



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Heltalspartitioner och Eulers pentagonalsats

av

**Döne Berna Pektas**

2022 - No K8



# Heltalspartitioner och Eulers pentagonalsats

Döne Berna Pektas

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Håkan Granath

2022



# Heltalspartitioner och Eulers pentagonalsats

Döne Berna Pektaş

26 november 2021

## Sammanfattning

Detta självständiga arbete är en introduktion till den kombinatoriska teorin om heltalspartitioner. Med en heltalspartition menas att ett positivt heltal delas upp i heltalsdelar, så att summan av delarna blir det ursprungliga heltalet. Uppsatsen börjar med en kort historisk beskrivning om bland annat matematikern Leonhard Euler. Vidare introducerar vi Ferrersdiagram som är ett användbart sätt att visualisera partitioner grafiskt. I uppsatsen använder vi Ferrersdiagram för att behandla bland annat partitionsfunktionen och partitionens identiteter. Framförallt kommer vi att presentera och bevisa Eulers pentagonalsats samt visa hur man kan härleda en rekursiv formel för partitionstalen med hjälp av den.

Nyckelord: Heltalspartitioner, partitionsidentiteter, Ferrersdiagram, bijektioner, Eulers pentagonalsats

## Abstract

This thesis is an introduction to the combinatorial theory of integer partitions. An integer partition is a division of a positive integer into smaller parts, and the sum of the smaller parts becomes the original integer. This essay begins with a short historical description focusing on, among others, the mathematician Leonhard Euler. Ferrers diagrams are a helpful way to visualize partitions graphically. In this essay, we use Ferrers diagrams to deal with, mainly the partition function and partition identities. Above all, we will present and prove Euler's pentagonal theorem and show how to derive a recursive formula for the partition numbers using it.

Key words: Integer partitions, partition identities, Ferrers diagrams, bijections, Euler's pentagonal theorem

## Förord

Det finns ett antal personer som hjälpt mig under detta självständiga arbete och jag vill gärna tacka dem. Stort tack till min handledare Håkan Granath för sitt engagemang, konstruktiva kritik och för all stöd under arbetets gång. Jag vill även rikta ett stort tack till min familj som alltid har stöttat mig under min utbildningsgång och ett speciellt tack till min älskade syster Zeynep som motiverat mig. Till sist vill jag tacka min fina vän Setayesh för hennes positiva energi och inställning.

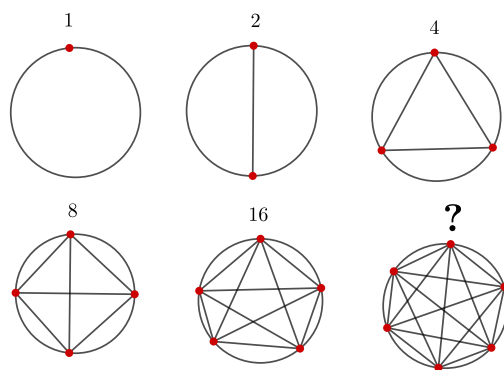
# Innehåll

1	Introduktion	5
2	Historia	7
3	Beteckningar och grafer	11
4	Bijektionser och bijektiva bevis	12
5	Ordnade partitioner	13
6	Oordnade partitioner	15
7	Partitionsidentiteter	20
8	Hardy-Ramanujans asymptotiska formel	26
9	Pentagonaltal	29
10	Eulers pentagonalsats	33
11	Bevis för Eulers rekursionsformel	37



# 1 Introduktion

Vilket tal kommer härnäst i talföljden 1, 2, 4, 8, 16...? Alla som studerat matematik i grundskolan har förmodligen fått svara på frågor likt denna. Majoriteten av elever i grundskolan skulle med stor sannolikhet svara 32, vilket är det korrekta svaret om ändamålet är att dubbla talen i talföljden. Behöver det nödvändigtvis alltid vara på detta vis, är 32 det enda korrekta svaret? För att kunna svara på denna fråga behöver vi först analysera ett exempel. För detta exempel kommer vi använda de 6 första heltalen. Inledningsvis skissar vi cirklar med regelbundna punkter, där antalet punkter på cirkeln är detsamma som respektive heltal. Dessa punkter förbinds med hjälp av linjer. Vi börjar med att räkna antal områden som bildas i varje figur.



Figur 1: Antal områden för de 6 första heltalen

För de 5 första heltalen får vi att cirkelarna innehåller 1, 2, 4, 8 och 16 områden. Talföljden är precis densamma som den vi hade i inledningen av introduktionen. Kommer då den sjätte figuren innehålla 32 områden? Svaret är nej, antalet områden i den sjätte figuren blir 30 och inte 32 [6].

Exemplet i Figur 1 är en illustration som till en början kan anses vara trivialt, dock visar det sig vara mer komplicerad när man undersöker vilket tal som kommer härnäst. På liknande sätt kan heltalspartitioner anses vara trivialt, detta på grund av att den enda matematik som behövs är grunderna för addition. Ett problem som uppstår när vi räknar på heltalspartitioner är att det är lika svårt och bestämma vilket tal som kommer näst i talföljden. Målsättningen för detta självständiga arbete är inte att dela upp cirklar i delar, utan undersöka på hur många sätt ett positivt heltal kan delas upp i mindre delar. För frågan om "vad som kommer härnäst" kommer vi i detta arbetet ge ett svar på det, i form av en rekursionformel.

