SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Bevis: dialog och dialektik

av

Dilan Dalaba

2022 - No K5

Bevis: dialog och dialektik

Dilan Dalaba

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2022

Bevis: dialog och dialektik

Dilan Dalaba

Självständigt arbete i matematik, 15 högskolepoäng. Grundnivå.
Matematiska institutionen, Stockholms universitet. Höstterminen 2021.

Abstrakt: I det som kan kallas för det dominerande perspektivet inom matematikens filosofi ses bevis som vägen till säker sanning. Här undersöker vi ett alternativt perspektiv med utgångspunkt i Imre Lakatos bok *Bevis och motbevis* som istället lyfter fram bevis historiska roll – som informella förbättrare av hypoteser och verktyg i skapandet av kunskap. Det matematiska innehållet som diskuteras är Eulers polyedersats *H-K+S=2,* vilket vi gör först i redogörelsen av Lakatos syn och sedan i mer nutida beskrivningar av den topologiska invarianten Euler-karakteristik och homeomorfier.

bevis • matematikens filosofi • Eulers polyederformel

Innehåll

Förord

Jag lärde mig tidigt inpå mina universitetsstudier att jag inte är en specialist och att jag aldrig kommer att bli det; klara avgränsningar är inte min grej. Därför blir det svårt att skriva en uppsats som håller sig inför ramarna av *ett* ämne, vilket i det här fallet är matematik, särskilt eftersom jag ”i likhet med de flesta matematiker, [inte kan] räkna” (Lakatos, 1976/1990, s.80). Men jag vill påstå att matematiken i mångt och mycket inte blir sig själv av sig självt, utan av att kontrasteras och samspela med andra vetenskaper – den blir sig själv endast i relation till det den inte är. Denna text är således inte en matematisk text som sådan. Istället är den ett resultat av den naturliga korsningen mellan matematik, filosofi och didaktik. Jag hoppas att läsaren finner intresse i detta.

På samma sätt är det svårt att veta exakt vart gränsen går för dem tack som ofta delas ut i texter som denna. Att jag skulle skriva denna text (och att jag skulle skriva *klart* den!!) hade aldrig varit möjligt utan ett stort antal personer. Ska jag tacka mina föräldrar för min födsel? Ska jag tacka alla mina före detta och nuvarande lärare? Ska jag tacka alla dem främlingar som på något sätt lett mig i denna riktning utan att varken dem eller jag är medvetna om det? Min poäng är att, trots att detta var ett *självständigt* arbete, hade jag aldrig kunnat genomföra det helt på egen hand, varför jag känner ett behov av att uttrycka tacksamhet. Låt mig då försöka göra detta; tack till alla dem som bringat mig kunskap, tack till alla dem som varit generösa med sin tid och sitt tålamod, tack till alla dem som hejat på mig genom detta arbete, varav lejonparten av er aldrig kommer läsa den här texten, och ett särskilt stort tack till min handledare Rikard Bögvad!

1. Introduktion

2+2=5

I sin välkända roman *Nineteen Eighty-Four* använder författaren George Orwell (1949/2008) det matematiska påståendet *2+2=5*, eller mer exakt att två och två blir fem, som ett av Partiets många propagandasloganer. Poängen är att visa hur vissa politiska auktoriteter förvränger sanningar som annars ses som självklar – i detta fall åsyftas såklart *2+2=4*. För Orwell är absurdism nyckelordet. Dessutom är en annan poäng att osanningar kan framstå som sanna om tillräckligt många tror på dem. Än idag, i en tid ofta karakteriserad som en era av post-sanning och ”fake news” (Farkas & Schou, 2020), är *2+2=5* relevant och används på samma förlöjligande och absurdistiska sätt som innan.

Påståendet *2+2=5* och dem sätt på vilka det används synliggör två, möjligtvis motsägelsefulla, aspekter av den samhälleliga diskursen kring matematik och kanske också av matematiken själv. Vi ser för det första hur matematiken antas ha egenskapen av att vara absolut, det vill säga med nödvändighet sann, och för det andra, hur matematiken formas av och under sociala omständigheter. Temat av den senare aspekten uppmärksammas löpande genom textens gång och blir på sätt och vis dess kärna. Den föregående aspekten leder till frågan om *vad* som gör matematiken sann, till vilken vi nu övergår.

Vari ligger matematikens sanningsvärde?

Det jag menar när jag ställer denna fråga är vad får matematiker att ta vissa matematiska påståenden (läs: satser) som sanna och andra som falska. Enligt min egen förståelse och mina egna erfarenheter tycks den dominerande idén vara att (logiskt giltiga) bevis eller avsaknaden av dessa avgör huruvida vi kan påstå att satser är sanna eller inte – idén att utan bevis ”kommer allt att kollapsa”. Vi kallar detta för bevisens verifieringsfunktion (Hemmi & Löfwall, 2010).

Om bevis nu har denna centrala uppgift – att försäkra matematiken som kunskap – blir de passande undersökningsobjekt i frågor om just sanning. Som vi dock kommer att se finns det oenigheter om vad exakt som är bevisens huvudsakliga funktion samt vad som är bevisens roll i upprättandet av matematik.

Bevisens olika funktioner

Verifieringsfunktionen är bara en av många. Teoretiker diskuterar bland annat funktionerna att övertyga eller förklara (Hemmi & Löfwall, 2010; Hersh, 2014), att kommunicera information och att utgöra en intellektuell utmaning (Hemmi & Löfwall, 2010), att generera kunskap och förståelse (Rav, 1999) samt att vara estetiskt vackra (Hemmi & Löfwall, 2010; Rav, 1999); matematiker liknas i det senare till konstnärer. Hemmi och Löfwall (2010) skriver också om funktionen att ”transfer” som av Hemmi (2006, s. 223) beskrivs på följande sätt: “The function of transfer refers to two basically different things. Firstly, working with proofs can be useful in other contexts than in mathematics. Secondly, some proofs can provide methods or techniques in other mathematical contexts”. Dessa olika funktioner existerar inte separat från varandra, utan är sammankopplade och delvis överlappade (Hemmi & Löfwall, 2010).

Bevis kan alltså ses som, bland annat, länkar mellan matematikens olika delar och som bärare av matematisk kunskap, som än talar för deras centralitet. De blir inte bara ett sätt att argumentera för sanningen av påståenden, utan självaste idén att *göra matematik*: ”[...] proof is the soul and the backbone of mathematics. It is the very idea of doing mathematics” (Hemmi & Löfwall, 2010, s. 205).

I denna text kommer vi undersöka relationen mellan ens perspektiv på bevis i sig och ens perspektiv på matematiken i sin helhet, det vill säga ens filosofi om matematik. Detta gör vi främst med utgångspunkt i Imre Lakatos verk *Bevis och motbevis* [*Proofs and refutations*]. Det stoff som behandlas är Eulers polyederformel, vilket vi gör först med Lakatos metaperspektiv och därefter rent ”matematiskt”. Till att börja med bekantar vi oss med Lakatos.

Vem var Imre Lakatos?

Imre Lakatos (1922-1974) var en ungersk matematiker, filosof och vetenskapsteoretiker. År 1944 tog han examen i matematik, filosofi och fysik vid universitetet i Debrecen (Hersh, 1978) som också var den plats där hans politiska aktivitet i kommunistiska organisationer började (Long, 2002).

Som en följd av Ungernrevolten 1956 flydde han landet, vilket ledde honom till Storbritannien; till Cambridge där han doktorerade i filosofi och till London School of Economics där han kom i kontakt med filosofen och vetenskapsteoretikern Karl Popper vars filosofi kom att påverka Lakatos egna. Utöver Popper fann han inspiration hos Marx och Hegel, samt den ungersk-amerikanske matematikern George Pólya, vars populära bok *How to Solve it* han översatte till ungerska (Hersh, 1978).

Hans doktorsavhandling vid Cambridge, *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*, utgör basen för boken *Bevis och motbevis,* utgiven först efter hans död. Det är just denna bok som i sin tur utgör basen för denna uppsats.

2. Bevis och motbevis

Polygoner och polyedrar

Polygoner[1] har egenskapen av att antalet hörn H i en figur är lika många som antalet kanter K. Denna egenskap möjliggör klassificeringen av polygoner efter antalet hörn eller kanter; till exempelvis som trianglar eller fyrhörningar. Kan vi klassificera polyedrar på ett liknande sätt? Med andra ord, finns det ett motsvarande förhållande mellan antalet hörn, antalet kanter och antalet sidor S hos polyedrar? Dessa är frågorna som ställs i ett imaginärt klassrum.

