Errata-lista

Jasmina Mansour

19 augusti 2022

1 Korrigeringar

Upptäckta fel i *Att lösa femtegradsekvationen - En jämförelse av Newton-Raphsons och Bring-Jerrards metoder:*

1) På rad 8 på sidan 28 ska r inte sättas till 0 utan till något av de värden från (4.36), det vill säga r_1, r_2 eller r_3. Om r sätts till r_1 blir den reducerade femtegradsekvationen (4.39) istället

$$z^5 + (6364.28 + 321.081i)z + 4890.47 - 29355.1i = 0$$

2) Från 1) följer att femtegradsekvationen på Bring-Jerrards form (4.43) istället blir

$$t^5 - t - 0.405341 + 0.33002i.$$

Här har jag ändrat tecknet framför t till minus då koefficienten för t sätts till -1 i raden ovanför (4.42). Konstanten är även förenklad till en numerisk avrundning. I uppsatsen nämns även (4.34) på sidan 37, och bör istället alltså vara $t^5 - t - 0.405341 + 0.33002i$.

3) På rad 6 på sidan 33 bör det vara $z = x^5 - x$ istället för $z = x - x^5$, och därmed $z = F(x) = x^5 - x$ istället för $F(z) = x^5 - x$ på rad 7. Precis ovanför (5.22) bör det även stå $z = F(x) = x^5 - x$.

4) Resultanten på sidan 24 bör även skrivas systematiskt så att y, y^2, y^3, y^4 och y^5 står efter varandra, det vill säga

$-m^5 + 4m^4n - m^4 + m^3n^2 + 9m^3n - m^3 - m^2n^3 - 15m^2n^2 + 8m^2n + m^2 - mn^4 - 4mn^3 - 16mn^2 - mn + 4m - n^5 + n^4 + 5n^3 - 11n^2 - 18n + y(-4m^4 - 2m^3n - 9m^3 + 3m^2 + n^2 + 30m^2n - 8m^2 + 4mn^3 + 12mn^2 + 32mn + m + 5n^4 - 4n^3 - 15n^2 + 22n + 18) + y^2(m^3 - 3m^2n - 15m^2 - 6mn^2 - 12mn - 16m - 10n^3 + 6n^2 + 15n - 11) + y^3(m^2 + 4mn + 4m + 10n^2 - 4n - 5) + y^4(-m - 5n + 1) + y^5 - 1.$

SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Att lösa femtegradsekvationen
En jämförelse av Newton-Raphsons och Bring-Jerrards metoder

av

Jasmina Mansour

2022 - No K28

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Att lösa femtegradsekvationen
En jämförelse av Newton-Raphsons och Bring-Jerrards metoder

Jasmina Mansour

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2022

Abstract

This essay consists of a literary study of two methods for solving quintic equations: the Newton-Raphson method and the Bring-Jerrard method. In the latter, we will also use Tschirnhaus transformation, the Lagrange inversion theorem, as well as Newton's binominal theorem. Each method will be presented with a corresponding equation that exemplifies their respective procedure in application. The essay concludes with a comparative discussion of difficulties in applying the respective methods. The Newton-Raphson method suffers from problems of how to find viable initial starting points so that the process converges fast enough. In contrast, the Bring-Jerrard method has the issue of though producing an exact expression, this expression may still converge too slowly, and have to be continued by analytic continuation.

Tack

Jag är oändligt tacksam för min handledare Rikard Bøgvads ovärderliga hjälp och uppmuntran under mitt arbete med uppsatsen.

Innehåll

1 Introduktion **4**

2 Historisk bakgrund **5**
2.1 Tidig ekvationslösning 5
2.2 Femtegradsekvationen 7

3 Newton-Raphsons metod **9**
3.1 Teori 9
3.2 Exempel 12
3.3 Begränsningar 16

4 Bring-Jerrards metod och Tschirnhaus transformation **19**
4.1 Resultant 19
4.2 Bring-Jerrards metod 20
4.3 Exempel 24

5 Lagrangeinversion och Newtons binomialsats **30**
5.1 Teori 30
5.2 Lagrangeinversion för Bring-Jerrards form 33
5.3 Newtons binomialsats 34
5.4 Exempel 35
5.5 Begränsningar 36

6 Sammanfattning **38**

1 Introduktion

Algebra bygger på abstrakt tänkande där generella lösningsformler och algoritmer tar stor plats. Då elever i skolan närmar sig den algebraiska sidan av matematik uppstår ofta en konflikt mellan det nya tankesättet och hur de är vana att se på världen [11]. Min erfarenhet som blivande gymnasielärare är att många elever upplever svårigheter i övergången från grundskolans arbete med konkret beräkning till gymnasieskolans användning av abstraktion och symboler.

Inom matematikdidaktisk forskning betonas idag att elever, förutom att behärska matematiska *produkter*, det vill säga att utföra algoritmer utan djupare förståelse, även bör tränas i att förstå de bakomliggande *processerna*. De ska således lära sig att se de samband och generella mönster som föreligger i matematiska processer[10]. I undervisning om ekvationslösning finns därmed anledning att lyfta hur och varför en del metoder fungerar och andra inte.

Ett exempel är femtegradsekvationen, som trots att den sedan 1800-talet har beskrivits som olösbar [16], i många fall faktiskt kan lösas. Jag har därför valt att undersöka hur två lösningsmetoder för femtegradsekvationer är konstruerade samt hur väl respektive metod fungerar. Den ena metoden ligger utanför gymnasieskolans undervisningsområde men bidrar till att fördjupa förståelsen för lösningsalgoritmer till ekvationer av högre grad.

Uppsatsen börjar med en historisk bakgrund över algebraisk ekvationslösning. Därefter redogör jag för *Newton-Raphsons metod* i avsnitt 3. Där finner vi även ett exempel samt en diskussion om metodens begränsningar. I avsnitt 4 beskrivs och används *Bring-Jerrards metod* för att reducera en femtegradsekvation med hjälp av *Tschirnhaus transformation*. I avsnitt 5 visar jag hur *Lagrangeinversion* och *Newtons binomialsats* kan lösa femtegradsekvationer som reducerats via Bring-Jerrards metod. Avslutningsvis jämförs de två metoderna i avsnitt 6.

2 Historisk bakgrund

2.1 Tidig ekvationslösning

Att lösa ekvationer och finna värdet på okända variabler har länge varit en del av matematiken. Enligt arkeologiska bevis löste babylonierna första- och andragradsekvationer med hjälp av numerisk räkning och geometri redan år 3200 före vår tideräkning. Samma metoder kom sedan att användas av Isaac Newton och Joseph Raphson, som på 1600-talet utvecklade dem till att gälla för ekvationer av ännu högre grad [11]. Hos babylonierna fanns även exempel på en mer generell lösningsformel för andragradsekvationer som på ett modernt sätt kan uttryckas som [19]:

Sats 2.1. *Andragradsekvationen $x^2 + bx = c$, där $b, c \in \mathbb{R}$ har lösningen*

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Detta påminner om den kvadratiska lösningsformeln som matematikern Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi kom fram till på 800-talet, idag känd som *PQ-formeln* då läroböcker på gymnasienivå vanligtvis använder variablerna p och q istället för b och c [19].

Sats 2.2. ***Al-Khwarizmis formel:*** *Andragradsekvationen $x^2 + bx + c = 0$, där $b, c \in \mathbb{R}$ har lösningen*

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

På 1000-talet fann matematikern Omar Khayyam lösningsmetoder för diverse tredjegradsekvationer med hjälp av grekernas idéer om kägelsnitt. Även här finns därmed exempel på tidig användning av abstrakt och symbolisk matematik [11].

I 1200-talets Kina utvecklade och generaliserade matematikern Ch'in Chui-Shao en numerisk lösningsmetod för andra- och tredjegradsekvationer, som först på 1800-talet blev känd i Europa. Där fick lösningsmetoden namnet *Horners metod*, efter den brittiske lärare som återupptäckt denna. Metoden bygger på upprepad polynomdivision och addering av rötter utifrån ett bestämt schema [11].

Dessa tankar lade grunden för den stora förändringen inom europeisk matematik på 1500- och 1600-talet. Den moderna algebran, som vilar på användandet av bokstäver, symboler och abstrakt tänkande, uppstod då den så kallade orientaliska traditionen förenades med den grekiska [11]. Redan 1515 fann Scipione del Ferro en generell lösningsformel för tredjegradsekvationen. Formeln hölls dock hemlig i

30 år då del Ferro använde den för att vinna de matematikdueller vanliga bland dåtidens matematiker, där den förlorande parten ofta gick miste om sin undervisningsposition på universitetet. Formeln publicerades därför först efter hans död, av matematik- och medicinprofessorn Girolamo Cardano under namnet *Cardans formel* i verket *Ars Magna* (lat. *Den stora konsten*) år 1545 [19].

Sats 2.3. ***Cardans formel:*** *Tredjegradsekvationen* $x^3 + bx + c = 0$ *där* $b, c \in \mathbb{R}$ *har lösningarna*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}.$$

Eftersom vi får tre rötter från den första termen, låt oss kalla den $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$, *och tre rötter från den andra termen som vi kallar* $\beta = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}$, *har vi totalt nio möjligheter. Rötterna måste då väljas så att* $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$ *gäller. Sats från [3].*

Tätt inpå del Ferros formel löstes även fjärdegradsekvationen av Cardanos elev Lodvico Ferrari. Formeln bygger på lösningen för tredjegradsekvationen och resultatet publicerades därför samtidigt som Cardans formel i *Ars Magna* [16]. Fram tills denna tidpunkt hade formlerna enbart behandlat reella lösningar. Vid användningen av *Ferraris formel* stötte Cardano dock på negativa rötter, men avfärdade dessa som oanvändbara. Det kom att ta ytterligare 30 år innan Rafael Bombelli etablerade användningen av komplexa tal i sin utvidgning av Cardans och Ferraris formler [19]. Ferraris lösningsmetod är i sin helhet väldigt extensiv, och av utrymmesskäl beskrivs den endast kortfattat nedan.

Sats 2.4. ***Ferraris formel:*** *Fjärdegradsekvationen* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ *där* $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ *och* $a \neq 0$ *har lösningarna*

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 8q}}{4}.$$

Där

$$p = \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} + 4y_1},$$

$$q = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - \frac{4e}{a}},$$

och variabeln y_1 *är den reella lösningen till tredjegradsekvationen*

$$y^3 - \frac{c}{a}y^2 + \left(\frac{bd}{a^2} - \frac{4e}{a}\right)y + \left(\frac{4ce}{a^2} - \frac{b^2e}{a^3} - \frac{d^2}{a^2}\right) = 0.$$

Sats från [6].

2.2 Femtegradsekvationen

Under 1600-talet lade franska matematiker grunden för *Algebrans fundamentalsats*, vilken kom att bevisas av Carl Freidrich Gauss först 1799 [16].

Sats 2.5. *Varje algebraisk ekvation*

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n = 0$$

där koefficienterna a_k är komplexa tal och $n > 0$, har minst en rot $z \in \mathbb{C}$.

Satsen implicerar även att varje algebraisk ekvation av grad n har exakt n rötter, räknat med multiplicitet för komplexa rötter. Satsen inkluderar koefficienter bestående av reella tal då ett reellt tal är ett komplext tal med 0 som imaginär del. Utifrån algebrans fundamentalsats och lösningsformlerna för tredje- och fjärdegradsekvationen ansåg många matematiker under 1700-talet att en generell algebraisk lösningsformel för femtegradsekvationen borde vara möjlig. I slutet av 1700-talet publicerade den svenske matematikern Erland Bring en metod för att förenkla femtegradsekvationen

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \tag{2.6}$$

till en mer hanterbar form,

$$x^5 + px + q = 0. \tag{2.7}$$

Till sin hjälp hade han 1600-talsmatematikern Ehrenfried Walther von Tschirnhaus arbete med polynom av högre grad. Det bör påpekas att Bring arbetade med reella koefficienter, men idag används metoden även för komplexa tal. Bring använde sig av Tschirnhaus transformation, en typ av polynomförkortning giltig för polynom av grad $n \geq 3$. Genom en hjälpekvation transformeras nollskilda koefficienter i ett polynom till noll, så att ett nytt men förenklat polynom av samma grad skapas. Ett modernare och mer effektivare sätt att använda sig av Tschirnhaus hjälpekvation är att använda en *resultant*. En utförligare beskrivning av detta återfinns i avsnitt 4.1. Bring nådde aldrig fram till en fullskalig lösningsformel för femtegradsekvationen, men optimistiska försök fortsatte på andra håll i Europa [4], [17].

Förhoppningarna kom dock att grusas då Niels Henrik Abel i sin avhandling 1826 bevisade omöjligheten i att finna en generell lösningsformel bestående av enbart algebraiska operationer för ekvationer av grad $n \geq 5$. Abels bevis innebar även att rötter till ekvationer av grad $n \geq 5$ inte kunde uttryckas i radikaler, det vill säga ett tal som endast kan uttryckas via de fyra räknesätten och rotutdragningar. Därmed föreföll ett tusenårigt sökande vara avslutat [16].

Parallellt med Abels bevis kom matematikern George Jerrard fram till samma metod för förenkling av femtegradsekvationen som Bring. En femtegradsekvation på formen (2.7) benämns därför som *Bring-Jerrards form.* Då Jerrard var medveten om att en allmän lösning var omöjlig gick hans arbete ut på att bevisa metodens giltighet i så många fall som möjligt. Jerrard lyckades visa att man genom Tschirnhaus transformation kan eliminera termerna $x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}$ från ett polynom av grad $n > 3$. [5].