Heltalspartitioner handlar alltså om att skriva ett positivt heltal  $n$  som en summa av positiva heltalsdelar där summan av delarna har samma värde som det ursprungliga heltalet  $n$  [1]. I detta arbete kommer därmed huvudämnet vara heltalspartitioner och vi kommer att titta närmare på partitionsfunktionen som räknar antalet partitioner samt titta på olika partitionsidentiteter och deras egenskaper.

En väldigt intressant aspekt inom heltalspartitioner är att uppdelningen kan göras på flera olika sätt med hjälp av partitionsidentiteter. För små tal kan antalet sätt enkelt bestämmas genom uppräknig och addition, men detta blir snabbt ohanterligt för stora tal. Därför behövs andra metoder för att lättare kunna arbeta med partitioner av heltal, som vi kommer presentera i detta arbete.

I kapitel 2 får finns en historisk beskrivning om utvecklingen av heltalspartitioner. Historien börjar med den store matematikens Leibnitz förslag om att antalet partitioner av vilket  $n$  som helst är ett printal, som han själv motbevisar i ett senare skede. Ett sekel efter erhåller Euler ett brev från Bernoulli, som blir ingången till Eulers medverkande inom heltalspartitioner. Slutligen har vi den självlärde matematiken Ramanujans historia, om hans färd från slummen i Indien till Cambridge universitet, där han tillsammans med Hardy producerar viktiga bidrag för ämnet.

Kapitel 3 och 4 i denna uppsats innehåller en kortfattad beskrivning av bijektion och beteckningar för grafrepresentationer, så kallade Youngdiagram och Ferrersdiagram. I arbetet kommer vi med hjälp av Ferrersdiagram redogöra bijektiva bevis för några utvalda partitionsidentiteter, framförallt Eulers pentagonalsats.

Partitionsidentiteter har en betydande roll och har avsikten att visa likheter mellan antalet partitioner som uppfyller olika villkor. Detta är en effektiv metod för att lösa besvärliga problem genom att överföra partitioner till en annan form, som sedan bevisas genom bijektion. I kapitel 7 kommer vi beskriva några partitionsidentiteter, detta i form av ett antal definitioner och satser. För varje definition och sats finns det respektive exempel som tydliggör vad som vill belysas till läsaren.

Vidare i nästkommande kapitel så finns Hardy - Ramanujans fantastiska asymptotiska formel från året 1918. Asymptotiska formeln konstruerades för att räkna antal partitioner av vilket heltal som helst. Det var den formeln som senare ledde till Hans Rademachers fullständiga formel, som dock är väldigt komplicerad.

Avslutningsvis, har vi två stora satser som bevisas med bijektioner och stegvis illustreras med hjälp av Ferrersdiagram. Eulers pentagonalsats, beskriver betydelsen av de generaliserade pentagonaltalen samt Eulers rekursionsformel, som kan användas för att beräkna antalet partitioner av ett heltal.

## 2 Historia

Heltalspartitioner har varit ett område som intresserat flera viktiga matematiker genom historien. Även om Leonhard Euler (1707-1783) är den första som utvecklade teorin för heltalspartitioner så var den tyska matematikern Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) den första som reflekterade kring detta område. År 1674 skickade Leibniz ett brev till den stora matematikern Jacob Bernoulli (1654–1705), där han frågade om antalet partitioner för ett visst heltal [4]. Inledningsvis började Leibniz att undersöka heltalen 3 och 4 och upptäckte att för heltalet 3 finns det 3 partitioner (3, 2 + 1, 1 + 1 + 1) och för heltalet 4 finns 5 partitioner (4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1). Därpå försatte han med att beräkna antalet partitioner för heltalen 5 och 6, och föreslog att antalet partitioner av vilket  $n$  som helst alltid är ett primtal. Dock så motbevisade han sitt eget förslag några år senare, då han räknade fram att antalet partitioner av heltalet 7 är 15. Leibniz misslyckades med att hitta en generell metod för att räkna fram antalet heltalspartitioner av ett heltal  $n$ . Problemet förblev olöst fram till 1800-talet då en av de mest omtalade matematikerna någonsin, Leonhard Euler började undersöka detta område [4].



Figur 2: Gottfried Wilhelm von Leibniz

År 1707 i Basel, Schweiz, föddes den mest produktiva matematikern genom tiderna, Leonhard Euler, son till Paul Euler och Marguerite Brucker. Euler tillbringade större delen av sin barndom i Riehen även om han föddes i Basel, detta på grund av faderns arbete. Fadern var en luthersk pastor med intresse för matematik vars intresse förmedlades vidare till Euler i en tidig ålder. Eulers far ville att hans son

skulle följa honom in i kyrkan och skickade honom till universitetet i Basel för att studera teologi [4].

Euler påbörjade sina studier inom teologi vid 14 års åldern år 1720. Studierna ledde till en magisterexamen år 1724. Under tiden han studerade teologi så lärde han sig klassiska språk såsom grekiska och hebreiska. Samtidigt så växte Eulers intresse alltmer för matematiken och under den tid han studerade teologi fick han privatlektioner från matematikern Johann Bernoulli (1667-1748). I slutet av universitetsutbildningen var fadern fortfarande fast besluten på att sonen skulle bli en präst, men Johann Bernoulli övertalade fadern att Euler skulle fortsätta läsa matematik istället. Detta för att han insåg den extraordinära matematiska begåvning som Euler förfogade över [5].



