



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Värmeledningsekvationen

av

Tomas Nilsson

2022 - K37

Värmeledningsekvationen

Tomas Nilsson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jonathan Rohleder

2022

Abstract

This thesis discusses and presents the heat equation, a famous classical linear partial differential equation. This equation was initially developed by the French mathematician and physicist J. Fourier (1768-1830) in order to model how heat diffuses through a region of a certain medium or material. We perform a detailed study of the solution method separation of variables in one and several dimensions through a deduction of analytical solutions to the heat equation subject to different boundary conditions. Included in this is to deduce a generalization of the solution method based on the fact that the Laplace operator can be expressed in terms of its eigenvalues and eigenfunctions.

Furthermore, a discussion and presentation follows about heat kernel, a fundamental solution of the heat equation that can be used to express solutions over certain domains.

We then study and present the maximum principle for the heat equation in a theorem with proof. This principle implies that the maximum value of the temperature in a region M , where M contains both the space and the time variable, will not surpass the maximum value that earlier existed in M , unless it is on the boundary of M .

Finally we motivate and deduce a basic numerical method with the purpose to solve a simpler case of the heat equation.

Sammanfattning

Detta individuella arbete diskuterar och presenterar värmeledningsekvationen, en berömd klassisk linjär partiell differentialekvation. Ekvationen utvecklades först av den franske matematikern och fysikern J. Fourier (1768-1830) för att modellera hur värme diffunderar eller sprids genom ett område av ett visst medium eller material. Vi studerar i detalj variabelseparation som lösningsmetod i en respektive flera dimensioner genom att härleda analytiska lösningar till värmeledningsekvationen under olika randvillkor. Inkluderat i detta är en generalisering av lösningsmetoden baserat på det faktum att Laplaceoperatorn kan uttryckas i termer av dess egenvärden och egenfunktioner.

Vidare följer en diskussion och presentation av "heat kernel" som är en (även svensk) benämning på en fundamentallösning som blir ett sätt att uttrycka lösningar till värmeledningsekvationen över vissa områden.

Vi studerar och presenterar därefter maximumprincipen för värmeledningsekvationen genom en sats med bevis. Principen innebär att det maximala värdet av temperaturen i ett område M , där M innehåller både rums- och tidsvariabel, kommer inte att överskrida det maximala värdet som tidigare har förekommit i M , såvida det inte är på randen av M .

Till sist motiverar vi och härleder en grundläggande numerisk metod med syfte att lösa ett enklare fall av värmeledningsekvationen.

Förord

Jag vill framföra ett stort tack till min handledare Jonathan Rohleder dels för att han föreslog ämnet och ramarna för uppsatsen, dels för ett mycket positivt bemötande med konstruktiv kritik och vägledning under arbetets fortskridande. Allt detta är enligt min mening grundat i Jonathans mycket djupa kunskap i matematikämnet. Jag vill även rikta ett tack till övriga på matematiska institutionen vid Stockholms universitet för de intressanta kurser som har varit en grund och förutsättning för mitt individuella arbete. Till sist ett varmt tack till min familj som alltid har uppmuntrat mig.

Sollentuna, hösten 2022

Tomas Nilsson

Innehåll

1	Introduktion	4
2	Inledning till värmeledningsekvationen	6
3	Variabelseparation som lösningsmetod	8
3.1	Värmeledningsproblem i en dimension	8
3.2	Generalisera lösningsmetoden - Egenvärden och egenfunktioner till Laplaceoperatorn	16
3.2.1	Laplaceoperatorn och egenvärdesproblemet i en rektangel med Dirichletvillkor	21
3.2.2	Laplaceoperatorn och egenvärdesproblemet i en rektangel med Neumannvillkor	24
3.3	Lösning av värmeledningsproblem i flera dimensioner	28
3.3.1	Värmeledningsproblem i godtyckligt antal dimensioner	28
3.3.2	Värmeledningsproblem i två dimensioner (rektangel)	30
4	Heatkernel eller fundamentallösning	34
4.1	Heat kernel för reella tallinjen respektive för hela \mathbb{R}^n	34
4.2	Heat kernel i ett begränsat område i \mathbb{R}^n	37
5	Maximumprincipen	38
6	Numerisk analys	41

1 Introduktion

Det ömsesidiga utbytet mellan matematiker och teoretiska fysiker under historiens gång har starkt bidragit till att utveckla vetenskapen [4]. Inte minst gäller detta kring tillämpningar av matematiken för att beskriva eller modellera fysikaliska fenomen. En mycket intressant sådan tillämpning är just värmeledningsekvationen, den klassiska linjära partiella differentialekvation (PDE) som är föremål för denna uppsats. Ekvationen utvecklades först av den franske matematikern och fysikern J. Fourier (1768-1830) för att modellera hur värme diffunderar eller sprids genom ett område av ett visst medium eller material. En PDE som värmeledningsekvationen beskriver en relation mellan en flervariabelfunktion och dess partiella derivator upp till en viss ordning. Vi kan uttrycka värmeledningsekvationen enligt

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta_x u = 0,$$

där $u = u(x, t) = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, är ekvationens lösning som beskriver temperaturen i en godtycklig punkt (rum och tid) i ett homogent medium, Δ_x är Laplaceoperatoren med avseende på x , t är tiden och k en positiv konstant för den termiska diffusiviteten hos mediet. Till en värmeledningsekvation följer ofta begynnelsevillkor och olika typer av randvillkor som exempelvis så kallade Dirichletrandvillkor och Neumannrandvillkor. Dessa typer av randvillkor är beskrivna i efterföljande kapitel tillsammans med en något mer rigorös introduktion av ekvationen.

Samme Fourier upptäckte en mycket användbar metod att lösa värmeledningsekvationen (och andra ekvationer) kallad variabelseparation som går ut på att söka lösningar som kallas separerade lösningar eller produktlösningar och är på formen

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Det visar sig sedan att i en dimension blir både X och T ovan lösningar av linjära ordinära differentialekvationer medan i flera dimensioner eller rumsvariabler blir X istället lösning till en PDE ([5], kap. 5.2, 9.5). Denna lösningsmetod inklusive en generalisering av den med hjälp av egenvärden och egenfunktioner till Laplaceoperatoren studerar vi i detalj i kapitel 3. Uppsatsen tar även upp andra intressanta och betydelsefulla delar kring värmeledningsekvationen som fundamentallösning (heat kernel) - ett sätt att uttrycka lösningar, maximumprincipen - ett sorts redskap i analys, samt till sist numerisk analys med numeriska metoder - en väg för att hantera det faktum att de flesta PDE inte går att lösa analytiskt. Härefter följer nu en kortfattad beskrivning av innehållet i uppsatsens övriga huvudkapitel.

Kapitel 2: Inledning till värmeledningsekvationen

I detta kapitel får vi en kort introduktion till partiella differentialekvationer (PDE) följt av en inledning och introduktion till värmeledningsekvationen. Vi

lär oss vidare att denna ekvation oftast är en del av ett värmeledningsproblem med begynnelsevillkor och randvillkor. En beskrivning av olika typer randvillkor, som Dirichletrandvillkor respektive Neumannrandvillkor följer också. Kapitlet tar till sist kortfattat upp några olika varianter av värmeledningsekvationen.

Kapitel 3: Variabelseparation som lösningsmetod

Inleder med en översiktlig beskrivning av metoden variabelseparation i syfte att lösa en PDE. I kapitel 3.1 diskuteras detaljerna genom härledning av lösningar till två värmeledningsproblem i en dimension med olika typer av randvillkor. Påföljande kapitel 3.2 handlar om hur man kan generalisera lösningsmetoden med hjälp av egenvärden och egenfunktioner till Laplaceoperatoren samt om en del underliggande teorier. Två underkapitel innefattar härledningar av lösningar till egenvärdesproblem för Laplaceoperatoren under olika randvillkor. I avslutande kapitel 3.3 härleds lösningar på flerdimensionella värmeledningsproblem, dels i godtyckligt antal dimensioner, dels i två dimensioner i ett område i form av en rektangel och sist följer ett förenklat sifferexempel.

Kapitel 4: Heat kernel eller fundamentallösning

Detta kapitel studerar ”heat kernel” som är en (även svensk) benämning på en fundamentallösning till värmeledningsekvationen. Första underkapitlet 4.1 beskriver heat kernel för hela reella tallinjen respektive för hela \mathbb{R}^n och det andra 4.2, redogör för heat kernel i ett visst begränsat område i \mathbb{R}^n .

Kapitel 5: Maximumprincipen

Kapitlet diskuterar kort maximumprincipen i generell bemärkelse följt av en detaljerad formulering av maximumprincipen för värmeledningsekvationen i form av en sats och dess bevis. Sist följer en kort notis om att maximumprincipen enligt en källa kan ligga till grund för andra satser med bevis, vilka garanterar unikheter och stabilitet för lösningar till vissa värmeledningsproblem.

Kapitel 6: Numerisk analys

Här blir vi uppmärksammade på behovet av numerisk analys och innefattar härledning av en grundläggande numerisk metod eller så kallad diskretisering som kan lösa ett enklare fall av värmeledningsekvationen. Därtill diskuteras avslutningsvis i kapitlet viktiga egenskaper för en numerisk metod som stabilitet och konvergens.

2 Inledning till värmeledningsekvationen

Ämnet och huvudfokus för denna uppsats är värmeledningsekvationen, en välkänd partiell differentialekvation (förkortat PDE både för en ekvation eller flera ekvationer). Vi inleder därför kapitlet med en kort och översiktlig introduktion till sådana ekvationer. Därefter följer en inledning och introduktion till själva värmeledningsekvationen.

En PDE beskriver en relation mellan en funktion och dess partiella derivator upp till en viss ordning. Denna funktion beror av flera variabler till skillnad från motsvarande funktion i en ordinär differentialekvation (ODE) som ”endast” beror av en variabel. PDE i olika former är vanliga inom områden som fysik och ingenjörsvetenskap för att beskriva olika fenomen men förekommer även i andra naturvetenskaper (till exempel kemi, biologi och datalogi) plus därtill inom området ekonomi ([5], kap 1.1) .

Den allmänna formen av en PDE för en funktion

$$u(x_1, x_2, \dots, x_i)$$

är

$$F\left(x_1, \dots, x_i, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i}, \dots\right) = 0, \quad (2.1)$$

där x_1, x_2, \dots, x_i är de oberoende variablerna, u är den okända funktionen, $\frac{\partial u}{\partial x_n}$ partiella derivator av första ordning och $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i}$ partiell derivator av andra ordningen och så vidare. Det är den högsta av nyss nämnda ordning som bestämmer ordningen av F . Generellt tillkommer sedan rand- och (eller) begynnelsevillkor till en PDE ([5], kap 1.1).

Enligt Evans [2] (kap. 1.1) löser vi en PDE om vi finner alla u som satisfierar (2.1) och eventuella associerade rand- och begynnelsevillkor. Författaren påpekar vidare att med utsagan: finna lösningarna, menar vi att framräkna explicita lösningar, eller om detta misslyckas, härleda existensen och andra egenskaper hos lösningarna. Det senare kan bli nödvändigt att ta till eftersom det enligt [5] (kap 1.1) existerar många PDE som inte ens kan lösas av superdatorer.

Vidare, förutom ordningen så klassificeras enskilda PDE bland annat efter om de är linjära respektive icke-linjära och motsvarande för ett system av PDE. Exempelvis är berömda linjära PDE vågekvationen och just värmeledningsekvationen. Maxwells ekvationer är exempel på ett system av linjära PDE ([2]).

Nu till en introduktion om värmeledningsekvationen (eller diffusionsekvationen) som då är en klassisk linjär PDE som har ett antal fysikaliska tillämpningar. Ekvationen utvecklades först av den franske matematikern och fysikern J. Fourier (1768-1830) för att modellera hur värme diffunderar eller sprids genom ett

område av ett visst medium. Matematisk kan vi definiera ekvationen som följer.