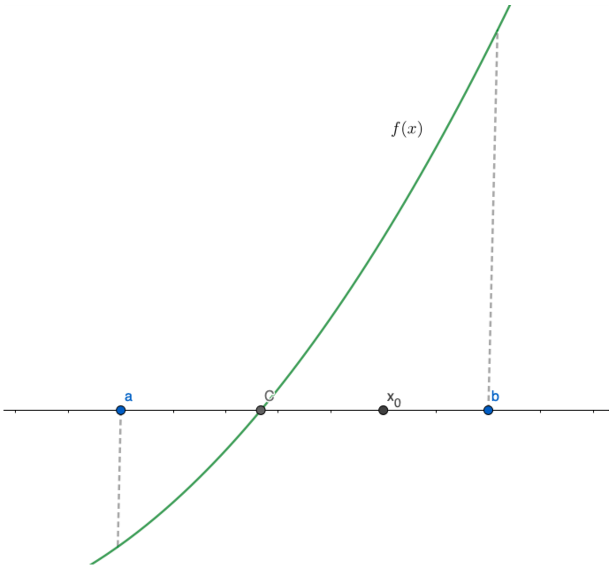
För att lösa femtegradsekvationer på Bring-Jerrards form kom matematiker sedan att använda Lagranges inversionssats, framtagen av Joseph-Louis Lagrange i slutet av 1700-talet. Satsen kommer från analysen och ger en Taylorutveckling av koefficienterna för en invers funktion. Därefter insåg matematiker att Newtons binomialformel från 1600-talet gav lösningen till resultatet av Lagrangeinversionen.

Trots att en allmän lösningsformel saknas kan idag många femtegradsekvationer lösas exakt med hjälp av Bring-Jerrards form, Tschirnhaus transformation, Lagrangeinversion och Newtons binomialformel, samt approximativt med ett modernt matematikprogram för stora beräkningar. Även den tidigare nämnda babyloniska algoritmen som vidareutvecklades av Newton och Raphson kan användas till att approximera rötter i vissa femtegradsekvationer [16], och beskrivs i kommande avsnitt.

3 Newton-Raphsons metod

3.1 Teori

Newton-Rahpsons metod är en algoritm som ger approximerade nollställen för en funktion $f(x)$. Vi antar att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig, deriverbar och har ett nollställe C i $[a, b]$ samt att vi gissar oss till en punkt x_0 som ligger i närheten av C. Punkten x_0 är därmed en första approximativ lösning, se *Figur 1* nedan.



Figur 1: x_0 som gissad rot.

För en noggrannare approximering drar vi en tangent från punkten $P = (x_0, f(x_0))$ till x-axeln, se *Figur 2*. Utifrån *enpunktsformeln* vet vi att tangenten för funktionen $y = f(x)$ i P har ekvationen

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.1}$$

För att lösa ut skärningspunkten med x-axeln sätter vi $y = 0$ och får

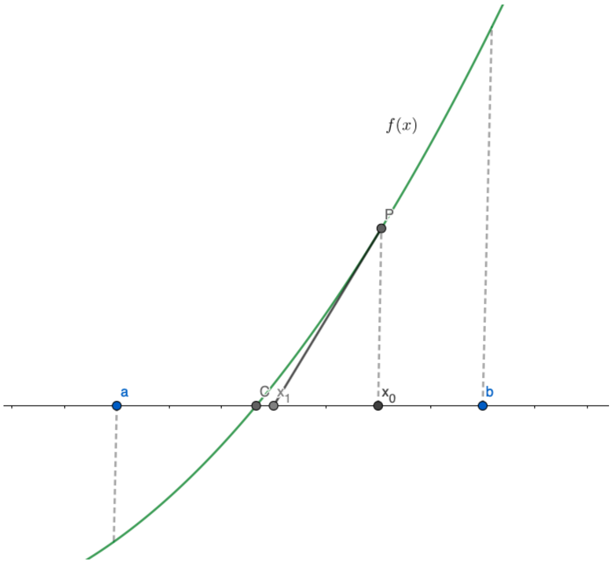
$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.2}$$

Efter division med $f'(x_0)$ och addition av x_0 får vi

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{3.3}$$

Vi har därmed en ny skattad rot till $y = f(x)$, vilken vi betecknar som x_1, se *Figur 2*. Den tidigare uppskattade lösningen x_0 har nu förändrats till en mer precis approximation,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{3.4}$$



Figur 2: x_1 som approximerad lösning utifrån tangenten i punkten P.

Genom att upprepa algoritmen rör vi oss allt närmre lösningen. Nu används x_1 som startvärde istället för x_0, vilket ger

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{3.5}$$

Sats 3.6. ***Newton-Raphsons metod.*** *Om $x^x = \lim_{n\to\infty} x_n$ existerar, $|f'(x^x)| > 0$ och $f = 0$, kan vi ta gränsvärdet i formeln: $x^x = x^x - \frac{f(x^x)}{f'(x^x)} \iff f(x^x) = 0$. Låt nu x_n vara en skattad lösning till $f(x) = 0$, där $f'(x) \neq 0$. Då ges nästföljande approximation av*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

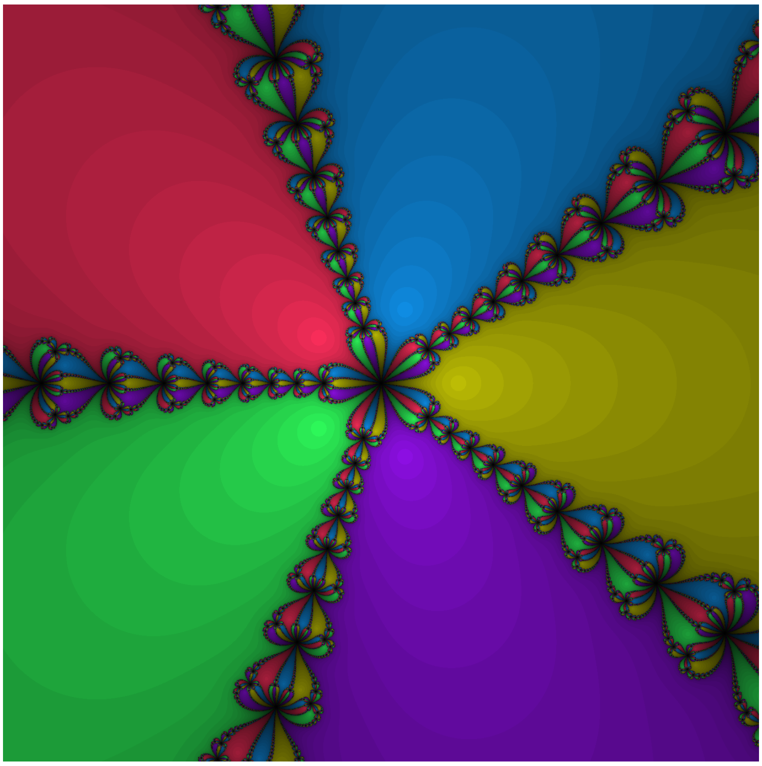
Sats från [1], härledning från [13].

För att veta när iterationen ska avslutas behövs ett precisionskrav. Generellt gäller det att skillnaden mellan två på varandra följande upprepningar, det vill säga approximerade rötter, ska vara mindre än ett visst värde ϵ,

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon. \tag{3.7}$$

För att säkerställa vilket n som satisfierar kravet, särskilt vid komplexa lösningar, används ett mer specifikt precisionskrav bestående av en omfattande och komplicerad uträkning innehållandes *kvadratisk konvergens*. Detta ligger utanför uppsatsens område och vidare läsning hänvisas till [1] samt [9]. Kvadratisk konvergens beskrivs utförligare i avsnitt 3.2.

Utifrån beräkningarna för precisionskravet är det möjligt att illustrera hur många iterationer som behövs innan Newton-Raphsons metod konvergerar mot en rot. För ekvationer med komplexa rötter exemplifierar bilden nedan hur iterationerna kan ser ut utifrån *attraktionsbassänger (basins of attraction)*. Attraktionsbassängerna är de områden som den första gissade roten kan befinna sig inom för att iterationerna ska konvergera mot en faktisk rot. Punkterna i samma färg hör till samma rot. Notera att röttera är de fem komplexa enhetsrötterna med argument $\frac{2\pi}{5}$ och att nära dem konvergerar Newton-Raphsons metod till respektive rot. Ju mörkare färg desto fler iterationer krävs för att närma sig roten.

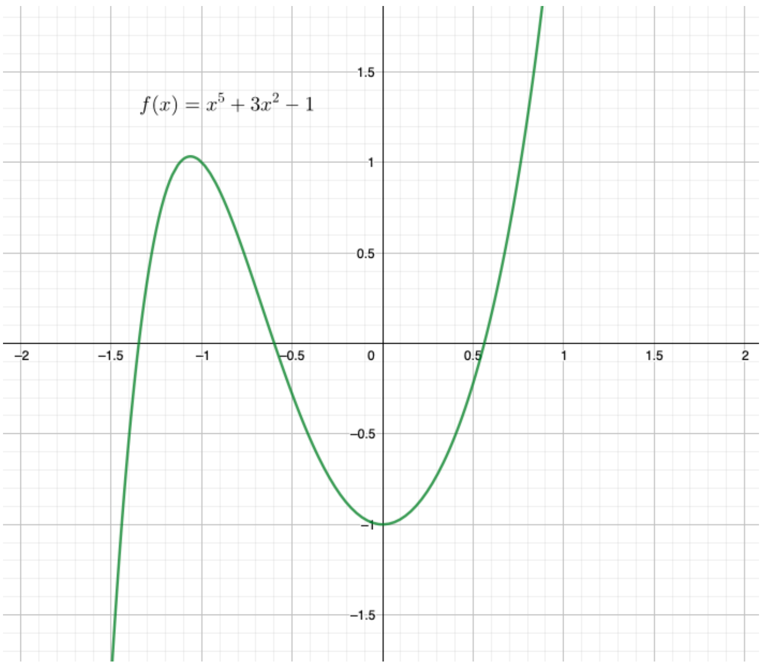


Figur 3: Attraktionsbassänger till $x^5 - 1 = 0$ i det komplexa planet. Illustration från [12].

Genom att utgå från attraktionsbassänger är det alltså möjligt att hitta minst en användbar startpunkt till varje approximerad rot. Den specifika utformningen av bassängerna ligger utanför uppsatsens område då de baseras på dynamiska system och komplex dynamik, se [9]. För ekvationer av riktigt hög grad, exempelvis flera hundra grader, är användningen av attraktionsbassänger många gånger ett måste för att hitta användbara startvärden. När det gäller femtegradsekvationer räcker det dock många gånger med att använda sig av skissering och uppskattning av startvärden. Dessa två metoder används i nedanstående exempel. Det ska påpekas att det är möjligt (genom att analysera attraktionsbassängerna) att konstruera en algoritm som alltid ger alla rötter till en polynomekvation med godtycklig noggrannhet.

3.2 Exempel

Nedan föjer ett exempel på hur femtegradsekvationen $x^5 + 3x^2 - 1 = 0$ kan lösas med hjälp av Newton-Raphsons metod. Från Algebrans fundamentalsats vet vi att ekvationen har minst en komplex rot, och sammanlagt fem rötter. Vi börjar med att söka de reella rötterna och skriver vår femtegradsekvation som funktionen $f(x) = x^5 + 3x^2 - 1$ och ritar grafen i det reella rummet. Avläsning av *Figur 4* ger att en av rötterna ligger i intervallet $[-1.5, -1]$.



Figur 4: Grafisk representation av $f(x) = x^5 + 3x^2 - 1$.

I detta intervall finns punkten $x = -1.2$, vilken vi väljer som startvärde. Vi har därmed $x_0 = -1.2$ och $f'(x) = 5x^4 + 6x$. Tillämpning av Newton-Raphsons metod ger

$$x_1 = -1.2 - \left(\frac{(-1.2)^5 + 3 \cdot (-1.2)^2 - 1}{5 \cdot (-1.2)^4 + 6 \cdot -1.2} \right) = -1.46253 \tag{3.8}$$

Vi upprepar algoritmen, men nu med -1.46253 som startvärde.

$$x_2 = -1.46253 - \left(\frac{(-1.46253)^5 + 3 \cdot (-1.46235)^2 - 1}{5 \cdot (-1.46253)^4 + 6 \cdot -1.46253} \right) = -1.37215. \tag{3.9}$$

En tredje iteration ger

$$x_3 = -1.37215 - \left(\frac{(-1.37215)^5 + 3 \cdot (-1.37215)^2 - 1}{5 \cdot (-1.37215)^4 + 6 \cdot -1.37215} \right) = -1.34942. \tag{3.10}$$

Vi utför en fjärde och femte iteration och redovisar resultaten i tabellen nedan.

n	x_n	$f(x_n)$
1	-1.46253	0.83168
2	-1.37215	-1.27446
3	-1.34942	-0.21573
4	-1.34805	-0.01158
5	-1.34805	-0.00004

Efter fem upprepningar verkar det som att x_4 och x_5 konvergerar mot samma tal och att $f(x_n)$ närmar sig 0. Eftersom x_4 och x_5 är samma tal med fem decimalers noggrannhet uppfyller de precisionskravet $|x_5 - x_4| < \epsilon$, om vi sätter $\epsilon = 0.000005$ Den uppskattade roten $A = -1.34805$ är därmed troligen korrekt med fem decimalers noggrannhet.