Upptäckten av Eulers polyederformel $H\text{-}K+S=2$ [2] (för Eulers originalverk se Euler, 1758) behandlas i (Pólya, 1954) där en genom gissning och prövning kommer fram till både formeln och att den tycks gälla för regelbundna polyedrar. I Lakatos imaginära klassrum påstår en elev att formeln gäller för *alla* polyedrar och de andra försöker falsifiera hypotesen utan framgång. Att klassens resultat stödjer hypotesen indikerar att den är bevisbar. Det är i denna bevisningsprocess som kapitel 1 tar avstamp och Lakatos fortsätter Pólyas arbete.

Dialogen som förs mellan läraren och elever, och mellan eleverna själva, speglar *den historiska dialogen* mellan matematiker kring formeln och dess potentiella bevis i och med att eleverna tar rollen som representanter för dessa matematiker genom att argumentera för matematikernas olika ställningstaganden. En kan därför påstå att de slutsatser som kan dras

[1] Eftersom vi följer Lakatos arbetsgång kommer en diskussion om definitioner (av både polygoner och polyedrar) längre fram i texten.
[2] På engelska $V\text{-}E+F=2$, där V denoterar antalet hörn (vertices), E står för antalet kanter (edges) och F antalet sidor (faces).
Notera även att Euler aldrig skriver att $H\text{-}K+S=2$, utan istället att $H+S=K+2$ samt att han inkluderar vissa krav på polyedrar (såsom att de är omslutna av plan [se Sandifer, 2004]) som Lakatos utesluter.
Vidare kan Descartes ses som den egentliga och ursprungliga upptäckaren av formeln. Lakatos (1976/1990, s. 166) menar dock att Descartes kom nära, men aldrig till exakt samma slutsats som Euler.

från Lakatos verk har mer vikt än om det hela enbart var hittepå eftersom utgångspunkten för hans analys är faktisk matematisk praktik.

Ett första bevis

Den matematiker som vi stöter på efter Euler är Cauchy med det vi kan kalla för hans trianguleringsbevis. Låt oss börja med att förtydliga den sats vi önskar bevisa för att sedan återge beviset så som det presenteras av Lakatos.

Sats 1. *För varje polyeder gäller att differensen mellan antalet hörn och summan av antalet kanter och sidor är två.*

Bevis (Cauchys trianguleringsbevis). Tag en godtycklig polyeder. Skala ned denna från tre dimensioner till två genom att först ta bort en av dess sidor och sedan ”platta till” eller ”dra ut” den resulterande figuren så att antalet hörn och kanter förblir detsamma men där antalet sidor har minskat med 1 (se Fig. 1). Detta ger oss ett nätverk av hörn, kanter och sidor där formeln $H\text{-}K{+}S{=}1$ gäller **om och endast om** $H\text{-}K{+}S{=}2$ gällde för polyedern. Dra därefter diagonalerna genom de sidor som inte redan är triangulära (se Fig. 2a), vilket leder till att S och K ökar med 1 vardera för varje dragen diagonal samtidigt som $H\text{-}K{+}S$ går oförändrad. Avlägsna nu trianglarna en och en. Detta komma påverka nätverket på två sätt: antingen tar vi bort en kant, vilket minskar antalet sidor med 1 och antalet kanter med 1 (se Fig. 2b) eller så tar vi bort två kanter och ett hörn, varefter antalet sidor minskar med 1, antalet hörn med 1 och antalet kanter med 2 (se Fig. 2c). Hur vi än gör så gäller $H\text{-}K{+}S{=}1$ efter avlägsnandet av en triangel om och endast om detta gällde innan dess. Vi slutar avlägsna trianglar då en endaste återstår, för vilken det gäller att $H\text{-}K{+}S{=}1$. ■

Accepterar vi beviset går hypotesen till att faktiskt bli en sats – satsen

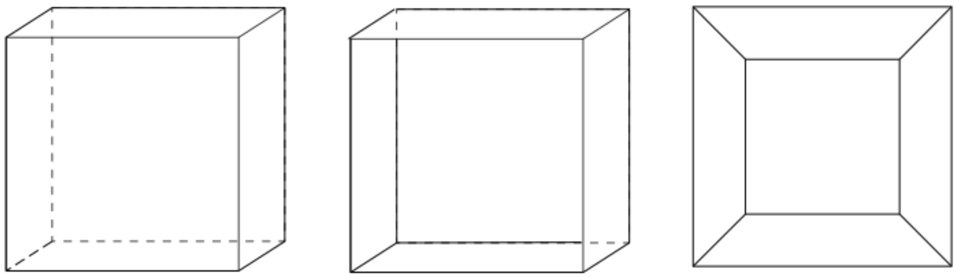
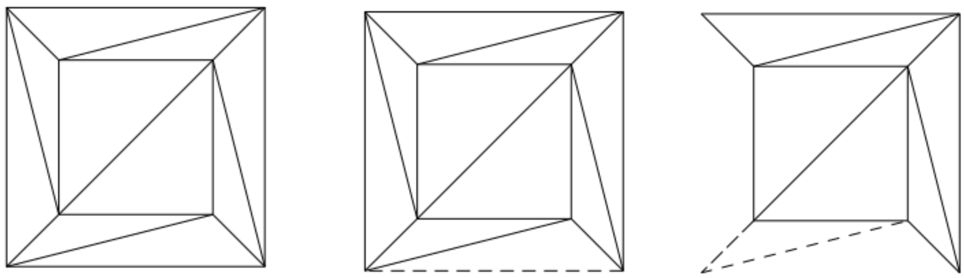


Fig. 1



a *b* *c*

Fig. 2

”blir” sann – men vi kan lika väl göra det som majoriteten av eleverna gör – ifrågasätta; vad är det egentligen som tillåter oss, säg, ”plana ut” polyedern och hur kan vi vara säkra på att detta är möjligt för *varje* polyeder? Resultatet blir att klassen har fler hypoteser än vad den började med – delhypoteser födda ur den ursprungliga hypotesens upplösning.

Lakatos noterar även att gissningen, det vill säga hypotesen eller sats 1, möjliggjorde beviset. Något trivialt poängterar han att en redan innan genomförandet måsta veta exakt vad en vill visa eller åstadkomma med hjälp av det. Kanske är det så att bevisning blir en meningsfull aktivitet först efter det att en har ställt upp ett förväntat mål.

Upplösning: Satser, lemman och (del)hypoteser

Det som nu hänt är att bevisets, argumentets, implicita premisser har klargjorts. Kvar blir en mängd hypoteser, snarare än en enskild. Huvudhypotesen, sats 1, har vi redan utskriven. Låt oss utöver denna skriva ut delhypoteserna, eller lemmana.

Lemma 1. *Varje polyeder kan deformeras till ett plant närverk samtidigt som antalet hörn och kanter förblir detsamma och antalet sidor minskar med 1.*

Lemma 2. *Trianguleringen av ett nätverk, det vill säga dragningen av diagonaler, ger ännu en sida för varje ny kant.*

Lemma 3. *Vid avlägsnandet av trianglar finns enbart två alternativ: att ta bort en kant eller att ta bort två kanter och ett hörn.*

Lemma 4. *Efter avlägsnandet finns en endaste triangel kvar.*

Uppmärksamma att eftersom delhypoteserna agerar som lemman, hjälpsatser, till sats 1 måste dessa visas stämma för att vi ska kunna dra slutsatsen att sats 1 själv är sann. Uppmärksamma också förhållandet mellan hypoteser och satser som framställs – för Lakatos är dessa synonyma. I och med detta blir bevis inte (längre) en garanti för sanning, det vill säga att ett logiskt giltigt bevis såsom detta inte nödvändigtvis medför att det påstående det avser att bevisa är sant. Vi diskuterar detta närmre alldeles snart.

Eftersom satsens sanningsvärde är beroende på sanningsvärdena hos lemmana kan vi bevisa dess falskhet genom att föra motargument, oftast i form av partikulära motexempel, mot dem. Lakatos delar in motexempel i två kategorier: lokala och globala motexempel.

Lokala och globala motexempel

Motexempel kan riktas antingen mot något av lemmana eller direkt mot satsen, och det är just detta faktum som ger oss skillnaden på lokala och globala motexempel, där lokala motexempel gör det förstnämnda och globala det senare. Som ett exempel tar Lakatos ett motexempel mot lemma 3, som handlar om alternativen vid triangelborttagnings-proceduren.

