



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Pythagoras sats: En resa genom matematik och fysik

av

Sara Grelle

2022 - No K4

Pythagoras sats: En resa genom matematik och fysik

Sara Grelle

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Paul Vaderlind

2022

Pythagoras sats

En resa genom matematik och fysik

Sara Grelle

Abstract

In this essay the Pythagorean Theorem and its consequences for mathematics and physics are discussed. The Pythagorean Theorem has a 4000-year long history, and it has caught the interest of many mathematicians during the centuries. There are over 370 proofs of the Pythagorean Theorem. In the first part of the essay three of these proofs are presented, and it is discussed which of these proofs could be considered the best and most beautiful one. In the second part of the essay a couple of the theorem's consequences for mathematics and physics are presented. The focus is on four areas: trigonometry, the spiral of Theodorus, calculation of impedance and the theory of special relativity. In all four of these areas the Pythagorean Theorem has played a central role.

Tack

Jag vill rikta ett stort tack till min handledare Paul Vaderlind som först kom med idén om uppsatsämne och som under arbetets gång alltid har varit tillgänglig för frågor och diskussion. Det har varit till mycket stor hjälp.

Innehåll

1	Introduktion	3
1.1	Historisk bakgrund	3
2	Bevis av Pythagoras sats	5
2.1	Bevis 1: Pythagoras egna bevis?	5
2.2	Bevis 2: Euklides bevis	6
2.3	Bevis 3: Genom differentialer	11
2.4	Jämförelse av bevis	12
2.4.1	Sammanhang	13
2.4.2	Specificitet	13
2.4.3	Klarhet	13
3	Konsekvenser för fysik och matematik	15
3.1	Trigonometri	15
3.1.1	De trigonometriska funktionerna	15
3.1.2	Trigonometriska ettan	17
3.1.3	Additions- och subtraktionsformlerna	18
3.1.4	Cosinussatsen	21
3.1.5	Halva och dubbla vinkeln	22
3.2	Theodorus Spiral	25
3.2.1	Arkimedes spiral	27
3.3	Spännings- och impedansberäkning	28
3.4	Speciell relativitet	32
3.4.1	Minkowskis rumtid	32
3.4.2	Tvillingsparadoxen	35
3.4.3	Fysikens mest kända formel	36
4	Avslutning	37
5	Referenser	38

1 Introduktion

De allra flesta, matematikintresserade eller inte, har någon form av relation till Pythagoras sats. Ofta är det en av de få delar vi faktiskt kommer ihåg från matematikundervisningen i skolan. ”Ja just det, Pythagoras sats, $a^2 + b^2 = c^2$.” Varför just Pythagoras sats lägger sig på minnet är svårt att veta, kanske är det för att lärarna runt om i skolorna outtröttligt pratar om den, kanske är det för att den är relativt lätt att lära sig utantill, eller för att det helt enkelt är en av de vackraste och mest intressanta satserna som finns i matematiken. Detta kan anses vara en subjektiv åsikt, men enligt Maor (2007) har Pythagoras sats genererat fler kommentarer, variationer, applikationer och kuriosa än någon annan sats. I dagsläget finns det cirka 370 bevis av satsen och den engagerar över generationsgränserna. Vissa av bevisen har skapats av unga skolelever som precis har börjat intressera sig för matematik, medan andra är skapade av äldre, mer erfarna matematiker.

Pythagoras sats har även haft stor betydelse för utvecklandet av matematiken och fysiken. Den används i allt från talteori till sannolikhetslära och man kan hävda att den är den mest använda satsen i hela matematiken (Maor, 2007). Sparks (2008) skriver att varken radio, television, internet eller mobiltelefoner hade varit möjligt utan Pythagoras sats; satsen har alltså utan tvekan haft en stor betydelse för världen som vi känner till den idag.

I den här uppsatsen kommer Pythagoras sats och några av dess konsekvenser för matematiken och fysiken att behandlas. Uppsatsens huvuddel är uppdelad i två delar. Den första delen behandlar tre bevis av Pythagoras sats och följs av en kortare jämförelse. Den andra delen behandlar satsens konsekvenser för matematiken och fysiken. Fyra områden lyfts fram: trigonometri, Theodorus spiral, ström- och impedansberäkning samt speciell relativitet. Närmast följer en historisk bakgrund.

1.1 Historisk bakgrund

Det som idag kallas Pythagoras sats har en lång historia som enligt vissa forskare går att spåra 4000 år tillbaka, till forntidens Egypten. För att konstruera rätta vinklar ska egyptierna ha använt sig av ett rep med tolv jämnt fördelade knutar, som bildade trianglar med sidorna 3-4-5, där vinkeln mellan sidorna 3 och 4 är rät. Dessa trianglar användes vid byggkonstruktioner, och ska bland annat ha använts vid skapandet av pyramiderna (Sparks, 2008).

Om detta innebär att man kände till relationerna mellan sidorna i en rätvinklig triangel i det allmänna fallet går dock inte att säga. Då man skrev på pergament i Egypten, material som inte enkelt kan bevaras, finns det tyvärr inte många källor bevarade från Egypten. I de matematiska källor som

trots allt har överlevt fram till idag förekommer inte Pythagoras sats. Detta menar Maor (2007) kan vara ett tecken på att man trots allt inte kände till Pythagoras sats i Egypten för 4000 år sedan.

Tydligare bevis på att man kände till Pythagoras sats går att hitta hos babylonerna i Mesopotamien. Trots att babylonerna in princip levde samtidigt som egyptierna finns det många fler källor bevarade från Mesopotamien. Anledningen är att de skrev på lertavlor i stället för på pergament (Maor, 2007). En av lertavlorna man hittat visar en kvadrat med diagonalen utritad. Runt kvadraten står ett antal siffror (skrivna i det babyloniska talsystemet) som indikerar att man har räknat ut diagonalens längd. En annan lertavla visar "Pytagoreiska tripplar", positiva heltal, a, b, c så att $a^2 + b^2 = c^2$. Sambandet mellan sidorna i en rätvinklig triangel var alltså känt långt innan Pythagoras själv levde (Maor, 2007).

Ungefär 1000 år efter att Babylonierna räknade på lertavlor i Mesopotamien föddes Pythagoras på ön Samos, runt 570 f.Kr. Inte mycket är känt om hans liv och det mesta som har berättats är baserat på verk av historiker som levde flera hundra år efter Pythagoras. Uppgifter om Pythagoras liv måste alltså betraktas med viss försiktighet. Pythagoras ska ha rest mycket och tillbringat över 20 år av sitt liv i Egypten. Där kan han ha kommit i kontakt med sambandet mellan sidorna i rätvinkliga trianglar (Sparks, 2008). Efter tiden i Egypten flyttade Pythagoras tillbaka till Grekland och bildade en skola. Pythagoras studenter, Pythagoréerna, lärde sig bland annat astronomi, psykologi och matematik. Gruppen var dock mer än enbart studenter, de bildade en sekt (Maor, 2007). Pythagoréerna var hemlighetsfulla kring sitt arbete och information fördes främst vidare muntligt från generation till generation. Det har lett till att väldigt lite är bevarat från Pythagoréernas arbete. Mycket av Pythagoréernas upptäckter tillskrevs även Pythagoras själv, som ett sätt att visa respekt för sin ledare. Det är därför svårt att veta om de upptäckter som tillskrivs Pythagoras idag verkligen är hans egna verk (Maor, 2007).

Hade alltså Pythagoras överhuvudtaget något att göra med upptäckten av satsen som bär hans namn? Här går åsikterna isär. Till exempel skriver Loomis (1968) att Pythagoras utan tvekan generaliserade satsen från egyptiernas specialfall $3^2 + 4^2 = 5^2$, och Sparks (2008) skriver att det var Pythagoras som var den första som deduktivt bevisade satsen. Men faktum är att båda dessa påstående troligtvis bygger på en text författad av Proclus, en grekisk matematiker som levde på 400-talet. Proclus text är den första som tillskriver Pythagoras upptäckten av satsen (Vaderlind, 2005). Då den texten skrevs cirka 1000 år efter att Pythagoras levde, och man aldrig har hittat ett bevis av satsen som gjorts av Pythagoras själv eller någon av hans studenter, är Pythagoras roll i upptäckandet av Pythagoras sats högst ifrågasatt. Själva

namnet Pythagoras sats myntades inte heller förrän på 1700-talet, i en bok författad av Edmund Stone (Vaderlind, 2005). Det bevis som klassas som det första, och ibland tillskrivs Pythagoras, är troligtvis ett äldre bevis från Kina (Maor, 2007). Vi vet alltså inte om Pythagoras faktiskt hade något som helst att göra med upptäckten av "sin" sats. Men han kommer trots det för alltid att vara starkt bunden till den.

2 Bevis av Pythagoras sats

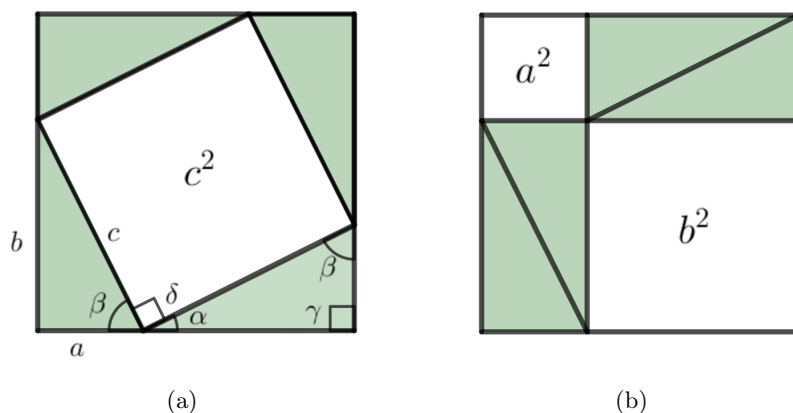
Pythagoras sats har under åren intresserat många matematiker och det finns otaliga bevis av satsen. Elisha Scott Loomis (1968) skrev i början av 1900-talet en bok innehållande alla dåvarande kända bevis, en summa som uppgick till 344 styck. Bevisens upphovspersoner skiljer sig åt, både i ålder och i yrke. Det finns till exempel flera bevis som ska ha gjorts av skolelever (bland annat ett av en ung Einstein), andra som gjorts av kända matematiker och man hittar även ett som är författat av en före detta amerikansk president (Loomis, 1968).