För att få en bättre förståelse för vad som sker då $n = 4$ och $n = 5$ kan vi utöka antalet decimaler för x_n och fortsätta upprepningen för högre n. I tabellen nedan ser vi att antalet korrekt approximerade decimaler ökar allt snabbare desto närmre vi kommer roten.

n	x_n	$f(x_n)$
4	-1.3480**5**17058204815105209202652930295749512491872653	-0.0115765
5	-1.3480469413**3**492717704956986171694610896457010482576	-0.0000401
6	-1.34804694129133847686**6**02935852664763530857583990166	-4.8799E-10
7	-1.34804694129133847685172810444071833928**2**4145266867	-7.2150E-20
8	-1.3480469412913384768517281044407183392822272866136	-1.5772E-39

I tabellen ovan är $n = 4$ är korrekt approximerad fram tills den femte decimalen, markerad i fetstil. För $n = 5$ är approximationen korrekt till den tionde decimalen. För $n = 6$ gäller det samma till den tjugonde decimalen, och för till $n = 7$ den fyrtionde. Vi ser att felet i uppskattningen kan skrivas som $10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-20}$ och 10^{-40}.

Ju närmre man befinner sig roten desto snabbare minskar därmed felet i approximeringen. Givet att man har hittat ett tillräckligt bra startvärde gäller detta överlag för Newton-Raphsons metod, förutom för dubbelrötter. Hur snabbt en iteration konvergerar benämns som *konvergenshastighet*, och är för Newton-Raphsons metod kvadratisk eftersom det uppskattade felet i en iteration går från ϵ till ϵ^2. Det innebär att antalet korrekta siffror fördubblas i en iteration, vilket syns ovan.

För att hitta de två andra reella rötterna till $f(x) = x^5 + 3x^2 - 1$ upprepar vi nu samma procedur. Genom att igen läsa av grafen i *Figur 4* ser vi att den andra roten befinner sig inom intervallet $[-1, -0.5]$. Ett kvalificerat startvärde är därmed $x_0 = -0.7$. Vi applicerar Newton-Raphons metod och får

$$x_1 = -0.7 - \left(\frac{(-0.7)^5 + 3 \cdot (-0.7)^2 - 1}{5 \cdot (-0.7)^4 + 6 \cdot -0.7} \right) = -0.59934. \tag{3.11}$$

Resterande iterationer redovisas i tabellen nedan.

n	x_n	$f(x_n)$
1	-0.59934	0.30193
2	-0.59924	0.00001
3	-0.59924	0.00001

Denna gång behövdes det enbart tre iterationer innan roten $B = -0.59924$ approximerades. Från vad vi vet om konvergenshastighet kan vi se att x_1 då $n = 1$ ligger nära den uppskattade roten. Newton-Raphsons metod konvergerar därför snabbt mot $B = -0.59924$.

Från grafen i *Figur 4* framkommer att den tredje roten finns inom intervallet $[0.5, 1]$, och vi sätter därför $x_0 = 0.7$ som startvärde.

$$x_1 = 0.7 - \left(\frac{(0.7)^5 + 3 \cdot (0.7)^2 - 1}{5 \cdot (0.7)^4 + 6 \cdot 0.7} \right) = 0.58185. \tag{3.12}$$

Iterationerna visas i tabellen nedan.

n	x_n	$f(x_n)$
1	0.58185	0.63807
2	0.56159	0.08234
3	0.56107	0.00201
4	0.56107	0.00001

Den tredje roten kan därmed skattas till $C = 0.56107$. Alla reella rötter till $f(x) = x^5 + 3x^2 - 1$ är nu approximerade med hjälp av Newton-Raphsons metod. Utifrån *Sats 2.5.* vet vi dock att varje ekvation av grad n har exakt n rötter. För att hitta de komplexa rötterna behöver vi utvidga Newton-Raphsons metod till att inkludera komplexa tal.

Definition 3.13. Låt $z = a + bi$ där a och $b \in \mathbb{R}$ och där i uppfyller $i^2 = \sqrt{-1}$. Då är z ett komplext tal och Newton-Raphsons metod uttrycks som

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

där f är en funktion av en komplex variabel.

Vi utvidgar vår funktion till att ta komplexa tal, $f(z) = z^5 + 3z^2 - 1$. För att hitta de komplexa rötterna behövs precis som tidigare ett startvärde. Vi sätter $z_0 = 1+i$ och utför algoritmen.

$$z_1 = 1 + i - \left(\frac{(1+i)^5 + 3(1+i)^2 - 1}{5(1+i)^4 + 6(1+i)} \right) = 0.64655 + 0.99138i. \tag{3.14}$$

Vi upprepar algoritmen tills z_n verkar konvergera mot ett och samma värde och $f(z_n)$ konvergerar mot 0. Resultatet redovisas i tabellen nedan.

n	z_n	$f(z_n)$
1	0.64655 +0.99138i	-5 +2i
2	0.23993 +1.76508i	-2.11509 +1.5966i
3	0.33288 +1.42626i	1.04091 +16.5373i
4	0.51767 +1.18671i	-0.62909 +5.62321i
5	0.83035 +1.26799i	-1.20399 +1.98702i
6	0.69712 +1.27689i	-1.8327 -1.44741i
7	0.69128 +1.31595i	-0.52652 +0.1256i
8	0.69309 +1.31375i	0.04102 +0.01705i
9	0.69311 +1.31376i	0.00002 + 0.00023i
10	0.69311 +1.31376i	0 - 0i

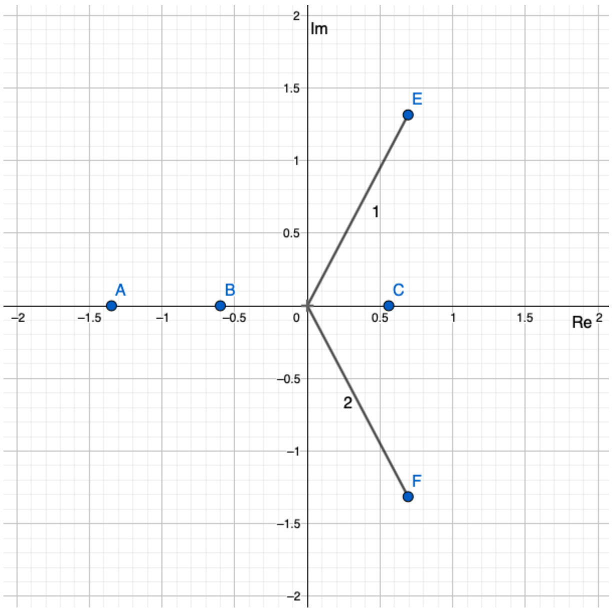
Efter tio iterationer närmar vi oss roten $E = 0.69311 + 1.31376i$. Som tidigare nämnt är precisonskravet för komplexa rötter omfattande, och vi nöjer oss med att konstatera att z_9 och z_{10} tycks konvergera mot samma punkt.

Att det krävdes tio iterationer innan roten kunde approximeras beror på att startvärdet $z_0 = 1+i$ befinner sig en bit bort den skattade roten $E = 0.69311+1.31376i$. Att iterationerna ökar ju längre bort från roten startvärdet är gäller generellt för

Newton-Raphsons metod[9]. För att finna komplexa rötter kan metoden med gissade startpunkter vara tidsödande, eftersom det till skillnad från de reella rötterna inte går att skissera upp dem i en graf. Utan attraktionsbassänger blir det därmed svårare att göra en kvalificerad gissning för startpunkten.

Det är även känt att då en ekvation med reella koefficienter har en imaginär rot $a+bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$, finns roten $a-bi$ som ett konjugat. De två konjugerade rötterna har dessutom samma multiplicitet [16]. Utifrån detta vet vi att de två komplexa rötterna till funktionen $f(z) = z^5+3z^2-1$ approximativt är $E = 0.69311+1.31376i$ och $F = 0.69311 - 1.31376i$.

När alla fem rötter nu är skattade är det möjligt att illustrera dem i ett koordinatsystem för det komplexa talplanet, se *Figur 5*. De reella talen *Re* befinner sig på x-axeln och de imaginära talen *Im* på y-axeln. De reella rötterna är punkterna A, B, C och de komplexa rötterna är punkterna E och F från de symmetriska vektorerna 1 och 2.



Figur 5: Grafisk representation av rötterna till $x^5 + 3x^2 - 1 = 0$.

3.3 Begränsningar

En svårighet med Newton-Raphsons metod är att lyckas välja ett användbart startvärde. För ekvationer med lätthanterliga koefficienter kan ett startvärde uppskattas genom att skriva ekvationen som en funktion och därefter skissa dess graf och ungefärliga nollställen. Detta fångar dock inte upp de komplexa rötterna, och blir samtidigt svårt för komplicerade ekvationer av högre grad. För att hitta möjliga startvärden behöver man därför arbeta med tidigare nämnda attraktionsbassänger.

En utmaning med att använda sig av attraktionsbassänger är att de ger ett stort antal potentiella startvärden att utgå från. För att hantera detta behövs därmed ett datorprogram. Dessutom behöver attraktionsbassängen konstrueras så att den är tillräckligt stor för att inte missa något startvärde, men samtidigt liten nog för att undvika att samma värde uppkommer flera gånger. Se [9].

Från *Figur 3* kan vi även se att många startvärden för en rot ligger nära ett startvärde för en annan rot. En liten förändring av startvärdet kan därmed ge en annan rot än vad som ursprungligen förväntades. En annan risk är att fungerande startvärden för dubbelrötter kan finnas i samma attraktionsbassäng. Det är dock ovanligt och kan upptäckas genom att konvergenshastigheten inte är kvadratisk.

Oavsett om man använder attraktionsbassänger eller grafskissning för att hitta ett potentiellt startvärde finns ytterligare ett problem. Om det valda startvärdet har alldeles för stort avstånd till roten kan det leda till att varje iteration ökar avståndet till lösningen istället för att närma sig den. Ju högre grad det är på ekvationen man försöker lösa desto större risk finns det att iterationen divergerar [9].

Det finns även tillfällen då Newton-Raphsons metod inte fungerar. Från *sats 3.6* har vi att $f'(x) \neq 0$, eftersom division med noll är otillåtet. Om derivatan av startvärdet blir noll går det därmed inte att hitta en rot. Försöker vi exempelvis lösa $f(x) = x^3 + 2$ och väljer startvärdet $x_0 = 0$ blir derivatan

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0. \tag{3.15}$$

Då härledningen av Newton-Raphsons metod baserar sig på lutningen av tangenten fungerar den inte om tangenten saknar lutning. Det innebär att startpunkten inte får väljas i någon stationär punkt, det vill säga minimipunkt, maximipunkt eller terasspunkt [1].

Slutligen finns risken att startpunkten befinner sig inom ett intervall av cykler där värdet aldrig konvergerar till en rot. Om vi söker en lösning till $f(x) = x^3 - 2x + 2$ och väljer $x_0 = 1$ som startvärde får vi

$$x_1 = 1 - \left(\frac{1^3 - 2 \cdot 1 + 2}{3 \cdot 1^2 - 2} \right) = 0 \tag{3.16}$$

$$x_2 = 0 - \left(\frac{0^3 - 2 \cdot 0 + 2}{3 \cdot 0^2 - 2} \right) = 1 \tag{3.17}$$

$$x_3 = 1 - \left(\frac{1^3 - 2 \cdot 1 + 2}{3 \cdot 1^2 - 2} \right) = 0. \tag{3.18}$$

Resterande resultat kommer därefter att cykliskt variera mellan 0 och 1 utan att någonsin nå en rot. Exempel hämtat från [9].

4 Bring-Jerrards metod och Tschirnhaus transformation

Under 1900-talet utvecklades arbetet med Tschirnhaus transformation och med hjälp av modern beräkningsteknik kan en resultant, tillsammans med Tschirnhaus hjälpekvation, användas för att omvandla en allmän femtegradsekvation till Bring-Jerrards form. Detta har effektiviserat Tschirnhaus äldre metod med polynomförkortning, och används i kommande avsnitt.

4.1 Resultant

Definition 4.1. Låt $f(x) = a_n x^n + .. + a_0$ och $g(x) = b_m x^m + ... + b_0$ vara två polynomfunktioner av graden n respektive m, med koefficienter i antingen $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Då är resultanten $R_{n,m}(f, g)$ det samma som determinanten en Sylvestermatris, $Syl(f, g)$, som ges av

$$\mathrm{Syl}_{n,m}(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2}\cdots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Sats 4.2. *Låt $f(x) = a_n x^n + .. + a_0$ och $g(x) = b_m x^m + ... + b_0$ vara två polynomfunktioner av graden n respektive m, med koefficienter i antingen $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Anta att f har n rötter $\xi_1, ..., \xi_n$ och att g har m rötter $\eta_1, ...\eta_m$. Då kan resultanten skrivas som:*

$$R(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} (\xi_i - \eta_j).$$

Av detta följer att f och g har en gemensam rot endast om resultanten är noll, det vill säga om $R_{n,m}(f, g) = 0$. Sats och definition från [15].