Givet en öppen delmängd U av \mathbb{R}^n och ett delintervall I av \mathbb{R} så gäller att en funktion $u : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ är en lösning till värmeledningsekvationen om

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right),$$

där $u = u(x, t) = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, alltså ekvationens lösning, beskriver temperaturen i en godtycklig punkt i det n -dimensionella området, t är tiden och k en positiv konstant för den termiska diffusiviteten hos mediet (materialet). När denna är konstant säger man att mediet är homogent, det vill säga har samma struktur i varje punkt. Högerledet strax ovan kan med hjälp av Laplaceoperatoren

$$\Delta_x = \nabla_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

uttryckas mer kompakt och vi får

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta_x u, \text{ eller } \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta_x u = 0, \quad (2.2)$$

som alltså uttrycker den homogena värmeledningsekvationen ([11]).

Till en värmeledningsekvation följer ofta begynnelsevillkor och (eller) olika typer av randvillkor, vanligen någon av följande två typer:

- Dirichletrandvillkor (även kallat randvillkor av den första typen) anger värdet av u på randen av aktuellt område.
- Neumannrandvillkor (randvillkor av den andra typen) anger värdet av den partiella förstaderivatan av u med avseende x , $\frac{\partial}{\partial x} u$, på randen av aktuellt område.

Det finns även andra typer av randvillkor, exempelvis en tredje typ som består av en blandning av nyss nämnda randvillkor. I denna uppsats räknar vi antingen med homogena Dirichletrandvillkor eller homogena Neumannrandvillkor vilket fysikaliskt tolkat med Dirichletvillkor innebär att temperaturen i området efter en viss tid till slut antar samma nollvärde som randen har. Det andra fallet med homogena Neumannrandvillkor innebär med förändringshastigheten för temperaturen lika med noll, att ingen värme kan passera ut genom randen av aktuellt område.

I detta arbete studerar vi den homogena värmeledningsekvationen enligt (2.2) i problem med associerade homogena randvillkor (av typ 1 eller typ 2). Men vi observerar att det finns andra fall som en inhomogen version av (2.2) där högerledet svarar mot en yttre störning i form av värme som kommer in i ett område utifrån. En ytterligare variant av (2.2) uppstår om vi till exempel har ett inhomogent medium där den termiska diffusiviteten inte är konstant utan varierar med x .

3 Variabelseparation som lösningsmetod

Fourier upptäckte enligt [5] (kap. 5.1) även en metod att lösa värmelednings-ekvationen genom en teknik som kallas variabelseparation. Vi kommer i det som följer diskutera metoden i detalj men övergripande går den ut på att först söka lösningar till homogen PDE vilka kallas separerade lösningar eller produktlösningar och är på formen

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Högerledet uttrycker alltså en produkt av funktioner där variablerna $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ är separerade från variabeln t . Vidare, dessa produktlösningar ska i allmänhet uppfylla vissa ytterligare villkor som till exempel homogena randvillkor. Det visar sig också att i en dimension blir både X och T ovan lösningar av linjära ordinära differentialekvationer (ODE) medan i flera dimensioner eller rumsvariabler blir X istället lösning till en PDE. Genom en generalisering av superpositionsprincipen (ungefär: summa av lösningar också en lösning) genereras i nästa steg en mer generell lösning i form av en oändlig serie (summa) av produktlösningar. I metodens sista steg bestämmer man sedan koefficienterna till serien ([5], kap. 5.2, 9.5).

Detta kapitel är indelat i flera och vi ser i kapitel 3.1 på detaljerna genom härledning av lösningar till två värmeledningsproblem i en dimension med olika typer av randvillkor, först med Dirichletrandvillkor följt av ett motsvarande problem med Neumannrandvillkor. Fokus är på själva metoden med variabelseparation. Påföljande kapitel 3.2 handlar om hur man kan generalisera lösningsmetoden med hjälp av egenvärden och egenfunktioner till Laplaceoperatorn samt om en del underliggande teorier. Underkapitel 3.2.1 respektive 3.2.2 innefattar härledningar av lösningar till ett egenvärdesproblem för Laplaceoperatorn i ett område i planet (rektangel) med Dirichletrandvillkor respektive Neumannrandvillkor. I avslutande kapitel 3.3 härleder vi lösningar på flerdimensionella värmeledningsproblem genom dels underkapitel 3.3.1 i godtyckligt antal dimensioner, dels underkapitel 3.3.2 i två dimensioner i ett område i form av en rektangel och som avslutas med ett förenklat sifferexempel.

3.1 Värmeledningsproblem i en dimension

Vi söker en lösning $u(x, t)$ till ett värmeledningsproblem i en dimension med alltså en rumsvariabel x vid sidan om den andra oberoende variabeln t för tiden. Fysikaliskt kan vi tänka oss en tunn isolerad stav av längd L liggandes längs x -axeln och därtill begynnelse- och randvillkor, se Figur 1 (där l betecknar L). Funktionen $u(x, t)$ beskriver temperaturen i punkten x vid tiden t och vi har alltså värmeledning endast i x -led. Notera att vi räknar på två typer av randvillkor, först Dirichletrandvillkor, därefter motsvarande problem med Neumannrandvillkor avslutningsvis i kapitlet.

Värmeledningsproblemet med Dirichletvillkor

Värmeledningsekvationen i problemet är

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta_x u = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

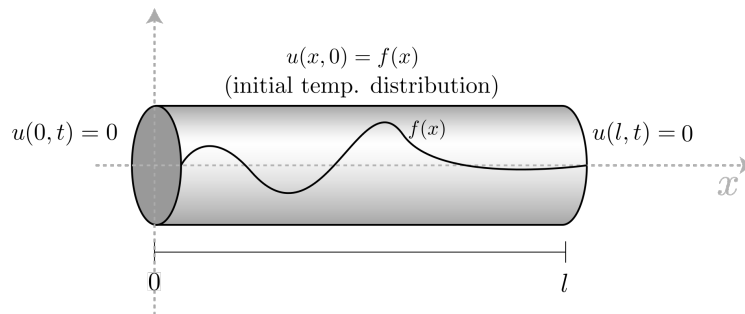
med randvillkor

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.2)$$

och begynnelsevillkor

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (3.3)$$

där $f(x)$ är en kontinuerlig funktion i $0 \leq x \leq L$ och k en positiv konstant ([5], kap. 5.2).



Figur 1: Värmeledningsproblem i en dimension - Funktionen $u(x, t)$ beskriver temperaturen i punkten x vid tiden t i en tunn isolerad stav av längd $L (= l)$ liggandes längs x -axeln. I problemet ingår även begynnelsevillkor $u(x, 0) = f(x)$ och randvillkor $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Källa bild: Wikipedia [11].

Vi noterar att problemet (3.1)-(3.3) är ett linjärt homogent begynnelse- och randvärdesproblem där ingen extern källa värmer eller kyler staven samt att stavens ändrar enligt (3.2) är fixerade till 0 temperatur. Notera också att randvillkor (3.2) kallas Dirichletrandvillkor eller kortare Dirichletvillkor.

Nu tillämpar vi med stöd av [5] (kap. 5.2) och [11] stegen i Fouriers variabelseparationsmetod och söker en lösning $u(x, t)$, ej identisk med noll, som uppfyller randvillkor (3.2) och kan skrivas som en produkt där de oberoende variablerna x och t är separerade:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.4)$$

Vi understryker att trivial lösning $u(x, t) \equiv 0$ inte är intressant (villkor (3.3) uppfylls ej) och lösningar $X(x)$ respektive $T(t)$ som leder till detta förkastas därför. Insättning av högerledet i (3.4) i ursprunglig PDE (3.1) ger efter partiell derivation

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t),$$

som omskrivet avslutar variabelseparationssteget med

$$\frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3.5)$$

Emedan vänsterledet i (3.5) endast beror av t och högerled endast av x måste bägge led vara lika med en gemensam konstant. Denna antas vara ett reellt tal, betecknas med $-\lambda$ och kallas separationskonstanten. Vi har då

$$\frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (3.6)$$

Med (3.6) kan vi bilda två ODE enligt

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.7)$$

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0. \quad (3.8)$$

Vi härleder nu från ursprungligt randvillkor (3.2) ett motsvarande randvillkor till ODE (3.7). Första delen i villkoret, $u(0, t) = 0$, $t > 0$, motsvaras nu av $X(0)T(t) = 0$, $t > 0$. Då måste gälla att $X(0) = 0$ eller $T(t) = 0$ för alla $t > 0$, men det senare, $T(t) = 0$, medför att $u(x, t) \equiv 0$ vilket vi därför utesluter. Kvar är alltså enbart $X(0) = 0$. Efter liknade resonemang för andra delen i villkoret (3.2), $u(L, t) = 0$, $t > 0$, har vi randvillkoret till

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (3.9)$$

Vi kan nu använda teori från envariabelanalysen för att lösa dessa ODE ([1]). Lösningarna, så kallade produktlösningar, beror av λ och randvillkor (3.9) men även till sist begynnelsevillkor (3.3) vilket vi återkommer till. Det går därför inte att a priori utgå från att lösningar existerar för varje λ . Vi undersöker nedan tre fall $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ samt $\lambda > 0$ och visar att det sistnämnda är det enda möjliga. Notera att A, B, C, \dots betecknar reellvärda konstanter.

Fall 1. $\lambda < 0$:

För att förenkla kalkylen kan vi enligt [3] sätta $\lambda = -\gamma^2$ där γ är ett positivt tal och med detta insatt i ekvation (3.7) får vi den karakteristiska ekvationen $r^2 - \gamma^2 = 0$ och därmed den generella lösningen $X(x) = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}$. För ODE (3.8) kan vi med den integrerande faktorn $e^{-\gamma^2 kt}$ få allmän lösning till $T(t) = Ce^{\gamma^2 kt}$. Detta ger sammantaget

$$u(x, t) = X(x)T(t) = (Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x})Ce^{\gamma^2 kt}.$$

Med villkor (3.9) och lösningen för $X(x)$ har vi

$$\begin{cases} 0 = X(0) = Ae^{\gamma 0} + Be^{-\gamma 0} \\ 0 = X(L) = Ae^{\gamma L} + Be^{-\gamma L} \end{cases} \implies \begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{\gamma L} + Be^{-\gamma L} = 0. \end{cases}$$

Detta medför att $A = B = 0$ måste gälla och därmed $X(x) = 0$ vilket ger att $u(x, t) \equiv 0$. Därför förkastar vi detta fall med $\lambda < 0$.

Fall 2. $\lambda = 0$:

Då reduceras ODE (3.7) till $X''(x) = 0$. Integration två gånger ger generell lösning till $X(x) = Cx + D$. Nästa ODE (3.8) reduceras i detta fall till $T'(t) = 0$ och efter integration erhåller vi lösning $T(t) = E$. Vi får med multiplikation av konstanter (ny konstant $C \cdot E$ betecknas åter till C osv.)

$$u(x, t) = X(x)T(t) = (Cx + D)E = CE x + DE = Cx + D.$$

Villkor (3.9) ger nu med lösningen för $X(x)$ följande:

$$\begin{cases} 0 = X(0) = C \cdot 0 + D \\ 0 = X(L) = C \cdot L + D \end{cases} \implies \begin{cases} D = 0 \\ C = 0. \end{cases}$$

Även detta fall med $\lambda = 0$ utesluter vi eftersom det ger trivial lösning $u(x, t) = Cx + D \equiv 0$.