Figur 3: Leonhard Euler

Vid denna tid bedrevs matematik forskningen vid kungliga akademiska institutioner runt om i Europa. Euler sökte en professur inom matematik på universitet i Basel, dessvärre fick han inte arbetet men valde att söka motsvarande tjänst i Ryssland, St.Petersburg. Där studerade även Johann Bernoullis söner, Nicolaus Bernoulli (1687-1759) och Daniel Bernoulli (1700-1782). Med hjälp av sönerns inflytande på vetenskapsakademiens matematiska avdelning så erbjöds Euler professuren. Vid 20 års åldern, år 1727, flyttade Euler till St.Petersburg, där han även studerade medicin och fysiologi. Under samma år var han med och tävlade i Paris Academy som bestod av en kommitté med ledande experter inom matematik och vetenskap. Euler kom på en andra plats i tävlingen och detta ansågs vara en stor bedrift av kommittén för en sådan ung person. År 1733 var ett speciellt år, Euler utsågs till professor i vetenskapsakademin. Utöver det gifte han sig med Katharina Gsell (1707-1773) och paret fick tillsammans totalt 13 barn [5].

Intresset för partitioner kom med ett brev från Philippe Naude II (1684-1745). I brevet till Euler frågade han om ett problem där ett heltal  $n$  skulle kunna delas i ett givet antal delar. Specifikt var frågan; hur många partitioner heltalet  $n = 50$  har med 7 distinkta delar [4]. Genom att försöka beräkna och lösa denna typ av problem så uppfann Euler en metod som hade en avgörande roll inom studier av talföljder och heltalspartitioner, nämligen genererande funktioner. År 1741 skrev han ner lösningarna till Philippe Naudes II problem som han presenterade i St. Petersburgakademien vilket blev den första publikationen om heltalspartitioner i historien [5].

En annan matematiker som haft inflytande för partitioner är Godfrey Harold Hardy (1877–1947), en excentriskt brittisk matematiker som blev känd för sina prestationer inom talteori och matematisk analys. Utöver detta blev han berömd för sitt mentorskap till den indiska matematiska geniet Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920).



Figur 4: G.H. Hardy och S.A. Ramanujan

Ramanujan hade en exceptionell intuitiv förmåga att lösa matematiska problem som var extremt komplicerade. Han har en betydande roll för utvecklingen av ren matematik med sina värdefulla bidrag till matematisk analys, talteori och oändliga serier. Ramanujan växte upp under fattiga förhållanden i Madras, Indien. Vid 15 års åldern fick han tag på ett exemplar av en matematisk formelsamling, *Synopsis of Pure Mathematics*. Formelsamlingen bestod endast av formler, dock fanns inga bevis för dessa. Ramanujan började med att bevisa varje formel i boken själv, eftersom ingen i hans närhet kunde hjälpa honom med den abstrakta matematiken som han bevisade. När formelsamlingen var slut börjar Ramanujan att producera matematik på egen hand som han skrev ned i sina anteckningsböcker. Anteckningsböckerna bestod av tusentals olika matematiska resultat, vilket gör Ramanujan till

en av de produktivaste matematikerna genom historien. Eftersom ingen i hans omgivning förstod vad han höll på med så valde Ramanujan att skicka ett brev till en av dåtidens största matematiker G.H Hardy för att visa sina resultat. Hardy blev positivt överaskad av Ramanujans brev och särskilt över ett resultat som idag kallas för en partitionsidentitet. I brevet saknades bevis för denna identitet och av den anledningen skickade Hardy ett svar till Ramanujan för att besöka honom i Cambridge, vilket Ramanujan gjorde år 1914. Tillsammans med Hardy utvecklade Ramanujan en icke-konvergerande asymptotisk serie. Denna serie har egenskapen att räkna fram ett nästill exakt närmevärde för antalet partitioner av ett heltal  $n$  och det kan vi läsa mer om i kapitel 7 [3].

Under tiden Ramanujan var på Cambridge Universitet fann han en gammal artikel av Leonard James Rogers (1862-1933). Denna artikel var ett bevis för partitionsidentiteten och eftersom han återupptäckte Rogers arbete har dessa identiteter fått namnet Rogers-Ramanujans identitet [1].

### 3 Beteckningar och grafer

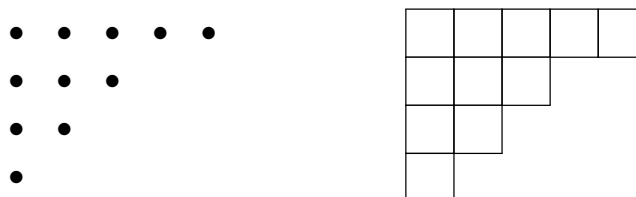
För att beskriva och använda heltalspartitioner behöver vi enbart behärska addition av positiva heltal. Trots denna enkelhet utgör heltalspartitioner ett område fullt av liv inom modern matematisk forskning. Förutom matematiken tillämpas heltalspartitioner i områden som programmering och teoretisk fysik.

Heltalspartitioner kan betecknas på flera sätt exempelvis genom summa, multimängd och antal av varje del. Beteckningen summa är en addition skriven i avtagande storleksordning. En multimängd är en mängd där ett element kan förekomma flera gånger [3].

Vi använder beteckningarna ovan för den partition av 13 som består av en femma, två treor och två ettor:

- Summa:  $5 + 3 + 3 + 1 + 1$ ,
- Multimängd:  $\{5, 3, 3, 1, 1\}$ ,
- Antal av varje del:  $[1^2, 3^2, 5]$ .