Det visar sig att lemma 3 är sant enbart då vi tar bort nätverkets yttre trianglar, det vill säga de trianglar som inte omringas av andra, men det finns inget som hindrar oss från att ta bort trianglar i nätverkets inre. Avlägsnar vi en inre triangel tar vi inte bort vare sig kanter eller hörn (se Fig. 3), vilket innebär att lemma 3 är falskt.

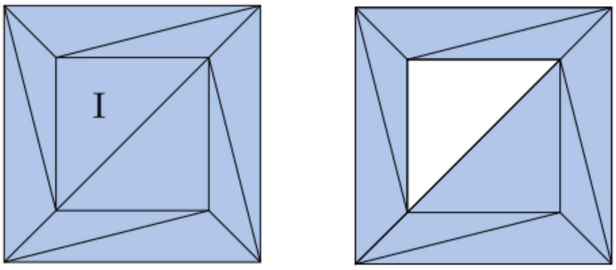


Fig. 3: Tar vi bort triangeln I, så tar vi endast bort en sida eftersom den har gemensamma kanter och hörn med dess omringande trianglar.

Lokala motexempel, givet att vi accepterar dem, medför inte nödvändigtvis huvudhypotesens osanning men ger oss möjlighet att utforma beviset på ett annorlunda sätt. Med andra ord, kan en säga att lokala motexempel riktar sig mot *beviset* för huvudsatsen och globala motexempel mot huvudhypotesen själv. En revidering av ett bevis innebär därför att en strukturerar det med ett annat urval av lemman. I fallet med lemma 3 kan vi till exempelvis ersätta det med lemma 3.1.

Lemma 3.1. *Vid avlägsnandet av* ***ett nätverks yttre trianglar*** *finns enbart två alternativ: att ta bort en kant eller att ta bort två kanter och ett hörn.*

Vi kommer finna att även detta är otillräckligt, då vi fortfarande kan ta bort trianglar på ett sätt som inte överensstämmer med de två givna alternativen. För att rädda det principiella i metoden som utgör bevisets grund, med vilket menas deformeringen av polyedern, trianguleringen av dess nätverk och avlägsnandet av trianglar, revideras lemmat återigen; nu till ett till lemma 3.2..

Lemma 3.2. *Vi kan avlägsna trianglarna i en* ***specifik*** *ordning, sådan att H-K+S förblir oförändrad.*

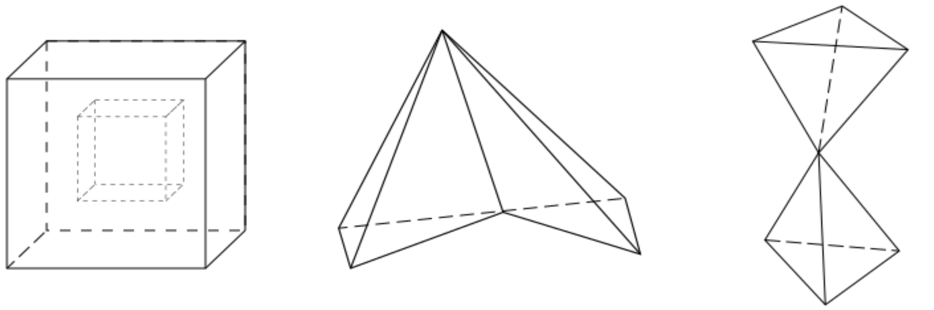
Frågorna en bör ställa sig är hur en avgör huruvida en viss ordning kan anses vara den rätta och om en verkligen kan påstå att det för *varje* polyeders nätverk finns en rätt ordning. Vi gör nu som klassen och lämnar dess frågor bakom oss för och övergår istället till globala motexempel.

Global kritik

Det motexempel klassen stöter på nu är både globalt och lokalt (det går emot lemma 1) men vi fokuserar här på dess globala egenskap. Betrakta den "ihåliga kuben" (Fig. 4a) för vilken *H-K+S=4*. I och med att denna tjänar som ett globalt motexempel räcker det inte längre med att enbart revidera beviset genom att byta ut dem lemman vi baserar det på. Vi har trots detta en mängd tillvägagångssätt till godo:

i. Att förkasta hypotesen.
ii. Att utesluta motexempel, eller monster.
iii. Att förbättra hypotesen med andra uteslutningsmetoder.
iv. Att anpassa motexempel.
v. Att förbättra hypotesen genom att inkorporera lemman i den.

Att förkasta hypotesen menar Lakatos är att ge upp och att det är ett värdigt alternativ enbart om en ser bevis som vägen till säker sanning. Visserligen har beviset inte visat det vi ville, men det betyder inte för den delen att det misslyckats. Om vi istället betraktar bevis som en typ av tankeexperiment vars uppgift är att bryta ner hypoteser till delhypoteser, eller satser till lemman, är Cauchys trianguleringsbevis framgångsrikt. Därför behöver satsen och beviset inte vara ointressanta för oss, utan kan ha ett värde ändå, om annat än det en förväntade sig. Bevis, enligt Lakatos, har alltså flera, eller kanske mer precist andra, funktioner än verifieringsfunktionen, vilken vi diskuterade i del 1.



a *b* *c*

Fig. 4: Potentiella motexempel

a. *ihålig kub.* ***b.*** *tetraederpar 1.* ***c.*** *tetraederpar 2.*

Att utesluta monster

Det andra alternativet – att utesluta så kallade monster – leder oss till en diskussion om definitioner, något vi ännu inte nämnt trots deras väsentlighet. Argumentet är här att vissa motexempel, såsom den ihåliga kuben, inte uppfyller definitionen för vad en polyeder är, varför vi kan bortse från dem och fortfarande ta satsen som sann. Motargumentet är att den ihåliga kuben *är* en polyeder och att kritiken därför är illegitim. Dessa argument utgår från två olika definitioner; jämför definition 1 och definition 2 härnedan.

Definition 1. En polyeder är en yta bestående av polygoner. Denna yta har sidor, kanter och hörn, och kan deformeras till ett plant nätverk.

Definition 2. En polyeder är en tredimensionell figur där sidorna i figuren består av polygoner.

Enligt den första definitionen är den ihåliga kuben inte en polyeder då den istället ses som två skilda polyedrar varav den ena ”finns i” den andra, medan den enligt den andra definitionen ses som en endaste polyeder. Dock, visar det sig, är det inte tillräckligt att anta definition 1 för att försvara hypotesen. Ta två tetraedrar och förena dem som i Fig. 4b. eller Fig. 4c. Dessa tetraederpar uppfyller definition 1 men hos båda gäller att

H-K+S=3. Likt omformuleringsprocessen av lemman påbörjas en omformuleringsprocess av definitioner. Som ett svar mot tetraederparen får vi definition 3.

> **Definition 3.** En polyeder är ett system av polygoner som organiserats på ett sätt så att det vid varje kant möts exakt två polygoner samt att det är möjligt att från insidan av varenda polygon komma till insidan av alla andra polygoner längs en väg som aldrig korsar en kant i ett hörn.

Vidare möter definition 3 motstånd i form av en liten stjärndodekaeder, även kallad för Keplers sjöborre (se Fig. 5, s. 13). I sjöborren kan vi beräkna att *H-K+S=-6*, trots att den uppfyller den senaste definitionen. Monsteruteslutaren, den elev som driver på processen genom att hitta nya definitioner då andra hittar motexempel, argumenterar emot även denna. Denna gång vill hen definiera begreppet *polygon* och hävdar att sjöborren inte utgör ett system av polygoner.

> **Definition 4.** En polygon är ett system av kanter som arrangerats på ett sådant sätt att 1) det i varje hörn möts exakt två kanter och 2) kanterna saknar gemensamma punkter utöver hörnen.

> **Definition 4'.** En polygon är ett system av kanter som arrangerats på ett sådant sätt att det i varje hörn möts exakt två kanter.

I definition 4' utesluts den andra punkten ur definition 4 då den ansågs överflödig. Med den senare definition är den lilla stjärndodekaedern dock inte längre utesluten då den består av stjärnpolygoner (pentagram) vilka saknar hörn där fler än två kanter möts. Problemet är istället att punkt 2 i definition 4 inte anses handla om polygoners essens (mer om detta alldeles snart). Givet att vi antar definition 4 finner vi ytterligare ett monster – en tavelram, för vilken *H-K+S=0*. Monsteruteslutaren svarar med definition 5, först framförd av franska matematikern Ernest de Jonquières år 1890.