Fall 3. $\lambda > 0$:

Vi kan nu konstatera att fall 3 kvarstår som det enda möjliga. I detta fall sätter vi $\lambda = \gamma^2$ där γ är ett positivt tal och med detta insatt i ekvation (3.7) får vi den karakteristiska ekvationen $r^2 + \gamma^2 = 0$ som har komplexa rötter därmed får vi den generella lösningen $X(x) = A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x)$. För ODE (3.8) kan vi i detta fall med den integrerande faktorn $e^{\gamma^2 kt}$ få allmän lösning till $T(t) = C e^{-\gamma^2 kt}$. Detta ger sammantaget

$$u(x, t) = X(x)T(t) = [A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x)] C e^{-\gamma^2 kt}.$$

Vi inleder även här med lösningen för $X(x)$ och villkor (3.9) och får

$$\begin{cases} 0 = X(0) = A \cos(\gamma 0) + B \sin(\gamma 0) \\ 0 = X(L) = A \cos(\gamma L) + B \sin(\gamma L) \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0 \\ B \sin(\gamma L) = 0. \end{cases}$$

Det senare medför att $\sin(\gamma L) = 0$ måste gälla därför att om $B = 0$ får vi trivial lösning $u(x, t) \equiv 0$. Sinusfunktionen är periodisk och därav får vi

$$\gamma L = n\pi \implies \gamma_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.10)$$

och detta ger

$$X(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (3.11)$$

Substituerar vi in γ_n i $T(t)$ har vi nu en lösning på formen

$$u(x, t) = X(x)T(t) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ och } B \text{ en konstant.}$$

Men vi har egentligen en följd av lösningar för $n = 1, 2, 3, \dots$ bättre uttryckt som

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}.$$

Enligt superpositionsprincipen är varje linjärkombination av detta uttryck också en lösning. Vi ersätter konstanten B med koefficient b_n och har

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}. \quad (3.12)$$

Denna lösning, som ibland kallas den generella lösningen, uppfyller ursprungligt randvillkor (3.2) via (3.9). Nu undersöker om vi kan få en lösning att också uppfylla ursprungligt begynnelsevillkor (3.3) och vägen dit är faktiskt att bestämma koefficienterna b_n . Vi upprepar begynnelsevillkor (3.3)

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

och substituerar vi in detta villkor i (3.12) får vi

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

det vill säga

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x). \quad (3.13)$$

Serierna (de oändliga summorna) ovan relaterar till teorier kring Fourierserier och generaliserade Fourierserier som bland annat säger att de flesta funktioner kan uttryckas (delas upp) i en oändlig summa av sinus- och (eller) cosinusfunktioner vilka då utgör en Fourierserie. En sådan serie konvergerar, under vissa förutsättningar, mot att vara lika med ursprunglig funktion med ökande antal termer då $n \rightarrow \infty$. Vi berör dessa teorier något mer i nästa kapitel 3.2 men en grundlig beskrivning går att utläsa i Rudins analysbok [6] (kap. 8) eller varför inte i Wikipedia [10], [9].

Betraktar vi uttrycket (3.13) för $f(x)$ noterar vi att b_n är (generaliserade) Fourierkoefficienter när man utvecklar $f(x)$ som en Fouriersinusserie. Detta då över intervallet $[0, L]$. Vi tecknar b_n med uttrycket ([3], [5] kap. 5.2):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\Omega x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{\pi}{L}, \\ T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2L. \end{array} \right\} \\ &= \frac{4}{2L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{aligned}$$

och med dessa koefficienter b_n bestämda har vi till sist en slutlig lösning till vårt värmeledningsproblem som uppfyller såväl randvillkor(3.2) som begynnelsevillkor (3.3) enligt

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}.$$

Värmeledningsproblemet med Neumannvillkor

Vi ser nu något mer kortfattat på en variant av föregående värmeledningsproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta_x u = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.15)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (3.16)$$

där randvillkor (3.15) nu gäller partiell derivata av sökt funktion, så kallat Neumannvillkor. Fysikaliskt innebär detta villkor med förändringshastighet för temperaturen lika med noll, att ingen värme kan passera ut genom stavens ändar vilka nu kan betraktas som isolerade.

Variabelseparationsmetoden ger även i detta fall samma två ODE (3.7) respektive (3.8). Men vi får på nytt härleda randvillkor till ODE (3.7), nu från Neumannvillkoret (3.14) istället för Dirichletvillkoret (3.2). Första delen i villkoret, $\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = 0$, $t > 0$, motsvaras nu av $X'(0)T(t) = 0$ och andra av delen $X'(L)T(t) = 0$. Vi konstaterar att även här medför $T(t) = 0$ för alla $t > 0$ att $u(x, t) \equiv 0$ vilket vi därför utesluter. Därför blir randvillkoret

$$X'(0) = X'(L) = 0. \quad (3.17)$$

Vi undersöker återigen men kort samma tre fall $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ samt $\lambda > 0$ och sätter även här i fall 1 och 3 för enklare räkningar $\lambda = -\gamma^2$ där γ är ett positivt tal.

Fall 1. $\lambda < 0$:

Även i detta problem får vi

$$u(x, t) = X(x)T(t) = (Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x})Ce^{\gamma^2 kt}.$$

Här måste vi dock se på derivatan av lösningen för $X(x)$ med villkor (3.16) och får

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = A\gamma e^{\gamma 0} - B\gamma e^{-\gamma 0} \\ 0 = X'(L) = A\gamma e^{\gamma L} - B\gamma e^{-\gamma L} \end{cases} \implies \begin{cases} A - B = 0 \\ A\gamma e^{\gamma L} - B\gamma e^{-\gamma L} = 0. \end{cases}$$

Detta medför att $A = B = 0$ måste gälla och därmed $X(x) = 0$ vilket ger att $u(x, t) \equiv 0$. Därför förkastar vi detta fall med $\lambda < 0$.

Fall 2. $\lambda = 0$:

Vi får precis som i föregående problem

$$u(x, t) = X(x)T(t) = Cx + D.$$

Villkor (3.17) ger nu med derivatan av lösningen, $X'(x) = C$ följande:

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = C \\ 0 = X'(L) = C \end{cases} \implies \begin{cases} C = 0 \\ C = 0. \end{cases}$$

Nu ger detta fall med $\lambda = 0$ istället en konstantlösning

$$u(x, t) = X(x)T(t) = D,$$

som alltså löser ekvation (3.14) med villkor (3.15).

Fall 3. $\lambda > 0$:

Återigen, identisk lösning

$$u(x, t) = X(x)T(t) = [A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x)]C e^{-\gamma^2 kt}.$$

Här måste vi dock se på derivatan av lösningen för $X(x)$ med villkor (3.16) och får

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = -A\gamma \sin(\gamma 0) + B\gamma \cos(\gamma 0) \\ 0 = X'(L) = -A\gamma \sin(\gamma L) + B\gamma \cos(\gamma L) \end{cases} \implies \begin{cases} B = 0 \\ -A \sin(\gamma L) = 0. \end{cases}$$

Det senare medför även nu att $\sin(\gamma L) = 0$ måste gälla därför att om $A = 0$ får vi trivial lösning $u(x, t) \equiv 0$. Sinusfunktionen är periodisk och därav får vi

$$\gamma L = n\pi \implies \gamma_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

och detta ger

$$X(x) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (3.19)$$

Substituerar vi in γ_n i $T(t)$ har vi nu en lösning på formen

$$u(x, t) = X(x)T(t) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \text{ och } A \text{ en konstant.}$$

Men vi har egentligen en följd av lösningar för $n = 0, 1, 2, \dots$ bättre uttryckt som

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}.$$

Notera att $n = 0$ ingår eftersom en konstant funktion är lösning enligt fall 2 ovan. Enligt superpositionsprincipen är varje linjärkombination av detta uttryck också en lösning. Vi ersätter konstanten A med koefficient a_n och bryter ut konstantterm, multiplicerar den med $1/2$ och har

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}. \quad (3.20)$$

Denna (generella) lösning uppfyller ursprungligt randvillkor (3.15) via (3.17) och att serien konvergerar kommenterades i föregående fall med Dirichletvillkor. Nu

undersöker om vi kan få en lösning att också uppfylla ursprungligt begynnelsevillkor (3.16) och vägen dit är faktiskt att bestämma koefficienterna a_n . Vi upprepar begynnelsevillkor (3.16)

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

och substituerar vi in detta villkor i (3.20) får vi

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k_0} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

det vill säga

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x). \quad (3.21)$$

Betraktar vi uttrycket (3.21) för $f(x)$ noterar vi för detta problem att a_n är (generaliserade) Fourierkoefficienter när man istället utvecklar $f(x)$ som en Fouriercosinusserie. Detta då över intervallet $[0, L]$. Vi tecknar a_n med uttrycket ([3]):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(n\Omega x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{\pi}{L}, \\ T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2L. \end{array} \right\} \\ &= \frac{4}{2L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{aligned}$$

och med dessa koefficienter a_n bestämda har vi till sist en slutlig lösning till vårt andra värmeledningsproblem som uppfyller såväl Neumannrandvillkor (3.15) som begynnelsevillkor (3.16) enligt

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}.$$

3.2 Generalisera lösningsmetoden - Egenvärden och egenfunktioner till Laplaceoperatoren

Lösningstekniken i kapitel 3.1 ovan kan generaliseras till att gälla för många andra typer av ekvationer. Det handlar om att Laplaceoperatoren tillsammans med homogena randvillkor kan uttryckas i form av dess egenfunktioner och egenvärden [11]. Syftet med kapitlet är att studera detta och en del underliggande teorier närmare.

Vi erinrar oss kunskaper om linjär algebra och tar stöd i sidor om egenfunktion i Wikipedia ([8], [13]) för att definiera begreppen egenfunktion och egenvärde.

Definition:

En egenfunktion till en differentialoperator D är en funktion f (ej identiskt noll) som under verkan av operatoren endast multipliceras med en skalfaktor. Denna skalfaktor kallas egenvärde och betecknas ofta med λ . Ett uttryck för detta är

$$Df = \lambda f.$$

Notera att det ofta kan finnas randvillkor som begränsar möjliga egenvärden och egenfunktioner.

Exempel:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

visar att e^x är en egenfunktion till den linjära operatoren $\frac{d}{dx}$ med egenvärdet $\lambda = 1$ ([13]).

Vi går nu tillbaka till delar av kalkylen i kapitel 3.1 för att se hur begreppen egenfunktion och egenvärde kan tillämpas. Vi hade efter variabelseparationssteget ODE (3.7) och det härledda randvillkoret (3.9) ett randvärdesproblem som vi här återger:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.7)$$

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (3.9)$$

Enligt [5] (kap. 5.2) kallar vi problemet (3.7), (3.9) för ett egenvärdesproblem men även ett Dirichletproblem på grund av villkor (3.9). Med definitionen ovan och en linjär operator $-\frac{d^2}{dx^2}$ är en icke-trivial lösning till (3.7), (3.9) en egenfunktion av problemet med ett tillhörande egenvärde λ . Vi undersökte sedan i kapitel 3.1 för vilka λ , alltså egenvärden, det fanns en lösning som också uppfyllde randvillkor (3.9) och det visade sig att ett positivt egenvärde ($\lambda > 0$) var det enda möjliga för detta problem. Vi satte för att få enklare räkningar $\lambda = \gamma^2$ men räknar vi enkom med λ får vi (3.10) omskrivet till

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi \implies \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Alltså har vi ett egenvärde λ givet av

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

och lösningar $X(x)$ (3.11) vi erhöill är faktiskt motsvarande egenfunktioner nu betecknade som

$$X_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

vilka då är unika upptill en viss multiplikativ konstant B . Sammanfattningsvis är enligt [5] (kap. 5.2) mängden av alla lösningar till problem (3.7), (3-9) en oändlig följd av egenfunktioner som var och en har ett tillhörande positivt egenvärde. Vi utvecklar nu inte detta problem från förgående kapitel mera kring användningen av egenvärde och egenfunktioner utan går vidare med sikte på att lösa egenvärdesproblem till en mer generell värmeledningsekvation som täcker flerdimensionsfall (fler än en rumsvariabel). Under vägen dit ser vi först översiktligt på egenskaper för egenvärden och egenfunktioner till själva Laplaceoperatorn följt att vi härleder egenvärden och egenfunktioner i någon geometri.

Egenskaper för egenvärden och egenfunktioner till Laplaceoperator

Vi följer [5] (kap. 9.5) och låter Ω vara ett begränsat område i \mathbb{R}^n , där område har betydelsen öppen sammanhängande mängd. Generaliserar vi nu ovan återgivna problem (3.7) inklusive villkor (3.9) erhålls

$$-\Delta_{\vec{x}}u(\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \quad \text{där } \vec{x} \in \Omega, \quad (3.22)$$

$$u(\vec{x}) = 0 \quad \text{för alla } \vec{x} \in \partial\Omega, \quad (3.23)$$

vilket kallas för ett Dirichlet egenvärdesproblem. Mängden av egenvärden λ kallas spektrumet av Dirichletproblemet. Det kan enligt [5] (kap. 9.5) under vissa glatthetsantaganden, som att randen $\partial\Omega$ är av klass C^2 , visas att det existerar en (diskret) oändlig följd av egenvärden $\{\lambda_n\}$ och egenfunktioner $\{u_n\}$ som löser (3.22)-(3.23).