I fortsättningen av detta arbete kommer vi endast arbeta med summabeteckningen. För att visualisera heltalspartitioner kan man använda sig av olika grafiska representationer. Ferrersdiagram och Youngdiagram är de två vanligaste graferna som används för att representera heltalspartitioner. Ferrersdiagram som namngetts efter Norman Macleods Ferrers (1829-1903) är vänsterjusterade rader av punkter där varje del, i avtagande ordning, ger antal punkter i motsvarande rad. Varje heltalsdel representeras alltså av en horisontell punktlinje. Youngdiagram har namngetts efter Alfred Young (1873-1940) och är ett rutdiagram med samma egenskaper som Ferrersdiagram, bortsett från att punkterna ersätts med rutor [3]. Vi visar nu hur dessa grafiska representationer kan användas. Nedan uttrycks partitionen för heltalet 11 som består av heltalsdelarna  $5 + 3 + 2 + 1$  med hjälp av Ferrersdiagram och Youngdiagram.



Figur 5: Ferrersdiagram och youngsdiagram

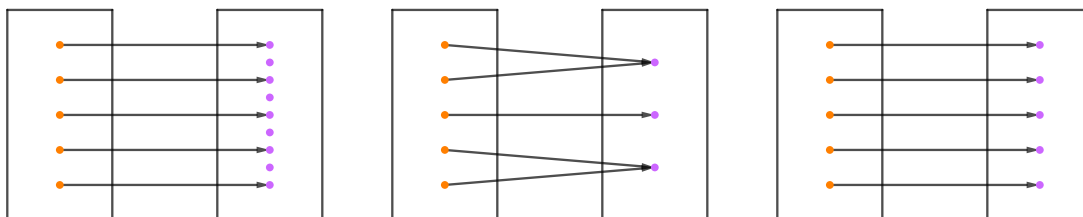
I fortsättningen av detta arbete kommer vi enbart använda oss av Ferrersdiagram.

## 4 Bijektioner och bijektiva bevis

I detta arbete kommer vi att använda oss av bijektioner för att bevisa satser eller räkna på exempel. Vi förtydligar därför begreppet bijektion innan vi fortsätter vidare.

**Definition 4.1.** Låt  $A$  och  $B$  vara två mängder. Tre viktiga egenskaper en funktion  $f : A \rightarrow B$  kan ha är följande [2]:

1. Om  $f(x) \neq f(y)$  för alla  $x$  och  $y$  i  $A$  sådana att  $x \neq y$  så kallas  $f$  injektiv. Om  $f$  är injektiv kallas  $f$  för en injektion.
2. Om det för varje element  $y \in B$  finns ett element  $x$  i  $A$  sådant att  $f(x) = y$  så kallas  $f$  surjektiv. Om  $f$  är surjektiv kallas  $f$  för en surjektion
3. Om funktionen  $f$  är både injektiv och surjektiv så kallas  $f$  bijektiv. Om  $f$  är bijektiv så kallas  $f$  för en bijektion.



Figur 6: Injektiv, surjektiv och bijektiv

För att  $f : A \rightarrow B$  ska vara bijektiv, gäller att varje  $y \in B$  är bilden av något unikt element  $x \in A$  så att  $f(x) = y$ . En bijektion mellan två mängder  $A$  och  $B$  finns endast om  $|A| = |B|$ , med detta menas att båda mängderna måste innehålla samma antal element, alltså har samma kardinalitet. Om en mängd  $A$  har kardinaliteten  $x$  betecknar vi det med  $|A| = x$  [2].

I detta arbete kommer vi att genomföra bijektiva bevis mellan olika mängder av partitioner för att visa partitionsidentiteter.



## 5 Ordnade partitioner

Det finns två olika tillvägagångssätt att arbeta med partitioner. Det första tillvägagångssättet att arbeta med partitioner kräver att man tar hänsyn till delarnas ordning. Vi börjar med att definiera ordnade partitioner.

**Definition 5.1.** En *ordnad partition*  $\lambda$  av ett positiv heltal  $n$  är en följd av  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  där [2]

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$$

och  $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$  för alla  $1 \leq i \leq k$ .

Varje term  $\lambda_i$  kallas för en heltalsdel av den ordnade partitionen. De ordnade partitionerna för heltalet 4 är:

4  
3+1  
1+3  
2+2  
2+1+1  
1+2+1  
1+1+2  
1+1+1+1,

där exempelvis  $3 + 1$  och  $1 + 3$  anses som två olika partitioner. Vi ser att heltalet 4 har åtta ordnade partitioner. I Tabell 1 ser vi antalet ordnade partitioner för de 10 första heltalen.

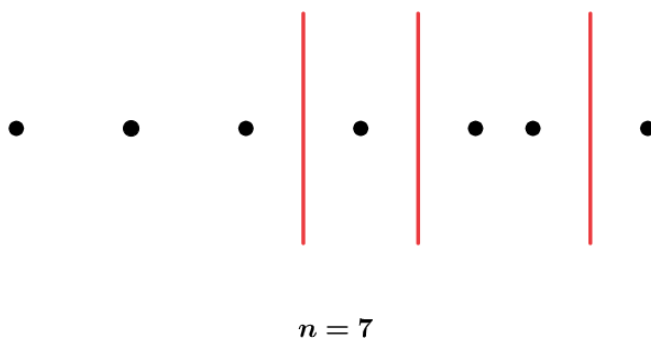
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Partitioner	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Tabell 1: Ordnade partitionerna för de 10 första heltalen

Hittills har vi undersökt de 10 första heltalen och räknat fram antalet partitioner för dessa. Vad kommer närmast? Hur räknar vi fram antalet ordnade partitioner för ett heltal  $n$ ? Svaret ges av följande sats.