I den här delen kommer tre bevis av pythagoras sats att presenteras och diskuteras.

Sats 2.1 (Pythagoras sats). *I en rätvinklig triangel är kvadraten av hypotenusan lika med summan av kateternas kvadrater.*

2.1 Bevis 1: Pythagoras egna bevis?

Det första beviset som presenteras är beviset som i viss litteratur refereras till som Pythagoras egna (Sparks, 2008). Anledningen är som nämnts ovan att den grekiska filosofen Proclus har skrivit kommentarer som antyder om detta. Andra menar dock att det här beviset i själva verket härstammar från Kina, då ett snarlikt bevis återfinns i ett av de äldsta kinesiska matematiska verken. Verket heter *Chao Pei Suan Ching* och författades långt innan Pythagoras tid (Maor, 2007). Loomis (1968) å sin sida, tillskriver det här beviset en ung high-school elev, Maurice Laisnez, medan Vaderlind (2005) skriver att beviset är författat av den indiske matematikern Aryabhatiya på 500-talet. Det råder alltså minst sagt olika uppfattningar om vem som är upphovsperson till det här beviset.



Figur 1: Bevis 1

Bevis. I Figur 1a visas en kvadrat med sidan $a + b$. På kvadraten har fyra kongruenta rätvinkliga trianglar med sidorna a , b och c placerats som täcker delar av kvadratens yta. Bara en fyrhörning med sidan c förblir alltså synlig. För att visa att denna fyrhörning är en kvadrat måste vi visa att alla fyrhörningens vinklar är lika stora. Till detta används triangelns vinkelsumma, samt vinkelsumman kring en punkt på en rak linje. Då vi vet att vinkelsumman i en triangel är 180° och att $\gamma = 90^\circ$ kan vi dra slutsatserna att $\alpha + \beta = 90^\circ$. Då vi vet att vinkelsumman för en rak linje är 180° , kan vi även dra slutsatsen att $\delta = 90^\circ$. Därmed uppfyller fyrhörningen kriterierna för en kvadrat, vars area är c^2 .

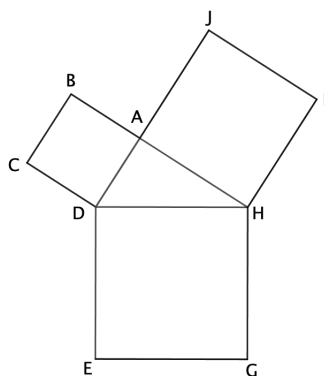
Sedan placeras trianglarna om som i figur 1b. Då bildas två mindre kvadrater, en med arean a^2 och en med arean b^2 . Eftersom varken orginalkvadraten eller trianglarna har ändrat storlek mellan den första och den andra figuren, måste arean på det som syns av orginalkvadraten vara samma i både Figur 1a och 1b. Alltså är $a^2 + b^2 = c^2$. \square

2.2 Bevis 2: Euklides bevis

Det mest kända beviset av Pythagoras sats är med största sannolikhet Euklides bevis av proposition I 47. Euklides levde cirka 200 år efter Pythagoras och hans största verk är *Elementa*, en serie med 13 böcker i vilka han sammanfattar kunskapen om geometri, talteori och primitiv algebra från antikens Grekland. Inget verk har varit så betydelsefullt för utvecklandet av matematiken som Euklides *Elementa* (Maor, 2007). I verket presenteras Pythagoras sats i bok I, proposition 47 och satsen kallas därför ibland också för just proposition I 47. Euklides var noga med att enbart använda satser som redan bevisats i *Elementa* när han utförde sina bevis. Han menade nämligen

att de enda riktiga bevisen är deduktiva bevis som följer ett tydligt logiskt resonemang (Maor, 2007). Av den anledningen presenterar Euklides inte ett enklare bevis av Pythagoras sats, till exempel det som presenterats ovan, utan ett bevis som enbart bygger på satser som presenterats i Elementa fram till proposition I 47.

Sats 2.2 (Proposition I 47). *I en rätvinklig triangel är kvadraten på sidan motstående den räta vinkeln lika med summan av kvadraterna på de närliggande sidorna.*



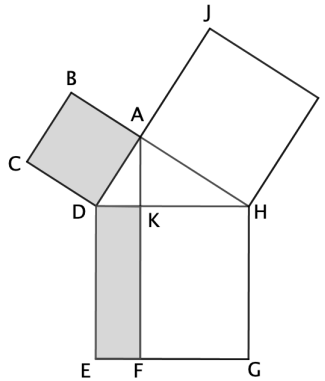
Figur 2: Proposition I 47

Enligt proposition I 47 är alltså $\text{area } ABCD + \text{area } AHIJ = \text{area } DEGH$ (Figur 2).

Bevis. Med hjälp av proposition I 31,

Sats 2.3 (Proposition I 31). *Att genom en given punkt dra en rak linje parallell till en given rak linje.*

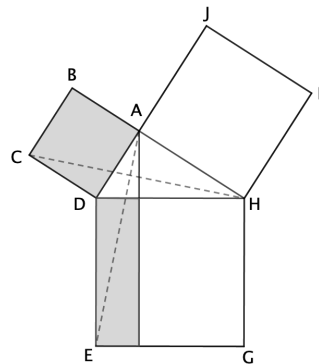
dras en linje parallell med linjerna DE och HG, från punkt A ner till linjen EG (Figur 3).



Figur 3: Bevis av Proposition I 47

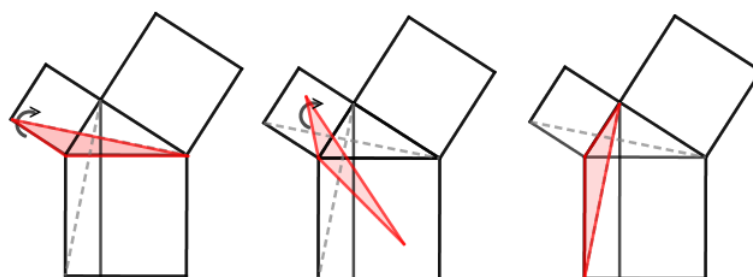
Genom att visa att kvadraten ABCD har samma area som den nyskapade rektangeln DEFK och att kvadraten AHIJ har samma area som rektangeln KFGH är satsen bevisad. Vi börjar med att undersöka de gråmarkerade figurerna.

Två linjer dras, CH och AE som bildar trianglarna CDH respektive ADE (Figur 4).



Figur 4: Bevis av Proposition I 47

I nästa steg vill vi fastställa att $\triangle CDH$ och $\triangle ADE$ är kongruenta och därmed har samma area. Detta går att visa med hjälp av rotation (Figur 5).



Figur 5: Rotation

Efter att Euklides visade att trianglarna var kongruenta finns det olika versioner av vilken väg han valde att ta. Till exempel menar Maor (2007) att han använde sig av proposition I 38, medan andra menar att det var proposition I 41 (Lowe, 2018). Jag har valt att bevisa satsen med hjälp av proposition I 41 och nästa steg blir därför att visa att linjerna CD och BH är parallella (Figur 6a).

För att visa att BH är parallell med CD behöver det först fastställas att BH är en rak linje. Om BH är en rak linje innebär det nämligen att linjen BH är en förlängning av linjen BA, som vi vet är parallell med CD.

För att visa att BH är en rak linje används Proposition I 14.

Sats 2.4 (Proposition I 14). *Om två linjer ligger på var sin sida om en punkt på en rak linje, och summan av de två angränsade vinklarna är lika med två räta vinklar, bildar de båda linjerna en rak linje.*

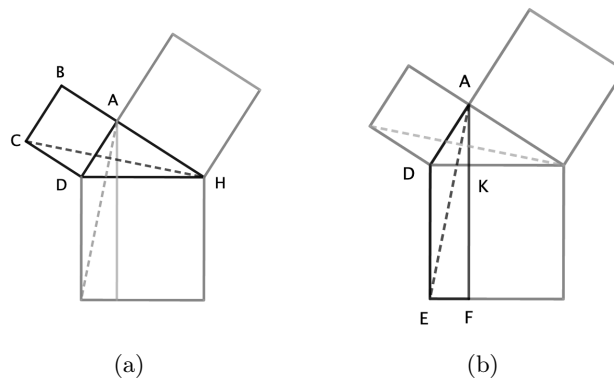
Av konstruktion är $\triangle ADH$ en rätvinklig triangel och $\angle HAD$ är därför rät. ABCD är av konstruktion en kvadrat och $\angle DAB$ är därför också rät. Linjen BH är alltså rak.

Då BH är en rak linje och alltså en förlängning av linje BA går det att dra slutsatsen att BH är parallell med CD. Vi kan nu använda proposition I 41.

Sats 2.5 (Proposition I 41). *Om ett parallelogram delar bas med en triangel, och båda figurerna ligger mellan samma parallella linjer, är parallelogrammets area två gånger större än triangelns.*

Då $\triangle CDH$ och parallelogrammet ABCD har samma bas (CD) och båda ligger mellan de parallella linjerna CD och BH (Figur 6a) är alltså area $ABCD = 2 \cdot \text{area } \triangle CDH$.

Då linjen AF drogs parallellt till linjen DE behöver detta inte visas. Med hjälp av proposition I 41 kan vi därför direkt se att $\text{area DEFK} = 2 \cdot \text{area } \triangle ADE$ (Figur 6b).