4.2 Bring-Jerrards metod

Följande tillvägagångssätt utgår från [7]. Bring-Jerrards metod går ut på att omvandla femtegradsekvationen

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{4.3}$$

till Bring-Jerrards form $x^5 + x + k = 0$. Det första steget är att införa Tschirnhaus hjälpekvation

$$y = x^2 + b_1x + b_0. \tag{4.4}$$

Därefter beräknar vi resultanten, det vill säga determinanten av de två ekvationernas Sylvestermatris. Med femtegradsekvationer blir Sylvestermatrisen snabbt svårhanterlig och därför används ett matematikprogram, exempelvis Wolfram Alphas implementering av Mathematica. För att få resultanten skrivs kommandot "Collect[Resultant[$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, y - (x^2 + b_1x + b_0), x], y$]". Detta eliminerar variabeln x och skriver om det femtegradspolynom som finns i ekvationen (4.3) till ett nytt femtegradspolynom med variabeln y. Koefficienterna framför y-potenserna består av en samling variabler från både hjälpekvationen och den ursprungliga femtegradsekvationen. Resultanten blir:

$y^5 + (-a_4^2 + b_1a_4 + 2a_3 - 5b_0)y^4 + (a_3^2 + b_1^2a_3 - 8b_0a_3 - a_4b_1a_3 + 10b_0^2 + 2a_1 - 2a_2a_4 + 4a_4^2b_0 + 3a_2b_1 - 4a_4b_0b_1)y^3 + (-10b_0^3 - 6a_4^2b_0^2 + 12a_3b_0^2 + 6a_4b_1b_0^2 - 3a_3^2b_0 - 3a_3b_1^2b_0 - 6a_1b_0 + 6a_2a_4b_0 - 9a_2b_1b_0 + 3a_3a_4b_1b_0 + a_2b_1^3 - a_2^2 + 4a_1b_1^2 - a_2a_4b_1^2 + 2a_1a_3 - 2a_0a_4 + 5a_0b_1 + a_2a_3b_1 - 3a_1a_4b_1)y^2 + (5b_0^4 + 4a_4^2b_0^3 - 8a_3b_0^3 - 4a_4b_1b_0^3 + 3a_3^2b_0^2 + 3a_3b_1^2b_0^2 + 6a_1b_0^2 - 6a_2a_4b_0^2 + 9a_2b_1b_0^2 - 3a_3a_4b_1b_0^2 - 2a_2b_1^3b_0 + 2a_2^2b_0 - 8a_1b_1^2b_0 + 2a_2a_4b_1^2b_0 - 4a_1a_3b_0 + 4a_0a_4b_0 - 10a_0b_1b_0 - 2a_2a_3b_1b_0 + 6a_1a_4b_1b_0 + a_1b_1^4 + 5a_0b_1^3 - a_1a_4b_1^3 + a_1^2 + a_1a_3b_1^2 - 4a_0a_4b_1^2 - 2a_0a_2 - a_1a_2b_1 + 3a_0a_3b_1)y - b_0^5 + a_0b_1^5 - a_4^2b_0^4 + 2a_3b_0^4 - a_0a_4b_1^4 - a_1b_0b_1^4 - a_3^2b_0^3 - 2a_1b_0^3 + 2a_2a_4b_0^3 + a_2b_0^2b_1^3 + a_0a_3b_1^3 - 5a_0b_0b_1^3 + a_1a_4b_0b_1^3 - a_0^2 - a_2^2b_0^2 + 2a_1a_3b_0^2 - 2a_0a_4b_0^2 - a_3b_0^3b_1^2 + 4a_1b_0^2b_1^2 - a_2a_4b_0^2b_1^2 - a_0a_2b_1^2 - a_1a_3b_0b_1^2 + 4a_0a_4b_0b_1^2 - a_1^2b_0 + 2a_0a_2b_0 + a_4b_0^4b_1 - 3a_2b_0^3b_1 + a_3a_4b_0^3b_1 + 5a_0b_0^2b_1 + a_2a_3b_0^2b_1 - 3a_1a_4b_0^2b_1 + a_0a_1b_1 + a_1a_2b_0b_1 - 3a_0a_3b_0b_1.$

För att göra resultanten mer hanterbar benämner vi koefficienterna framför y^4, y^3, y^2 och y som p_1, p_2, p_3 och p_4 samt de resterande variablerna som p_5 vilket ger resultanten

$$y^5 + p_1y^4 + p_2y^3 + p_3y^2 + p_1y + p_5. \tag{4.5}$$

Vid användning av Tschirnhaus transformation innehåller hjälpekvationen alltid odefinierade variabler. Därmed är variablerna b_0 och b_1 i resultanten okända, samtidigt som vi har specifika värden på koefficienterna till femtegradesekvationen vi önskar att lösa. Vi kan således eliminera två koefficienter från (4.5), förslagsvis p_1 och p_2, genom att hitta värden på b_0 och b_1 så att

$$p_1 = p_2 = 0. \tag{4.6}$$

Lösningen av (4.6) kan se olika ut beroende på femtegradsekvation, men i allmänhet har vi att $p_1 = 0$ ger möjlighet att lösa ut b_1 som ett linjärt uttryck i b_0. Vi sätter sedan in b_1 i $p_2 = 0$. Det ger en lösbar kvadratisk ekvation från vilken vi får ett eller flera par av lösningar med olika värden på b_0 och b_1. Ett konkret exempel ges i avsnitt 4.3.

Genom att lösa (4.6) elimineras y^4 och y^3 i (4.5). Även värdena på p_3, p_4 och p_5 förändras. Vi benämner dessa nya värden som q_1, q_2, q_3 och får därmed en ny femtegradsekvation, vars form på engelska kallas *principal quintic,*

$$y^5 + q_1 y^2 + q_2 y + q_3 = 0. \tag{4.7}$$

Om vi antar att vi kan skriva (4.5) som en polynomekvation och lösa den för y kan vi därefter även lösa ekvation (4.4) för två rötter x_1, x_2. Från *sats 4.2* vet vi att polynomfunktionerna f och g har en gemensam rot om resultanten är noll. Då vi ser att resultanten i (4.7) är lika med noll följer det att en av dessa rötter även är rot till vår ursprungliga ekvation.

För att transformera vår nya femtegradsekvation (4.7) använder vi återigen Tschirnhaus hjälpekvation, som denna gång består av fjärdegradsekvationen

$$z = y^4 + c_1 y^3 + c_2^2 + c_3 y + c_4. \tag{4.8}$$

Om hjälpekvationen istället är en andragradsekvation likt tidigare blir resultanten ett sjättegradspolynom, vilket för oss längre bort från lösningen [18]. Vi beräknar resultanten av (4.7) och (4.8)och ersätter därmed y-variabeln med variabler beroende på z. Resultanten blir

$z^5 + (-5c_4 + 3c_1q_1 + 4q_2)z^4 + (2q_2c_2^2 - 3q_1^2c_2 + 3c_3q_1c_2 + 5c_1q_3c_2 + 10c_4^2 + 3c_1^2q_1^2 + 6q_2^2 - 12c_1c_4q_1 + 4c_1c_3q_2 - 16c_4q_2 + 5c_1q_1q_2 + 5c_3q_3 - 4q_1q_3)z^3 + (-q_1^4 + c_1^3q_1^3 - 3c_1c_2q_1^3 + 3c_3q_1^3 - c_2^3q_1^2 - 3c_3^2q_1^2 + 3c_1c_2c_3q_1^2 - 9c_1^2c_4q_1^2 + 9c_2c_4q_1^2 + c_1^2q_2q_1^2 - 2c_2q_2q_1^2 - c_1q_3q_1^2 + c_3^3q_1 + 18c_1c_4^2q_1 + c_1q_2^2q_1 - 9c_2c_3c_4q_1 - c_1c_2^2q_2q_1 + 5c_1^2c_3q_2q_1 - 2c_2c_3q_2q_1 - 15c_1c_4q_2q_1 - 8c_2^2q_3q_1 + 7c_1^2c_2q_3q_1 - c_1c_3q_3q_1 + 12c_4q_3q_1 - 8q_2q_3q_1 - 10c_4^3 + 4q_2^3 + 4c_2^2q_2^2 - 4c_1^2c_2q_2^2 + 8c_1c_3q_2^2 - 18c_4q_2^2 - 5c_1^2q_3^2 - 5c_2q_3^2 + 4c_2c_3^2q_2 + 24c_4^2q_2 - 6c_2^2c_4q_2 - 12c_1c_3c_4q_2 + 5c_1c_3^2q_3 + 5c_2^2c_3q_3 - 15c_1c_2c_4q_3 - 15c_3c_4q_3 - 3c_1^3q_2q_3 + 2c_1c_2q_2q_3 + 11c_3q_2q_3)z^2 + (q_2^3c_1^4 - 3q_1q_2q_3c_1^4 - 2c_4q_1^3c_1^3 - c_2q_1q_2^2c_1^3 - 5c_3q_3^2c_1^3 - 2q_1q_3^2c_1^3 + c_3q_1^2q_2c_1^3 + 2c_2q_1^2q_3c_1^3 + q_2^2q_3c_1^3 + 6c_4q_2q_3c_1^3 - 4c_2q_2^3c_1^2 + 9c_4^2q_1^2c_1^2 + 2c_3^2q_2^2c_1^2 + 8c_2c_4q_2^2c_1^2 + c_3q_1q_2^2c_1^2 + 5c_2^2q_3^2c_1^2 + 10c_4q_3^2c_1^2 + q_2q_3^2c_1^2 - 2c_4q_1^2q_2c_1^2 - 10c_3c_4q_1q_2c_1^2 + 3c_3^2q_1q_3c_1^2 - 14c_2c_4q_1q_3c_1^2 - 7c_2c_3q_2q_3c_1^2 + 11c_2q_1q_2q_3c_1^2 + 6c_2c_4q_1^3c_1 + 4c_3q_2^3c_1 - q_1q_2^3c_1 + 5q_3^3c_1 - 6c_2c_3c_4q_1^2c_1 - 4c_2^2c_3q_2^2c_1 - 16c_3c_4q_2^2c_1 + 3c_2^2q_1q_2^2c_1 - 2c_4q_1q_2^2c_1 - 5c_2c_3q_3^2c_1 + 4c_2q_1q_3^2c_1 - 12c_4^3q_1c_1 + 12c_3c_4^2q_2c_1 - 3c_2c_3q_1^2q_2c_1 + 3c_2c_3^2q_1q_2c_1 + 15c_4^2q_1q_2c_1 + 2c_2^2c_4q_1q_2c_1 + 15c_2c_4^2q_3c_1 - 6c_2^2q_1^2q_3c_1 + 2c_4q_1^2q_3c_1 - 3c_2q_2^2q_3c_1 - 10c_3^2c_4q_3c_1 + 6c_2^2c_3q_1q_3c_1 + 2c_3c_4q_1q_3c_1 + c_2^3q_2q_3c_1 + 13c_3^2q_2q_3c_1 + 3q_1^2q_2q_3c_1 - 4c_2c_4q_2q_3c_1 - 10c_3q_1q_2q_3c_1 + 5c_4^4 + 2c_4q_1^4 + q_2^4 - 6c_3c_4q_1^3 + 2c_2^2q_2^3 - 8c_4q_2^3 - 9c_2c_4^2q_1^2 + 2c_2^3c_4q_1^2 + 6c_3^2c_4q_1^2 + c_2^4q_2^2 + 4c_2c_3^2q_2^2 +$