Notera att det på likande sätt går att formulera egenvärdesproblemet för Laplaceoperatorn även med Neumannrandvillkor där (3.23) är ersatt med

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) = 0 \quad \text{för alla } \vec{x} \in \partial\Omega, \quad (3.24)$$

där \vec{n} är den (oftast) utåtriktade normalen till randen $\partial\Omega$. Den så kallade normalderivatan $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x})$ i vänsterledet i (3.24) är definierad som

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) = \nabla u(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}),$$

där $\nabla u(\vec{x})$ betecknar gradientvektorn av $u(\vec{x})$, \vec{n} är enhetsnormalen och punkten \cdot är operator för inre produkt.

Innan vi går vidare med att beräkna spektrumet, alltså mängden av egenvärden (se ovan), för Laplaceoperatoren i något grundläggande område eller geometri, ser vi på några egenskaper för egenvärdena och egenfunktionerna till egenvärdesproblemet (3.22).

Återigen, låt Ω vara ett begränsat område i \mathbb{R}^n . Definiera följande inre produkt i rummet av kontinuerliga funktioner i $\bar{\Omega}$

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\vec{x})v(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (3.25)$$

Med referens till Ω och inre produkt (3.25) har vi följande egenskaper ([5], kap. 9.5):

1. Symmetri

Med partiell integration (Greens formel) får vi för två funktioner som uppfyller Dirichletrandvillkoret (3.23) följande:

$$\langle \Delta u, v \rangle = \int_{\Omega} v \Delta u d\vec{x} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u d\vec{x} = \int_{\Omega} u \Delta v d\vec{x} = \langle u, \Delta v \rangle,$$

vilket verifierar symmetrin hos Laplaceoperatoren ([5], kap. 9.5).

2. Ortogonalitet

Vi noterar i [5] (kap. 9.5) följande sats och bevis :

Sats 3.1. *Egenfunktioner tillhörande olika egenvärden är ortogonala.*

Bevis. Låt v_n, v_m vara två egenfunktioner tillhörande egenvärdena λ_n respektive λ_m , där $\lambda_n \neq \lambda_m$, med andra ord

$$\begin{aligned} -\Delta v_n &= \lambda_n v_n, \\ -\Delta v_m &= \lambda_m v_m. \end{aligned}$$

Symmetriegenskapen medför

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} (\Delta v_m)v_n d\vec{x} + \int_{\Omega} v_m(\Delta v_n) d\vec{x} = \lambda_n \int_{\Omega} v_n v_m d\vec{x} - \lambda_m \int_{\Omega} v_n v_m d\vec{x} \\ &= (\lambda_n - \lambda_m) \int_{\Omega} v_n v_m d\vec{x}, \end{aligned}$$

alltså är de ortogonala. □

3. Egenvärdena är reella

När det gäller värmeledningsekvationen vet vi att resultatet ska vara en reell

skalär (temperatur) och utgår därför ifrån att både egenvärden och egenfunktioner är reella. För övrigt kan en motivering utläsas i [5] (kap. 9.5).

4. Egenfunktionerna är reella

Se motivering till föregående punkt 3.

5. Multiplicitet hos egenvärdena

I de flerdimensionella fallen vi nu studerar är en huvudsaklig skillnad jämfört med de endimensionella, att multipliciteten nu kan vara större än ett, det vill säga, egenvärden som ej är distinkta förekommer. Ett exempel på detta visas i slutet av kapitel 3.2.1. Multipliciteten i sådana fall är dock alltid ändlig ([5], kap. 9.5).

6. Det existerar en följd av egenvärden vilken konvergerar mot ∞

Vi kan nu formulera följande sats ([5], kap. 9.5):

Sats 3.2. a) *Mängden av egenvärden till problem (3.22)-(3.23) består av en monoton ej avtagande följd som konvergerar mot ∞ .*

b) *Egenvärdena är positiva och har ändlig multiplicitet.*

Bevis. Vi visar endast delen i b) om att alla egenvärden är positiva. För att göra detta härleder vi en viktig formel för att karakterisera egenvärden enligt följande. Multiplicera ekvation (3.22) med u och utför partiell integration över Ω och vi har

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\vec{x}}{\int_{\Omega} u^2 d\vec{x}}. \quad (3.26)$$

Eftersom u som egenfunktion inte kan vara lika med en konstant så följer av formeln (3.26) att $\lambda > 0$. \square

7. Generaliserade Fourierserier

Vi följer [5] (kap. 9.5) och låter $\{\lambda_n\}$ vara en följd av egenvärden för Dirichletproblemet (3.22)-(3.23) skriven i ej avtagande ordning. Beteckna med V_n det delrum som spänns upp av egenfunktionerna associerade med λ_n . Vi har visat att egenfunktioner som tillhör olika delrum (egenrum) V_n är ortogonala. Välj nu för varje egenrum V_n en ortonormal bas. Därigenom har vi konstruerat en ortonormal mängd av egenfunktioner $\{v_n\}$. Det är känt att denna mängd är fullständig med hänsyn till normen erhållen genom den inre produkten (3.25). Därför kan vi enligt [5] (kap. 9.5) formellt utveckla glatta funktioner definierade i området Ω till generaliserade Fourierserier

$$f(\vec{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m v_m(\vec{x}).$$

På grund av fullständigheten av det ortonormala systemet $\{v_m\}$ konvergerar serierna i medeltal. Med normen $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ genom den inre produkten

(3.25) innebär denna konvergens då att

$$\left\| f(\vec{x}) - \sum_{m=0}^N \sigma_m v_m(\vec{x}) \right\| \rightarrow 0 \text{ när } N \rightarrow \infty.$$

De generaliserade Fourierkoefficienterna σ_m erhåller vi enligt [5] (kap. 9.5) med referens till inre produkt (3.25) som

$$\sigma_m = \langle f, v_m \rangle$$

och att detta gäller visas genom

$$\begin{aligned} \text{HL} = \langle f, v_m \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n v_n, v_m \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \sigma_n v_n, v_m \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \langle v_n, v_m \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \langle v_n, v_m \rangle = 0, \text{ om } n \neq m, \\ \langle v_n, v_m \rangle = 1, \text{ om } n = m. \end{array} \right\} = \sigma_m 1 = \sigma_m = \text{VL}. \end{aligned}$$

8. Ett optimeringsproblem för den första egenfunktionen

Vi härledde ovan en integralformel (3.26) för egenvärdena. Beteckna det minsta egenvärdet, kallat principalegenvärde, för λ_0 . Vi gör det ej här men man kan enligt [5] (kap. 9.5.2) bevisa följande sats:

Sats 3.3. *Rayleigh–Ritz formeln*

$$\lambda_0 = \inf_{v \in V} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\vec{x}}{\int_{\Omega} u^2 d\vec{x}},$$

där

$$V = \{v \in C^2(\omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid v \neq 0, v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

och vidare, λ_0 är ett distinkt egenvärde och infimum uppnås endast för tillhörande (associerad) egenfunktion.

9. Nollställen till egenfunktionerna

Nollmängden av en skalärfunktion är enligt [5] (kap. 9.5) i allmänhet en så kallad mångfald med codimension 1 (linjer i planet, ytor i rummet). Dessa mängder kallas "nodal surfaces" och kan anta ganska invecklade former. Vi kan från samma källa kort notera att en tillämpning av formerna av "nodal surfaces" för egenfunktionerna till Laplaceoperatoren, är teorin om "Turing instability" framlagd av den brittiske matematikern Alan Turing (1912–1954).

10. Asymptotiskt beteende hos egenvärdena λ_n när $n \rightarrow \infty$

Det kan enligt [5] (kap. 9.5.2) visas att det n :te egenvärdet associerat med

egenfunktioner i problemet (3.22)-(3.23) har följande asymptotiska beteende för gränsvärdet $n \rightarrow \infty$:

$$\lambda_n \sim 4\pi^2 \left(\frac{n}{\omega_j |\Omega|} \right)^{\frac{2}{j}}, \quad \text{där } j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27)$$

och ω_j betecknar volymen av enhetsklotet i \mathbb{R}^j , till exempel, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$ och $\omega_3 = \frac{4\pi}{3}$. Vi observerar också att formeln (3.27) bär namnet Weyl's asymptotiska formel.

I underkapitel som följer härleder vi faktiska egenvärden och egenfunktioner till Laplaceoperatoren för någon viss geometri (område). Vi observerar att det inte går att beräkna egenvärden och egenfunktioner i det generella fallet, utan bara för speciella grundläggande geometrier som exempelvis en rektangel eller cirkelskiva i planet, eller ett klot i rummet ([5], kap. 9.5).

3.2.1 Laplaceoperatoren och egenvärdesproblemet i en rektangel med Dirichletvillkor

Med ovan egenskaper i åtanke härleder och studerar vi nu med stöd av [5] (kap. 9.5.2) egenvärden och egenfunktioner till Laplaceoperatoren i det tvådimensionella området $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$, alltså en rektangel i det Euklidiska planet och kartesiska koordinater. Vi har följande egenvärdesproblem

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -\lambda u(x, y), \quad 0 < x < a, 0 < y < b, \quad (3.28)$$

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad (3.29)$$

$$u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a, \quad (3.30)$$

där (3.29)-(3.30) är Dirichletrandvillkor eller kortare Dirichletvillkor.

Vi tillämpar nu återigen metoden för variabelseparation för att få separerade lösningar på formen

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

och efter insättning av detta i ursprunglig PDE (3.28) har vi

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\lambda X(x)Y(y),$$

följt av division av bägge led med XY

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Detta skriver vi om och betecknar till temporär positiv konstant μ enligt

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} - \lambda = -\mu,$$

vilket vidare ger

$$\frac{X''}{X} = -\lambda + \mu = -\nu, \quad (3.31)$$

där vi för enklare räkningar infört ännu en temporär positiv konstant ν . Vidare, från ursprungliga randvillkor (3.29)-(3.30) härleder vi motsvarande för de separerade funktionerna X och Y enligt

$$\begin{cases} u(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \implies X(0) = 0, \\ u(a, y) = X(a)Y(y) = 0 \implies X(a) = 0, \end{cases}$$

respektive

$$\begin{cases} u(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \implies Y(0) = 0, \\ u(x, b) = X(x)Y(b) = 0 \implies Y(b) = 0. \end{cases}$$

Vi kan nu från ovanstående bilda två ODE eller egenvärdesproblem med Dirichletvillkor enligt

$$Y''(y) + \mu Y(y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (3.32)$$

$$Y(0) = Y(b) = 0, \quad (3.33)$$

respektive

$$X''(x) + \nu X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (3.34)$$

$$X(0) = X(a) = 0, \quad (3.35)$$

där μ och ν utgör temporära egenvärden under beräkningarna. Vi löste samma typ av ODE i kap. 3.1 ovan och vi upprepar inte alla steg här utan går direkt till lösningen $Y(y) = A \cos(\sqrt{\mu}y) + B \sin(\sqrt{\mu}y)$ och villkor (3.33) där vi har

$$\begin{cases} 0 = Y(0) = A \cos(\sqrt{\mu}0) + B \sin(\sqrt{\mu}0) \\ 0 = Y(b) = A \cos(\sqrt{\mu}b) + B \sin(\sqrt{\mu}b) \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0 \\ B \sin(\sqrt{\mu}b) = 0. \end{cases}$$

Detta medför vidare att $\sin(\sqrt{\mu}b) = 0$ måste gälla och vi får

$$\sqrt{\mu}b = m\pi \implies \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.36)$$

och alltså

$$Y_m(y) = B \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

På liknade sätt får vi lösningen $X(x) = C \cos(\sqrt{\nu}x) + D \sin(\sqrt{\nu}x)$ med villkor (3.35)

$$\begin{cases} 0 = X(0) = C \cos(\sqrt{\nu}0) + D \sin(\sqrt{\nu}0) \\ 0 = X(a) = C \cos(\sqrt{\nu}a) + D \sin(\sqrt{\nu}a) \end{cases} \implies \begin{cases} C = 0 \\ D \sin(\sqrt{\nu}a) = 0, \end{cases}$$

vilket ger

$$\sqrt{\nu}a = n\pi \implies \nu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.37)$$

och alltså

$$X_n(x) = D \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Från (3.31) ovan och [5] (kap. 9.5.2) har vi att

$$-\nu = -\lambda + \mu \implies \lambda = \mu + \nu,$$

vilket med (3.27) och (3.28) ger uttrycket för egenvärdena $\lambda_{m,n}$ i lösningarna enligt

$$\lambda_{m,n} = \mu_m + \nu_n = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.38)$$

tillsammans med lösningarnas egenfunktioner

$$u_{n,m}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Sammanfattningsvis har vi för varje par av $n, m \in \mathbf{N}$ en lösning $u_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$ tillsammans med $\lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ vilka utgör egenfunktioner respektive egenvärden till Laplaceoperatoren i ekvationen $\Delta u = -\lambda u$ i det rektangulära området Ω givet övriga villkor i (3.28)-(4-30).