Figur 6: Bevis av Proposition I 47

Eftersom $\text{area } \triangle ADE = \text{area } \triangle CDH$ kan vi dra slutsatsen att

$$\text{area ABCD} = \text{area DEFK}.$$

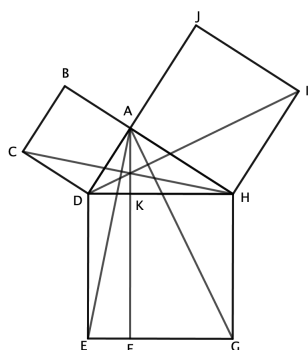
Med samma tillvägagångssätt går det att visa att $\text{area AHIJ} = \text{area FGHK}$. Detta överläts till den intresserade läsaren.

Då $\text{area DEFK} + \text{area FGHK} = \text{area DEGH}$ har vi visat att

$$\text{area ABCD} + \text{area AHIJ} = \text{area DEGH}.$$

□

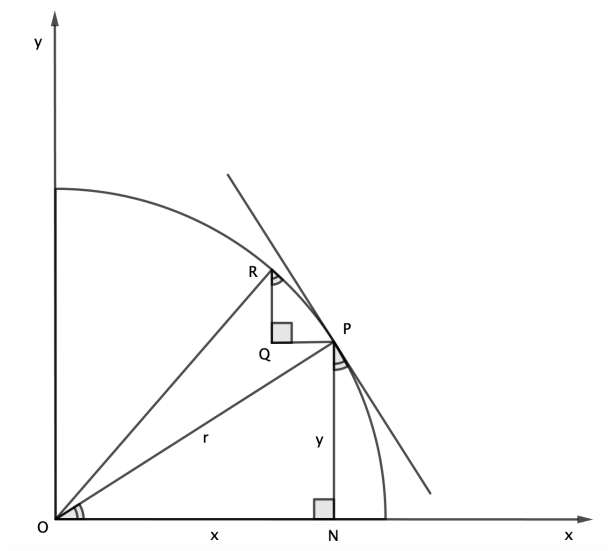
När alla linjer som krävs för Euklides bevis är utritade (Figur 7) påminner figuren om en väderkvarn, därför kallas Euklides bevis ibland även för ”*Windmill-proof*” (Sparks, 2008).



Figur 7: "The windmill-proof"

2.3 Bevis 3: Genom differentier

Det här beviset har skapats av Eli Maor, författaren till boken *The Pythagorean theorem - a 4000-year history*. Beviset presenteras som ett ovanligt bevis som bygger på differentier och Maor (2007) skriver själv att dess riktighet vilar på en något skakig grund. Maor (2007) kallar beviset för "Proof by differentials".



Figur 8: Proof by differentials (Efter Maor, 2007).

Bevis. Figur 8 visar den första kvadranten av en cirkel, med mittpunkt O och radien r . Låt $P(x, y)$ och $R(x + dx, y + dy)$ vara två punkter i en omgivning på cirkeln där dx och dy betecknar små ändringar av variabel x och y . När

punkten P rör sig längs cirkeln i riktning mot R är den lilla triangellika figuren RQP (med rät vinkel i Q) nästintill likformig till $\triangle ONP$. Ju närmare P kommer R , desto mer precis blir de båda trianglarnas likformighet. När $P \rightarrow R$, har vi alltså $\triangle RQP \sim \triangle ONP$. Av egenskaperna för likformighet följer därför att

$$\frac{RQ}{QP} = \frac{ON}{NP}.$$

Men $ON = x$, $NP = y$, $RQ = -dy$ och $QR = dx$ (Minustecknet framför dy kommer från att alla sträckor här har en riktning), vilket leder till $\frac{-dy}{dx} = \frac{x}{y}$. Efter korsmultiplikation får vi:

$$x dx + dy = 0$$

Det här är en differentialekvation vars generella lösning är:

$$x^2 + y^2 = c,$$

där c är integrationskonstanten. För att bestämma integrationskonstanten noterar vi att $y = r$ då $x = 0$ och punkten P alltså är på toppen av cirkeln. När vi sätter in värdet i ekvationen får vi $c = r^2$ vilket ger oss

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

□

Detta bevis synliggör relationen mellan Pythagoras sats och cirkelns ekvation.

2.4 Jämförelse av bevis

Att säga att något av de tre bevisen som presenterats är bättre och vackrare än något av de andra är svårt. Vad är ett vackert bevis? Det är en subjektiv fråga där vi alla troligtvis har olika svar, beroende på våra intressen och våra ingångar till matematik. Men det finns vissa kriterier som kännetecknar ett bra bevis och som kan användas i en jämförelse. Till exempel har Raman-Sundström och Öhman (2016) i sin artikel *Mathematical fit, A case study* tagit fram sex kriterier för att kunna jämföra bevis. Ju fler kriterier som är uppfyllda, desto bättre *fit* är beviset. Att ett bevis är en bra *fit* innebär inte att beviset nödvändigtvis är vackert, men författarna menar att skönhet och matematisk *fit* ofta är besläktade. I min jämförelse kommer jag att använda tre av de sex kriterier som Raman-Sundström och Öhman (2016) har tagit fram: sammanhang, specificitet och klarhet.

2.4.1 Sammanhang

Det första kriteriet fokuserar på huruvida beviset är genomfört med samma matematiska språk som satsen. Om en sats till exempel behandlar vinklar, bör även beviset genomföras med hjälp av vinklar (Raman-Sundström & Öhman, 2016).

Både det första och det andra beviset uppfyller sammanhangskriteriet. Bevisen genomförs med hjälp av areor, vilket är samma matematiska språk som Pythagoras sats. I bevis tre används differentiering som är ett helt annat matematiskt språk. Det uppfyller därför inte sammanhangskriteriet.

2.4.2 Specificitet

Det här kriteriet undersöker huruvida de verktyg som används för att bevisa satsen är av rätt karaktär. Ligger verktygen på rätt teknisk nivå för uppdraget? Ett verktyg som används vid bevis bör enligt Raman-Sundström och Öhman (2016) varken göra mer eller mindre än vad uppgiften kräver.

Det första beviset är ett visuellt bevis som använder kongruenta trianglar som verktyg, samt det faktum att matematiska figurer inte ändrar form eller storlek när de flyttas runt. Detta kan ses som relativt enkla verktyg för att bevisa satsen, men ändå är beviset genomförbart. Bevis 1 kan därför anses uppfylla specificitetskriteriet.

Även i bevis 2 används verktyg som kan anses vara av rätt teknisk styrka för att bevisa Pythagoras sats, blanda annat kongruenta trianglar och proposition I 41. Däremot behövde Euklides i bevis 2 använda fler verktyg än vad som krävdes i bevis 1. Han valde alltså att gå en längre väg än vad som kan anses vara nödvändigt, vilket skulle kunna dra ner specificitetskriteriet en aning.

I bevis 3 används differentiering, vilket kan ses som ett oproportionerligt starkt verktyg för att bevisa Pythagoras sats. Bevis tre uppfyller därför inte specificitetskriteriet.

2.4.3 Klarhet

Det tredje kriteriet fokuserar på presentationen av beviset och om det är lätt att följa. För att ett bevis ska uppfylla det här kriteriet ska en person med rätt matematisk bakgrund utan svårigheter kunna förstå vart beviset är på väg (Raman-Sundström & Öhman, 2016).

Bevis 1 uppfyller klarhetskriteriet. Tanken bakom beviset är tydlig och det är enkelt att följa. Det här beviset fungerar troligtvis bra att presentera för

skolelever som precis har lärt sig Pythagoras sats.

Bevis två är vid första anblick inte lika lätt att följa som bevis ett. Men Euklides bevis har trots det en tydlig struktur. Euklides var alltid noga med att bevisen skulle vila på en logisk grund, något som har speglats i alla hans verk. I *Elementa* genomförs som sagt alltid ett bevis enbart med de satser som presenterats i verket fram tills dess, vilket förklarar att Euklides i det här fallet valde bort att ta en kortare väg. Eftersom Euklides var så noga med att hans bevis skulle vila på redan presenterade satser är det tydligt var hans antaganden kommer ifrån. Det gör att beviset trots allt är enkelt att följa och därför anser jag att klarhetskriteriet är uppfyllt.

Om man är bekant med differentialekalkyl är bevis tre relativt enkelt att följa, och tanken med beviset är tydlig. Det finns dock ett stycke i beviset som är lite svårare att förstå, där $RQ = -dy$. I det här beviset måste sträckor alltså ha en riktning, vilket inte är fallet för Pythagoras sats. Man kan därför anse att det här beviset enbart bevisar ett specialfall av Pythagoras sats. Beviset kräver också en annan matematisk grundförståelse än satsen det ämnar att bevisa. Därför anser jag att klarhetskriteriet för bevis tre inte är uppnått.

Efter jämförelsen av de tre bevisen står det klart att bevis tre inte är en lika bra *fit* som de andra två bevisen. Beviset använder inte samma matematiska språk som Pythagoras sats och bevisets verktyg kan anses vara mer kraftfullt än nödvändigt. De båda första bevisen bör alltså enligt den här jämförelsen ses som mer lämpliga, och alltså bättre bevis av Pythagoras sats. Huruvida bevis ett eller två ska anses vara det bästa beror på hur man ser på matematisk bevisning i sin helhet och vad man som matematiker värdesätter. Det första beviset är kort och enkelt att följa, medan det andra beviset tydligare bygger på en deduktiv logik. Jag skulle personligen föredra det första beviset om jag presenterade Pythagoras sats för en skolklass, men tycker att det andra beviset är ett viktigt historiskt bevis, som genom sin deduktiva fullkomlighet är oerhört elegant.

Trots att det tredje beviset inte uppfyller de tre kriterierna kan det vara en viktig del i det fortsatta upptäckandet av matematiken. Bevis med en ovanlig infallsvinkel kan hjälpa oss att förstå matematiken på ett nytt sätt och öppna dörrar till nya tankebanor.

