma_X : G \rightarrow S_{\Omega_X}$  och  $\sigma_Y : G \rightarrow S_{\Omega_Y}$ . Om valet av färger är minst två för varje mängd, d.v.s.  $|K_x| \leq 2$  och  $|K_y| \leq 2$ , är båda representationerna trogna. Vi applicerar sedan lemma **5.4**, och räknar mängden

$$S^* = \{(g, \omega) : g\omega = \omega\}.$$

Vi utelämnar detaljerna, men det är inga konstigheter här och vi kommer att få vår vanliga

$$\sum_{\omega \in D} \text{ind}(\omega) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\omega \in F(\sigma(\pi(g)))} \text{ind}(\omega).$$

Här kommer det även gälla att

1.  $\omega = (\omega_X, \omega_Y) \in F(\sigma(\pi(g))) \Leftrightarrow \omega_X \in F(\sigma(\pi(g))) \wedge \omega_Y \in F(\sigma(\pi(g)))$
2.  $\text{ind}(\omega) = \text{ind}(\omega_X)\text{ind}(\omega_Y)$
3.  $D$  : en representant från varje bana i  $\Omega = \Omega_X \times \Omega_Y$



Ovanstående ekvation kan alltså skrivas om till

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in D} \text{ind}(\omega) &= (\text{enligt 2.,3.}) \sum_{(\omega_X, \omega_Y) \in D} \text{ind}(\omega_X) \text{ind}(\omega_Y) = \\ &= (\text{enligt 1.}) \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{\omega_X \in F(\sigma(\pi(g)))} \text{ind}(\omega_X) \right) \left( \sum_{\omega_Y \in F(\sigma(\pi(g)))} \text{ind}(\omega_Y) \right). \end{aligned}$$

Vi låter

- $K_X = \{f_1^x, f_2^x, \dots\}$  och  $K_Y = \{f_1^y, f_2^y, \dots\}$
- $B_g^x = \omega_X \in F(\sigma(\pi(g)))$  och  $B_g^y = \omega_Y \in F(\sigma(\pi(g)))$
- $\rho_n^x = \sum_{f \in K_X} f^n$  och  $\rho_n^y = \sum_{f \in K_Y} f^n$

Om vi sedan tillämpar **6.1** får vi att

$$\begin{aligned} U_D(f_1^x, f_2^x, \dots; f_1^y, f_2^y, \dots) &= \sum_{\omega \in D} \text{ind}(\omega_x) \text{ind}(\omega_y) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{\omega_X \in F(\sigma(\pi(g)))} \text{ind}(\omega_X) \right) \left( \sum_{\omega_Y \in F(\sigma(\pi(g)))} \text{ind}(\omega_Y) \right) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{B_g^x} \text{ind}(\omega_X) \right) \left( \sum_{B_g^y} \text{ind}(\omega_Y) \right) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_{B_g^x}(f_1^x, f_2^x, \dots) U_{B_g^y}(f_1^y, f_2^y, \dots) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p_{g, \pi_x} \left( \sum_{f \in K_X} f^1, \sum_{f \in K_X} f^2, \dots \right) p_{g, \pi_y} \left( \sum_{f \in K_Y} f^1, \sum_{f \in K_Y} f^2, \dots \right) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} p_{g, \pi_x}(\rho_1^x, \rho_2^x, \dots) p_{g, \pi_y}(\rho_1^y, \rho_2^y, \dots). \end{aligned}$$