> **Definition 5.** En *genuin* polyeder är en polyeder där det genom varje godtycklig punkt i rummet finns åtminstone ett plan som skär

polyedern på ett sådant sätt att tvärsnittet genom den består av en och endast en polygon.

Tavelramen utesluts som förväntat, då en kan välja en punkt i det område som avgränsas av dess inre sidor – monsteruteslutaren kallar detta för ”tunneln” – där ingen av de resulterande tvärsnitten består av en ensam polygon. Och nu skiljer vi alltså inte längre endast mellan poly edrar och andra icke-polyedriska tredimensionella kroppar, och polygoner och icke-polygonala figurer, utan därmed mellan de polyedrar som anses genuina och de som anses icke-genuina. Hur långt är vissa villiga att gå för att försvara en falsk hypotes?

Poängen med diskussionen om definitioner är att vi måste uppnå en gemensam förståelse av olika begrepps betydelser för att kunna ge meningsfull och objektiv kritik av hypoteser, definitioner och allt däremellan. Att förlita sig på ad hoc rationalisering – att i efterhand anpassa sina definitioner till kritik – motverkar detta. Lakatos menar att detta sätt att tänka på är konsekvensen av den tidigare nämnda dogmatiska tolkningen av bevis där bevis garanterat leder till sanningar.

Dessutom finns det i konstruktionen av definitioner en ambition att fånga begrepps essens. Detta medför att det i definieringsprocessen finns aspekter av både inkludering och exkludering och en önskan efter precision. Vi ser definition P i ljuset av detta.

Definition P. *(Den perfekta definitionen)* En polyeder är ett system av polygoner där $H\text{-}K+S=2$.

Denna definition löser det egentliga problemet, att hitta en definition som utesluter alla motexempel till satsen, men känns alltför begränsad och exkluderande. Det är dålig definition eftersom den inte fångar in det vi menar när vi säger att en kropp är en polyeder och blir på så sätt kontraintuitiv. En problematik uppstår därför när vi offrar exakthet för anpassning och när vi ser bevis enbart utifrån det dogmatiska synsättet.

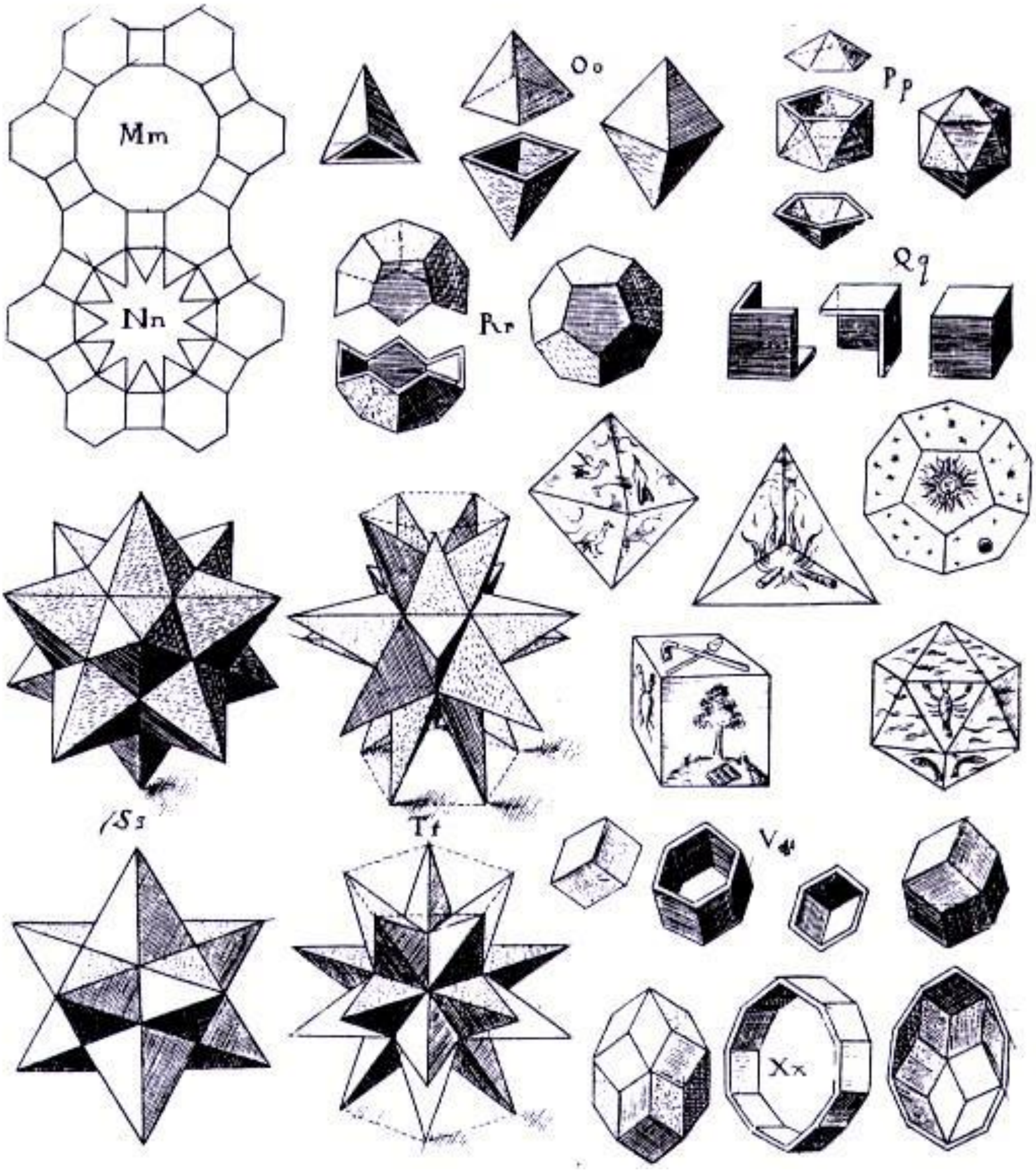


Fig. 5 : Polyedrar, bland annat "sjöborren" (Ss), ur (Kepler, 1619).

Det framstår också som att denna typ av uteslutningsmetod inte är särskilt framgångsrik och leder till något som påminner om en oändlig regress – en evig omformulering av definitioner – varför vi nu byter fokus till vårt tredje alternativ – att förbättra hypotesen med metoder som utesluter motexempel.

En alternativ uteslutningsmetod: Relativ giltighet

Utgångspunkten för denna metod är att inga, eller i alla fall väldigt få, hypoteser är generellt giltiga och att de snarare är giltiga enbart inom vissa ”giltighetsområden” – bestämda och avgränsade områden som utesluter alla undantag. Vi börjar med att kategorisera olika sorter av matematiska påståenden:

1. Påståenden som alltid är sanna och som saknar vare sig begräsningar eller undantag.
2. Påståenden som alltid är falska, ty de utgår från falska premisser.
3. Påståenden som utgår från sanna premisser, men som trots det kan komma att tillåta begränsningar eller undantag.

Ett annat sätt att karakterisera påståenden av typ 2 eller 3 är som ”hopplöst falska” respektive ”förhoppningsvis falska”. Idéen, då, är att påståenden av den senare varianten kan förbättras genom att tydligt formulera under vilka villkor dem gäller och på så sätt utesluta undantag, varefter dem befordras till den första kategorin.

I ett första försök att applicera metoden på sats 1 får vi en ny hypotes, sats 2, men eftersom denna inte utesluter alla tidigare nämnda motexempel får vi också sats 3.

Sats 2. *För alla polyedrar utan håligheter, såsom den ihåliga kuben, gäller att H-K+S=2.*

Sats 3. *För alla polyedrar utan håligheter, tunnlar (såsom tavelramen) eller ”multipelstrukturer” (såsom tetraederpar 2) gäller att H-K+S=2.*

Här finns två saker att notera: att sats 3 inte heller utesluter alla motexempel – sjöborren inkluderas fortfarande – och att ad hoc uteslutning spökar återigen. Det finns alltså ett behov av ännu en sats, en sann sådan, men avsaknaden av en ordentlig uteslutningsmetod kan aldrig försäkra oss om att vi uteslutit precis alla undantag.

Jämför sats 2 och 3 med sats 4;

Sats 4. *För alla konvexa polyedrar gäller att H-K+S=2.*

Sats 4 agerar som en motpol till tidigare satser – istället för att oroa sig över att en inte uteslutit tillräckligt många (alla) undantag, bör sats 4 få en att oroa sig över att en gått för långt. Hur många *eulerska* polyedrar, såsom den stora stjärndodekaedern (*Tt* i Fig. 5), finns nu utanför det valda giltighetsområdet? Om sats 1 var en överskattning, så är sats 4 till synes en underskattning och trots detta består problematiken som finns hos sats 2 och 3 – kan vi vara säkra på att detta inte också är en överskattning?