3 Konsekvenser för fysik och matematik

Att det finns så många bevis av Pythagoras sats tyder på ett stort intresse, som kan bero på satsens betydelse för matematik och fysik. Maor (2007) skriver att Pythagoras sats går att hitta i nästan alla delar av matematiken, i allt från talteori till sannolikhetslära. Persson och Böiers (2010) skriver även att Pythagoras sats är ett ”nästan oundgängligt beräkningstekniskt hjälpmedel” (Persson & Böiers, 2010).

I den här delen presenteras fyra områden där Pythagoras sats har en viktig roll: trigonometri, Theodorus spiral, ström- och impedansberäkning samt speciell relativitet.

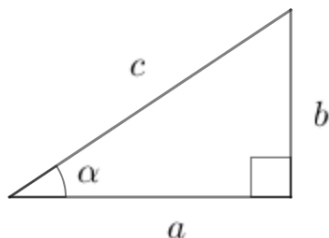
3.1 Trigonometri

En av Pythagoras sats viktigaste konsekvenser är dess påverkan på trigonometrin. Loomis (1968) menar till och med att hela trigonometrin finns till på grund av just Pythagoras sats. Även Sparks (2008) menar att trigonometrin vilar på ett antal grundpelare som alla direkt eller indirekt kan härledas med hjälp av Pythagoras sats.

Nedan följer fem trigonometriska områden där Pythagoras sats kan anses ha en avgörande roll.

3.1.1 De trigonometriska funktionerna

En av grundstenarna för trigonometrin är de trigonometriska funktionerna. Man brukar i internationell litteratur tala om sex trigonometriska funktioner, men då secans, cosecans och cotangens även går att uttrycka med hjälp av sinus, cosinus och tangens kommer jag i den här redogörelsen enbart att fokusera på de tre sistnämnda. De tre trigonometriska funktionerna går att definiera med hjälp av rätvinkliga trianglar (Figur 9).



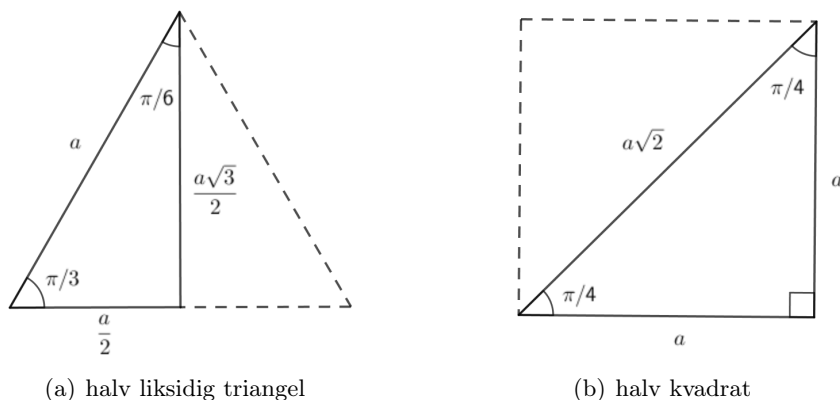
Figur 9: Rätvinklig triangel

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenusan}} = \frac{b}{c} \quad (1)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusan}} = \frac{a}{c} \quad (2)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{motstående}}{\text{närliggande}} = \frac{b}{a} \quad (3)$$

Med Pythagoras sats och de trigonometriska funktionerna kan man beräkna värden på sinus och cosinus för tre olika vinklar α (Persson & Böiers 2010). Till hjälp har vi en halv liksidig triangel och en halv kvadrat med sidorna a (Figur 10).



Figur 10: Beräkning av trigonometriska funktioner

Då den liksidiga triangeln har sidan a , vet vi att halva dess sida måste vara $\frac{a}{2}$. Den tredje kateten (x) av den halva triangeln får vi med hjälp av Pythagoras sats

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 = a^2,$$

vilket ger

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

På samma sätt ger Pythagoras sats att hypotenusan i den halva kvadraten är $a\sqrt{2}$ (Figur 10).

Med hjälp av de trigonometriska funktionerna går det nu att ta fram en värdetabell för värdena på sinus, cosinus och tangens när α är $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ samt $\frac{\pi}{6}$.

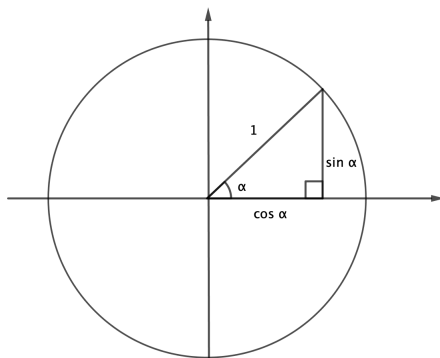
α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Tabell 1: Trigonometriska standardvärden

Dessa värden (Tabell 1) brukar kallas för trigonometriska standardvärden och används vid många beräkningar.

3.1.2 Trigonometriska ettan

Den trigonometriska ettan är en direkt konsekvens av Pythagoras sats. På grund av de trigonometriska funktionerna (1-3) kan kateterna i den inskrivna triangeln i Figur 11 skrivas som $\cos \alpha$ respektive $\sin \alpha$.



Figur 11: Trigonometriska ettan

Då triangeln är inskriven i enhetscirkeln vet vi att hypotenusan = radien = 1. Med hjälp av Pythagoras sats ser vi att

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Den trigonometriska ettan gäller även i det allmänna fallet.

Bevis. Med hjälp av definitionerna för sinus och cosinus (1-2), samt Figur 9, kan vi se att

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2},$$

och då vi vet att $a^2 + b^2 = c^2$ kan vi dra slutsatsen att,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (4)$$

□

Den trigonometriska ettan är oerhört användbar, bland annat vid förenkling av trigonometriska uttryck, något som kommer att framgå i de kommande avsnitten.

3.1.3 Additions- och subtraktionsformlerna

Additions- och subtraktionsformlerna hjälper oss att manipulera trigonometriska uttryck till önskad form och utgör därför ett viktigt verktyg för trigonometriska beräkningar (Sparks, 2008). Additions- och subtraktionsformlerna för sinus och cosinus är:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (5)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (6)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (7)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (8)$$

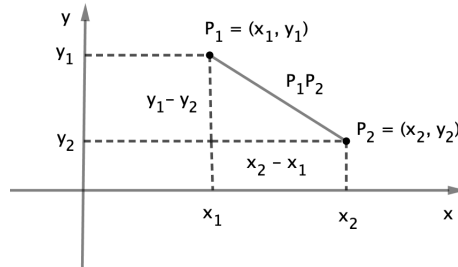
Det går att bevisa additionsformeln för cosinus med hjälp av avståndsformeln

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (9)$$

Avståndsformeln är en direkt tillämpning av Pythagoras sats i den analytiska geometrin som gör det möjligt att beräkna avståndet mellan två punkter, (x_1, x_2) och (y_1, y_2) , i ett två-dimensionellt plan (Sparks, 2008). Med hjälp av Pythagoras sats och illustrationen i Figur 12 kan avståndsformeln bevisas (Persson & Böiers, 2010).

Bevis.

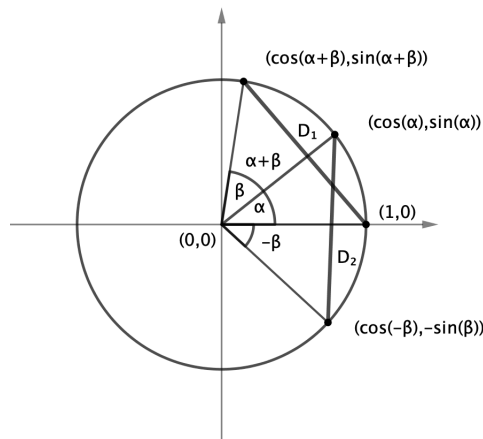
$$(P_1P_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



Figur 12: Bevis avståndsformeln (Efter Persson & Böiers, 2010).

□

Sedan används avståndsformeln (9) i beviset av additions- och subtraktionsformlerna för cosinus (5-6) (Sparks, 2008).



Figur 13: Bevis av additionsformeln (Efter Sparks, 2008).

Bevis. I Figur 13 är två trianglar inskrivna i enhetscirkeln. Då $\alpha + \beta = \alpha + (-\beta)$ och cirkelns radie är 1, vet vi att de båda trianglarna har storlek på en vinkel samt längden på två sidor gemensamt. Av definitionen för kongruens följer därför att $D_1 = D_2$. Vi skriver om D_1 och D_2 med hjälp av avståndsformeln (9),

$$\sqrt{(\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha + \beta))^2} = \sqrt{(\cos \alpha - \cos(-\beta))^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2},$$

vilket efter uträkning ger det långa uttrycket

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos(\alpha + \beta) + 1 + \sin^2(\alpha + \beta) = \\ \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

Med hjälp av den trigonometriska ettan (4) förenklas uttrycket till

$$-2 \cos(\alpha + \beta) + 2 = -2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta + 2,$$

vilket slutligen ger oss

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

□

Då $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta))$ och $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ har vi med detta även visat subtraktionsformeln för cosinus (6). Pythagoras sats spelar alltså genom den trigonometriska ettan (4) och avståndsformeln (9) en viktig roll i förenklingen av additions- och subtraktionsformlerna för cosinus.

Med hjälp av subtraktionsformeln för cosinus (6) och sambanden mellan cosinus och sinus ($\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, samt $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$) går det nu att bevisa additions- och subtraktionsformlerna för sinus (7-8).

Bevis. Vi börjar med att skriva om sinus med hjälp av sambanden mellan cosinus och sinus,

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)) = \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta).$$

Nu går det att använda den nyligen bevisade subtraktionsformeln för cosinus (6),

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \cos \beta + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \sin \beta,$$

och då $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$ och $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$ får vi additionsformeln för sinus,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

□

Med hjälp av additionsformeln för sinus (7) går det sedan att bevisa subtraktionsformeln för sinus (8).