Vi tillägger att en funktion i två variabler $f(x, y)$ i rektangeln Ω under systemet $\{u_{n,m}\}$ får den generaliserade Fourierseriutvecklingen enligt

$$f(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sigma_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right),$$

där generaliserade Fourierkoefficienter $\sigma_{n,m}$ erhålls genom

$$\sigma_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_{\Omega} f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dx dy.$$

Sist i detta kapitel diskuterar vi multiplicitet. Enligt Pinchover och Rubinstein [5] är en viktig del i analysen av egenvärden just deras multiplicitet. Vi har redan lärt oss (egenskap 5. i kap. 3.2 ovan) att egenvärdesproblem i högre dimensioner kan frambringa vissa egenvärden med multiplicitet större än 1. När detta inträffar säger vi att problemet har degenererade tillstånd. Vi observerar sådana tillstånd hos egenvärdesproblemet (3.28)-(3.30) ovan i fallet om $a = b = 1$, alltså en enhetskvadrat istället för en rektangel. För detta fall kan vi formulera följande sats och bevis ([5], kap. 9.5.2):

Sats 3.4. *Det existerar oändligt många ej distinkta egenvärden för Dirichlet-problemet (3.28)-(3.30) i en enhetskvadrat.*

Bevis. Ett degenererat egenvärde λ existerar om det finns två olika par av heltal (m, n) och (p, q) så att

$$p^2 + q^2 = m^2 + n^2.$$

För att visa att denna ekvation, en så kallad Diofantisk ekvation, har oändligt många lösningar bestående av två par väljer vi att sätta $p = m + 1$ och kan därefter skriva ekvationen som

$$2m + 1 = n^2 - q^2,$$

det vill säga, det existerar en lösning för varje par av n och q med n och q valda olika. Därtill finns triviala lösningar som $(m, n) = (q, p)$ och vidare, om ett lösningspar multipliceras med en heltalskalär erhåller vi en ny lösning ([5], kap. 9.5.2). \square

3.2.2 Laplaceoperatoren och egenvärdesproblemet i en rektangel med Neumannvillkor

Vi kommer nu upprepa kalkylen i föregående kapitel baserad på [5] (kap. 9.5.2) men nu omskriven för Neumannvillkor. Området var rektangeln $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ och egenvärdesproblemet är nu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -\lambda u(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a, \quad (3.41)$$

där (3.40)-(3.41) utgör så kallade Neumannrandvillkor eller kortare bara Neumannvillkor.

Vi tillämpar nu återigen metoden för variabelseparation för att få separerade lösningar på formen

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

och efter insättning av detta i ursprunglig PDE (3.39) har vi

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\lambda X(x)Y(y),$$

följt av division av bägge led med XY

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Detta skriver vi om och betecknar till temporär positiv konstant μ enligt

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} - \lambda = -\mu,$$

vilket vidare ger

$$\frac{X''}{X} = -\lambda + \mu = -\nu, \quad (3.42)$$

där vi för enklare räkningar infört ännu en temporär positiv konstant ν . Vidare, från ursprungliga randsvillkor (3.40)-(3.41) härleder vi motsvarande för de separerade funktionerna X och Y enligt

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}u(0, y) = X'(0)Y(y) = 0 \implies X'(0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}u(a, y) = X'(a)Y(y) = 0 \implies X'(a) = 0, \end{cases}$$

respektive

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}u(x, 0) = X(x)Y'(0) = 0 \implies Y'(0) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}u(x, b) = X(x)Y'(b) = 0 \implies Y'(b) = 0. \end{cases}$$

Vi kan nu från ovanstående bilda två ODE eller egenvärdesproblem med Neumannvillkor enligt

$$Y''(y) + \mu Y(y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (3.43)$$

$$Y'(0) = Y'(b) = 0, \quad (3.44)$$

respektive

$$X''(x) + \nu X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (3.45)$$

$$X'(0) = X'(a) = 0, \quad (3.46)$$

där μ och ν utgör temporära egenvärden under beräkningarna. Vi löste samma typ av ODE i kap. 3.1 ovan och vi tar inte alla steg här igen men observerar den senare delen av kapitel 3.1 för Neumannvillkor att vi även får konstantlösning då $\lambda = 0$, här motsvarande $\mu = 0$ respektive $\nu = 0$, utöver lösningarna då $\lambda > 0$, alltså här $\nu, \mu > 0$. Vi ser närmare på dessa två fall enligt följande.

Fall 1. $\mu, \nu = 0$:

En lösning för $Y(y)$ blir med hänvisning till kapitel 3.1 (α, β konstanter)

$$Y(y) = \alpha_1 y + \beta_1, \quad \text{med } Y'(y) = \alpha_1$$

och villkor (3.44) ger

$$\begin{cases} 0 = Y'(0) = \alpha_1 \\ 0 = Y'(b) = \alpha_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

alltså $Y(y) = \beta_1$. På likande sätt får vi en lösning för $X(x)$

$$X(x) = \alpha_2 x + \beta_2, \quad \text{med } X'(x) = \alpha_2$$

och villkor (3.46) ger

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = \alpha_2 \\ 0 = X'(a) = \alpha_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

det vill säga $X(x) = \beta_2$.

Vi får då i detta fall med $\mu, \nu = 0$ en konstantlösning

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = \beta_2 \beta_1 = \beta,$$

som alltså löser ekvation (3.39) med villkor (3.40)-(3.41).

Fall 2. $\mu, \nu > 0$:

Nu får vi en lösning $Y(y) = A \cos(\sqrt{\mu}y) + B \sin(\sqrt{\mu}y)$ med derivatan $Y'(y) = -A\sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}y) + B\sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}y)$. Den senare, $Y'(y)$, och villkor (3.44) ger oss

$$\begin{cases} 0 = Y'(0) = -A\sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}0) + B\sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}0) \\ 0 = Y'(b) = -A\sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}b) + B\sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}b) \end{cases} \implies \begin{cases} B = 0 \\ -A\sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}b) = 0. \end{cases}$$

Detta medför vidare att $\sin(\sqrt{\mu}b) = 0$ måste gälla och vi får

$$\sqrt{\mu}b = m\pi \implies \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.47)$$

och alltså

$$Y_m(y) = A \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

På liknande sätt får vi lösningen $X(x) = C \cos(\sqrt{\nu}x) + D \sin(\sqrt{\nu}x)$ med derivatan $X'(x) = -C\sqrt{\nu} \sin(\sqrt{\nu}x) + D\sqrt{\nu} \cos(\sqrt{\nu}x)$. Den senare och villkor (3.46) ger

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = -C\sqrt{\nu} \sin(\sqrt{\nu}0) + D\sqrt{\nu} \cos(\sqrt{\nu}0) \\ 0 = X'(a) = -C\sqrt{\nu} \sin(\sqrt{\nu}a) + D\sqrt{\nu} \cos(\sqrt{\nu}a) \end{cases} \implies \begin{cases} D = 0 \\ -C\sqrt{\nu} \sin(\sqrt{\nu}a) = 0, \end{cases}$$

vilket ger

$$\sqrt{\nu}a = n\pi \implies \nu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.48)$$

och alltså

$$X_n(x) = C \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vi noterar att här kan m, n även anta värdet 0 eftersom vi har en konstantlösning enligt fall 1 ovan.

Från (3.42) ovan har vi att

$$-\nu = -\lambda + \mu \implies \lambda = \mu + \nu,$$

vilket med (3.47) och (3.48) ger uttrycket för egenvärdena $\lambda_{m,n}$ i lösningarna enligt

$$\lambda_{m,n} = \mu_m + \nu_n = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

tillsammans med lösningarnas egenfunktioner

$$u_{n,m}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Sammanfattningsvis har vi för varje par av $n, m \in \mathbf{N}$ en lösning $u_{n,m}(x, y) = \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$ tillsammans med $\lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ vilka utgör egenfunktioner respektive egenvärden till Laplaceoperatoren i ekvationen $\Delta u = -\lambda u$ i det rektangulära området Ω givet övriga villkor i (3.39)-(3.41).

Vi tillägger även här att en funktion i två variabler $f(x, y)$ i rektangeln Ω under systemet $\{u_{n,m}\}$ får den generaliserade Fourierserietvecklingen enligt

$$f(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sigma_{n,m} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right),$$

där generaliserade Fourierkoefficienter $\sigma_{n,m}$ erhålls genom

$$\sigma_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_{\Omega} f(x, y) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dx dy.$$

3.3 Lösning av värmeledningsproblem i flera dimensioner

Med bakgrund av kapitel 3.2 där vi studerade Laplaceoperatoren med dess egenvärden och egenfunktioner även i problem i flera dimensioner kan vi nu ge oss i kast med värmeledningsproblem i flera dimensioner.

Vi har använt och kommer att fortsätta använda metoden med variabelseparation för att lösa en värmeledningsekvation även i flera dimensioner. Pinchover och Rubinstein [5] (kap. 9.6) påpekar i sin bok att den huvudsakliga skillnaden mellan metoden med variabelseparation för ekvationer i två variabler och ekvationer med fler än två variabler är att egenvärdesproblemet i sig kan vara en PDE, dock enklare att lösa med färre variabler än ursprunglig PDE.

Innevarande kapitel är indelat i två underkapitel, först 3.3.1 där vi diskuterar ett värmeledningsproblem med Dirichletrandvillkor i godtyckligt antal dimensioner i ett begränsat område i \mathbb{R}^n . Efterföljande 3.3.2 behandlar ett motsvarande problem i två dimensioner för ett område i form av en rektangel och avslutningsvis ett förenklat sifferexempel av samma problem.

3.3.1 Värmeledningsproblem i godtyckligt antal dimensioner

Ett homogent värmeledningsproblem i m dimensioner, där Ω är ett begränsat område i \mathbb{R}^m och det ingår homogena Dirichletrandvillkor samt ett begynnelsevillkor kan vi uttrycka som ([5], kap. 9.6, 9.12):

$$\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} - \Delta_x u(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega, t > 0, \quad (3.49)$$

$$u(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega, t > 0, \quad (3.50)$$

$$u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (3.51)$$

där för enkelhet diffusionskonstanten $k = 1$, $f(\vec{x})$ är en kontinuerlig funktion i $\bar{\Omega}$ och $u = u(\vec{x}, t) = u(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$ är lösningen till problemet.

För att diskutera en lösning tar vi stöd i boken av Evans [2] (kap. 4.1.1) samtidigt som vi återanvänder insikter och resultat från kapitel 3.1 - 3.2. Vi inleder med att tillämpa variabelseparationsmetoden och antar att vi kan få separerade lösningar på produktform enligt

$$u(\vec{x}, t) = g(\vec{x})T(t)$$

och insättning av högerledet i ursprunglig PDE (3.49) ger

$$\frac{\partial [g(\vec{x})T(t)]}{\partial t} - \Delta_x [g(\vec{x})T(t)] = 0$$

samt vidare efter partiell derivering

$$g(\vec{x})T'(t) - [\Delta_x g(\vec{x})]T(t) = 0.$$

Detta kan efter division av bägge led med $g(\vec{x})T(t)$ och sedvanligt införd separationskonstant $-\lambda$ skrivas om till

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta g(\vec{x})}{g(\vec{x})} = -\lambda, \quad (3.52)$$

för alla $\vec{x} \in \Omega$ och $t > 0$ så att $g(\vec{x}), T(t) \neq 0$. Från det ursprungliga randvillkoret (3.50) får vi motsvarande för den separerade funktionen g till följande

$$g(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega, \quad (3.53)$$

eftersom $T(t) \neq 0$ för alla $t > 0$. Genom (3.52) kan vi bilda två bekanta egenvärdesproblem i form av PDE (3.54) inklusive randvillkor (3.53) respektive ODE (3.55):

$$\begin{aligned} \Delta g(\vec{x}) &= -\lambda g(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \\ g(\vec{x}) &= 0, & \vec{x} \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.54)$$

respektive

$$T'(t) = -\lambda T(t), \quad t > 0. \quad (3.55)$$

Till den andra ekvationen (3.55) erhåller vi, som tidigare i kapitel 3.1, en generell lösning $T(t) = be^{-\lambda t}$ för ett visst λ och med b som en konstant.