Vidare noterar vi att enligt detta synsätt är globala motexempel nödvändigtvis lokala motexempel till åtminstone ett av lemmana, så om vi förkastar en sats måste vi även förkasta dess bevis. Med andra ord innebär en begränsning av en hypotes och dess bevis till ett passande giltighetsområde att hypotesen uppnår ”perfektion” och ”sanning”, vilket i sin tur medför bevisets ”perfektion” och ”sanning”. Detta synliggör att lemman som vi vid en tidpunkt då vi ännu inte hittat undantag åt dem såg som uppenbart sanna återigen ses som uppenbart sanna. Det är ohållbart att utgå från existensen av garanterad sanning, ty det kan alltid vara fallet att vi har fel: ”’Troliga’ och t.o.m. ’trivialt sanna’ satser blir ofta snart vederlagda: sofistikerade, otroliga hypoteser, mognade av kritik, *kanske* träffar sanningen” (Lakatos, 1976/1990, s. 25, min kursivering).

Rationalitet givet den matematiska kontexten

Av Durand-Guerrier (2008) ges ett exempel på en liknande situation som även den utspelar sig i ett klassrum. Här förväntas eleverna först självständigt och därefter i grupp undersöka ett påståendes sanningsvärde: 'för varje tal *n,* gäller att n^2-n+11 är ett primtal'. Förr eller senare kommer de bemöta motexemplet (eller monstret) $n=11$ för vilket $n^2-n+11=121$, och detta kan ske på huvudsakligen två sätt: antingen hittar eleven det relativt omedelbart eller så hittar eleven det först efter hen genom insättning provat alla heltal $n=1,\ldots,10$. Beroende på elevens undersökningsprocess kan denna komma att reagera olika inför $n=11$. Å ena sidan, lär de elever som hittat motexemplet relativt tidigt fokusera på påståendets falskhet ("det gäller inte i alla fall, alltså är det falskt") och lär också avsluta undersökningsprocessen där och då. Å andra sidan, kan de elever som provat flera tal vara mer benägna att försöka "rädda" påståendet genom att utesluta motexemplet ("det var ju sant i alla andra fall"). Båda tillvägagångssätt kan anses rationella då en tar hänsyn till att dessa elever befinner sig i olika matematiska kontexter – påståendet så som det formulerades är *inte* sant och det finns fall där det uppenbara motexemplet är det enda, varför det kan vara opraktiskt att leta efter flera, samt att, eftersom det finns fall för vilka påståendet är sant (och dessa utgör majoriteten av dem hittills undersökta), är det inte helt orimligt att omformulera påståendet på ett sätt som utesluter tal för vilka det inte är sant.

Faktum är att om vi formaliserar de tolkningar som de olika sätten leder till, det vill säga skriver med ett formellt logiskt språk, är de logiskt ekvivalenta (alltså, $\exists x(\neg Fx) \Leftrightarrow \neg\forall x(Fx)$ eller med ord "'det existerar ett *x*, sådant att *x* inte har egenskapen F' är ekvivalent med 'det är inte fallet att för alla *x*, gäller det att *x* har egenskapen F'"). Men det Durand-Guerrier (2008) vill poängtera är att när vi formulerar tolkningarna i detta logiska språk går vi miste om den matematiska kontexten och för eleverna innebär detta en förlust av potentiell utveckling av deras matematiska förmågor. Formaliserade blir påståendena inbördes utbytbara, men detta medför att ens tillvägagångssätt potentiellt hade framstått som irrationellt och omatematiskt. Således kan en påstå att en fullständig formalisering av matematik kan försämra vår kunskap om och praktik av den. Nåväl, tillbaka till Lakatos.

Anpassning och inkorporering

Vad metoden att anpassa motexempel går ut på säger kanske sig självt. Ta till exempelvis den lilla stjärndodekaedern, vilken kan sägas bestå av stjärnpolygoner eller av trianglar. Sett som bestående av stjärnpolygoner hade vi att $H\text{-}K+S=12\text{-}30+12=\text{-}6$. När vi istället ser figuren som bestående av trianglar har vi att antalet hörn $H_\blacktriangle=32$, antalet kanter $K_\blacktriangle=90$ och antalet sidor $S_\blacktriangle=60$, för vilka $H_\blacktriangle\text{-}K_\blacktriangle+S_\blacktriangle=2$. Argumentet är att inga egentliga motexempel existerar, utan att figurers ”monsterstatus” beror på ens tolkning av dem. Men hur bestämmer vi om en tolkning är acceptabel eller inte och vilken tolkning ska vi använda oss av om det finns flera?

Den sista metoden kombinerar många idéer av de tidigare metoderna och går ut på att inkorporera lemman i satsen. När vi möter ett lokalt motexempel som dessutom är globalt förkastar vi den ursprungliga hypotesen och modifierar den till en mer begränsad form på ett som påminner om, men inte är detsamma som, monsteruteslutningsmetoderna. Ta tillexempelvis den tidigare nämnda tavelramen, som specifikt agerar lokalt motexempel åt lemma 1. Här ersätter vi sats 1 med sats 5,

Sats 5. *För varje* ***enkel*** *polyeder gäller att differensen mellan antalet hörn och summan av antalet kanter och sidor är två,*

där en enkel polyeder definieras som en polyeder som uppfyller just lemma 1.

Säg att vi hittar ett motexempel mot den nya satsen. Med detta förklaras den uppdaterade hypotesen falsk men ingen kritik framförs mot självaste metoden, varför vi återigen kan undersöka beviset för att hitta det skyldiga lemmat. Låt lemma 2 vara det skyldiga. Vi förbättrar nu sats 5 och ersätter den med sats 6.

Sats 6. *För varje enkel polyeder, med* ***enkelt sammanhängande*** *sidor, gäller att differensen mellan antalet hörn och summan av antalet kanter och sidor är två.*

Att en sida är enkelt sammanhängande innebär att den delas i två delar då en drar en diagonal kant, och vi kan enkelt se hur detta integrerar lemma 2 in i hypotesen. Återigen förs inget ett argument mot metoden, vilket innebär att vi kan fortsätta applicera den då vi finner nya motexempel. Vi applicerar dock inte metoden på lemman som bevisas från det som ses som triviala principer eller lemman som bevisas med hjälp av denna typ av lemman – dessa behövs inte göras till villkor.

Denna metod skiljer sig från de andra först och främst i det att den bygger på precis bevisanalys. Därtill tenderar tidigare metoder att begränsa områdena för både huvudhypotesen och det falska lemmat, medan denna sista metod endast begränsar huvudhypotesens område till lemmats. På så sätt ändras den ursprungliga hypotesen och lemmana förblir desamma. Vi ser följande citat i ljuset av detta:

> De [matematiker] vill förbättra sina hypoteser utan vederläggningar; aldrig genom att minska falskhet utan genom det monotona ökandet av sanning; sålunda renar de kunskapens tillväxt från motexemplens fasor. (Lakatos, 1976/1990, s. 48)

Metoden synliggör och är exempel på det essentiella förhållandet mellan det Lakatos kallar för upptäckandets logik och berättigandets logik, något som de andra metoderna varken gör eller är. Vi ”förbättrar genom att bevisa”, men gör det bara i fall där bevisning leder till upptäckten av oförväntade aspekter av den ursprungliga hypotesen.

Metoden med bevis och motbevis

Metoden med att inkorporera lemman är metoden med bevis och motbevis. Dess mest fundamentala grundpelare är det icke-linjära, snarare dialektiska, samspelet mellan bevis och motbevis som går att åskåda i matematikens utveckling och som därför skiljer sig från den vanliga bilden av matematikens utveckling som en linjär och gradvis ökning av sanning genom fullt säkra slutledningar.

Med bevis som tes och motbevis som antites innebär det dialektiska interagerande dem emellan en utveckling, en förbättring, av hypotes och tes, men inte nödvändigtvis (eller alls) fulländade eller perfekta sådana. Dock betyder detta inte att en bevis-idé inte kan vara ”rigorös” och dess motsvarande sats ”sann”, vilket är fallet om och endast om det inte existerar motexempel som är globala men inte lokala (andra typer av motexempel är oproblematiska då de direkt hanterats med metoden med bevis och motbevis). I vilket fall går processen som ledde oss dit inte att urskilja i hypotes eller tes; Poincaré (1908 citerad i Lakatos, 1976/1990, s. 181) påstår något liknande:

> Ett bevis som inte är strängt är ingenting. Jag tror ingen ifrågasätter sanningen i detta. Men om det tas alltför bokstavligt, skulle vi ledas till slutsatsen att det före 1820 till exempel inte fanns någon matematik: detta skulle vara uppenbart överdrivet...