Bevis. Vi börjar med att skriva om $\sin(\alpha - \beta)$ till $\sin(\alpha + (-\beta))$ och använder sedan additionsformeln för sinus (8),

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta).$$

Sedan utnyttjar vi sambanden $\cos(-\beta) = \cos \beta$ och $\sin(-\beta) = -\sin \beta$. Det ger subtraktionsformeln för sinus,

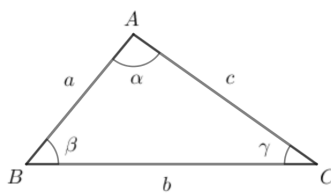
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

□

Genom att, med hjälp av avståndformeln, bevisa additionsformeln för cosinus kan man sedan alltså använda additionsformeln för att bevisa subtraktionsformeln för cosinus. Den går i sin tur att använda för bevis av additionsformeln för sinus, som sedan kan användas för bevis av subtraktionsformeln för sinus. Man kan alltså mena att alla dessa formler på ett eller annat sätt härleds med hjälp av Pythagoras sats. Dock bör här nämnas att det även är möjligt att bevisa formlerna med andra metoder, de existerar alltså inte enbart på grund av Pythagoras sats.

3.1.4 Cosinussatsen

Cosinussatsen är en generalisering av Pythagoras sats som beskriver sambandet mellan en triangelns vinkel och dess sidor (Figur 14). Om två sidor och den mellanliggande, eller den motstående vinkeln är kända, kan man räkna ut triangelns tredje sida.

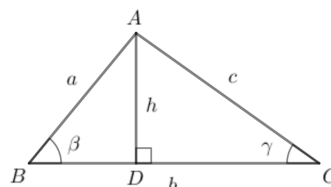


Figur 14: Illustration till cosinussatsen

Sats 3.1. Om vinkel β i en triangel ABC är spetsig, gäller att:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta \quad (10)$$

När vinkeln är rät blir $\cos \beta = \cos 90^\circ = 0$, vilket gör att cosinussatsen reduceras till pythagoras sats. Cosinussatsen är en konsekvens av Pythagoras sats och i beviset förekommer både den trigonometriska ettan (4) och Pythagoras sats.



Figur 15: Bevis cosinussatsen

Bevis. I den rätvinkliga triangeln ABD (Figur 15) kan vi med hjälp av definitionen för cosinus (2) se att

$$\cos \beta = \frac{BD}{a}, \text{ eller } BD = a \cos \beta.$$

Om vi drar bort BD från sidan b får vi därför

$$DC = b - a \cos \beta.$$

Med definitionen för sinus (1) kan vi även se att

$$\sin \beta = \frac{AD}{a}, \text{ eller } AD = a \sin \beta.$$

Med Pythagoras sats kan vi konstatera att $c^2 = AD^2 + DC^2$, vilket ger

$$c^2 = (a \sin \beta)^2 + (b - a \cos \beta)^2.$$

Multiplisera ut parenteserna,

$$c^2 = a^2 \cdot \sin^2 \beta + a^2 \cdot \cos^2 \beta + b^2 - 2ba \cdot \cos \beta,$$

och faktorisera ut a^2 ,

$$c^2 = a^2(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + b^2 - 2ba \cdot \cos \beta.$$

Med hjälp av den trigonometriska ettan (4) kan vi nu se att

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1,$$

vilket ger

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cdot \cos \beta.$$

□

Cosinussatsen (10) är ett av de viktigaste hjälpmedlen vid triangelsolvering, vilket används vid lantmäteri och navigering (Persson & Böiers, 2010).

3.1.5 Halva och dubbla vinkeln

Formlerna för halva och dubbla vinkeln används för att räkna ut värdet på trigonometriska funktioner som inte är av standardkaraktär. Formlerna kan även användas vid förenkling av komplicerade uttryck. Formlerna för halva och dubbla vinkeln för cosinus och sinus är:

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 \quad (11)$$

$$\cos \theta/2 = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad (12)$$

$$\sin \theta/2 = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad (13)$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (14)$$

Formlerna för dubbla vinkeln (11 & 13) är specialfall av additionsformlerna (5 & 7), där $\alpha = \beta$. Det går därför att använda additionsformlerna för att bevisa dubbla vinkeln för både sinus och cosinus (Persson & Böiers, 2010).

Additionsformlerna bevisades med hjälp av Pythagoras sats ovan, så man kan mena att även formlerna för dubbla vinkeln indirekt härleds med hjälp av Pythagoras sats. Vid beviset av dubbla vinkeln för cosinus (11) används dessutom även Pythagoras sats och den trigonometriska ettan (4) explicit i beviset.

Bevis: Dubbla vinkeln för cosinus.

Om vi låter $\alpha = \beta = \theta$ blir additionsformeln för cosinus (5)

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \theta) &= \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta, \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Med hjälp av den trigonometriska ettan (4) kan formeln för dubbla vinkeln skrivas på två olika sätt, antingen

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

eller,

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1.\end{aligned}$$

□

Bevis: Dubbla vinkeln för sinus.

Om vi låter $\alpha = \beta = \theta$ blir additionsformeln för sinus (7)

$$\sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta,$$

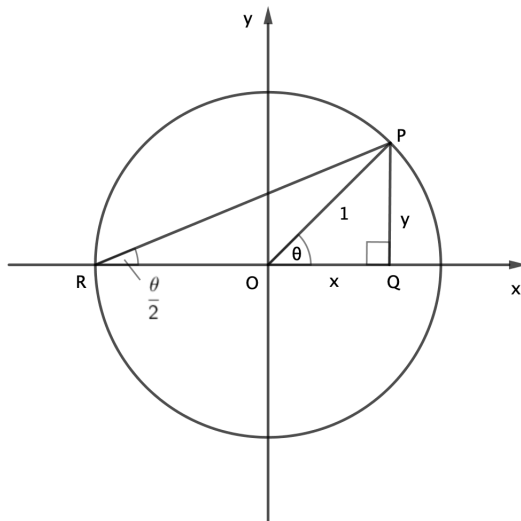
vilket ger,

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

□

Halva vinkeln för cosinus (12) kan också härledas med hjälp av Pythagoras sats (Maor, 2007).

Bevis: Halva vinkeln för cosinus.



Figur 16: Bevis halva vinkeln för cosinus (Efter Maor, 2007)

Figur 16 visar en enhetscirkel med mittpunkt i origo. Låt P vara en punkt på cirkeln, och låt sträckan OP forma en vinkel θ med den positiva x-axeln. I triangeln OQP är $x = \cos \theta$ och $y = \sin \theta$. Genom randvinkelsatsen vet vi att $\angle PRQ = \frac{1}{2} \angle OQP = \frac{\theta}{2}$. På grund av definitionen för cosinus (2) har vi därför i den rätvinkliga triangeln RQP,

$$\cos \theta / 2 = \frac{RQ}{RP},$$

vilket med hjälp av Pythagoras sats kan skriva om till,

$$\frac{RO+OQ}{RP} = \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}.$$

För att förenkla uttrycket används sedan trigonometriska ettan (4): $(1+x)^2 + y^2 = (1+2x+x^2) + y^2 = 1+2x+(x^2+y^2) = 1+2x+1 = 2+2x = 2(1+x)$. När vi sätter in det förenklade uttrycket i ekvationen får vi

$$\cos \theta / 2 = \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x)}},$$

som kan skrivas om till

$$\begin{aligned} \cos \theta / 2 &= \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x)}} = \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+x}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x}} = \\ &= \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}}. \end{aligned}$$

□

Med hjälp av dubbla vinkeln för cosinus (11) kan vi även härleda halva vinkeln för sinus (13).

Bevis: Halva vinkeln för sinus.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \theta/2$$

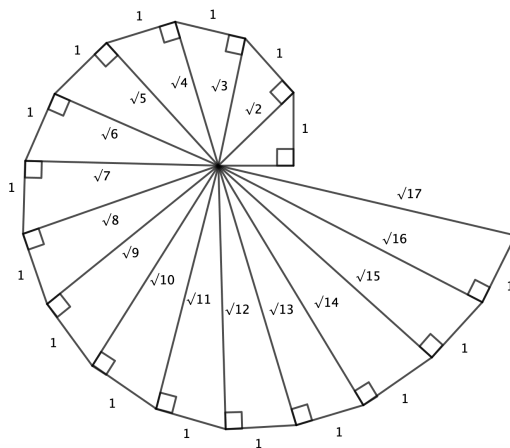
$$\frac{\cos\theta-1}{-2} = \sin^2 \theta/2$$

$$\sin \theta/2 = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

□

3.2 Theodorus Spiral

Theodorus spiral är ett känt fenomen som med hjälp av Pythagoras sats gör det möjligt att, med passare och linjal, konstruera roten av varje heltal n , förutsatt att roten ur $n - 1$ redan är konstruerad (Figur 17) (Maor, 2007).

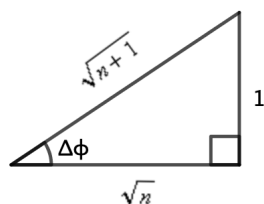


Figur 17: Theodorus spiral

Spiralen som består av rätvinkliga trianglar har fått sitt namn av sin upphovsperson, Theodorus som levde på 400-talet f.k.. I likhet med många andra grekiska matematiker finns det inte många kända detaljer kring hans liv. Han ska ha fötts i Cyrene, en liten Grekisk koloni söder om Grekland och han ska ha varit lärare till både Plato och Theaetetus (Davis, 1993). Theodorus skapade den här spiralen och lät den gå fram till $\sqrt{17}$. Det har spekulerats kring orsakerna till att han valde att avsluta spiralen just där. Vissa menar att det var för att trianglarna då skulle börja överlappa varandra och att

han därför valde att inte fortsätta (Davis, 1993).

Theodorus spiral är inte enbart intressant för att den hjälper oss att konstruera roten av varje heltal n (om roten ur $n - 1$ är konstruerad), den har även en del intressanta egenskaper som framkommer när spiralen utvecklas till oändligheten. Bland annat visar det sig att radien vid varje varv växer med π , alltså att $\Delta r = \pi$.