$$
18c_4^2q_2^2 + c_2q_1^2q_2^2 - 8c_2^2c_4q_2^2 - 5c_2c_3q_1q_2^2 - 5c_2^3q_3^2 + 5c_3^2q_3^2 + 2q_1^2q_3^2 + 10c_2c_4q_3^2 - 7c_3q_1q_3^2 -
6c_2q_2q_3^2 + 9c_2c_3c_4^2q_1 - 2c_3^3c_4q_1 + c_3^4q_2 - 16c_4^3q_2 - c_3q_1^3q_2 + 6c_2^2c_4^2q_2 + 3c_3^2q_1^2q_2 + 4c_2c_4q_1^2q_2 -
8c_2c_3^2c_4q_2 - 3c_3^3q_1q_2 - c_2^3c_3q_1q_2 + 4c_2c_3c_4q_1q_2 + 5c_2c_3^3q_3 - 2c_2q_1^3q_3 + 15c_3c_4^2q_3 + 6c_2c_3q_1^2q_3 +
7c_3q_2^2q_3 - 4q_1q_2^2q_3 - 10c_2^2c_3c_4q_3 - 2c_2^4q_1q_3 - 9c_2c_3^2q_1q_3 - 12c_4^2q_1q_3 + 16c_2^2c_4q_1q_3 + 3c_2^2c_3q_2q_3 -
22c_3c_4q_2q_3 - 4c_2^2q_1q_2q_3 + 16c_4q_1q_2q_3)z - c_4^5 - c_4^2q_1^4 - c_4q_2^4 - q_3^4 + c_1^3c_4^2q_1^3 - 3c_1c_2c_4^2q_1^3 +
3c_3c_4^2q_1^3 + 4c_4^2q_2^3 - c_1^4c_4q_2^3 - 2c_2^2c_4q_2^3 + 4c_1^2c_2c_4q_2^3 - 4c_1c_3c_4q_2^3 + c_1c_4q_1q_2^3 + c_1^5q_3^3 + 5c_1c_2^2q_3^3 -
5c_1^3c_2q_3^3 + 5c_1^2c_3q_3^3 - 5c_2c_3q_3^3 - 5c_1c_4q_3^3 - c_1^2q_1q_3^3 + 2c_2q_1q_3^3 + c_1q_2q_3^3 - 3c_1^2c_4^3q_1^2 + 3c_2c_4^3q_1^2 -
c_2^3c_4^2q_1^2 - 3c_3^2c_4^2q_1^2 + 3c_1c_2c_3c_4^2q_1^2 - 6c_4^3q_2^2 + 4c_2^2c_4^2q_2^2 - 4c_1^2c_2c_4^2q_2^2 + 8c_1c_3c_4^2q_2^2 - c_2c_4q_1^2q_2^2 -
c_2^4c_4q_2^2 - 2c_1^2c_3^2c_4q_2^2 - 4c_2c_3^2c_4q_2^2 + 4c_1c_2^2c_3c_4q_2^2 + c_1c_4^2q_1q_2^2 - 3c_1c_2^2c_4q_1q_2^2 + c_1^3c_2c_4q_1q_2^2 -
c_1^2c_3c_4q_1q_2^2 + 5c_2c_3c_4q_1q_2^2 - c_2^5q_3^2 + 5c_1c_3^3q_3^2 - 5c_2^2c_3^2q_3^2 - 5c_1^2c_2c_3^2q_3^2 - 5c_1^2c_4^2q_3^2 - 5c_2c_4^2q_3^2 -
c_2^2q_1^2q_3^2 + 2c_1c_3q_1^2q_3^2 - 2c_4q_1^2q_3^2 - c_2q_2^2q_3^2 + 5c_1c_2^3c_3q_3^2 + 5c_2^3c_4q_3^2 - 5c_1^2c_2^2c_4q_3^2 - 5c_3^2c_4q_3^2 +
5c_1^3c_3c_4q_3^2 + 5c_1c_2c_3c_4q_3^2 - 3c_1c_2^3q_1q_3^2 + c_1^3c_2^2q_1q_3^2 - 7c_1c_3^2q_1q_3^2 - 2c_1^4c_3q_1q_3^2 + 3c_2^2c_3q_1q_3^2 +
6c_1^2c_2c_3q_1q_3^2 + 2c_1^3c_4q_1q_3^2 - 4c_1c_2c_4q_1q_3^2 + 7c_3c_4q_1q_3^2 - 2c_2^3q_2q_3^2 + 4c_1^2c_2^2q_2q_3^2 + 3c_3^2q_2q_3^2 -
c_1^4c_2q_2q_3^2 + c_1^3c_3q_2q_3^2 - 7c_1c_2c_3q_2q_3^2 - c_1^2c_4q_2q_3^2 + 6c_2c_4q_2q_3^2 + c_1c_2q_1q_2q_3^2 - 3c_3q_1q_2q_3^2 +
3c_1c_4^4q_1 - 3c_2c_3c_4^3q_1 + c_3^3c_4^2q_1 + 4c_4^4q_2 - 2c_2^2c_4^3q_2 - 4c_1c_3c_4^3q_2 + c_3c_4q_1^3q_2 + 4c_2c_3^2c_4^2q_2 +
c_1^2c_4^2q_1^2q_2 - 2c_2c_4^2q_1^2q_2 - 3c_3^2c_4q_1^2q_2 - c_1^3c_3c_4q_1^2q_2 + 3c_1c_2c_3c_4q_1^2q_2 - c_3^4c_4q_2 - 5c_1c_4^3q_1q_2 -
c_1c_2^2c_4^2q_1q_2 + 5c_1^2c_3c_4^2q_1q_2 - 2c_2c_3c_4^2q_1q_2 + 3c_3^3c_4q_1q_2 - 3c_1c_2c_3^2c_4q_1q_2 + c_2^3c_3c_4q_1q_2 + c_3^5q_3 -
5c_1c_2c_4^3q_3 - 5c_3c_4^3q_3 - c_3^2q_1^3q_3 + 2c_2c_4q_1^3q_3 + c_3q_2^3q_3 + 5c_1c_3^2c_4^2q_3 + 5c_2^2c_3c_4^2q_3 + 3c_3^3q_1^2q_3 +
c_1^3c_3^2q_1^2q_3 - 3c_1c_2c_3^2q_1^2q_3 - c_1c_4^2q_1^2q_3 + 6c_1c_2^2c_4q_1^2q_3 - 2c_1^3c_2c_4q_1^2q_3 - 6c_2c_3c_4q_1^2q_3 + 4c_1c_3^2q_2^2q_3 +
c_1^4c_3q_2^2q_3 + 2c_2^2c_3q_2^2q_3 - 4c_1^2c_2c_3q_2^2q_3 - c_1^3c_4q_2^2q_3 + 3c_1c_2c_4q_2^2q_3 - 7c_3c_4q_2^2q_3 - c_1c_3q_1q_2^2q_3 +
4c_4q_1q_2^2q_3 - 5c_2c_3^3c_4q_3 - 3c_3^4q_1q_3 + 3c_1c_2c_3^3q_1q_3 + 4c_4^3q_1q_3 - c_2^3c_3^2q_1q_3 - 8c_2^2c_4^2q_1q_3 +
7c_1^2c_2c_4^2q_1q_3 - c_1c_3c_4^2q_1q_3 + 2c_2^4c_4q_1q_3 - 3c_1^2c_3^2c_4q_1q_3 + 9c_2c_3^2c_4q_1q_3 - 6c_1c_2^2c_3c_4q_1q_3 +
2c_1^2c_3^3q_2q_3 + 4c_2c_3^3q_2q_3 - 4c_1c_2^2c_3^2q_2q_3 - 3c_1^3c_4^2q_2q_3 + 2c_1c_2c_4^2q_2q_3 + 11c_3c_4^2q_2q_3 + c_2c_3q_1^2q_2q_3 -
3c_1c_4q_1^2q_2q_3 + c_2^4c_3q_2q_3 - c_1c_2^3c_4q_2q_3 - 13c_1c_3^2c_4q_2q_3 - 3c_2^2c_3c_4q_2q_3 + 7c_1^2c_2c_3c_4q_2q_3 +
c_1^2c_3^2q_1q_2q_3 - 5c_2c_3^2q_1q_2q_3 - 8c_4^2q_1q_2q_3 + 3c_1c_2^2c_3q_1q_2q_3 - c_1^3c_2c_3q_1q_2q_3 + 3c_1^4c_4q_1q_2q_3 +
4c_2^2c_4q_1q_2q_3 - 11c_1^2c_2c_4q_1q_2q_3 + 10c_1c_3c_4q_1q_2q_3.
$$

På en enklare form kan resultanten skrivas

$$
z^5 + r_1z^4 + r_2z^3 + r_3z^2 + r_4z + r_5. \tag{4.9}
$$

Vi ser att $r_1 = -5c_4 + 3c_1q_1 + 4q_2$ och $r_2 = 2q_2c_2^2 - 3q_1^2c_2 + 3c_3q_1c_2 + 5c_1q_3c_2 + 10c_4^2 + 3c_1^2q_1^2 + 6q_2^2 - 12c_1c_4q_1 + 4c_1c_3q_2 - 16c_4q_2 + 5c_1q_1q_2 + 5c_3q_3 - 4q_1q_3$. Vi bryter ut c_3 från r_2 och får $r_2 = 2q_2c_2^2 - 3q_1^2c_2 + 5c_1q_3c_2 + 10c_4^2 + 3c_1^2q_1^2 + 6q_2^2 - 12c_1c_4q_1 - 16c_4q_2 + 5c_1q_1q_2 - 4q_1q_3 + c_3(3q_1c_2 + 4c_1q_2 + 5q_3)$.

Genom att bryta ut c_3 från r_2 blir det enklare att hantera variabeln i ett ekvationssystem. Vi sätter de variabler från vilka vi bröt ut c_3 i en separat ekvation och löser den i ett ekvationssystem tillsammans med r_1 och r_2.

$$
\begin{cases} 3q_1c_2 + 4c_1q_2 + 5q_3 = 0 \\ r_1 = r_2 = 0. \end{cases} \tag{4.10}
$$

Beroende på vilken femtegradsekvation vi har att göra med och vilka variabler som finns kvar från resultanten kan lösningen skilja sig åt. En lösning som fungerar i de flesta fall är att skriva c_2 som ett uttryck av c_1. Vid behov kan man därefter eliminera en av ekvationerna i (4.10), förslagsvis r_1. Sedan skrivs c_1 som ett uttryck av c_4, vilket innebär att även c_2 kan skrivas om. Det sista steget blir att sätta in de nya uttrycken för c_1 och c_2 i r_2 och genom att låta c_3 vara en fri variabel lösa ekvationen för c_4. Då $r_1 = r_2 = 0$ är löst elimineras z^4 och z^3 i (4.9). Även värdet på koefficienterna r_3, r_4 och r_5 förändras. Nästa steg är att eliminera z^2. Vi har att

$r_3 = -q_1^4 + c_1^3q_1^3 - 3c_1c_2q_1^3 + 3c_3q_1^3 - c_2^3q_1^2 - 3c_3^2q_1^2 + 3c_1c_2c_3q_1^2 - 9c_1^2c_4q_1^2 + 9c_2c_4q_1^2 + c_1^2q_2q_1^2 - 2c_2q_2q_1^2 - c_1q_3q_1^2 + c_3^3q_1 + 18c_1c_4^2q_1 + c_1q_2^2q_1 - 9c_2c_3c_4q_1 - c_1c_2^2q_2q_1 + 5c_1^2c_3q_2q_1 - 2c_2c_3q_2q_1 - 15c_1c_4q_2q_1 - 8c_2^2q_3q_1 + 7c_1^2c_2q_3q_1 - c_1c_3q_3q_1 + 12c_4q_3q_1 - 8q_2q_3q_1 - 10c_4^3 + 4q_2^3 + 4c_2^2q_2^2 - 4c_1^2c_2q_2^2 + 8c_1c_3q_2^2 - 18c_4q_2^2 - 5c_1^2q_3^2 - 5c_2q_3^2 + 4c_2c_3^2q_2 + 24c_4^2q_2 - 6c_2^2c_4q_2 - 12c_1c_3c_4q_2 + 5c_1c_3^2q_3 + 5c_2^2c_3q_3 - 15c_1c_2c_4q_3 - 15c_3c_4q_3 - 3c_1^3q_2q_3 + 2c_1c_2q_2q_3 + 11c_3q_2q_3$, vilket innebär att c_3 kan brytas ut även här.

Vi skriver $r_3 = d_1c_3^3 + d_2c_3^2 + d_3c_3 + d_4$, där $d_1 - d_4$ är de övriga polynomen för resterande variabler. Från (4.10) har vi att c_3 är en fri parameter, och vi löser tredjegradsekvationen

$$r_3 = 0. \tag{4.11}$$

Detta lämnar oss slutligen med en femtegradsekvation på formen

$$z^5 + r_4'z + r_5' = 0 \tag{4.12}$$

där $r_4'z$ och r_5' har nya värden från lösningarna av (4.10) och (4.11). För att eliminera r_4' gör vi en skalning av (4.12). Vi sätter $z = \frac{t}{f}$ och får

$$z^5 + r_4'z + r_5' = \frac{t^5}{f^5} + \frac{r_4't}{f} + r_5' \tag{4.13}$$

Vi förlänger med f^5

$$t^5 + f^4r_4't + f^5r_5 = 0, \tag{4.14}$$

samt sätter $f^4r_4' = \pm 1$ för att lösa ut f, som vi för enkelhetens skull antar är reellt,

$$f^4r_4' = \pm 1 \Rightarrow f^4 = \pm\frac{1}{r_4'} \Rightarrow f = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{|r_4'|}}. \tag{4.15}$$

Med $f^4r_4' = \pm 1$ och $f = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{|r_4'|}}$ fås ekvationen:

$$t^5 \pm t + \left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{|r_4'|}}\right)^5 r_5 = 0. \tag{4.16}$$

Genom att sätta $\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{|r_4'|}}\right)^5 r_5 = k$ når vi slutligen fram till en femtegradsekvation på Bring-Jerrards form:

$$t^5 \pm t + k = 0. \tag{4.17}$$

Från *sats 4.2* vet vi att polynomfunktionerna f och g har en gemensam rot om resultanten är noll. Vi vet också att femtegradsekvationen i (4.17) härstammar från resultanterna av den ursprungliga femtegradsekvationen och Tschirnhaus hjälpekvationer. Genom att lösa (4.17) kan vi därmed hitta en rot till den ursprungliga femtegradsekvationen $x^5 + a_4x^4 + a_3x3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Resterande rötter kan därefter hittas genom att använda faktorsatsen, vilket ger en fjärdegradsekvation som kan lösas med rotutdragningar.

Lösningen av en ekvation på Bring-Jerrards form görs i avsnitt 5. Nedan följer en konkret applicering av Bring-Jerrards metod och en utveckling av de lösningsmetoder som nämnts ovan.

4.3 Exempel

Vi använder Bring-Jerrards metod för att lösa den irreducibla femtegradsekvationen

$$x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0 \tag{4.18}$$

Med Tschirnhaus hjälpekvation

$$y = x^2 + mx + n \tag{4.19}$$

får vi via kommandot "Collect[Resultant[$x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 4x - 1, y - (x^2 + mx + n), x], y$] resultanten

$-m^5 + 4m^4n - m^4 + m^3n^2 + 9m^3n - m^3 - m^2n^3 + y^3(m^2 + 4mn + 4m + 10n^2 - 4n - 5) - 15m^2n^2 + 8m^2n + m^2 + y^2(m^3 - 3m^2n - 15m^2 - 6mn^2 - 12mn - 16m - 10n^3 + 6n^2 + 15n - 11) + y(-4m^4 - 2m^3n - 9m^3 + 3m^2n^2 + 30m^2n - 8m^2 + 4mn^3 + 12mn^2 + 32mn + m + 5n^4 - 4n^3 - 15n^2 + 22n + 18) - mn^4 - 4mn^3 - 16mn^2 + y^4(-m - 5n + 1) - mn + 4m - n^5 + n^4 + 5n^3 - 11n^2 - 18n + y^5 - 1.$

Vi sätter koefficienterna för y^4 och y^3 till noll och löser i ett ekvationssystem,

$$\begin{cases} -m - 5n + 1 = 0 \\ m^2 + 4mn + 4m + 10n^2 - 4n - 5 = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Vi löser ut m från den första ekvationen,

$$m = -5n + 1. \tag{4.21}$$

Insatt i den andra ekvationen blir det

$$(-5n+1)^2 + 4(-5n+1)n + 4(-5n+1) + 10n^2 - 4n - 5 = 0, \tag{4.22}$$

vilket efter beräkning ger andragradsekvationen

$$15n^2 - 30n = 0. \tag{4.23}$$

Genom att bryta ut $15n$ får vi

$$15n(n-2) = 0 \tag{4.24}$$

med lösningarna $n_1 = 0, n_2 = 2$.