På många sätt är motbevis, och har varit, den kraft som drivit sökandet efter matematikens grundvalar. De leder oss till att ifrågasätta sådant vi annars tagit för givet och bringar ljus på antaganden som annars varit dolda för oss. De leder oss till att förbättra och till att precisera. Och vid den punkt där det inte längre existerar motbevis har vi uppnått sanning. Saken är den att vi aldrig riktigt kan veta när den punkten är nådd.

Låt oss avslutningsvis sammanfatta den metodologi eller process för matematisk upptäckt och utveckling som vi redogjort för hittills. Vi börjar med en hypotes, en gissning av något slag, i vårt fall sats 1. Därefter konstruerar vi ett bevis som löser upp hypotesen i delhypoteser, eller lemman. Vi hittar globala motexempel och analyserar därför beviset för att hitta ett lemma mot vilket detta motexempel också är lokalt motexempel. Om lemmat är implicit eller ”missförstått”, så gör vi det explicit genom att tydligt formulera det. Sedan inkorporerar vi lemmat in i den ursprungliga hypotesen som i och med detta förbättras. Enligt Lakatos är just denna förbättring bevisens huvudsakliga syfte, och inte att garantera sanning.

I denna redogörelse har vi inte bara diskuterat metoden med bevis och motbevis och vägen till den, utan vi har också åskådliggjort hur uppfattningen av Eulers polyederformel och begrepp relaterade till den förändrats över tid. Det kan därför vara av intresse att ta en närmre titt på hur denna ser ut nuförtiden.

3. En närmre titt på Eulers polyederformel

När Eulers polyedersformel behandlats historiskt har sättet att tänka om den gått från ett geometriskt till ett topologiskt, och det är så vi förstår den idag (Richeson, 2012). Sats T, som är ett topologiskt påstående, är en mer ”modern” variant av de satser som vi hittills formulerat.

Sats T. *Alla topologiskt sfäriska polyedrar har Eulerkarakteristiken 2.*

Låt oss förklara vad denna innebär.

Homeomorfier och egenskapen av att vara topologiskt sfärisk

Vi börjar med att förklara vad som menas med att en polyeder är topologiskt sfärisk, men för att göra det behöver vi först bekanta oss med begreppen topologiskt rum och homeomorfi[3].

Definition. En topologi på en mängd X är en samling $\mathcal{T}$ av delmängder till X som uppfyller följande kriterier:

1) X och $\emptyset$ är i $\mathcal{T}$.
2) Unionen av vilka delsamlingar som helst till $\mathcal{T}$ är i $\mathcal{T}$.
3) Snittet av vilka ändliga delsamlingar som helst till $\mathcal{T}$ är i $\mathcal{T}$.

Vi kallar ett ordnat par $(X, \mathcal{T})$ för ett topologiskt rum, men om det är underförstått att $\mathcal{T}$ är topologin på X säger vi enkelt att X är ett topologiskt rum. Vi säger också att en delmängd U till X är öppen om U är i $\mathcal{T}$.

En sfär, en torus och planet ($\mathbb{R}^2$) är några exempel på topologiska rum, givet att de är parade med topologier på dem. Inom topologi kan vi deformera dessa genom att böja, vrida eller sträcka ut dem utan att för den delen förändra deras topologi. Ett sätt att deformera ett topologiskt

[3] Följande definitioner är från (Munkres, 2013).

rum på är med hjälp av en homeomorfi, som vi definierar härnäst, men för att göra det måste vi först definiera vad en kontinuerlig funktion är.

Definition. Låt X och Y vara två topologiska rum. En funktion $f{:}X \to Y$ sägs vara kontinuerlig om det till varje öppen delmängd V till Y gäller att mängden $f^{-1}(V)$ är en öppen delmängd till X.

Definition. Låt X och Y vara två topologiska rum och låt funktionen $f{:}X \to Y$ vara en bijektion. Om både f och dess invers är kontinuerliga, så säger vi att f är homeomorfi och att X och Y är homeomorfa.

Att säga att en polyeder är topologiskt sfärisk är alltså detsamma som att säga att det existerar en homeomorfi mellan den och en sfär. Homeomorfier bevarar vissa egenskaper. Vi kallar dessa för topologiska egenskaper eller topologiska invarianter (Lee, 2010). En sådan invariant är Eulerkarakteristik[4].

Topologiska invarianter: Eulerkarakteristik

I språket av polyedrar låt H fortsatt denotera antalet hörn, K antalet kanter och S antalet sidor. Eulerkarakteristiken av dessa ges av den bekanta formeln $H\text{-}K+S=\chi$. När vi säger att en viss polyeder i $\mathbb{R}^3$ med en topologi som är delmängd till standardtopologin till $\mathbb{R}^3$ har Eulerkarakteristiken 2 säger vi helt enkelt att $\chi=2$. Dock kan vi bestämma Eulerkarakteristiken av icke-polyedriska ytor i $\mathbb{R}^3$ där denna terminologi inte är applicerbar, såsom sfärer. För en definition som kan användas på dessa ytor se (Lee, 2010); att använda den här är relativt syftet överkurs.

För att visa sats T behöver vi enbart visa att en sfär har Eulerkarakteristiken 2; att detta också gäller för topologiskt sfäriska polyedrar följer därefter av det faktum att Eulerkarakteristik är en topologisk invariant. Ett sätt att göra detta på är med triangulering (se Fig. 6). Ett annat är att utnyttja att vi vet att, säg, en kub har Eulerkarakteristiken 2 och sedan visa att det existerar en homeomorfi

[4] Att Eulerkarakteristik är en topologisk invariant bevisas i (Lee, 2010), dock används begrepp som inte diskuteras här.

dem emellan. Satsen följer då per definition. Här visar vi till exempelvis att varje polyeder som är randen till en konvex kropp är homeomorf med en sfär.

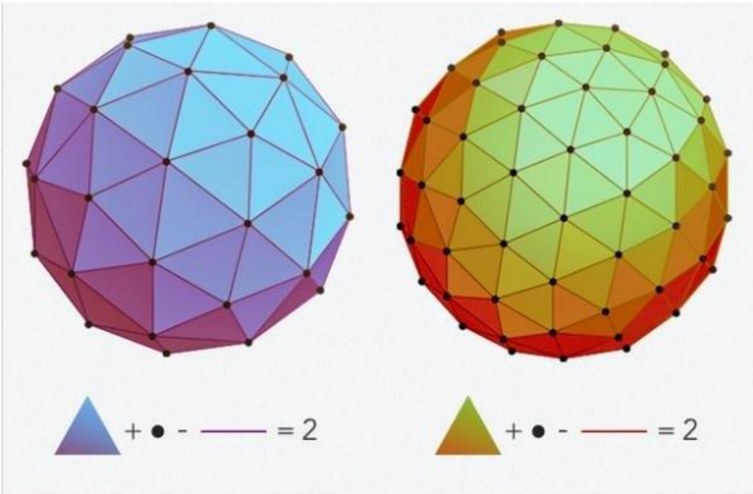


Fig. 6: Triangulering av en sfär. Bild tagen från (Trebin, 2015).

Definition.[5] En mängd X sägs vara konvex om intervallet $[a,b]$ mellan två godtyckliga punkter a och b i X ligger i X.

Sats K. *Alla polyedrar som utgör randen till en konvex kropp är homeomorfa med en sfär.*

Bevis. Låt en godtycklig polyeder P vara inskriven i en sfär S. Varje stråle ℓ från sfärens centrum skär P i en och endast en punkt x och S i en och endast en punkt y; detta är inte nödvändigtvis fallet med en icke-konvex kropp där vi enkelt kan föreställa oss strålar som skär polyedern i två punkter. Med en funktion $f{:}P{\rightarrow}S$ kan vi därför beskriva i vilken punkt ℓ skär sfären genom att ange i vilken punkt den skär polyedern. Funktionen f är en bijektion, ty för varje punkt y i S finns det en punkt x i P så att $f(x)=y$ och vice versa. Därför har den en

[5] Denna definition är *inte* ur (Munkres, 2013).

invers f^{-1}. Både f och f^{-1} är kontinuerliga: om vi förflyttar punkten x kontinuerligt, så rör sig strålen som skär ytorna kontinuerligt runt dess startpunkt, varför den motsvarande punkten y också förflyttas kontinuerligt. Detta gäller även i det omvända fallet. Alltså är f en homeomorfi och P och S homeomorfa. ■

Med detta sagt, låt oss dra lärdom från Lakatos att inte ta saker som givna. Låt oss inte heller sätta oss själva i en situation där vi inte ser skogen för alla träd, särskilt inte för något som *kan* vara av en slump: är det egentligen så viktigt att veta precis vilka polyedrar som är eulerska eller finns det kanske relaterade problem som är mer väsentliga?