**Sats 5.2.** För ett positiv heltal  $n \geq 1$  är antalet ordnade partitioner av  $n$  lika med  $2^{n-1}$ .

*Bevis.* Det går att tänka på en ordnad partition av ett tal  $n$ , som att dela upp en följd av  $n$  punkter med avdelare. Den ordnade partitionen av heltalet 7 med heltalsdelarna  $3 + 1 + 2 + 1$  presenteras i Figur 7.



Figur 7: Följd av  $n$  punkter med avdelare

För ett positivt heltal  $n$  finns  $n - 1$  möjliga positioner av tomrum för att dela in  $n$  i mindre positiva delar. I varje tomrum finns det två alternativ, endera finns det en avdelare eller inte. Genom detta får vi med hjälp av multiplikationsprincipen att antalet möjliga sätt att skapa olika kombinationer av avdelarna är  $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{n-1}$ . Antalet ordnade partitioner av  $n$  är därmed  $2^{n-1}$ .  $\square$

## 6 Oordnade partitioner

I det föregående kapitlet har vi beskrivit partitioner där ordning har betydelse. I detta kapitel kommer vi redogöra för det andra tillvägagångssättet som vanligtvis används inom matematiken.

**Definition 6.1.** En *oordnad partition*  $\lambda$  av ett positiv heltal  $n$  är en uppsättning av  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  där

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$$

och  $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$  för alla  $1 \leq i \leq k$ , och där vi inte tar hänsyn till ordningen.

Varje term  $\lambda_i$  kallas för en heltalsdel av den oordnade partitionen. I fortsättningen av texten kommer vi enbart betrakta oordnade partitioner.

**Definition 6.2.** Vi låter  $p(n)$  beteckna antalet heltalspartitioner för ett givet tal  $n \geq 1$ . Vi definierar även  $p(0) = 1$  och  $p(n) = 0$  för alla  $n < 0$ . Funktionen  $p(n)$  kallas *partitionsfunktionen* [3].

Nu beräknar vi antalet partitioner  $p(n)$  för de 5 första heltalen  $n$  och resultatet visas med hjälp av Tabell 2.

$n$	Partitioner	$p(n)$
1	1	1
2	2, 1+1	2
3	3, 2+1, 1+1+1	3
4	4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1	5
5	5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1	7

Tabell 2: Oordnade partitioner för de 5 första heltalen

I Tabell 2 ser vi partitionerna av de 5 första heltalen och detta ger oss följderna 1, 2, 3, 5, 7. Första observationen av följderna påminner om de 5 första primtalen som är 2, 3, 5, 7, 11. Som vi tidigare nämnt så motbevisade Leibniz denna tankegång då han fick att  $p(6) = 11$  och  $p(7) = 15$ . Då talet 15 inte är ett primtal, uteslöt Leibniz hypotesen om att primtal och partitioner har något samband.

**Definition 6.3.** Ett villkor av partitionsfunktionen menas att man utesluter partitioner som inte uppfyller ett eller flera krav. Detta betecknas  $p(n \mid \text{villkor})$ .

Ett exempel kan vara att delarna i en partition får högst vara av storlek  $k$ . Antalet sådana partitioner kan uttryckas på följande sätt

$$p(n \mid \text{alla delar} \leq k).$$

Trots den enkla definitionen av partitionsfunktionen så är dess egenskaper väldigt komplicerade. Fram till slutet av 1800-talet var det svårt att beräkna  $p(n)$  för stora heltal. Detta skulle dock ändras av den brittiska matematikern Percy Alexander Macmahon (1854 - 1929). Han var den första som skapade en tabell med värden för  $p(n)$  mellan  $1 \leq n \leq 200$  och med hjälp av denna tabell blev det enklare att hitta en allmän formel för  $p(n)$  [3]. I följande sats kommer vi presentera rekursionsformeln som beräknar  $p(n)$  på ett enkelt sätt.

**Sats 6.4.** För  $n > 0$  uppfyller partitionsfunktionen rekursionsformeln [1]

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left( p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right).$$

Denna rekursionsformel kan även skrivas om på följande vis

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + \\ p(n-15) - p(n-22) - p(n-26) + \dots$$

En av målsättningarna med detta självständiga arbete är att bevisa Sats 6.3 och detta kommer göras i det sista kapitlet. Vi börjar med att illustrera Sats 6.3 med ett enklare exempel.

*Exempel 6.5.* Vi har tidigare beräknat  $p(n)$  upp till  $n = 7$ . Vad är då vårt nästa värde? Hur många partitioner finns det då  $n = 8$ ? Vi använder rekursionsformeln för att ta reda på det:

$$p(8) = p(7) + p(6) - p(3) - p(1) = 15 + 11 - 3 - 1 = 22.$$

Om vi fortsätter med att beräkna  $p(9)$  gör vi på samma sätt så att

$$p(9) = p(8) + p(7) - p(4) - p(2) = 22 + 15 - 5 - 2 = 30.$$

Med hjälp av rekursionsformeln kan vi ganska enkelt räkna ut värdet för  $p(n)$ . I Tabell 3 visar vi de 15 första värdena för  $p(n)$ .

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Tabell 3: De 15 första värden för  $p(n)$

Vid en närmare iakttagelse av rekursionsformeln för  $p(n)$  ser vi två egenskaper som är värt att nämna. Första egenskapen är att talen  $\frac{m(3m+1)}{2}$  förekommer i Sats 6.3. Dessa tal kallas pentagonaltal och kommer behandlas senare i kapitel 9. En annan egenskap finner vi när vi söker en övre gräns till  $p(n)$ . Från rekursionsformeln ser vi att det två första termerna  $p(n-1) + p(n-2)$  liknar formeln för Fibonaccis talföljd. Vid jämförelse mellan talföljderna upptäcktes att Fibonaccis talföljd växer snabbare än partitionsfunktionen. För att förklara detta samband undersöker vi först hur partitionsfunktionen  $p(n)$  växer då  $n$  växer. Sedan kommer vi visa hur Fibonaccis talföljd är en övre gräns till partitionsfunktionen  $p(n)$  [1].