När det gäller den första ekvationen (3.54) med randvillkor (3.53) kan vi, enligt [2] (kap. 4.1.1) och våra insikter från kapitel 3.2 ovan, säga att λ är ett egenvärde till Laplaceoperatoren $-\Delta$ på Ω (med homogena randvillkor) förutsatt att det existerar en funktion g , ej identisk med noll, som löser (3.54). Funktionen g är motsvarande eller associerad egenfunktion till egenvärde λ . Om nu λ är ett egenvärde och g en associerad egenfunktion är

$$u(\vec{x}, t) = g(\vec{x})T(t) = g(\vec{x})be^{-\lambda t},$$

en lösning till randvärdesproblemet (3.49)-(3.50). Vi vet från kapitel 3.2 att det för Laplaceoperatoren i egenvärdesproblem (3.54) med (3.53) existerar en oändlig följd av egenvärden, $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, och associerade egenfunktioner $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ vilket ger en följd av lösningar enligt

$$u_n(\vec{x}, t) = g_n(\vec{x})T_n(t) = b_n e^{-\lambda_n t} g_n(\vec{x}).$$

Enligt superpositionsprincipen är varje linjärkombination av detta uttryck också en lösning vilket ger

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n g_n(\vec{x}) e^{-\lambda_n t}. \quad (3.56)$$

Denna generella lösning uppfyller ursprungliga randvillkor (3.51) via för produktlösningen härledda (3.53). Vi observerar att man kan se (3.56) som en generaliserad Fourierserieutveckling av u och att det är framställt och motiverat

under punkt 7 i kapitel 3.2 (s. 19-20) ovan varför en sådan serieutveckling u konvergerar under givna förutsättningar.

Nu söker vi en lösning som också uppfyller ursprungligt begynnelsevillkor (3.51) och vägen dit är som bekant att bestämma koefficienterna b_n . Substituerar vi in villkor (3.50) i (3.56) ger exponentterm 1 och vi har

$$u(\vec{x}, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n g_n(\vec{x}),$$

det vill säga

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n g_n(\vec{x}) = f(\vec{x}). \quad (3.57)$$

Uttrycket (3.57) är en generaliserad Fourierserieutveckling av f där b_n är generaliserade Fourierkoefficienter enligt

$$b_n = \int_{\Omega} g_n(\vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.58)$$

Återigen refererar vi till punkt 7 i kapitel 3.2 (s. 19-20) ovan angående varför Fourierserieutveckling av f enligt (3.57) konvergerar samt varför b_n får uttrycket (3.58) strax ovan.

Med dessa koefficienter b_n bestämda har vi till sist en lösning till vårt värmeledningsproblem i godtyckligt antal dimensioner som uppfyller såväl Dirichletrandvillkor (3.50) som begynnelsevillkor (3.51) enligt

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n g_n(\vec{x}) e^{-\lambda_n t}.$$

3.3.2 Värmeledningsproblem i två dimensioner (rektangel)

Vi vet från kapitel 3.2 att det endast går att lösa PDE problem explicit i ett fåtal grundläggande områden. Därför tar vi ett exempel på ett värmeledningsproblem i två dimensioner i ett från kapitel 3.2.1 bekant område $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ i form av en rektangel. Problemet nu är att finna lösningen $u(x, y, t)$ till

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = k \Delta_{x,y} u(x, y, t), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \quad (3.59)$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \quad (3.60)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0, \quad 0 < x < a, \quad t > 0, \quad (3.61)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \quad (3.62)$$

där k är diffusionskonstanten och $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion i $\bar{\Omega}$.

Vi kommer att återanvända lärdomar och resultat från kapitel 3.1 - 3.2 samt första delen av detta kapitel kring värmeledningsproblem i godtyckligt antal dimensioner. Därför går vi nu direkt till de efter variabelseparationen erhållna egenvärdesproblemen

$$\Delta_{x,y} g(x, y) = -\lambda g(x, y), \quad (3.63)$$

$$T'(t) = -\lambda k T(t). \quad (3.64)$$

Ekvation (3.63) med Laplaceoperator löste vi i kapitel 3.2.1 och för att erhålla till (3.60)-(3.61) motvarande randvillkor utför vi en härledning likt den i kapitel 3.1 enligt

$$\begin{cases} u(0, y, t) = g(0, y)T(t) = 0 \implies g(0, y) = 0, & t > 0, \\ u(a, y, t) = g(a, y)T(t) = 0 \implies g(a, y) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

respektive

$$\begin{cases} u(x, 0, t) = g(x, 0)T(t) = 0 \implies g(x, 0) = 0, & t > 0, \\ u(x, b, t) = g(x, b)T(t) = 0 \implies g(x, b) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

och får alltså sammantaget

$$g(0, y) = g(a, y) = g(x, 0) = g(x, b) = 0. \quad (3.65)$$

Beräkningarna i kapitel 3.2.1 ger på liknande sätt egenvärdena

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.66)$$

och lösningarna till (3.63) med villkor (3.65), alltså egenfunktionerna

$$g_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Till den andra ekvationen (3.64) erhåller vi, som i kapitel 3.1, en generell lösning $T(t) = Ce^{-\lambda kt}$ som här med konstant $C = 1$ ger en följd av lösningar enligt

$$T_{n,m}(t) = e^{-\lambda_{m,n}kt} = e^{-\left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]kt} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.67)$$

Nu har vi då sammantaget för varje $m, n \in \mathbb{N}$

$$u_{n,m}(x, y, t) = g_{n,m}(x, y)T_{n,m}(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) e^{-\left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]kt}.$$

Enligt superpositionsprincipen är varje linjärkombination av detta uttryck också en lösning och med tillagd koefficient $b_{n,m}$ och har vi

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) e^{-\left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]kt}. \quad (3.68)$$

Denna generella lösning uppfyller ursprungliga randvillkor (3.60)-(3.61) via för produktlösningen härledda (3.65). Nu söker vi en lösning som också uppfyller ursprungligt begynnelsevillkor (3.62) och vägen dit är som bekant att bestämma koefficienterna b_n . Substituerar vi in villkor (3.62) i (3.59) ger exponentterm 1 och vi har

$$u(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right),$$

med andra ord

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} b_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = f(x, y). \quad (3.69)$$

Betraktar vi uttrycket (3.69) för $f(x, y)$ har vi faktiskt en produkt av två Fouriersinusserier, man kan visa att

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \end{aligned}$$

för $b_{n,m} = B_n B_m$ med $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Vi tecknar på likande sätt som i kapitel 3.1 koefficienterna B_n och B_m enligt

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x, y) \sin(n\Omega x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{\pi}{a}, \\ T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2a. \end{array} \right\} \\ &= \frac{4}{2a} \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx, \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x, y) \sin(m\Omega y) dy = \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{\pi}{b}, \\ T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2b. \end{array} \right\} \\ &= \frac{4}{2b} \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy. \end{aligned}$$

Med dessa koefficienter B_n, B_m bestämda och $b_{n,m} = B_n B_m$ har vi till sist en slutlig lösning till vårt värmeledningsproblem i två rumsvariabler som uppfyller såväl randvillkor(3.60)-(3.61) som begynnelsevillkor (3.62) enligt

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) e^{-\left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]kt}.$$

Värmeledningsproblem i två dimensioner (rektangel - sifferexempel)

Vi tar slutligen kortfattat en variant av ett förenklat sifferexempel från [5] (kap. 9.6) av föregående problem (3.59)-(3.62) ovan med $a = b = \pi$, diffusionskonstanten $k = 1$ och $f(x, y) = 1$. Detta medför att egenvärdena och egenfunktionerna till Laplaceoperatoren ges av $\{m^2 + n^2\}$ respektive $\{\sin(nx) \sin(my)\}$. På grund av detta är lösningen givet randvillkoren följande

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{n,m} \sin(nx) \sin(my) e^{-(n^2+m^2)t}.$$

Vi beräknar koefficienter $b_{n,m} = B_n B_m$ och inleder med

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{4}{2a} \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \sin\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}. \end{aligned}$$

På liknande sätt får vi

$$B_m = \frac{2(1 - (-1)^m)}{m\pi}$$

och därigenom

$$b_{n,m} = B_n B_m = \frac{8}{\pi^2} \begin{cases} \frac{1}{nm} & n, m \text{ udda,} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Låter vi $n = 2k + 1$ och $m = 2l + 1$ där $k, l = 1, 2, 3, \dots$ har vi lösningen till sifferexemplet vilken även uppfyller begynnelsevillkoret $u(x, y, 0) = f(x, y) = 1$ enligt

$$u(x, y, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2l+1)} \sin[(2k+1)x] \sin[(2l+1)y] e^{-[(2k+1)^2+(2l+1)^2]t}.$$

4 Heatkernel eller fundamentallösning

Det engelska uttrycket "heat kernel" är en benämning på en fundamentallösning till värmeledningsekvationen. Sådana fundamentallösningar eller, som vi även säger i svenskt tal, "heat kernels" kan användas till att finna en allmän eller generell lösning till värmeledningsekvationen över vissa områden och de blir därigenom ett sätt att uttrycka lösningar ([11]). Kapitlet har avsikten att översiktligt belysa några perspektiv kring detta i två underkapitel, det första 4.1 beskriver heat kernel för hela reella tallinjen respektive för hela \mathbb{R}^n och det andra 4.2, redogör för heat kernel i ett visst begränsat område Ω i \mathbb{R}^n .

4.1 Heat kernel för reella tallinjen respektive för hela \mathbb{R}^n

Vi inleder med att notera att det finns flera alternativa sätt att framlägga (och härleda) heat kernel. Evans [2] (kap. 2.3.2) gör i sin bok om PDE följande definition:

Funktionen

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \quad (4.1)$$

kallas heat kernel (fundamentallösning) till värmeledningsekvationen i en rumsvariabel.

I [11] läser vi att i en dimension (en rumsvariabel) är Green's funktion (genom Duhamel's princip) en lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k\Delta_x u(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = \delta(x), \end{cases}$$

där $\delta(x)$ är Diracdistributionen, även kallad deltafunktionen eller enhetsimpulsen. Denna är enligt [7] en generaliserad funktion eller, enligt matematisk distributionsteori, en distribution, över de reella talen som är 0 för alla x utom för $x = 0$ där den är oändlig och därtill har $\delta(x)$ som integrand en integral över hela reella tallinjen med värdet 1.

Enligt [11] har begynnelsevärdesproblemet ovan just fundamentallösningen eller heat kernel (4.1) som lösning. Vi verifierar detta genom insättning och i detta syfte beräknar vi med $k = 1$ de partiella derivatorna. Först tidsderivatan

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi t^{3/2}}} e\left(-\frac{x^2}{4t}\right) + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi t^{5/2}}} e\left(-\frac{x^2}{4t}\right) = \frac{-2t + x^2}{8\sqrt{\pi t^{5/2}}} e\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

därefter förstaderivatan med avseende på x

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} = -\frac{x}{4\sqrt{\pi t^{3/2}}} e\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

vilken vi deriverar och får andraderivatans $\Delta_x \Phi(x, t)$ med avseende på x

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{x}{4\sqrt{\pi t^{3/2}}} e\left(-\frac{x^2}{4t}\right) + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi t^{5/2}}} e\left(-\frac{x^2}{4t}\right) = \frac{-2t + x^2}{8\sqrt{\pi t^{5/2}}} e\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Vi har därmed

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} - \Delta_x \Phi(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

och det är visat att heat kernel (4.1) löser begynnelsevärdesproblemet ovan.

Vi kan vidare enligt [11] erhålla den allmänna lösningen av den endimensionella värmeledningsekvationen med begynnelsevillkor $u(x, 0) = f(x)$ där $-\infty < x < \infty$ och $0 < t < \infty$ genom faltningen

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\mathbb{R}} e\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) dy. \quad (4.2)$$

Ett sätt att med $k = 1$ visa att (4.2) är en lösning följer enligt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta_x u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) f(y) dy \right) - \Delta_x \left(\int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) f(y) dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x - y, t) \right] f(y) dy - \int_{\mathbb{R}} [\Delta_x \Phi(x - y, t)] f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\Phi(x - y, t)) - \Delta_x \Phi(x - y, t) \right] f(y) dy = 0, \end{aligned}$$

därför att, som Evans [2] (kap. 2.3.1) påpekar, Φ själv löser värmeledningsekvationen och byte av ordning mellan integrering och derivering kan rättfärdigas.