Figur 18: Spiralens n :te triangel

För att visa detta utnyttjar vi det faktum att vi vet att vinkel ϕ (summan av trianglarnas vinklar i spiralens mitt) med varje varv ökar med 2π . Vi behöver därför visa att $\Delta\phi = 2\Delta r$ när spiralen utvecklas till oändligheten (Kociemba, 2018).

Bevis. Med hjälp av Figur 18 och den trigonometriska funktionen för tangens (3) kan vi se att

$$\Delta\phi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

För stora värden på n kommer $\Delta\phi$ att närma sig $\frac{1}{\sqrt{n}}$, vilket kan visas med hjälp av Taylorutveckling:

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^5}{5} + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^7\right).$$

Från den andra termen kommer värdena snabbt att gå mot 0 då n blir stort, och därför kan vi dra slutsatsen att $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$ för stora värden på n .

Δr är radiens förändring mellan två trianglar och går därför att beskriva som

$$\Delta r = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Hur beter sig Δr vid stora värden på n ? Det kan vi se genom att skriva om Δr .

$$\begin{aligned} \Delta r &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \end{aligned}$$

vilket ger $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$ för stora värden på n .

För stora värden på n kommer alltså $\Delta\phi$ nästan att vara lika med $2\Delta r$. För varje nytt varv på spiralen ökar alltså r med hälften så mycket som ϕ . Då vi vet att ϕ efter ett varv är 2π ökar radien alltså med π för varje varv. \square

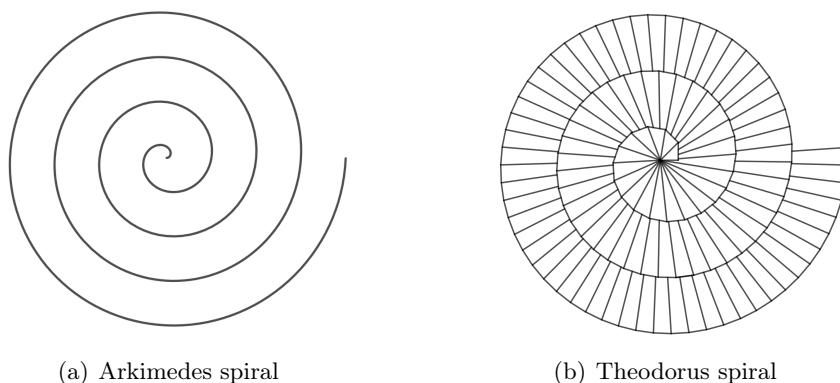
Detta visar att Theodorus spiral approximerar Arkimedes spiral för stora värden på n .

3.2.1 Arkimedes spiral

Arkimedes spiral sägs vara den första spiralen som beskrivits matematiskt och också den första matematiska beskrivningen av två samtidiga rörelser (Davis, 1993).

Spiralen består av det spår som en punkt beskriver som rör sig i konstant hastighet på en stråle, som i sin tur roterar med en konstant vinkelhastighet runt dess startpunkt. Arkimedes spiral beskrivs genom ekvationen $r = a\theta$, där r är radiens längd från spiralens startpunkt, a är en konstant och θ är vinkeln på strålens rotation. Då strålens tillväxt är proportionerlig mot strålens rotation ökar spiralens radie varje varv med $2\pi a$ (Britannica, 2016).

Då vi visat att radien av Theodorus spiral för stora värden på n ökar med π för varje varv, approximerar den för stora värden på n en Arkimedes spiral där $a = \frac{1}{2}$. Tendenser av detta syns redan efter tre varv (Figur 19).



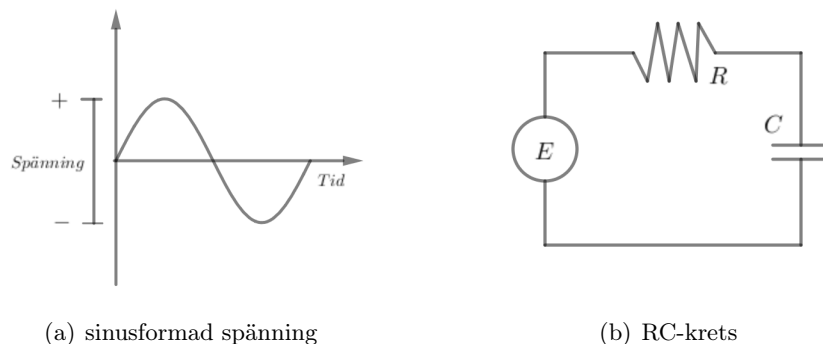
Figur 19: Arkimedes och Theodorus spiraler

Det finns alltså en koppling mellan Pythagoras sats och Arkimedes spiral, coolt!

3.3 Spännings- och impedansberäkning

Pythagoras sats används också vid impedansberäkning inom elektricitetsläran. För att förstå den kommande redogörelsen är det viktigt att förstå vad växelström är. Nedan följer därför en kort introduktion till växelström innan användningen av Pythagoras sats vid impedansberäkning fördjupas.

Växelström definieras som en elektrisk ström som periodiskt ändrar riktning. Spänningen i en växelströmkrets skapas i regel genom rotation i en generator, till exempel genom en spole som roterar i ett magnetfält. När spolen roterar förändras magnetfältet, vilket skapar spänning genom induktion. På grund av rotationen är spänningen sinusformad i relation till tiden (Figur 20a). När en elektrisk krets kopplas till generatoren flyter det en ström som, liksom spänningen, periodiskt ändrar riktning, alltså en växelström.



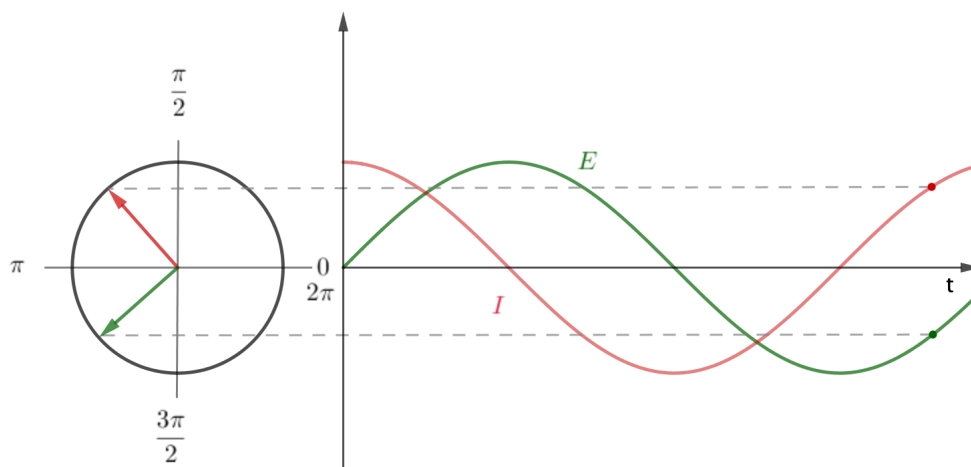
Figur 20: Sinusformad spänning och en RC-krets

I en växelströmkrets finns resistans, precis som i likström. Resistansen är det motstånd som strömmen utsätts för i en elektrisk krets. Ett vanligt motstånd är förbrukaren, exempelvis en glödlampa. Resistans mäts normalt i ohm (Ω), och ju mer resistans en elektrisk krets innehåller, desto större spänning krävs det för att få strömmen genom kretsen. Detta beskrivs i ohms lag: $E = RI$, (spänning = resistans \cdot ström) (Clayton Rawlins, 2000).

Till skillnad från likström kan det i växelström även finnas ett "skenbart motstånd" som kallas för reaktans. Reaktansen är en färförskjutning som skapas av kapacitans eller induktans, där kapacitansen är förmågan av en kondensator att lagra elektrisk laddning. Kondensatorn i en växelströmkrets orsakar en färförskjutning av sinuskurvan genom att den lagrar elektrisk spänning.

Detta är användbart vid applikationer som behöver en stor spänning under en kortare tid, till exempel en kamerablixt eller en defibrillator (Clayton Rawlins, 2000). I den här uppsatsen kommer enbart RC-kretsar att behandlas, alltså kretsar med en ren resistor och en ren kondensator. Ett exempel på en sådan krets återfinns i Figur 20b.

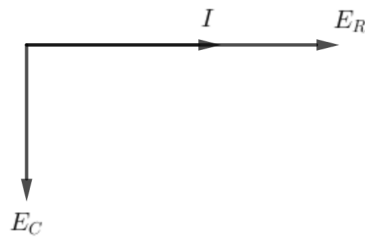
Resistansen och reaktansen bildar tillsammans växelströmmens impedans (Clayton Rawlins, 2000). Impedansen är alltså det totala motståndet som växelströmmen utsätts för, både det verkliga och det "skenbara".



Figur 21: Spänning och ström i våg- och vektorform

I Figur 21 syns sinuskurvorna för spänning (E) och ström (I), där strömmen har fasförskjutits med 90 grader ($\frac{\pi}{2}$). I figurens vänstra sida kan man se två vektorer som uttrycker varsin punkt på respektive sinuskurva. Då vi vet att fasförskjutningen alltid är 90 grader vet vi att vektorerna alltid kommer att vara ortogonala mot varandra. Orsaken till att fasförskjutningen alltid är just 90 grader är att derivatan av sinus respektive cosinus ingår i beräkningen av ström och spänning i kondensatorn. Vektorernas längd är samma som sinuskurvans höjd, och beskriver därför amplituden (Clayton Rawlins, 2000). Vi kan alltså uttrycka spänning och ström med hjälp av vektorer, vilket ger oss nya matematiska möjligheter att undersöka kretsen.