Låt oss börja med att visa följande olikhet:

$$p(n) > p(n-1), \quad \text{för alla } n \geq 2$$

För att jämföra  $p(n)$  och  $p(n-1)$  observerar vi att för varje partition av  $n-1$  så erhåller vi en partition av  $n$  genom att addera en ny punkt på en ny bottenrad i Ferrersdiagrammet. Detta ger att:

$$p(n-1) = p(n \mid \text{minst en del} = 1)$$

och följaktligen gäller

$$p(n) = p(n-1) + p(n \mid \text{ingen del} = 1), \quad (6.6)$$

så att

$$p(n) > p(n-1)$$

för alla  $n \geq 2$ .

Därmed har vi visat att  $p(n)$  är en växande funktion för  $n \geq 1$ .

Låt oss fortsätta med att undersöka hur snabbt  $p(n)$  växer och visa att Fibonaccitalen är en övre gräns till  $p(n)$ . Fibonaccitalen upptäcktes av en matematiker från Italien vid namn Leonardo Pisano Fibonacci (1170-1250) [1]. Vi börjar med att definiera Fibonaccitalen.

**Definition 6.7.** Fibonaccitalen  $F_0, F_1, F_2, \dots$  definieras *rekursivt* av

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ och } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

för alla  $n \geq 2$ .

Vi ställer upp de elva första Fibonaccitalen i en tabell.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Tabell 4: De elva första Fibonaccitalen

För att visa hur rekursionen för Fibonaccitalen är en övre gräns börjar vi med att visa

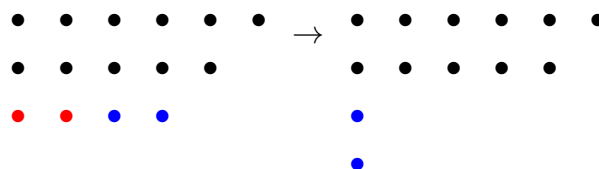
$$p(n \mid \text{ingen del} = 1) \leq p(n - 2). \quad (6.8)$$

Vi börjar med att definiera två mängder. Låt

$$A = \{\text{partitioner av } n \text{ utan } 1\text{-del}\}$$

$$B = \{\text{partitioner av } (n - 2)\}.$$

Vi konstruerar en funktion  $f : A \rightarrow B$  och definierar denna så här: Tag  $\lambda \in A$ . Då får vi att sista raden har  $\geq 2$  punkter. Vi bildar  $f(\lambda)$  genom att ta bort 2 av dessa punkter, och bildar rader av storlek 1 av de återstående punkter i den raden. Detta illustrerar vi med en exempel.



Figur 8:  $f(6 + 5 + 4) = 6 + 5 + 1 + 1$

Det är klart att  $f : A \rightarrow B$  blir en injektiv funktion. Därmed gäller att

$$|A| \leq |B|,$$

som i sin tur betyder  $p(n \mid \text{ingen del} = 1) \leq p(n - 2)$ , vilket skulle visas.

Kombinerar vi nu (6.6) och (6.8) får vi olikheten

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2), \quad n \geq 2. \quad (6.9)$$

Nu kan vi med hjälp av (6.9) visa en sats som säger att Fibonaccitalen är en övre gräns till  $p(n)$ . Satsen kommer bevisas med hjälp av matematisk induktion.

**Sats 6.10 (En övre gräns till partitionsfunktionen).** *För alla  $n \geq 0$  så är  $p(n)$  mindre eller lika med Fibonaccitalet  $F_{n+1}$  [1].*

*Bevis.* Eftersom  $p(0) = F_1 = p(1) = F_2 = 1$ , gäller satsen för  $n = 0$  och  $n = 1$ . Antag att detta gäller för alla  $n < k$  för något  $k \geq 2$ . Då har vi enligt olikhet 6.8:

$$p(k) \leq p(k-1) + p(k-2)$$

enligt antagandet får vi

$$p(k) \leq F_k + F_{k-1}$$

vilket enligt definition för  $F_k$  leder till

$$p(k) \leq F_{k+1}.$$

Enligt induktionsprincipen är därmed satsen sann för alla  $n \geq 0$ . □

## 7 Partitionsidentiteter

Inom matematiken är partitionsidentiteten likheter mellan antalet partitioner som uppfyller olika villkor. Partitionsidentiteter används för att lösa besvärliga problem genom att överföra dem på en annan form [3]. I detta arbete kommer vi att stöta på flera olika partitionsidentiteter. För att uttrycka en likhet mellan antal partitioner som skall uppfylla de villkor som används betecknar vi partitionsidentiteten på följande vis

$$p(n \mid \text{villkor}_1) = p(n \mid \text{villkor}_2).$$

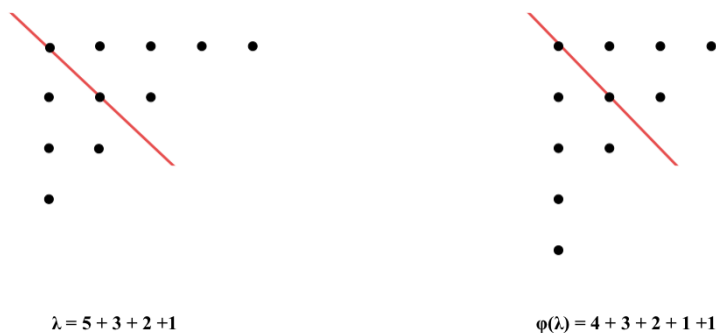
För våra bevis av partitionsidentiteter kommer vi använda bijektioner mellan partitionerna i fråga. En viktig bijektion mellan partitioner är konjugering.