> ZETA: Jag förstår ditt motstånd. Du har förälskat dig i problemet att finna var Gud drog gränsen som skiljer eulerska från icke eulerska polyedrar. Med det finns ingen anledning att tro att termen ”eulersk” över huvud taget förekom på Guds ritning över universum. Tänk om att vara eulersk endast är en tillfällig egenskap hos några polyedrar. I så fall skulle det vara ointressant eller omöjligt att hitta den slumpmässiga avgränsade sick-sack-linjen mellan eulerska och icke eulerska polyedrar. Ett sådant medgivande skulle emellertid lämna rationalismen obesudlad, för då är egenskapen att vara eulersk inte en del av universums rationella formgivning. Så låt oss glömma bort den. En av de huvudsakliga poängerna med kritisk rationalism är att man alltid är beredd att överge sitt ursprungliga problem under lösningens utförande och ersätta det med ett nytt. (Lakatos, 1976/1990, s. 75)

4. Matematikens filosofi

Lakatos skrev *Bevis och motbevis* som kritik mot det han ansåg vara det dominerande synsättet inom matematikens filosofi – formalism, vilket var hans samlingsnamn för den formalistiska skolan (Hilberts program och dylikt), den logistiska skolan och den intuitionistiska skolan. Hans egna synsätt kännetecknas av heuristik och fallibilism, och utgår från en socialkonstruktivistisk bild av matematiken.

I denna del av texten kommer vi diskutera dessa synsätt, hur de skiljer sig från varandra, och hur de kan kopplas till olika sätt att se bevis på. Vi börjar med Lakatos egna perspektiv och går sedan vidare till det andra.

Heuristik och fallibilism

Med heuristik menar vi här en metod med vilken en genererar eller väljer plausibla hypoteser utan att nödvändigtvis rättfärdiga dem (Nationalencyklopedin, 2021). Målet med en heuristisk utredning är alltså att finna den metod för tänkande vars regler hjälper en erhålla resultat, inte alltid fullständiga, på ett enkelt och pålitligt sätt. I Lakatos heuristik – metoden med bevis och motbevis – är den aktuella satsen ännu inte bestämt formulerad innan en avser att bevisa den och kan komma att omformuleras flera gånger under denna process. De heuristiska reglerna är där för att hjälpa matematiker gå från naiva hypoteser till satser som är bättre förankrade i matematisk kunskap (Kiss, 2002). I detta belyser och betonar han problemsituationen (problem att bevisa) och logiken som ger upphov till nya koncept (Hemmi, 2006) och ny kunskap.

Förutom att vara heuristiskt är Lakatos perspektiv fallibilistiskt, vilket innebär att han menar att en kan ha kunskap om något utan att ens trosuppfattning om det är konklusiv, det vill säga det finns alltid utrymme för att en har fel (Pritchard, 2014). Det är möjligt att det vi tar som sant idag, förklaras falskt imorgon. Matematiken är därför inte helt ”stabil” utan mottaglig för förändringar. På så sätt kan motbevis vara precis lika viktiga som bevis (Kiss, 2002). Detta hänger samman med den vikt Lakatos lägger på informella bevis – det är just dessa han talar om och det är väsentligt att nämna det – eftersom de, till skillnad från formella bevis, är falsifierbara (Bayat, 2015). En kan påstå att det är tack vare denna falsifierbarhet som matematiken kan utvecklas och faktiskt gör det; våra begrepp är till en början dåligt definierade och/eller vaga men får möjligheten att förbättras och preciseras i samband med upptäckten av motbevis (Musgrave & Pidgen, 2021). Informella bevis kan vidare sägas bygga basen för formella bevis giltighet (Bayat, 2015). En huvudpoäng är att bevis, oavsett hur rigoröst det än är (och Lakatos menar att även informella bevis kan vara rigorösa), endast slår fast att om våra axiom är sanna, så är dessutom satsen det. Om våra axiom är potentiellt felaktiga, så bör de satser vi härlett från dem också vara det (Musgrave & Pidgen, 2021).

Både Lakatos heuristik och fallibilism bryter mot det formalistiska synsättet, vilket vi snart kommer att se allt tydligare, och båda dessa karaktärsdrag kan kopplas till hans socialkonstruktivism, i synnerlighet heuristiken.

Socialkonstruktivism

“Matematiken, denna produkt av mänsklig aktivitet [...]” (Lakatos, 1976/1990, s. 154).

Det råder ingen tvekan om att Lakatos förespråkar en socialkonstruktivistisk bild av matematiken. Lakatos heuristik ut på att *skapa* matematik (Kiss, 2002), vilket talar för den konstruktivistiska aspekten av hans perspektiv. I hans idéer om bevis ingår också en sorts humanistisk underdefinition som tar hänsyn till den roll mänskliga faktorer spelar i bevisning. Tillsammans med Reuben Hersh – som också var socialkonstruktivist om matematik, dock av ett annat slag än Lakatos –

kritiserar de formalism till stor del på grund av att denna bortser från dessa faktorer (Bayat, 2015).

Formalism

”Eller skulle du vilja att matematiker förlorade bevisens skönhet och fick den ersatt av ett dumt formellt spel?” (Lakatos, 1976/1990, s. 60)

Formalism, i den mening Lakatos använder begreppet[6], motsäger sig dem tre elementen av hans perspektiv som vi hittills diskuterat. Den gemensamma utgångspunkten för de omfattade teorierna är sökandet efter en tydlig kärna ur vilken allt annat kan härledas med hjälp av obestridlig logik: “the essential business of the pure mathematician may be viewed as deriving logical consequences from sets of axioms” (Putnam, 1975b, citerad i Linnebo, 2017, s. 52). formalister, logikister och intuitionister må vara oense om vad denna kärna består av men delar visionen av en matematik som gjorts otvivelaktig av upptäckten av en pålitlig bas på vilken resten kan baseras (Hersh, 1978; Musgrave & Pidgen, 2021). Denna syn återfinns tydligt i tillexempelvis James R. Munkres lärobok *Topology*:

> Logicians have analyzed set theory in great detail, and they have formulated axioms for the subject. Each of their axioms expresses a property of sets that mathematicians commonly accept, and collectively *the axioms provide a foundation broad enough and strong enough that the rest of mathematics can be built on them* (2013, s. 3, min kursivering).

Hos Formalister finns alltså drag av fundamentism – tron att några trosuppfattningar, de mest grundläggande, kan rättfärdigas utan stöd av andra trosuppfattningar (Pritchard, 2014) – som saknas hos Lakatos (Musgrave & Pidgen, 2021).

[6] För att göra det enkelt för oss i fortsättningen refererar vi till Lakatos begrepp, det vill säga samlingen av de tre olika skolorna, med stort f – ’Formalism’ – och som den formalistiska skolan med litet f – ’formalism’.

formalism och logikism

För att ännu tydligare förstå hur Lakatos perspektiv skiljer sig från det Formalistiska fördjupar vi oss något i grunderna till formalism och logiskism[7].

Idén bakom logikism är att all matematik, eller åtminstone alla sanningar om nummer, är reducerbar till logik (Carnap, 1983; Linnebo, 2017). Logikister menar att matematikens begrepp kan härledas från logiska begrepp genom explicita definitioner och att dess satser kan härledas från logiska axiom genom ren logisk deduktion. Axiom och slutledningsregler väljs med hänsyn till en viss uppfattning av ”primitiva symboler”, men inuti systemet så genomförs deduktioner och definieringar formellt, utan någon referens till dem primitiva symbolernas betydelse (Carnap, 1983).

formalism påminner mycket om logikism i det att formalister anser att matematik innefattar internt slutna procedurer som verkar enligt fixa regler kända för alla matematiker och som består i den framgångsrika konstruktionen av kombinationer av primitiva symboler vilka anses ”korrekta” eller ”bevisade” (von Neumann, 1983). Vidare förnekar formalister att ”vanliga” meningar är meningsfulla och föreslår istället att vi förstår matematiken som en aktivitet som går ut på att bevisa rent formella satser utifrån rent formella axiom (Linnebo, 2017).