Från (4.21) har vi att $m = -5n + 1$, vilket ger $m_1 = 1, m_2 = -9$. Därmed är lösningen för (4.20) $m_1 = 1, n_1 = 0$ samt $m_2 = -9, n_2 = 2$.

För att underlätta beräkningen väljer vi m_1, n_1, vilket insatt i resultanten eliminerar y^4 och y^3 samt utraderar en hel del variabler då $n = 0$. Kvar blir femtegradspolynomet

$$y^5 - 41y^2 - 2y + 1. \tag{4.25}$$

Nästa steg är att använda den andra hjälpekvationen, fjärdegradsekvationen

$$z = y^4 + py^3 + qy^2 + ry + s. \tag{4.26}$$

Resultanten av $y^5 - 41y^2 - 2y + 1$ och $z = y^4 + py^3 + qy^2 + ry + s$ blir:

$-1 - 2p + 41p^2 + p^5 - 86q + 82pq - 5p^3q + 2p^4q - 1681q^2 + 5pq^2 - 8p^2q^2 - 41p^3q^2 + 4q^3 + 123pq^3 - q^5 - 254r + 3526pr + 5p^2r - 2p^3r + 86p^4r - 3367qr + 14pqr - 262p^2qr - 82p^3qr - 115q^2r + 246pq^2r + 5pq^3r - 2q^4r + 68915r^2 + 303pr^2 + 82p^2r^2 + 1681p^3r^2 - 410qr^2 - 5043pqr^2 - 5p^2qr^2 - 5q^2r^2 + 8pq^2r^2 + 41q^3r^2 + 5043r^3 + 5pr^3 - 4p^2r^3 - 8qr^3 - 123pqr^3 + 123r^4 + r^5 - 4034s + 10409ps + 2p^2s - 86p^3s + 254p^4s - 144578qs + 176pqs - 934p^2qs - 3526p^3qs + 344q^2s + 10578pq^2s - 5p^2q^2s + 5q^3s + 2pq^3s - 86q^4s + 137527rs + 852prs + 164p^2rs + 3367p^3rs - 10906qrs - 10081pqrs - 14p^2qrs + 6q^2rs + 262pq^2rs + 82q^3rs + 10081r^2s + 26pr^2s + 115p^2r^2s - 385qr^2s - 246pqr^2s + 246r^3s - 5qr^3s + 2r^4s - 2826449s^2 - 1845ps^2 - 3367p^2s^2 - 68915p^3s^2 + 6719qs^2 + 206759pqs^2 - 303p^2qs^2 + 344q^2s^2 - 82pq^2s^2 - 1681q^3s^2 - 206785rs^2 + 73prs^2 + 410p^2rs^2 - 164qrs^2 + 5043pqrs^2 + 5q^2rs^2 - 5043r^2s^2 + 5pr^2s^2 - 8qr^2s^2 - 41r^3s^2 - 188s^3 - 410ps^3 - 5043p^2s^3 + 5043qs^3 - 5pqs^3 + 4q^2s^3 - 5rs^3 + 8prs^3 + 123qrs^3 - 8s^4 - 123ps^4 - s^5 + (4034 - 10409p - 2p^2 + 86p^3 - 254p^4 + 144578q - 176pq + 934p^2q + 3526p^3q - 344q^2 - 10578pq^2 + 5p^2q^2 - 5q^3 - 2pq^3 + 86q^4 - 137527r - 852pr - 164p^2r - 3367p^3r + 10906qr + 10081pqr + 14p^2qr - 6q^2r - 262pq^2r - 82q^3r - 10081r^2 - 26pr^2 - 115p^2r^2 + 385qr^2 + 246pqr^2 - 246r^3 + 5qr^3 - 2r^4 + 5652898s + 3690ps + 6734p^2s + 137830p^3s - 13438qs - 413518pqs + 606p^2qs - 688q^2s + 164pq^2s + 3362q^3s + 413570rs - 146prs - 820p^2rs + 328qrs - 10086pqrs -$

$10q^2rs + 10086r^2s - 10pr^2s + 16qr^2s + 82r^3s + 564s^2 + 1230ps^2 + 15129p^2s^2 - 15129qs^2 + 15pqs^2 - 12q^2s^2 + 15rs^2 - 24prs^2 - 369qrs^2 + 32s^3 + 492ps^3 + 5s^4)z + (-2826449 - 1845p - 3367p^2 - 68915p^3 + 6719q + 206759pq - 303p^2q + 344q^2 - 82pq^2 - 1681q^3 - 206785r + 73pr + 410p^2r - 164qr + 5043pqr + 5q^2r - 5043r^2 + 5pr^2 - 8qr^2 - 41r^3 - 564s - 1230ps - 15129p^2s + 15129qs - 15pqs + 12q^2s - 15rs + 24prs + 369qrs - 48s^2 - 738ps^2 - 10s^3)z^2 + (188 + 410p + 5043p^2 - 5043q + 5pq - 4q^2 + 5r - 8pr - 123qr + 32s + 492ps + 10s^2)z^3 + (-8 - 123p - 5s)z^4 + z^5.$

Vi betraktar $(-8-123p-5s)z^4$ och $(188+410p+5043p^2-5043q+5pq-4q^2+5r-8pr-123qr+32s+492ps+10s^2)z^3$ och ser att de innehåller fyra variabler: p,q,r och s. För att lösa ut dessa i ett ekvationssystem bryter vi ut r från koefficienten till z^3 och får $r(5-8p-123q)$. Vi har därmed

$$\begin{cases} -8-123p-5s=0 \\ 5-8p-123q=0 \\ 188+410p+5043p^2-5043q+5pq-4q^2+5r-8pr-123qr+32s+492ps+10s^2=0. \end{cases} \tag{4.27}$$

Vi skriver s som ett uttryck av p i första ekvationen:

$$s = \frac{-8-123p}{5}, \tag{4.28}$$

och p som ett uttryck av q i den andra ekvationen:

$$p = \frac{5-123q}{8}. \tag{4.29}$$

Vi skriver därefter om (4.28) som

$$s = \frac{-8-123(\frac{5-123q}{8})}{5}. \tag{4.30}$$

I den sista ekvationen i ekvationssystemet ersätter vi nu s och p med (4.28) och (4.29):

$$188 + 410\left(\frac{5-123p}{8}\right) + 5043\left(\frac{5-123p}{8}\right)^2 - 5043q + 5\left(\frac{5-123p}{8}\right)q$$
$$-4q^2 + 5r - 8\left(\frac{5-123p}{8}\right)r - 123qr + 32\left(\frac{-8-123(\frac{5-123q}{8})}{5}\right)$$
$$+492\left(\frac{5-123p}{8}\right)\left(\frac{-8-123(\frac{5-123q}{8})}{5}\right) + 10\left(\frac{-8-123(\frac{5-123q}{8})}{5}\right)^2 = 0.$$

Vi låter de termer som innehåller r vara kvar i vänsterledet och flyttar över resterande termer till högerledet. Efter beräkning och förenkling får vi:

$$5r - 8\left(\frac{5-123q}{8}\right)r - 123qr = \frac{76321427}{320}q^2 + \frac{6445954}{320}q - \frac{149547}{320}. \tag{4.31}$$

Då termerna i det vänstra ledet är lika med 0 blir r en fri parameter. Vi söker därmed lösningen till

$$\frac{76321427}{320}q^2 + \frac{6445954}{320}q - \frac{149547}{320} = 0. \tag{4.32}$$

Lösningen för (4.32) är de två komplexa konjugerade rötterna

$$q_1 = \frac{3222977}{76321427} - \frac{836i\sqrt{1468115}}{76321427},$$

$$q_2 = \frac{3222977}{76321427} + \frac{836i\sqrt{1468115}}{76321427}.$$

Vi sätter därefter in någon av q_1 eller q_2, förslagsvis q_2, i (4.29) vilket ger

$$p = \frac{5 - 123(\frac{3222977}{76321427} + \frac{836i\sqrt{1468115}}{76321427})}{8} = -\frac{3704759}{152642854} - \frac{25707i\sqrt{1468115}}{152642854}. \tag{4.33}$$

Därefter kan (4.28) lösas då

$$s = \frac{-8 - 123(-\frac{3704759}{152642854} - \frac{25707i\sqrt{1468115}}{152642854})}{5} = -\frac{153091495}{152642854} + \frac{3161961i\sqrt{\frac{293623}{5}}}{152642854}. \tag{4.34}$$

Eftersom r är en fri parameter har vi därmed löst (4.27). Det innebär att koefficienterna för z^4 och z^3 blir noll och att variablerna kan elimineras ur resultanten. Vi går vidare genom att betrakta koefficienten till z^2,$(-2826449 - 1845p - 3367p^2 - 68915p^3 + 6719q + 206759pq - 303p^2q + 344q^2 - 82pq^2 - 1681q^3 - 206785r + 73pr + 410p^2r - 164qr + 5043pqr + 5q^2r - 5043r^2 + 5pr^2 - 8qr^2 - 41r^3 - 564s - 1230ps - 15129p^2s + 15129qs - 15pqs + 12q^2s - 15rs + 24prs + 369qrs - 48s^2 - 738ps^2 - 10s^3)$.

Genom att sätta in de nya värdena på s, p och q får vi efter beräkning

$$-\frac{1256614740810809551586086685032}{444569276156455193681483} - \frac{1583019605113714642794898i\sqrt{\frac{293623}{5}}}{444569276156455193681483}$$

$$-\frac{1204613603627660827460r}{5824960219316329} - \frac{279249555436126i\sqrt{1468115}r}{5824960219316329}$$

$$-\frac{109978286307r^2}{21806122}-\frac{20273i\sqrt{1468115}r^2}{21806122}-41r^3,$$

med det numeriska värdet

$$(-2.82659\cdot 10^6-862.893i)-(206802.+58.0871i)r-(5043.46+1.12647i)r^2-41r^3. \tag{4.35}$$

Vi sätter (4.35) =0 och löser för r, vilket ger rötterna

$$r_1=-42.8766-1.17352i, r_2=-40.8711+2.08757i, r_3=-39.2635-0.941525i. \tag{4.36}$$

Vi kan därmed eliminera z^2 då koefficienten är noll. Det som återstår av resultanten är z^5, z med dess tillhörande koefficient och de övriga variablerna. För att beräkna värdet på koefficienten till z ersätter vi p med (4.33), q med q_2 och s med (4.34). Eftersom r utifrån dessa värden blir en fri parameter sätter vi för enkelhetens skull $r=0$. Koefficienten

$4034-10409p-2p^2+86p^3-254p^4+144578q-176pq+934p^2q+3526p^3q-344q^2-10578pq^2+5p^2q^2-5q^3-2pq^3+86q^4-137527r-852pr-164p^2r-3367p^3r+10906qr+10081pqr+14p^2qr-6q^2r-262pq^2r-82q^3r-10081r^2-26pr^2-115p^2r^2+385qr^2+246pqr^2-246r^3+5qr^3-2r^4+5652898s+3690ps+6734p^2s+137830p^3s-13438qs-413518pqs+606p^2qs-688q^2s+164pq^2s+3362q^3s+413570rs-146prs-820p^2rs+328qrs-10086pqrs-10q^2rs+10086r^2s-10pr^2s+16qr^2s+82r^3s+564s^2+1230ps^2+15129p^2s^2-15129qs^2+15pqs^2-12q^2s^2+15rs^2-24prs^2-369qrs^2+32s^3+492ps^3+5s^4$

får efter beräkning det numeriska värdet

$$-5.67049\cdot 10^6+2.83779\cdot 10^7i. \tag{4.37}$$

Värdet på de övriga polynomen,

$-2p+41p^2+p^5-86q+82pq-5p^3q+2p^4q-1681q^2+5pq^2-8p^2q^2-41p^3q^2+4q^3+123pq^3-q^5-254r+3526pr+5p^2r-2p^3r+86p^4r-3367qr+14pqr-262p^2qr-82p^3qr-115q^2r+246pq^2r+5pq^3r-2q^4r+68915r^2+303pr^2+82p^2r^2+1681p^3r^2-410qr^2-5043pqr^2-5p^2qr^2-5q^2r^2+8pq^2r^2+41q^3r^2+5043r^3+5pr^3-4p^2r^3-8qr^3-123pqr^3+123r^4+r^5-4034s+10409ps+2p^2s-86p^3s+254p^4s-144578qs+176pqs-934p^2qs-3526p^3qs+344q^2s+10578pq^2s-5p^2q^2s+5q^3s+2pq^3s-86q^4s+137527rs+852prs+164p^2rs+3367p^3rs-10906qrs-10081pqrs-14p^2qrs+6q^2rs+262pq^2rs+82q^3rs+10081r^2s+26pr^2s+115p^2r^2s-385qr^2s-246pqr^2s+246r^3s-5qr^3s+2r^4s-2826449s^2-1845ps^2-3367p^2s^2-68915p^3s^2+6719qs^2+206759pqs^2-303p^2qs^2+344q^2s^2-82pq^2s^2-1681q^3s^2-206785rs^2+73prs^2+410p^2rs^2-164qrs^2+5043pqrs^2+5q^2rs^2-5043r^2s^2+5pr^2s^2-8qr^2s^2-41r^3s^2-188s^3-410ps^3-5043p^2s^3+5043qs^3-5pqs^3+4q^2s^3-5rs^3+8prs^3+123qrs^3-8s^4-123ps^4-s^5$, och konstanten -1 blir

$$6.83938 \cdot 10^7 + 2.8442 \cdot 10^7 i. \tag{4.38}$$

Det som återstår är därmed den reducerade femtegradsekvationen

$$z^5 + (-5.67049 \cdot 10^6 + 2.83779 \cdot 10^7 i)z + 6.83938 \cdot 10^7 + 2.8442 \cdot 10^7 i = 0. \tag{4.39}$$