**Definition 7.1.** Konjugering av en partitionen  $\lambda$  sker genom en spegling i diagonalen av Ferrersdiagrammet. Det innebär att Ferrersdiagrammet för partitionen läses som kolumner istället för rader. Den nya partitionen betecknas med  $\phi(\lambda)$  [1].

Vi illustrerar detta med ett exempel

*Exempel 7.2.* För heltalet  $n = 11$  har vi partitionen  $\lambda$  som består av  $5 + 3 + 2 + 1$ . Vad blir konjugatet  $\phi(\lambda)$  av denna partition?

Vi börjar med att visa konjugering med hjälp av Ferrersdiagram. Om vi läser av diagrammet för partitionen  $\lambda$  som kolumner istället för rader får vi fram  $\phi(\lambda)$ .



Figur 9: Konjugering när  $\lambda$  är partitionen  $5 + 3 + 2 + 1$

Från Ferrersdiagrammet kan vi utläsa att  $\phi(\lambda)$  består av  $4 + 3 + 2 + 1 + 1$ . Genom konjugering får vi ett direkt bijektivt bevis av partitionerna för  $n$  med exakt  $k$  delar, som är precis lika många som partitionerna av  $n$  med största del  $k$ .



**Sats 7.3.** För alla positiva heltal  $n$  och  $k$  gäller att [1]

$$p(n \mid \text{exakt } k \text{ delar}) = p(n \mid \text{största del är } k) \quad (7.4)$$

*Bevis.* Vi börjar med att definiera två mängder  $A$  och  $B$ . Låt  $A$  vara mängden av partitioner av  $n$  med exakt  $k$  delar och låt  $B$  vara mängden av partitioner av  $n$  där största delen är  $k$ . Det vi nu vill visa är att de två mängderna innehåller lika många element. Vi observerar nu att konjugeringsfunktionen  $\phi$  ger en bijektion

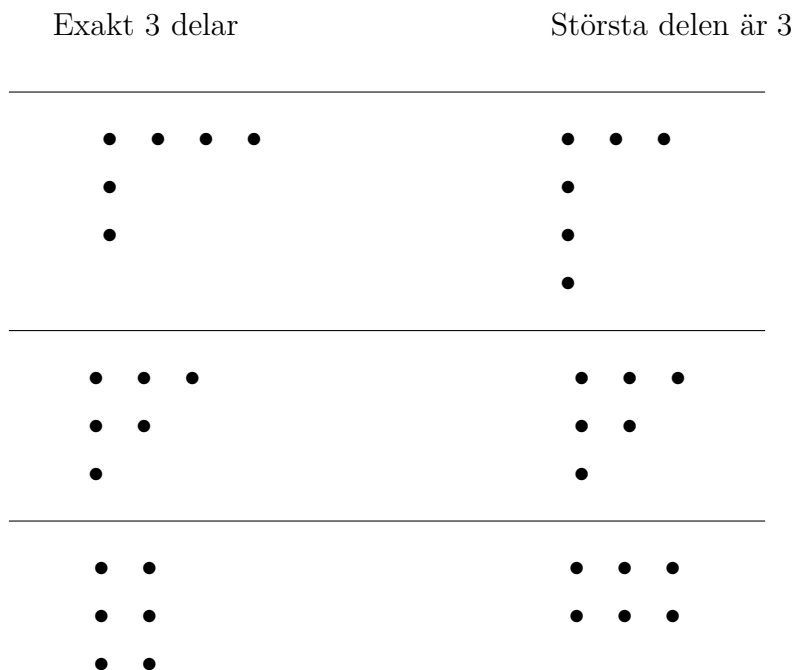
$$\phi : A \rightarrow B \quad (7.5)$$

Vi har nämligen att om  $\lambda \in A$  har Ferrersdiagrammet exakt  $k$  rader, vilket då medför att  $\phi(\lambda)$  har exakt  $k$  kolumner. Därmed är största delen i  $\phi(\lambda)$  lika med  $k$ , och då får vi att  $\phi(\lambda) \in B$ . Om  $\lambda \in B$  så är största delen  $k$ , det vill säga att  $\lambda$  har  $k$  kolumner som medför att  $\phi(\lambda)$  har exakt  $k$  rader, alltså  $\phi(\lambda) \in A$ . Genom detta får vi att  $f$  är en bijektion mellan  $A$  och  $B$  så att antalet partitioner av  $n$  i  $A$  är lika med antalet partitioner av  $n$  i  $B$ .  $\square$

Vi illustrerar detta bevis med ett exempel.

*Exempel 7.6.* Hur många partitioner av typer som finns i Sats 7.3 förekommer det när  $n = 6$  och  $k = 3$ ?

Vi visar antalet partitioner med hjälp av Ferrersdiagram



Som satsen säger finns det lika många partitioner av de två olika identiteterna när  $n = 6$  och  $k = 3$ . För att förtydliga vilka partitioner det är så skriver vi om partitionerna i en tabell.