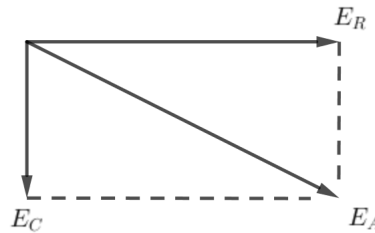
I en RC-krets har strömmen samma värde, oavsett var på kretsen den befinner sig, medan spänningen varierar. E_R betecknar spänningen över resistorn, och E_C betecknar spänningen över kondensatorn. Eftersom fasförskjutningen sker i kondensatorn, men inte i resistorn, är E_R inte fasförskjuten mot strömmen (Figur 22) (Clayton Rawlins, 2000).



Figur 22: Ström och spänning i vektorframställning (Efter Clayton Rawlins, 2000)

För att räkna ut den totala spänningen i kretsen (E_A) kommer pythagoras sats till användning. Man kan tänka sig att vektor E_A bildar hypotenusan i en triangel med sidorna E_R och E_C (Figur 23). På grund av pythagoras sats gäller

$$E_A = \sqrt{E_R^2 + E_C^2}.$$



Figur 23: Spänningkomponenter och den totala spänningen (Efter Clayton Rawlins, 2000)

Det går även att räkna ut impedansen av en växelströmkrets med hjälp av en vektorframställning (Figur 24) och Pythagoras sats (Clayton Rawlins, 2000). I ett första steg används Ohms lag. Vi vet att

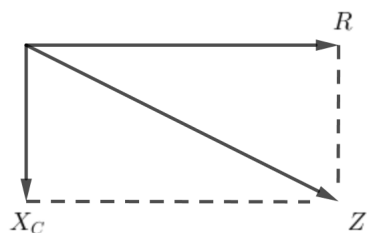
$$E_A = \text{vektorsumman av } E_R \text{ och } E_C.$$

Med hjälp av ohms lag ser vi att $E_R = IR$, $E_C = IX_C$ och att $E_A = IZ$ där $Z = \text{impedansen}$ och $X_C = \text{kondensatorns reaktans}$. Detta ger oss

$$IZ = \text{vektorsumman av } IR \text{ och } IX_C,$$

vilket efter faktorisering av I ger

$$Z = \text{vektorsumman av } R \text{ och } X_C.$$



Figur 24: Impedans i vektorframställning (Efter Clayton Rawlins, 2000)

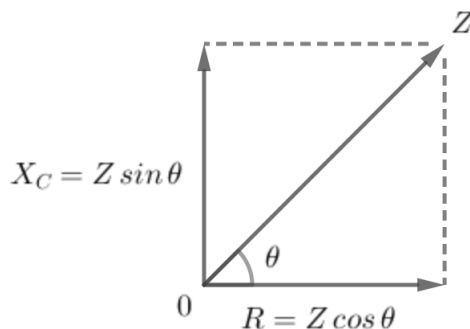
Impedansen räknas sedan ut på samma sätt som den totala spänningen, med hjälp av Pythagoras sats,

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}.$$

Impedansen av en elektrisk krets kan uttryckas som ett komplext tal där resistansen är den reella delen, och reaktansen den imaginära delen. För att inte blanda ihop den imaginära delen av ett komplext tal med strömmen, I , används i elektricitetläran bokstaven j i stället för bokstaven i för att beteckna den imaginära delen. Med komplexa tal beskrivs impedansen genom

$$Z = R + jX_C.$$

Med hjälp av de trigonometriska funktionerna (1-3) kan vi även uttrycka resistansen och reaktansen med polära koordinater där $X_C = Z \sin \theta$ och $R = Z \cos \theta$ (Figur 25). Att använda polära koordinater är ofta användbart när man arbetar med komplexa tal (Persson & Böiers, 2010).



Figur 25: Impedans i polära koordinater

Sedan kan vi skriva om impedansen med hjälp av Eulers formel, $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ (Lvovich, 2012). Formeln beskriver sambandet mellan de trigonometriska funktionerna (1-3) och exponentialfunktioner, och gör det möjligt att skriva komplexa tal i exponentialform, vilket förenklar beräkningar

(Persson & Böiers, 2010). För att skriva om impedansen med Eulers formel multiplicerar vi med impedansen på båda sidor av likhetstecknet,

$$\begin{aligned} Ze^{j\theta} &= Z(\cos \theta + j \sin \theta) \\ &= Z\cos \theta + Zj \sin \theta \\ &= R + jX_C \end{aligned}$$

Detta ger oss ett nytt sätt att beskriva impedans på,

$$Z = |Z|e^{j\theta},$$

där $|Z|$ är impedansens amplitud (Lvovich, 2012). Impedansens amplitud beräknas på samma sätt som tidigare, med hjälp av Pythagoras sats.

Anledningen till att den här omskrivningen av impedans är av intresse är att den förenklar beräkningar av den totala impedansen i mer komplexa elektriska kretsar.

Impedansberäkning är alltså ett praktiskt användningsområde av matematik som förenar Pythagoras sats, trigonometri, exponentialfunktioner och läran om de komplexa talen!

3.4 Speciell relativitet

Pythagoras sats är även relevant i den speciella relativitetsteorin som skapades av Albert Einstein år 1905. Teorin förklarar hur hastighet påverkar massa, tid och rum. I den speciella relativitetsteorin förekommer inte gravitation, den adderades i Einsteins generella relativitetsteori, ungefär 10 år senare (Stein, 2021a).

Grundtanken i den speciella relativitetsteorin är att tid och rum inte är absolut utan påverkas av den hastighet som objekten färdas i. Ljusets hastighet däremot, som ofta betecknas med c , är absolut och därigenom detsamma för alla observatörer (Stein, 2021a). Det går inte att överskrida ljusets hastighet, som i vakuum uppgår till 299 792 458 m/s (Stein, 2021b).

3.4.1 Minkowskis rumtid

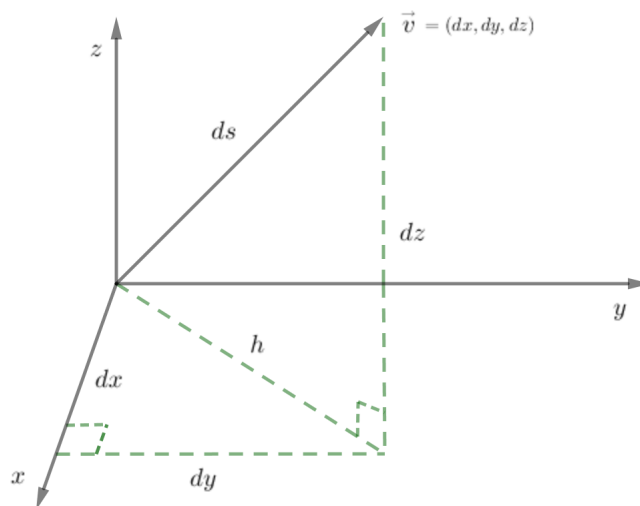
En viktig del i den speciella relativitetsteorin är Minkowskis rumtid. För att introducera Minkowskis rumtid börjar vi med att presentera Pythagoras sats för små avståndsintervall, där ds betecknar hypotenusan och dx och dy betecknar triangelns sidor. Detta gör det möjligt att beräkna avstånd på icke-räta former (Overduin & Conn Henry, 2020). Kurvan delas då upp i oändligt små delar, där varje del är hypotenusan (ds) av en rätvinklig triangel. De oändligt små delarna summeras sedan genom integrering, vilket ger

avståndet mellan två punkter längs kurvan. Detta avstånd kallas för båg-
längd (*arc length*).

Vi generaliserar sedan Pythagoras sats till fler dimensioner. Det är möjligt
att generalisera satsen till oändligt många dimensioner, men i den här texten
kommer vi enbart att använda oss av tre och fyra dimensioner.

En generalisering av Pythagoras sats till tre dimensioner (Figur 26) kan
skrivas som

$$ds^2 = h^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$



Figur 26: Pythagoras sats i det tredimensionella rummet (Efter Bray, 2015)

På samma sätt kan vi generalisera Pythagoras sats till fyra dimensioner,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2, \quad (15)$$

där den fjärde dimensionen ofta beskrivs som tiden. Här rör vi oss fortfarande
i ett Euklidiskt rum, där Pythagoras sats används för att beräkna avstånd.

Om vi sedan, som Overduin och Conn Henry (2020) väljer att beskriva det,
”*make a giant leap of intuition*” och uttrycker tiden i termer av avstånd, får
vi Minkowskis modifiering av Pythagoras sats,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad (16)$$

där c är ljusets hastighet som används för att konvertera sekunder till meter
(Overduin & Conn Henry, 2020).

Det som förändrats från ekvation (15) är att ett minustecken har placerats framför den fjärde dimensionen. Det var Einstein som till en början placerade minustecknet där, medan han utvecklade den speciella relativitetsteorin.

Detta gjorde han genom att föreställa sig en ljuskälla placerad på origo i ett tre-dimensionellt koordinatsystem (x, y, z) . Vid tidpunkt $t = 0$ avger källan en sfärisk våg som i ljushastighet, c , sprider sig genom rummen. Sedan låter han $P(x, y, z)$ vara en punkt på vågens front. Efter t sekunder har P rört sig i ett avstånd av ct från origo. Vi har alltså

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2,$$

som är vågfrontens ekvation, iakttagen av en observatör som befinner sig på origo i (x, y, z) -planet. Sedan föreställde han sig en andra observatör, placerad på origo i ett koordinatsystem (x', y', z') som med konstant hastighet, v , rör sig relativt till (x, y, z) . Eftersom ljusets hastighet enligt Einsteins teori om speciell relativitet är konstant för alla observatörer, bör även den andra observatören se vågfrontens hastighet som c (Maor, 2007). Detta innebär att:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \quad (17)$$

När Minkowski, Einsteins föredetta lärare, såg ekvation (17) blev han imponerad av båda sidors likhet till Pythagoras sats och valde att undersöka ekvationens egenskaper vidare (Maor, 2007). Detta gjorde han bland annat med hjälp av Lorentztransformationer som är en grundsten i den speciella relativitetsteorin. Lorentztransformationer är linjära transformationer som genom rotation relaterar tid- och rumkoordinater av olika koordinatsystem, vilka rör sig relativt mot varandra med konstant hastighet, v , så som i ekvation (17) (Britannica, 1999). Minkowski upptäckte att ekvation (16) är invariant under Lorentztransformation, alltså att den inte förändras genom rotation i det här 4-dimensionella rummet (Maor, 2007). Det innebär att ekvation (16) har samma egenskaper i det 4-dimensionella tid-rummet som avståndformeln har i det tre-dimensionella Euklidiska rummet. Detta är grunden till Minkowskis rumtid (*Minkowski spacetime*).