En skalning görs genom att sätta $z = \frac{t}{f}$, vilket ger

$$\frac{t^5}{f^5} + (-5.67049 \cdot 10^6 + 2.83779 \cdot 10^7 i)\frac{t}{f} + 6.83938 \cdot 10^7 + 2.8442 \cdot 10^7 i = 0. \tag{4.40}$$

Vi multiplicerar med f^5:

$$t^5 + (-5.67049 \cdot 10^6 + 2.83779 \cdot 10^7 i) f^4 t + (6.83938 \cdot 10^7 + 2.8442 \cdot 10^7 i) f^5 = 0. \tag{4.41}$$

Sedan sätter vi $(-5.67049 \cdot 10^6 + 2.83779 \cdot 10^7 i) f^4 = -1$ och löser för f:

$$f^4 = \frac{1}{(5.67049 \cdot 10^6 - 2.83779 \cdot 10^7 i)} \Rightarrow f = \sqrt[4]{\frac{1}{(5.67049 \cdot 10^6 - 2.83779 \cdot 10^7 i)}} \tag{4.42}$$

För att få ekvationen på Bring-Jerrards form räcker det med att hitta ett f som satisfierar skalningen, varför vi inte sätter $(-5.67049 \cdot 10^6 + 2.83779 \cdot 10^7 i) f^4 = \pm 1$, samt låter fjärderoten i (4.42) enbart vara positiv. Vi har nu skrivit om den femtegradsekvation vi började med $x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0$, på Bring-Jerrards form:

$$t^5 \pm t + (+6.83938 \cdot 10^7 + 2.8442 \cdot 10^7 i)\left(\sqrt[4]{\frac{1}{(5.67049 \cdot 10^6 - 2.83779 \cdot 10^7 i)}}\right)^5 = 0. \tag{4.43}$$

5 Lagrangeinversion och Newtons binomialsats

5.1 Teori

Lagrangeinversion är en teknik som uppfanns av matematikern Joseph-Louis Lagrange i slutet av 1700-talet och ger koefficienterna till Taylorutvecklingen av en invers funktion. En Taylorutveckling av en funktion kan skrivas som

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{5.1}$$

där den sista termen innehållandes theta kallas *Lagranges restterm*, döpt efter just Lagrange [2]. Taylorutvecklingen ovan kan även uttryckas som serien

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}. \tag{5.2}$$

Definition 5.3. Lagrangeinversion Anta att funktionen $f(w) = z$ är analytisk vid en punkt a_0, det vill säga kan utvecklas i en konvergent potensserie i en omgivning till $z = a_0$. Anta även att funktionen $f(w) = z$ har en invers $g(z) = w$. Då ges inversen av

$$g(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{(z - f(a_0))^n}{n!},$$

där

$$g_n = \lim_{w \to a} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}\left[\left(\frac{w - a_0}{f(w) - f(a_0)}\right)^n\right].$$

Definition från [8].

Nedan följer ett bevis för Lagranges inversionssats hämtat från [14], men modifierat för $k = 1$. Beviset baserar sig på en alternativ formulering av *definition 5.3.*, där vi för enkelhetens skull antar vi att $a_0 = 0$ och $f(a_0) = 0$. Då vi har att göra med komplexa tal används z. Vi inför en notation där inversen till en funktion $F(z)$ skrivs $F^{-1}(z)$. Vi inför också att koefficienten för z^n i potensserien $F(z) = a_1z + a_2z^2 + ... + a_nz^n$ uttrycks $[z^n]F(z)$, och koefficienten z^n för en invers funktion $[z^n]F^{-1}(z)$.

Sats 5.4. *Låt $F(x) = a_1z + a_2z^2 + ... + a_nz^n$ vara en potensserie där $a_1 \neq 0$ och låt $n \in \mathbb{Z}$. Då formuleras Lagrangeinversion som*

$$n[z^n]F^{-1}(z) = [z^{n-1}]\left(\frac{z}{F(z)}\right)^n = [z^{-1}]F(z)^{-n}. \tag{5.5}$$

Bevis. Att en funktion kan utvecklas i en Taylorserie innebär att $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$. Om vi tillåter negativa potenser $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ har vi vad som kallas en *Laurentserie*. Vi noterar att potensserien $F(z)$ i *sats 5.4.* och dess invers $F^{-1}(z)$ kan uttryckas som en serie på formen

$$\sum_{i\geq 1} p_i z^i.$$

Precis som för en vanlig konvergent potensserie deriveras en Laurentserie termvis, där $\frac{d}{dz}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n = \frac{d}{dz}(... + c_{-2}z^{-2} + c_{-1}z^{-1} + c_0 z^0 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + ...) = (... - 2c_{-2}z^{-3} - c_{-1}z^{-2} + 0c_0 z^{-1} + 1c_1 z^0 + c_2 z^1 + ...)$. Vi observerar att derivatan av en Laurentserie saknar z^{-1}-term då koefficienten multipliceras med noll. Vi har därmed att

$$[z^{-1}]y' = 0. \tag{5.6}$$

Vi uttrycker $F^{-1}(z)$ från vänstra ledet i (5.5) som

$$F^{-1}(z) = \sum_{i\geq 1} p_i z^i. \tag{5.7}$$

Det vi nu söker är alla p_i, som ger koefficienterna framför $[z^{-1}]$. Eftersom $F^{-1}(z)$ är inversen till $F(z)$ har vi att $z = F^{-1}(F(z))$. Därmed kan (5.7) skrivas som

$$z = \sum_{i\geq 1} p_i F(z)^i \tag{5.8}$$

Vi deriverar vänsterledet och högerledet. På grund av regeln för derivatan för en sammansatt funktion får vi

$$1 = \sum_{i\geq 1} i p_i F(z)^{i-1} F'(z). \tag{5.9}$$

Därefter dividerar vi med $F(z)^n$

$$\frac{1}{F(z)^n} = \sum_{i\geq 1} i p_i F(z)^{i-n-1} F'(z). \tag{5.10}$$

Nästa steg är att ta fram koefficienten för $[z^{-1}]$. Eftersom vi har en sammansatt funktion kan vi skriva nästan alla termer i högerledet som derivator,

$$F(z)^{i-n-1}F'(z) = \frac{1}{i-n}\frac{d}{dz}F(z)^{i-n}, i \neq n, \tag{5.11}$$

där vi bortser från konstanten ip_i. Vi vet att för alla Laurentserier y är $[z^{-1}]y' = 0$, vilket enligt (5.11) innebär att alla termer i högerledet av (5.10), utom den som svarar mot $i = n$, inte innehåller någon term z^{-1}. Alltså är

$$[z^{-1}] i p_i F(z)^{i-n-1} F'(z) = 0, i \neq n.$$

Vi ser att den enda termen som inte är en derivata är $i = n$. Därmed är koefficienten för $[z^{-1}]$ för högerledet av (5.10)

$$[z^{-1}]\left(\sum ip_i F(z)^{i-n-1}F'(z)\right) = np_n[z^{-1}]F(z)^{-1}F'(z).$$

Vi skriver om det som

$$np_n[z^{-1}]F(z)^{-1}F'(z) = np_n[z^{-1}]\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right) = np_n[z^{-1}]\left(\frac{a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + ...}{a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + ...}\right). \tag{5.12}$$

Högerledet i (5.10) är nu högerledet i (5.12). Vi bryter ut $\frac{1}{z}$ från $\left(\frac{a_1+2a_2z+3a_3z^2+...}{a_1z+a_2z^2+a_3z^3...}\right)$ ovan och får

$$\frac{1}{z}\left(\frac{a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + ...}{a_1 + a_2z + a_3z^2 + ...}\right). \tag{5.13}$$

Vi dividerar med a_1

$$\frac{1}{z}\left(\frac{1 + \frac{2a_2z}{a_1} + \frac{3a_3z^2}{a_1} + ...}{1 + \frac{a_2z}{a_1} + \frac{a_3z^2}{a_1} + ...}\right). \tag{5.14}$$

Från det högra ledet i (5.12) har vi därmed

$$np_n[z^{-1}]\frac{1}{z}\left(\frac{1 + \frac{2a_2z}{a_1} + \frac{3a_3z^2}{a_1} + ...}{1 + \frac{a_2z}{a_1} + \frac{a_3z^2}{a_1} + ...}\right). \tag{5.15}$$

Kvoten

$$f(z) = \left(\frac{1 + \frac{2a_2z}{a_1} + \frac{3a_3z^2}{a_1} + ...}{1 + \frac{a_2z}{a_1} + \frac{a_3z^2}{a_1} + ...}\right)$$

och dess derivator är kontinuerliga i en omgivning av noll och kan därför Maclaurinutvecklas. Vi har att $f(z) = f(0) + f'(0)z + ...$, där $f(0) = 1$, vilket ger oss mönstret $1 + a_1'z + a_2'z^2 + a_3'z^3 + ...$ Alltså är $\frac{1}{z} \cdot f(z) = \frac{1}{z} + a_1' + a_2'z + a_3'z^2 + ...$ och $[z^{-1}](\frac{1}{z} \cdot f(z)) = 1$. Det innebär att

$$np_n[z^{-1}]\frac{1}{z} \cdot f(z) = np_n \cdot 1 \tag{5.16}$$

är lika med vänstra ledet i (5.10) och ger koefficenten för $[z^{-1}]$. Det vill säga

$$[z^{-1}]\frac{1}{F(z)^n} = np_n. \tag{5.17}$$

V.S.B. $\square$

5.2 Lagrangeinversion för Bring-Jerrards form

Från avsnitt 4.2 har vi den reducerade femtegradsekvationen på Bring-Jerrards form,

$$x^5 \pm x + z = 0. \tag{5.18}$$

Vi löser ut z och får

$$z = \mp x - x^5. \tag{5.19}$$

Låt oss anta att $z = x - x^5$. Fallet med motsatt tecken är analogt och redovisas kortfattat i slutet av avsnittet. Vi har därmed att $F(z) = x^5 - x$, och att lösa detta är det samma som att hitta $F^{-1}(z)$. Vi ansätter $F^{-1}(z)$ till

$$F^{-1}(z) = \sum_{i>1} p_i z^i. \tag{5.20}$$

Vi söker därmed koefficienterna i potensserien. Med Lagrangeinversion ges koefficienten för $[z^n]$ genom

$$np_n = [z^{-1}]\frac{1}{F(z)^n} = p_n = \frac{1}{n} \cdot [z^{-1}]\frac{1}{F(z)^n}. \tag{5.21}$$

Applicerat på $F(z) = x^5 - x$ blir Lagrangeinversionen

$$p_n = \frac{1}{n}[z^{-1}]\left(\frac{1}{z - z^5}\right)^n. \tag{5.22}$$

För att få (5.22) på en form som kan lösas med Newtons binomialsats bryter vi ut $\frac{1}{z^n}$

$$p_n = \frac{1}{n}[z^{-1}]\left(\frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{1 - z^4}\right)^n\right), \tag{5.23}$$

och skriver om $\left(\frac{1}{1-z^4}\right)^n$ som

$$\left(\frac{1}{1 - z^4}\right)^n = (1 - z^4)^{-n}. \tag{5.24}$$

I fallet med motsatt tecken, $z = -x - x^5$, skiljer sig Lagrangeinversionen genom att vi istället bryter ut $\frac{1}{-z^n}$. Vi får då att

$$p_n = \frac{1}{n}[z^{-1}]\left(\frac{1}{-z^n}\left(\frac{1}{1 + z^4}\right)^n\right). \tag{5.25}$$

5.3 Newtons binomialsats

Vi återvänder till (5.24) och applicerar Newtons binomialsats.