Vi verifierar därefter begynnelsevillkor $u(x, 0) = f(x)$ genom

$$u(x, 0) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, 0) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - y) f(y) dy$$

och noterar att $\delta(x - y)$ är samma sak som $\delta_x(y)$, det vill säga deltafunktionen med center i punkten y vilket ger

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \delta_x(y) f(y) dy,$$

men integranden i den senare integralen är noll överallt förutom i $y = x$ och därmed följer att

$$f(x) \int_{\mathbb{R}} \delta_x(y) dy = f(x),$$

eftersom deltafunktionen, enligt beskrivningen ovan, har integral 1.

Med fler än en rumsvariabel ger heat kernel en lösning till motsvarande problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} - k\Delta_x u(\vec{x}, t) = 0, & (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(\vec{x}, 0) = \delta(\vec{x}), \end{cases}$$

och heat kernel för n rumsvariabler får vi enligt [11] genom produkten av fundamentallösningarna för varje variabel var för sig till

$$\Phi(\vec{x}, t) = \Phi(x_1, t)\Phi(x_2, t) \cdots \Phi(x_n, t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi kt)^n}} e\left(-\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}}{4kt}\right).$$

Den generella lösningen till den flerdimensionella värmeledningsekvationen i \mathbb{R}^n erhålls sedan med begynnelsevillkor $u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$ där $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ och $0 < t < \infty$ genom faltningen ([11]):

$$u(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\vec{x} - \vec{y}, t) f(\vec{y}) d\vec{y}.$$

4.2 Heat kernel i ett begränsat område i \mathbb{R}^n

För att få fler perspektiv på heat kernel går vi vidare genom att ta stöd av Pinc Hoover och Rubinstein [5] som i bokens kapitel 9.12 beskriver en generalisering av heat kernel för ett visst begränsat område i en rumsvariabel till motsvarande i flera dimensioner. Notera då att det som följer i stort sett även gäller för fall med en rumsvariabel genom att byta ut vektorvärd variabel mot en skalär variabel.

Vi studerar återigen ett bekant homogent värmeledningsproblem i flera dimensioner som vi löste i föregående kapitel 3.3, där Ω är ett begränsat område i \mathbb{R}^n och det ingår homogena Dirichletrandvillkor samt ett begynnelsevillkor ([5], kap. 9.6, 9.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} - \Delta_x u(\vec{x}, t) &= 0, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(\vec{x}, t) &= 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega, \\ u(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

där för enkelhet diffusionskonstanten $k = 1$, $f(\vec{x})$ är en kontinuerlig funktion i $\bar{\Omega}$ och $u(\vec{x}, t)$ är lösningen till problemet.

Med utvecklingen av Laplaceoperatoren i egenfunktioner $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ och associerade egenvärden $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ erhöill vi i kapitel 3.3 lösningen för detta problem genom

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n g_n(\vec{x}) e^{-\lambda_n t},$$

där b_n är (generaliserade) Fourierkoefficienter enligt

$$b_n = \int_{\Omega} g_n(\vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Det visar sig enligt [5] (kap. 9.12) att denna serie konvergerar likformigt för $t > \epsilon > 0$ och därför får vi byta plats mellan summation- och integrationstecken, det vill säga vi kan integrera hela serien istället för varje term i serien var för sig. Med andra ord

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega} g_n(\vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} \right] g_n(\vec{x}) e^{-\lambda_n t} = \int_{\Omega} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} g_n(\vec{x}) g_n(\vec{y}) \right] f(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Därigenom har vi härlett följande integralrepresentation

$$u(\vec{x}, t) = \int_{\Omega} K(\vec{x}, \vec{y}, t) f(\vec{y}) d\vec{y},$$

där K är heat kernel definierad av ([5], kap. 9.12):

$$K(\vec{x}, \vec{y}, t) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} g_n(\vec{x}) g_n(\vec{y}).$$

5 Maximumprincipen

Allmänt och övergripande är enligt [12] maximumprincipen någon del av ett antal satsar och resultat av stor vikt i analysen av vissa typer av PDE. Vidare, man talar om den svaga maximumprincipen respektive den starka maximumprincipen. Kapitlet diskuterar kort detta och maximumprincipen i generell bemärkelse följt av en detaljerad formulering av maximumprincipen för värmeledningsekvationen i form av en sats och dess bevis. Sist har vi en kort notis om vad som kan följa av maximumprincipen.

Vi betraktar ett enkelt exempel eller fall från [12] med en funktion $u(x, y)$ i Ω , ett begränsat område i \mathbb{R}^n , för vilken det gäller

$$\Delta_{x,y}u = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Den svaga maximumprincipen ger då att för en öppen begränsad delmängd M i området Ω uppnås maximum på randen av M . Den starka maximumprincipen säger därtill att såvida u inte är en konstant funktion kan inte maximum också uppnås i det inre av mängden M ([12]).

Mer specifikt för värmeledningsekvationen säger enligt [11] maximumprincipen att det maximala värdet av temperaturen u i något område M av aktuellt medium, där M innehåller både rums- och tidsvariabel, kommer inte att överskrida det maximala värdet som tidigare har förekommit i M , såvida de inte är på randen av M . Med andra ord, maximal temperatur i området M kan öka (anta nytt högsta värde) endast om värme kommer in utifrån M .

Generellt kan enligt [12] utsagorna ovan ge en kvalitativ bild av lösningar till en given viss typ av PDE. Ibland går det även att använda maximumprinciper till att dra precisa kvantitativa slutsatser om lösningar, exempelvis storleksordningen på gradienten. Notera att det inte finns en enskild eller mest generell maximumprincip som gäller direkt i alla situationer för olika typer av PDE.

Nu går vi vidare med stöd av [4] (kap. 7.6) och studerar maximumprincipen mer i detalj för just värmeledningsekvationen. Låt $u(x, y, z, t)$ vara en funktion i ett begränsat område Ω i \mathbb{R}^3 och som löser värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = k\Delta_{x,y,z}u(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

där k är positiv konstant. I syfte att formulera maximumprincipen definierar vi området K_T enligt

$$K_T = \{ (x, y, z, t) \mid (x, y, z) \in \Omega, 0 < t \leq T \},$$

där vi då har ett godtyckligt tidsintervall $]0, T]$. Vi definierar även randen, en så kallad parabolisk rand, till området K_T det vill säga ∂K_T som

$$\partial K_T = \{ \Omega \times \{0\} \} \cup \{ \partial\Omega \times [0, T] \},$$

där vi tillsvidare undantar locket eller toppförslutningen $\Omega \times \{T\}$. Beteckna vidare med C_H klassen av funktioner vilka är tvåfaldigt deriverbara med avseende på (x, y, z) , enkelt deriverbara med avseende på t och kontinuerliga i K_T . Vi kan nu framställa (den svaga) maximumprincipen för värmeledningsekvationen med följande sats och bevis inklusive ett lemma ([5], kap. 7.6):

Sats 5.1. *Låt $u \in C_H$ vara en lösning av värmeledningsekvationen (5.1) i området K_T . Då uppnår u sitt maximum (minimum) på randen ∂K_T av området.*

Bevis. Vi kommer att bevisa sats 5.1 med avseende på maximum av u . Ett bevis gällande minimum av u följer direkt: I fall u löser värmeledningsekvationen så gör även $-u$ detta ([5], kap. 7.6). Vi inleder beviset för övrigt med följande lemma inklusive bevis.

Lemma:

Antag att v är en funktion i C_H som löser

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta_{x,y,z}v < 0 \text{ i } K_T. \quad (5.2)$$

Då gäller att v inte har något lokalt maximum i K_T . Därtill kommer att v uppnår sitt maximum på randen ∂K_T .

Bevis av lemma:

Om v har ett lokalt maximum vid någon punkt $p \in K_T$, alltså $\frac{\partial v(p)}{\partial t} = 0$, så medför detta enligt (5.2) att $k\Delta_{x,y,z}v > 0$ vilket strider mot förutsättandet att v har ett sådant lokalt maximum därför att $\Delta_{x,y,z}v < 0$ är ett krav för en lokal maximumpunkt. Eftersom v är kontinuerlig i det slutna området $\bar{K}_T = \partial K_T \cup K_T$ uppnår v sitt maximum någonstans på randen ∂K_T . Om maximum uppnås vid en punkt $p = (x_0, y_0, z_0, T)$ på toppförslutningen $\Omega \times \{T\}$, då måste det gälla $\frac{\partial v(p)}{\partial t} \geq 0$ och därmed $k\Delta_{x,y,z}v > 0$ enligt (5.2). Detta motsäger återigen förutsättandet om v eftersom att (x_0, y_0, z_0) är ett lokalt maximum i Ω som kräver att $\Delta_{x,y,z}v < 0$ och därmed är lemmat bevisat.

Vidare, definiera nu för $\epsilon > 0$:

$$v(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) - \epsilon t,$$

vilket ger att

$$\max_{\partial K_T} v \leq \Psi := \max_{\partial K_T} u. \quad (5.3)$$

Eftersom u löser värmeledningsekvationen följer det att

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta_{x,y,z}v = \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon - k\Delta_{x,y,z}u < \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta_{x,y,z}u = 0 \text{ i } K_T.$$

Lemmat och (5.3) medför att $v \leq \Psi$. Följaktligen, för alla punkter i K_T har vi $u \leq \Psi + \epsilon T$. På grund av att ϵ kan vara godtyckligt litet erhåller vi att $u \leq \Psi$ och därmed är det alltså visat att u uppnår sitt maximum (minimum) på randen ∂K_T av området K_T ([5], kap. 7.6). \square

Vi tar inte upp detaljer här men observerar att Pinchover och Rubinstein [5] (kap. 7.6) som en direkt följd av maximumprincipen framlägger satser och bevis vilka garanterar unikheter och stabilitet för lösningar till värmeledningsekvationen med Dirichletrandvillkor.

6 Numerisk analys

Många eller faktiskt de flesta problem som innefattar PDE eller ODE går inte att lösa analytiskt. För att komma runt en del av denna problematik kan vi ta till numeriska metoder som bygger på att byta ut kontinuerliga variabler mot diskreta som vi låter datorer räkna på. Metoderna ger en approximation av en (o)möjlig analytisk lösning men som oftast är tillräckligt bra. Det ska observeras att det finns problem med att tillämpa och utveckla numeriska metoder, exempelvis är inte det trivialt att diskretisera PDE eller att begränsa fel, det vill säga konstruera numerisk metod eller algoritm (formel) som approximerar så bra som möjligt. Numerisk analys är just den gren inom matematiken som angriper och forskar kring sådana och andra frågeställningar inom området ([5], kap. 11.1). Kapitlet uppmärksammar då behovet av numerisk analys och innefattar härledning av en grundläggande numerisk metod eller så kallad diskretisering som kan lösa ett enklare fall av värmeledningsekvationen. Därtill diskuteras avslutningsvis i kapitlet viktiga egenskaper för en numerisk metod som stabilitet och konvergens.

Nu vidare till att med stöd av [5] (kap. 11.3) härleda en numerisk metod eller diskretisering för värmeledningsekvationen. En vanlig utgångspunkt i allmänhet för att diskretisera PDE är finita element metoden (FEM) eller finita differens metoden (FDM) och vi använder den senare FDM i härledningen nedan utan detaljerad beskrivning. Vanliga begrepp kring en numerisk metod är explicit, stabilitet och konvergens. Vi kommer mer eller mindre kortfattat kommentera dessa begrepp längs vägen av en enklare diskretisering av följande problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta_x u = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (6.1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \quad (6.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (6.3)$$

där $u(x, t)$ är lösning till problemet, k en positiv konstant och f är kontinuerlig funktion i $0 < x < \pi$ och vi antar $f(0) = f(\pi) = 0$. Vi har då ett enklare specialfall av ett värmeledningsproblem med en rumsvariabel i intervallet $(0, \pi)$, Dirichletrandvillkor och begynnelsevillkor.