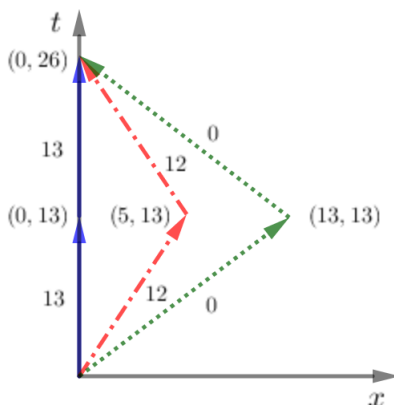
I Minkowskis rumtid gäller inte samma axiom som i den Euklidiska geometrin, och man pratar därför om Minkowskis geometri, där ekvation (16) räknas som ett axiom. Att studera Minkowskis geometri är enligt Bray (2015) speciell relativitet i sin enklaste form.

Det som i Euklides geometri kallas för punkter kallas i Minkowskis rumtid för händelser. Ett objekts rörelse i rumtiden brukar kallas för dess "världslinje", och eftersom tiden oavbrutet går framåt har även ett objekt som står helt still i det tre-dimensionella rummet en världslinje.

3.4.2 Tvillingsparadoxen

En konsekvens av Minkowskis rumtid och ett vanligt exempel i den speciella relativitetsteorin är ett fenomen som brukar kallas för tvillingsparadoxen. Exemplet nedan är hämtat från Herbert Brays (2015) föreläsning *From Pythagoras to Einstein - The Geometry of Space and Time*.

Vi tänker oss ett tvillingpar, där den ena stannar på jorden, medan den andra åker ut till rymden under ett antal år för att sedan återvända. Tvillingen som stannar kvar står stilla på jorden i 26 år medan den andra färdas i x -riktning i en hastighet av $\frac{5}{13}$ ljushastigheter. Efter 13 år vänder tvillingen tillbaka mot jorden i samma hastighet. Tiden de båda tvillingarna har upplevt visualiseras med hjälp av deras världslinjer i Figur 27.



Figur 27: Tvillingsparadoxen (Efter Bray, 2015)

Den blå världslinjen längs t -axeln visualiserar den tid tvillingen som stannade på jorden har upplevt, vilket är 26 år. Den röda, streck-prickade världslinjen symboliserar tiden som tvillingen som åkte upp i rymden har upplevt. Den kan vi räkna ut med hjälp av Minkowskis rumtid (16),

$$\sqrt{13^2 - 5^2} + \sqrt{13^2 - 5^2} = 24.$$

Tvillingen som åkte ut i rymden upplevde alltså 24 år, och är därför plötsligt två år yngre än sin tvilling!

Den gröna, prickade världslinjen i Figur 28 tillhör en astronaut som färdas i ljusets hastighet ut i rymden under 13 år, och sedan vänder tillbaka till jorden under 13 år. Med hjälp av Minkowskis rumtid ser vi att

$$\sqrt{13^2 - 13^2} + \sqrt{13^2 - 13^2} = 0,$$

och astronauten alltså inte har upplevt någon tid alls, medan det har gått 26 år på jorden, otroligt!

När tvillingsparadoxen förklaras med Minkowskis rumtid kan vi även se att tiden skulle gå baklänges om vi färdas snabbare än ljusets hastighet. Detta är dock inte möjligt enligt Einsteins teori om speciell relativitet.

Att tiden förändras när man rör sig i en hög hastighet har faktiskt kunnat bevisas med praktiska experiment, så som Hafele–Keating-experimentet. Där placerades en atomklocka på passagerarflygplan som sedan flög två varv runt jorden, ett varv från väst till öst och ett varv från öst till väst. När klockan landade igen visade det sig att den hade förlorat några nanosekunder på sin resa från väst till öst, och vunnit några nanosekunder på resan från öst till väst. I experimentet förekommer dock, utöver objektets hastighet, även andra parametrar som påverkar tiden, så som gravitation (Hafele & Keating, 1972).

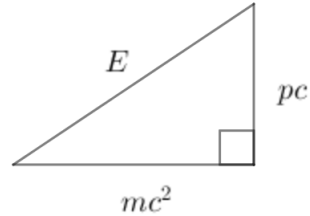
3.4.3 Fysikens mest kända formel

Den mest kända formeln i fysiken brukar sägas vara Einsteins formel $E = mc^2$ som beskriver ett objekts relation mellan massa och energi. Den är en fundamental del i den speciella relativitetsteorin då den visar att energi är ekvivalent med massa och att även en liten massa kan konverteras till en stor mängd energi. Formeln är en grundsten för att förstå hur energi frigörs vid kärnreaktioner (Hewitt, 2016).

Men $E = mc^2$ går enbart att applicera på objekt som inte är i rörelse, och är därigenom ett specialfall av en mer omfattande formel.

Om man vill undersöka objekt som är i rörelse måste nämligen ytterligare en komponent tas med i beräkningarna, objektets momentum, som ofta betecknas med p och är produkten av objektets massa och hastighet. Formeln för att beräkna relationen mellan massa och energi när ett objekt är i rörelse visar sig vara Pythagoras sats, men uttryckt i energi i stället för i avstånd (Figur 28) (Overduin & Conn Henry, 2020),

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2.$$



Figur 28: Pythagoras sats uttryckt i former av energi

När objektets momentum är noll återgår formeln till sitt mer kända specialfall.

Det som tordes vara matematikens mest kända formel, Pythagoras sats, har alltså även en nära relation till fysikens mest kända formel, $E = mc^2$.

4 Avslutning

Att fylla en hel uppsats med Pythagoras sats kändes till en början som en svår uppgift, men det visade sig snart att Pythagoras sats sträcker sig långt över gränserna för den klassiska geometrin. Det har snarare varit svårt att välja väg i de många möjligheter som uppdragat sig under resans gång. Det tillsynes smala uppsatsämnet har gett mig möjlighet att utforska flera delar av matematik och fysik, tillsammans med matematikens historia och tankar kring bra bevisföring.

Trots detta skrapar uppsatsen endast på ytan av vad som finns att skriva om Pythagoras sats och det finns fler områden att utforska i framtiden. Det hade till exempel varit intressant att närmare undersöka dess påverkan på linjär algebra eller de irrationella talen.

Denna komplexa betydelse av Pythagoras sats gör att det inte längre känns märkligt att så många kommer ihåg den från sin skoltid, den är helt enkelt värd att minnas.

5 Referenser

Bray, Hubert. *From Pythagoras to Einstein: The Geometry of Space and Time*. Public Lecture, University of Waterloo, 2015. Hämtad: 7 januari 2022. <https://www.youtube.com/watch?v=bkJc373qjsk>.

Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (1999, January 11). Lorentz transformations. Encyclopedia Britannica. Hämtad: 18 januari 2022. <https://www.britannica.com/science/Lorentz-transformations>

Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2016, November 2). spiral. Encyclopedia Britannica. Hämtad: 18 januari 2022. <https://www.britannica.com/science/spiral-mathematics>

Clayton Rawlins, John. (2000). *Basic AC Circuits* (2 uppl.). Sams Publishing.

Davis, Philip J. (1993). *Spirals, from Theodorus to chaos*. A K Peters.

Hafele, J.C. & Keating, Richard, E. (1972) Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains. *Science*. 177(4044).

Hewitt, Paul G. (2016). *Focus on Physics: How $E = mc^2$ Helps Us Understand Nuclear Fission and Fusion*. National Science Teachers Association. Hämtad: 14 januari 2022. <https://www.nsta.org/blog/focus-physics-how-e-mc2-helps-us-understand-nuclear-fission-and-fusion>

Kociemba, Herbert. (2018). *The Spiral of Theodorus*. Hämtad: 14 oktober 2021. <http://kociemba.org/themen/spirale/theodorus.html>

Loomis, Elisha Scott. (1968). *The Pythagorean proposition*. (2 uppl.). National Council of Teachers of Mathematics.

Lowe, Katherine. (2018). *Euclid's Proof of the Pythagorean Theorem*. Central College. Hämtad: 3 oktober 2021. <https://central.edu/writing-anthology/2019/01/31/159/>

Lvovich, Vadim F. (2012). *Impedance spectroscopy, applications to electrochemical and dielectric phenomena*. John Wiley & Sons, Inc.

Maor, Eli. (2007). *The Pythagorean Theorem, a 4000-year history*. Princeton University Press.

Overduin, James & Conn Henry, Richard. (2020). *Physics and the Pythagorean Theorem*. arXiv: History and Philosophy of Physics.

Persson, Arne & Böiers, Lars-Christer. (2010). *Analys i en variabel* (2:8 uppl.). Studentlitteratur.

Raman-Sundström, Manya & Öhman, Lars-Daniel. (2016). Mathematical Fit: A Case Study. *Philosophia mathematica*. 26(2), 184 - 210.

Sparks, John. C. (2008). *The Pythagorean Theorem, Crown Jewel of Mathematics*. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Stein, Vicky. (2021a) *Einstein's Theory of Special Relativity*. Space. Hämtad 14 januari 2022.

<https://www.space.com/36273-theory-special-relativity.html>

Stein, Vicky. (2021b) *What is the speed of light?* Space. Hämtad 14 januari 2022.

<https://www.space.com/15830-light-speed.html>

Vaderlind, Paul. (2005). *Klassisk och modern nöjesmatematik*. Svenska Förlaget liv och ledarskap.