Sats 5.26. ***Newtons binomialsats.*** *Låt funktionen f vara $f(y) = (1+y)^\alpha$, och låt $\alpha, r \in \mathbb{Q}$ eller $\mathbb{Z}$. Då har vi att $(1+y)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} y^r$. Vilket också kan skrivas som $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}y^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}y^3 ... + \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-r+1)}{r!}y^r + ...$*

Från (5.24) har vi att $y = -z^4$ och $\alpha = -n$. Det ger

$$(1-z^4)^{-n} = 1+nz^4+\frac{n(n+1)}{2!}z^8+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}z^{12}+...+\frac{n(n+1)(n+2)...(n+r-1)}{r!}z^{4r}+... \tag{5.27}$$

Nu kan vi bestämma p_n, det vill säga koefficienten framför $[z^{-1}]$. Från (5.23) har vi att

$$p_n = \frac{1}{n}[z^{-1}]\left(\frac{1}{z-z^5}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{1-z^4}\right)^n, \tag{5.28}$$

och eftersom vi från (5.27) får en serie med potenser och koefficienter kan den sista termen i (5.28) uttryckas som

$$\left(\frac{1}{1-z^4}\right)^n = \sum_{i\geq 0} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... \tag{5.29}$$

Då är

$$\frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{1-z^4}\right)^n = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + ... + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n + a_{n+1}z + ..., \tag{5.30}$$

där koefficienten framför $[z^{-1}]$ precis är koefficienten framför $n-1$ från $\frac{a_{n-1}}{z}$ i utvecklingen ovan. Därmed är

$$\frac{1}{n}[z^{-1}]\left(\frac{1}{z-z^5}\right)^n = \frac{1}{n}[z^{n-1}]\left(\frac{1}{1-z^4}\right)^n. \tag{5.31}$$

Från (5.27) ser vi att de enda koefficienter i $(1-z^4)^{-n}$ som är skilda från noll är de som svarar mot z^{4r} för något $r > 0$. Alltså måste

$$n - 1 = 4r \Rightarrow n = 4r + 1 \tag{5.32}$$

om vi ska ha att $p_n \neq 0$. Sammantaget får vi att (5.31) genom *sats 5.26.* kan skrivas om till

$$p_n = \frac{1}{n}[z^{n-1}]\sum_{s\geq 0}\binom{-n}{s}z^{4s}, \tag{5.33}$$

och utvecklas till

$$p_n = \frac{1}{n}[z^{n-1}]\left(\sum_{s\geq 0}\frac{(n(n+1)(n+2)(n+3)...(n+s-1))}{s!}z^{4s}\right). \tag{5.34}$$

Vi beräknar summan från (5.34) vilket innebär att vi plockar ut koefficienten framför z^{4s}. Från (5.32) har vi att $n = 4r+1$ eftersom vi annars får $p_n = 0$. Vi skriver det som

$$p_n = \frac{1}{4r+1}\left(\frac{(4r+1)(4r+2)(4r+3)...(4r+r-1)}{r!}\right), \tag{5.35}$$

och ser att $\frac{1}{4r+1}$ tar ut varandra i täljare och nämnare. Avslutningsvis får vi

$$p_n = \frac{(4r+2)(4r+3)...(5r)}{r!} \tag{5.36}$$

då $n = 4r+1$. För $r = 0$ får vi att p_0 är koefficienten för $z^{n-1} = z^0 = 1$, det vill säga enbart 1. För $r = 1$ får vi att $n = 5$ och att p_1 är $\frac{n}{nr!} = \frac{5}{5\cdot 1} = 1$. De övriga fallen då $n \neq 4r+1$ ger $p_n = 0$. Vi har nu bestämt alla p_n och därmed koefficienten till $[z^{-1}]$. Vi skriver det som

$$F^{-1}(z) = z + z^5 + \sum_{r>1}\frac{(4r+2)(4r+3)...(5r)}{r!}\cdot z^{4r+1}. \tag{5.37}$$

5.4 Exempel

Vi applicerar Lagrangeinversion och Newtons binomialsats för att lösa ekvationen $\frac{1}{10} = x - x^5$, där $z = \frac{1}{10}$. Genom att lösa $F(z)^{-1}$ hittar vi den positiva reella roten. Från utvecklingen i (5.37) har vi att

$$F^{-1}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \sum_{r>1}\frac{(4r+2)(4r+3)...(5r)}{r!}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{4r+1}. \tag{5.38}$$

Vi beräknar summan för ökande värden på r. Från (5.38) har vi de två första termerna för $r = 0$ och $r = 1$. För $r = 2$ söker vi koefficienten för $n = 4r+1 \Rightarrow n = 9$. Täljaren i summan för (5.38) består av produkten av alla heltal mellan $4r+2$ och $5r$, i detta fall enbart 10. För $r = 2$ blir den tredje termen i summan

$$\frac{(4r+2)}{2!}(0.1)^{4r+1} = 5(0.1)^9. \tag{5.39}$$

Resterande termer beräknas efter samma mönster. Då $r = 3$ består täljaren av produkten av alla heltal mellan $4\cdot 3+2$ och $5\cdot 3$ och koefficienten blir

$$\frac{(4r+2)(5r)}{3!}(0.1)^{4r+1} = \frac{14\cdot 15}{6}(0.1)^{4\cdot 3+1} = 35(0.1)^{13}. \tag{5.40}$$

För $r = 4$ får vi

$$\frac{(4r+2)(4r+3)(5r)}{4!}(0.1)^{4r+1} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{24}(0.1)^{4 \cdot 4+1} = 285(0.1)^{17}. \qquad (5.41)$$

$r = 5$ ger

$$2530(0.1)^{21}, \qquad (5.42)$$

$r = 6$ ger

$$23751(0.1)^{25}, \qquad (5.43)$$

$r = 7$ ger

$$231889(0.1)^{29}, \qquad (5.44)$$

$r = 8$ ger

$$2330445(0.1)^{33}, \qquad (5.45)$$

$r = 9$ ger

$$23950355(0.1)^{37}, \qquad (5.46)$$

och $r = 10$ ger

$$250543370(0.1)^{41}. \qquad (5.47)$$

Vi summerar alla termer från $r = 0$ till $r = 10$:

$0.1+(0.1)^5+5(0.1)^9+35(0.1)^{13}+285(0.1)^{17}+2530(0.1)^{21}+23751(0.1)^{25}+231880(0.1)^{29}+2330445(0.1)^{33}+23950355(0.1)^{37}+250543370(0.1)^{41} =$

$0.10001000500350285253237742113284254093 37.$

För att säkerställa att detta är en rot löser vi ekvationen $\frac{1}{10} = x - x^5$ i Mathematica med kommandot "$NSolve[.1 == z - z^5, z, WorkingPrecision -> 50]$", för att få värdet på roten med 50 decimaler. Vi får att

$z = 0.10001000500350285253237742113284254359552706608742,$

vilket stämmer överens med serielösningen ovan till 35 decimaler. Vi har därmed approximerat den positiva reella roten till ekvationen $\frac{1}{10} = x - x^5$ på Bring-Jerrards form med hjälp av Lagrangeinversion och Newtons binomialsats.

5.5 Begränsningar

Ett exempel på en ekvation på Bring-Jerrards form som inte kan lösas med ovanstående metod är ekvationen

$$x^5 - x + 1 = 0. \qquad (5.48)$$

Sätter vi in (5.48) i (5.38) får vi $F^{-1}(1) = 1 + 1^5 + 35 \cdot 1^{13} + 285 \cdot 1^{17} + 2530 \cdot 1^{21} + ...,$ där summan fortsätter att öka för ökande värden på r. Metoden behöver därför modifieras för att lösa en ekvation där $z = 1$ eftersom partialsummorna i (5.48) inte konvergerar. Här kan analytisk fortsättning från den komplexa analysen appliceras. Den funktion som ger serielösningen blir då analytisk genom en utvidgad definitionsmängd och kan därefter skrivas som en konvergent potensserie. Det behöver även göras ett variabelbyte vid skalningen i slutet av Bring-Jerrards metod till $t = z - 1$.

En annan utmaning är att användningen av Lagrangeinversion och Newtons binomialsats kan resultera i numeriskt komplicerade beräkningar för ekvationer på Bring-Jerrards form där z består av potenser och rotutdragningar, likt $t^5 \pm t + (+6.83938 \cdot 10^7 + 2.8442 \cdot 10^7 i)\left(\sqrt[4]{\frac{1}{(5.67049 \cdot 10^6 - 2.83779 \cdot 10^7 i)}}\right)^5 = 0$ från (4.43). Detta kan både bli tidsödande och kräva att ett matematiskt beräkningsprogram används.

Tillvägagångssättet jag demonstrerat i kapitel 4 och 5 kan därmed inte användas som en direkt överförbar metod för att lösa alla femtegradsekvationer, utan behöver i vissa fall modifieras för att få ett större användningsområde.

6 Sammanfattning

Beroende på vilken femtegradsekvation man ämnar att lösa erbjuder de två metoderna olika för- och nackdelar. För en ekvation med stora eller komplicerade koefficienter kan det med Newton-Raphsons metod vara tidsödande att hitta användbara startvärden, beroende på hur välkonstruerade attraktionsbassängerna är. Det gäller att undvika startvärden i stationära punkter och startvärden som befinner sig inom ett intervall av cykler. Startvärdet får inte heller befinna sig för långt bort från roten eftersom iterationerna då riskerar att divergera.

I kontrast till detta behöver Bring-Jerrards metod inget startvärde eftersom Tschirnhaus hjälpekvationer av andra och fjärde graden redan är formulerade. Det bör dock påpekas att metoden passar bäst för femtegradsekvationer som består av irreducibla polynom, eftersom de reducibla polynomen ofta kan reduceras på mer effektiva sätt än genom Tschirnhaus transformation.

En risk med Tschirnhaus transformation är att resultanten och de värden som denna genererar kan bli allt för stora och svårhanterliga, vilket kan förhindra lösningsarbetet. Ekvationen i avsnitt *4.3* är ett exempel på att det många gånger krävs ett datorprogram som exempelvis Mathematica för att hålla ordning på de komplicerade variablerna och komplexa rötterna.

När man väl funnit användbara startvärden har Newton-Raphsons metod fördelen att alla rötter approximeras genom upprepning av ett och samma tillvägagångssätt. Bring-Jerrards metod samt efterföljande Lagrangeinversion och användning av Newtons binomialsats resulterar enbart i att en av fem rötter uppskattas, där de resterande rötterna kan hittas genom exempelvis faktorsatsen och rotutdragning eller genom Newton-Raphsons metod.

Beroende på vilken femtegradsekvation som ska lösas krävs ibland, som ovan visat, förändringar i och utvecklingar av tillvägagångssättet för Bring-Jerrards metod och Newtons binomialsats. Det är därmed svårt att på förhand veta hur lösningsarbetet för en specifik ekvation kommer att se ut. Då en femtegradsekvation reducerats till Bring-Jerrards form finns även en risk att den numeriska summaberäkningen i Newtons binomialsats blir invecklad och svår att genomföra.

Att undersöka vilka specifika femtegradsekvationer som inte kan lösas genom någon av ovanstående metoder skulle bidra till ytterligare förståelse för femtegradsekvationens lösbarhet kontra olösbarhet, och är ett förslag för framtida uppsatser och studier inom området.

Referenser

[1] A. G. Wiersma. *The Complex Dynamics of Newton's Method.* Faculty of Mathematics and Natural Sciences. University of Groningen. (2016).

[2] A. Persson och L. C. Böiers. *Analys i en variabel.* Lund: Studentlitteratur. (2010).

[3] *Cardano formula.* Encyclopedia of Mathematics. (2012). Hämtad från: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Cardanoformulaoldid=29227.

[4] *Erland Samuel Bring.* Wikipedia. (2021). Hämtad från: https://en.wikipedia.org/wiki/ErlandSamuelBring.

[5] E. W. Weisstein. *Tschirnhausen Transformation.* MathWorld–A Wolfram Web Resource. Hämtad från: https://mathworld.wolfram.com/TschirnhausenTransformation.html

[6] *Ferrari's Method.* Proofwiki. (2019). Hämtad från: https://proofwiki.org/wiki/Ferrari27sMethod

[7] *How to transform a general higher degree five or higher equation to normal form?.* Math.stackexchange. (2015). Hämtad från: https://math.stackexchange.com/questions/542108/how-to-transform-a-general-higher-degree-five-or-higher-equation-to-normal-form

[8] *Lagrange inversion theorem.* Wikipedia. (2021). Hämtad från: https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangeinversiontheorem

[9] J. Hubbard, D. Schleicher S. Sutherland. *How to Find All Roots of Complex Polynomials by Newton's Method.* Inventiones mathematicae, 146, 1–33. (2001).

[10] J. Skott, K. Jess och H.C. Hansen med S. Lundin. *Matematik för lärare - δ Didaktik.* Malmö: Gleerups. (2010).

[11] J. Thompson. *Matematiken i historien.* Lund: Studentlitteratur. (1996).

[12] *Newton's Fractals.* Wikimedia. (2004). Hämtad från:

https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=644886

[13] *Newton's Method.* Wikipedia. (2022). Hämtad från: https://en.wikipedia.org/wiki/Newtonsmethod

[14] R.P Stanley. *Enumerative Combinatorics Vol 2.* Cambridge University Press. (1999).

[15] S. Janson. *Resultant and Discriminant of Polynomials.* Department of Mathematics, Uppsala University. (2010). Hämtad från: http://www2.math.uu.se/ svante/papers/sjN5.pdf

[16] T. Nagell. *Lärobok i algera.* Stockholm: Almqvist Wisells. (1949).

[17] *Tschirnhaus Transformation.* Wikipedia. (2022). Hämtad från: https://en.wikipedia.org/wiki/Tschirnhaustransformation

[18] V. Adamchik. D. J. Jeffrey. *Polynomial Transformations of Tschirnhaus, Bring and Jerrard.* ACM SIGSAM Bulletin, Vol 37, No. 3, 90-94. (2003).

[19] V. J. Katz. *History of Mathematics.* Essex: Pearson. (2014).

.