Både formalism och logikism bygger på upprättandet av formella system – artificiella språk med tydligt formulerade axiom och slutledningsregler, där dessa är beskrivna med precision (Linnebo, 2017). Teorierna ger inte mycket utrymme för semantik, om något alls, utan prioriterar syntax: “Indisputably, mathematicians prove theorems from axioms. And since proofs consist of strings of symbols, they can be described and studied in a purely syntactic way, thus avoiding all philosophical speculation” (Linnebo, 2017, s. 38). Lakatos, å andra sidan, menar att vi inte kan bedriva matematik på ett enbart syntaktiskt sätt – bevisning blir på ett

[7] Jag väljer här att inte skriva om intuitionism eftersom min förståelse av den är undermålig och jag erkänner hellre mina brister än förvanskar denna teori. För beskrivningar av den se (Heyting, 1983), (Iemhoff, 2020) och/eller (Linnebo, 2017).

sätt helt ”meningslöst” utan referenser till begrepp och deras betydelse och deras historia.

Det kan vara värt att nämna att även om Lakatos lägger stor vikt på informell matematik inte förnekar den formell matematikens validitet (Bayat, 2015). Han menar att dock att formell matematik med sina väldefinierade begrepp och premisser är slutpunkten, eller potentiellt bara ett tillfälligt stadium, i en evolutionär process som börjar i det informella (Musgrave & Pidgen, 2021).

Sammanfattningsvis, har vi två olika perspektiv – Lakatos egna och det Formalistiska – som skiljer sig i avseende på de grundvalar de menar att matematiken är baserad på och på deras förståelse av vad ett bevis är och gör. Formalisterna framhäver bevisens tidigare nämnda verifieringsfunktion till högre grad än Lakatos, som hellre betonar deras funktion att generera och utveckla den matematiska kunskapsmassan – deras förmåga att *skapa* matematik.

5. Avslutning

I denna uppsats har vi undersökt relationen mellan olika perspektiv på bevis och filosofiska teorier om matematik. Vi har sett hur det filosofiska perspektiv som förespråkas av Imre Lakatos, kännetecknat av bland annat fallibilism och socialkonstruktivism, kan kopplas till en syn på bevis som ett sätt att förbättra hypoteser och att skapa kunskap. Detta kontrasterades mot det han kallar för Formalism inom matematikens filosofi, där matematiken istället ses som en aktivitet av slutledningar inom formella logiska system inom vilka bevis leder oss till nödvändigt sanna slutsatser om alla steg utförts korrekt.

Vi har dessutom bekantat oss med Eulers polyederformel inom topologin genom att kort studera den topologiska invarianten Eulerkarakteristik och dem funktioner vi kallar för homeomorfier. I denna del av texten bevisade vi också att alla polyedrar som är ytan till konvexa kroppar är homeomorfa med en sfär, för vilka det gäller att $\chi = 2$.

För att avsluta vill jag ge något som påminner om en sorts uppmaning relaterat till det faktum att jag, trots allt, är ämneslärarstudent. Matematiker är ännu inte helt överens om vad som är acceptabla ”slutledningsscheman” inom bevisning, vilket har inverkan både på akademikers inställningar till matematisk praktik och matematisk undervisning (Weber & Czocher, 2019). Det vi kan säga om den ”vanliga” matematiska undervisningen utanför högre utbildningsinstanser är att den ofta går ut på att lära sig relativt simpla (beräknings)procedurer (Hemmi & Löfwall, 2010), varför det ofta görs en distinktion mellan *skolmatematik* och *universitetsmatematik*, eller helt enkelt ”riktig” matematik. Kanske behöver det inte vara så, kanske kan de enas (jmf Björklund m.fl., 2002). Om bevis verkligen har alla dem funktioner vi diskuterat, vore det inte fördelaktigt att hantera dem även i skolmatematiken? Och när det kommer till universitetsmatematiken kanske det vore fördelaktigt att avvika från den typiska rigorösa och logiska definition-sats-bevis-exempel-ordningen (Richeson, 2012) till förmån för en matematik som mer stämmer överens med dess utveckling. Detta förutsätter visserligen en *Lakatosiansk* syn på matematiken, och kräver ett djupdyk i den historiska processen som skapat den:

> There is an important pedagogic point to all this, too. The dialectic of proofs and refutations can generate, in the ways explained above, quite complicated definitions of mathematical concepts, definitions that can only really be understood by considering the process that gave rise to them. But mathematics teaching is not historical, or even quasi-historical. [...] students nowadays are presented with the latest definitions at the outset, and required to learn them and apply them, without ever really understanding them (Musgrave & Pidgen, 2021).

Men i slutändan, vad vet jag...?

6. Referenser

Bayat, H. (2015). Lakatos and Hersh on Mathematical Proof. *Philosophical Investigations*, *9*(17).

Björklund, L., Pettersson, A., & Tambour, T. (2002). Skolmatematik och universitetsmatematik ur ett didaktiskt perspektiv. I B. Falkevall & S. Selander (Red.), *Skolämne i kris?* HLS Förlag.

Carnap, R. (1983). The logicist foundations of mathematics. I P. Benacerraf & H. Putnam (Red.), *Philosophy of mathematics: Selected readings* (2:a uppl.). Cambridge University Press.

Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 373–384.

Euler, L. (1758). Elementa Doctrinae Solidorum [Elements of the Doctrine of Solids]. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, *4*, 109–140.

Farkas, J., & Schou, J. (2020). *Post-Truth, Fake News and Democracy.* Routledge.

Hemmi, K. (2006). *Approaching proof in a community of mathematical practice* [Doktorsavhandling]. Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet.

Hemmi, K., & Löfwall, C. (2010). Why Do We Need Proof. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. WG 2. January 28th - February 1st, 2009.*

Hersh, R. (1978). Introducing Imre Lakatos. *The Mathematical intelligencer*, *1*, 148–151. https://doi.org/10.1007/BF03023262

Hersh, R. (2014). *Experiencing Mathematics: What do we do, when we do mathematics?* American Mathematical Society.

Heyting, A. (1983). The intuitionist foundations of mathematics. I P. Benacerraf & H. Putnam (Red.), *Philosophy of mathematics: Selected readings* (2:a uppl.). Cambridge University Press.

Iemhoff, R. (2020). Intuitionism in the Philosophy of Mathematics. *The Standford Encyclopedia of Philosophy.* https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/intuitionism/

Kiss, O. (2002). Matematical Heuristic—Lakatos and Pólya. I G. Kampis, L. Kvasz, & M. Stöltzner (Red.), *Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology and the Man.* Springer.

Lakatos, I. (1990). *Bevis och motbevis: Matematiska upptäckters logik* (J. Worrall & E. Zahar, Red.; F. Cassel, Övers.). Thales. (Originalverk publicerat 1976)

Lee, J. M. (2010). *Introduction to Topological Manifolds* (2:a uppl.). Springer.

Linnebo, Ø. (2017). *Philosophy of Mathematics.* Princeton University Press.

Long, J. (2002). The Unforgiven: Imre Lakatos' Life in Hungary. I G. Kampis, L. Kvasz, & M. Stöltzner (Red.), *Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology and the Man.* Springer.

Munkres, J. R. (2013). *Topology: Pearson New International Edition* (2:a uppl.).

Musgrave, A., & Pidgen, C. (2021). Imre Lakatos. *The Standford Encyclopedia of Philosophy.* https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/lakatos/

Nationalencyklopedin. (2021). *Heuristik.* /uppslagsverk/encyklopedi/lång/heuristik (hämtad 2021-12-20)

Orwell, G. (2008). *Nineteen Eighty-Four.* Penguin Books. (Originalverk publicerat 1949)

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning Vol. 1: Induction and analogy in mathematics.* Princeton University Press.

Pritchard, D. (2014). *What is this thing called knowledge?* (3:e uppl.). Routledge.

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(3), 5–41.

Richeson, D. S. (2012). *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology.* Princeton University Press.

Sandifer, E. (2004, juni). *V, E and F, Part 1.* How Euler Did It. http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2004-06.pdf

von Neumann, J. (1983). The formalist foundations of mathematics. I *Philosophy of mathematics: Selected readings* (2:a uppl.). Cambridge University Press.

Weber, K., & Czocher, J. (2019). On mathematicians' disagreements on what constitutes a proof. *Research in Mathematics Education*, *21*(3), 251–270.