Välj nu heltalet $N > 2$, Δt som ett reellt positivt tal för tidssteg samt $\Delta x := \pi/(N-1)$ för steglängd. Vidare, definiera med heltalen i, n ett rutmönster eller indelning $\{x_i = i\Delta x\}$ för intervallet $[0, \pi]$ och ett annat rutmönster $\{t_n = n\Delta t\}$ för intervallet $[0, T]$, det vill säga $x_i = i\Delta x \leq \pi$ respektive $t_n = n\Delta t \leq T$. Finheten hos rutmönster beror då på storleksval av tidssteg Δt respektive steglängd Δx via valt N -värde och detta är inte självklara val som vi återkommer till.

Vi inför nu notationen $U_{i,n} = u(x_i, t_n)$. Enligt [5] (kap. 11.2-3) kan vi genom Taylorutvecklingar approximeras partiella tidsderivatan i vänsterledet i (6.1) med

en differenskvot enligt

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{U_{i,n+1} - U_{i,n}}{\Delta t} \quad (6.4)$$

och högerledet med partiella andraderivatan approximeras med en så kallad centraldifferensformel

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \approx k \frac{U_{i+1,n} - 2U_{i,n} + U_{i-1,n}}{(\Delta x)^2}. \quad (6.5)$$

Innan vi ställer upp en diskret värmeledningsekvation med dessa differenskvoter ser vi mer i detalj på en härledning till (6.5) där även (6.4) täcks in. Vi är nu intresserade av värdet på u i punkterna (x_i, t_n) . Givet att u är en tillräckligt glatt funktion är det enligt [5] (kap. 11.2) möjligt att använda Taylorutveckling av u runt punkten (x_i, t_n) för att beräkna $u(x_{i+1}, t_n)$ och med $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ får vi

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, t_n) &= u(x_i, t_n) + \frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u(x_i, t_n)}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \dots \end{aligned}$$

Löser vi ut partiella förstaderivatan följer approximationen (forward difference formula):

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} \approx \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_i, t_n)}{\Delta x} = \frac{U_{i+1,n} - U_{i,n}}{\Delta x}. \quad (6.6)$$

På liknade sätt kan vi beräkna $u(x_{i-1}, t_n)$ med $x_{i-1} = x_i - \Delta x$ genom Taylorutvecklingen

$$u(x_{i-1}, t_n) = u(x_i, t_n) + \frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} (-\Delta x) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} (-\Delta x)^2 + \dots, \quad (6.7)$$

vilket ger en annan approximation till partiella förstaderivatan enligt (backward difference formula):

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} \approx \frac{u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x} = \frac{U_{i,n} - U_{i-1,n}}{\Delta x}. \quad (6.8)$$

Formeln (6.6) ger en approximation av partiella förstaderivatan med avseende på x som medför ett så kallat trunkeringsfel. I syfte att minimera detta fel och därigenom får en bättre approximation av derivatan behöver Δx var mycket litet och [5] (kap. 11.2) menar vidare att detta krav innebär att N bör väljas mycket stort. Men detta, stort N (tätt ruttmönster), kräver mycket datorresurser och därför söker vi en mer precis eller noggrann approximation av derivatan ifråga än enbart (6.6) kan ge. I detta syfte sätter vi samman formlerna (6.6) och (6.8) ledvis får vi approximationen och centraldifferensformeln (central finite difference)

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_i, t_n) + u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x} = \frac{U_{i+1,n} - U_{i-1,n}}{2\Delta x}.$$

På liknade sätt kan vi härleda en approximation till partiella andraderivatan med avseende på x . Först löser vi ut andraderivatan ur den första Taylorutvecklingen ovan

$$\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 = u(x_{i+1}, t_n) - u(x_i, t_n) - \frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} \Delta x - \dots \quad (6.9)$$

och därefter samma sak ur den andra Taylorutvecklingen (6.7)

$$\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} (-\Delta x)^2 = u(x_{i-1}, t_n) - u(x_i, t_n) - \frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} (-\Delta x) - \dots \quad (6.10)$$

Summerar vi (6.9) och (6.10) samt lite algebra har vi till sist approximationen för partiella andraderivatan i form av en centraldifferensformel enligt

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{(\Delta x)^2} = \frac{U_{i+1,n} - 2U_{i,n} + U_{i-1,n}}{(\Delta x)^2}.$$

Med denna härledning inklusive motivering som grund kan vi nu ställa upp en diskretisering av värmeledningsekvation (6.1) i form av differensekvationen

$$\frac{U_{i,n+1} - U_{i,n}}{\Delta t} = k \frac{U_{i+1,n} - 2U_{i,n} + U_{i-1,n}}{(\Delta x)^2}, \quad 1 \leq i \leq N-2, \quad n \geq 0, \quad (6.11)$$

som då utgör en enkel variant av diskretisering. Från ursprungliga randvillkor (6.2) får vi motsvarande randvillkor till (6.11) enligt

$$U_{0,n} = U_{N-1,n} = 0, \quad n \geq 0, \quad (6.12)$$

och ursprungligt begynnelsevillkor (6.3) ger motsvarande för differensekvationen (6.11) till

$$U_{i,0} = f(x_i). \quad (6.13)$$

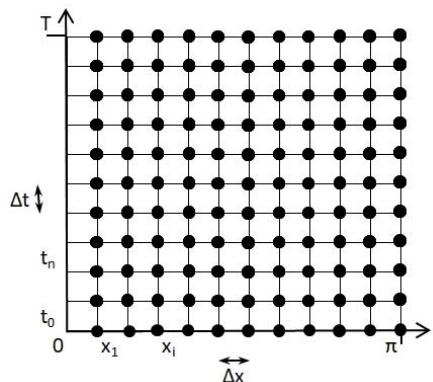
Vi kan vidare lösa ut $U_{i,n+1}$ explicit ur (6.11) och får

$$U_{i,n+1} = U_{i,n} + \Delta t k \frac{U_{i+1,n} - 2U_{i,n} + U_{i-1,n}}{(\Delta x)^2}, \quad (6.14)$$

alltså ett uttryck för en diskret lösning $U_{i,n+1}$ i varje punkt x_i vid tiden t_{n+1} i termer av lösningen vid tiden t_n . Vi har därför en så kallad explicit numerisk metod eller diskretisering ([5], kap. 11.3).

I fall vi eller en dator ska börja räkna på (6.14) kan Figur 2 schematisk åskådliggöra det ruttmönster där man i varje markerad punkt (x_i, t_n) beräknar ett värde på U . Notera att Δx och Δt inte alls kan väljas lika i storlek som Figur 2 ger intryck av, mer om detta följer nedan.

Vidare, vi har då en enkel metod eller formel (6.14) för en numerisk lösning men, visar det sig, den kan lätt bli instabil om vi inte noga väljer storleken på Δx och Δt . Instabil i betydelsen att små förändringar (störningar) i ingångsvärden



Figur 2: *Rutmönster av beräkningspunkter för beskriven diskretiseringsvariant till värmeledningsekvationen ifråga. Notera att Δx och Δt inte alls kan väljas lika i storlek som figuren ger intryck av.*

ger snabbt orimligt höga eller låga utgångsvärden (temperaturer). Sådana små förändringar kan orsakas av avvikelser och (eller) datorers avrundningsfel i varje beräkningssteg och generellt måste man se till att bibehålla stabilitet i en viss diskretisering. Vi gör det inte här men enligt [5] (kap. 11.3) kan man visa att till (6.14) gäller följande stabilitetskriterium

$$\Delta t \leq \frac{1}{2k}(\Delta x)^2,$$

vilket medför nackdelen att Δt måste väljas mycket litet därför att, som omnämnts ovan, vi normalt vill ha Δx till ett lågt värde. Detta innebär i sin tur ett mycket stort antal datorberäkningar genom alla tidssteg om man till exempel söker ett visst utfall (temperatur) längre fram i tiden. Det finns bland annat därför andra mer sofistikerade numeriska metoder än enkla (6.14) ovan att ta till ([5], kap. 11.3).

Stabilitet är då en nödvändig egenskap men en ännu viktigare fråga kring en numerisk metod berör dess konvergens. Enligt [5], kap. 11.3 kan vi precisera konvergens som följer:

En numerisk metod eller diskretisering sägs konvergera mot en given PDE med tillhörande begynnelse- och randvillkor om lösningen till diskretisering ifråga, när $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, konvergerar mot lösningen av ursprunglig PDE ([5], kap. 11.3).

Hur man i praktiken verifierar konvergens hos en viss diskretisering är ofta inte trivialt men det finns genvägar. Vi lämnar dessa tillsvidare och stannar här.

Referenser

- [1] Andersson, K G. & Böiers, L-C. *Ordinary Differential Equations*. Lund: Studentlitteratur 2019 (Edition 1:1).
- [2] Evans, Lawrence J. *Partial differential equations*. Providence: R.I. American Mathematical Society, 2 edition, 2010.
- [3] Halilovic, A. *Extra övningar, Värmeledningsekvationen* [Kompendium, KTH, pdf].
Länk: kth.se/social/files/59267110f2765447692627fb/VARMELEDNING.pdf [downloaded 2022-08-15].
- [4] NE Nationalencyklopedin. *Sida: Matematisk fysik*.
Länk: www-ne-se.ezp.sub.su.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/matematisk-fysik [hämtad 2022-11-14].
- [5] Pinchover Y. and Rubinstein J. *An introduction to partial differential equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [6] Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis*. USA: McGraw-Hill, Inc, Third edition, 1976.
- [7] Wikipedia, engelsk. *Sida: Dirac delta function*.
Länk: en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function [hämtad 2022-10-27]
- [8] Wikipedia, engelsk. *Sida: Eigenfunction*.
Länk: en.wikipedia.org/wiki/Eigenfunction [hämtad 2022-08-18].
- [9] Wikipedia, engelsk. *Sida: Fourier series*.
Länk: en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series [hämtad 2022-09-25].
- [10] Wikipedia, engelsk. *Sida: Generalized Fourier series*.
Länk: en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Fourie_series [hämtad 2022-09-25].
- [11] Wikipedia, engelsk. *Sida: Heat equation*.
Länk: en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation [hämtad 2022-08-18].
- [12] Wikipedia, engelsk. *Sida: Maximun principle*.
Länk: en.wikipedia.org/wiki/Maximum_principle [hämtad 2022-10-12].
- [13] Wikipedia, svensk. *Sida: Egenfunktion*.
Länk: sv.wikipedia.org/wiki/Egenfunktion [hämtad 2022-08-15].

2022-12-11

Rättelse av upptäckta fel i självständigt arbete: Värmeledningsekvationen

Angående begreppet "värmekärna" kontra engelska "heat kernel"

Det är fel att påstå att det engelska uttrycket "heat kernel" även är en svensk benämning på en fundamentallösning till värmeledningsekvationen. Anledningen är att det finns en motsvarande svensk term "värmekärna". Det behöver dock inte vara fel att använda "heat kernel" i svensk text efter ett påpekande om detta. Därför föreslår jag i nuläget följande rättningar av min text:

I inledande sammanfattning andra stycket, ändras enligt:

Vidare följer en diskussion och presentation av "heat kernel" eller värmekärna som är en (~~även svensk~~) benämning på en fundamentallösning som blir ett sätt att uttrycka lösningar till värmeledningsekvationen över vissa områden.

I kapitel 1 Introduktion, sid 5, tredje stycket, ändras enligt:

Kapitel 4: Heat kernel eller fundamentallösning

Detta kapitel studerar "heat kernel" eller värmekärna som är en (~~även svensk~~) benämning på en fundamentallösning till värmeledningsekvationen. Första underkapitlet ...

Kapitel 4 Heat kernel eller fundamentallösning, sid 34, första stycket, ändras enligt:

Värmekärna eller det engelska uttrycket "heat kernel" är en benämning på en fundamentallösning till värmeledningsekvationen. Sådana fundamentallösningar eller, som vi synonymt använder i detta arbete även säger i svenskt tal, "heat kernel" kan användas till att finna en allmän eller generell lösning till värmeledningsekvationen över vissa områden och ...

För övrigt lämnas användningen av heat kernel i texten som den är.

Övrigt

Några mindre fel av typen missat eller extra mellanslag etc. har upptäckts men dessa specificeras inte här.

Tomas Nilsson