Exakt k delar	Största del k
4+1+1	3+1+1+1
3+2+1	3+2+1
2+2+2	3 +3

**Definition 7.7.** En partition  $\lambda$  sägs vara självkonjugerande om  $\lambda = \phi(\lambda)$

**Sats 7.8.** Antalet självkonjugerade partitioner av  $n$  är lika med antalet partitioner av  $n$  vars delar är distinkta och udda [1]. Vi kan även uttrycka detta på följande sätt

$$p(n \mid \text{självkonjugerande}) = p(n \mid \text{udda och distinkta delar}). \quad (7.9)$$

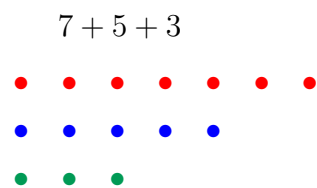
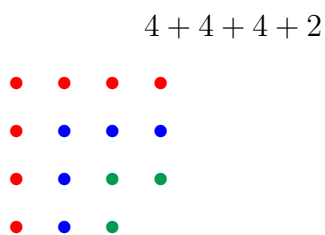
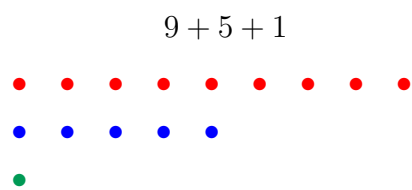
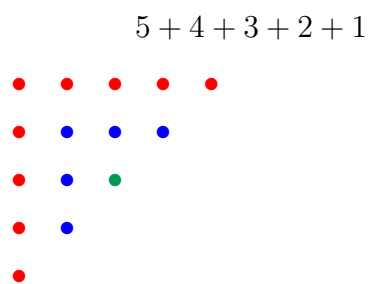
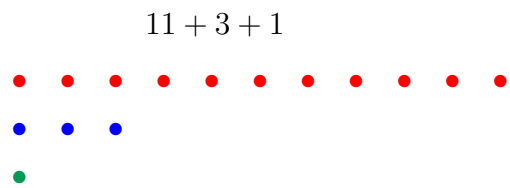
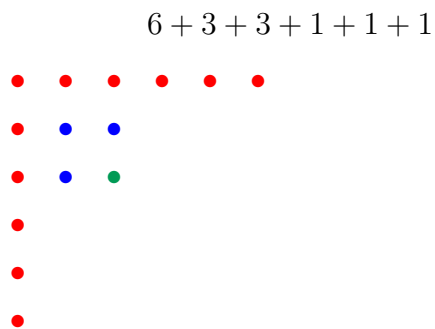
*Bevis.* Första raden och första kolumnen i diagrammet för en självkonjugerad partition av  $n$  innehåller samma antal punkter, som vi betecknar  $k$ . Eftersom de delar på en gemensam punkt är det totala antalet punkter i första raden och första kolumnen udda, som skrivs om till  $2k - 1$ . På samma sätt, om den första raden och första kolumnen tas bort innehåller resten av den andra raden och andra kolumnen ett udda antal punkter, så att  $2l - 1$ . Om vi fortsätter på detta sätt får vi en partition av  $n$  där varje del är udda och alla delar är distinkta. Proceduren kan visualiseras som en upprätning av de L-formade sektionerna i den givna självkonjugerande partitionen.

Omvänt, om vi har en partition av  $n$  med udda och distinkta delar så kan vi "fälla ihop" diagrammet för att erhålla en självkonjugerad partition av  $n$ . Av den anledningen är antalet partitioner för dessa partitionsidentiteter lika.  $\square$

Vi illustrerar beviset i Exempel 7.10 .

*Exempel 7.10.* Hur många partitioner av typer som finns i Sats 5.8 förekommer det när  $n = 15$ ?

Vi kommer enkelt fram till att det finns 3 partitioner där delarna är udda och distinkta då  $n = 15$ . Vi skriver om partitionen i Ferrersdiagram och använder olika färger för att förtydliga de udda och distinkta delarna. Motsvarande självkonjugerade partitioner blir då dessa.



Det vi ser är att vi har lika många självkonjugerande partitioner som partitioner med udda och distinkta delar, det vill säga 3 partitioner var när  $n = 15$ .

Sats 7.8 är ett exempel på en partitionsidentitet och det existerar en stor mängd sådana partitionsidentiteter varav många är väldigt komplexa. Vi kommer nu att introducera två välkända partitionsidentiteter, nämligen Eulers partitionsidentitet och Rogers-Ramanujans identitet.

**Sats 7.11. (*Eulers partitionsidentitet*)**

För alla positiva heltal  $n$  så gäller att

$$p(n \mid \text{udda delar}) = p(n \mid \text{distinkta delar}).$$

Låt oss ta ett exempel där  $n = 7$ . Heltalet 7 kan partitioneras på 5 olika sätt med udda delar:

$$\begin{aligned} &7 \\ &5+1+1 \\ &3+3+1 \\ &3+1+1+1+1 \\ &1+1+1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

Enligt Eulers partitionsidentitet skall det då finnas 5 partitioner av 7 med distinkta delar, och mycket riktigt får vi partitionerna

$$\begin{aligned} &7 \\ &6 + 1 \\ &5 + 2 \\ &4 + 3 \\ &4 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Nu skall vi bevisa att detta alltid stämmer.

*Bevis.* Om det existerar en bijektion, har den egenskapen att när vi sätter in en partition med udda delar får vi en partition med distinkta delar, och inversen måste ha motsatta egenskapen.

*Från udda till distinkta delar:* Om vi skall ha distinkta delar får det inte förekomma två exakt lika delar. Om det förekommer två delar som är lika stora i bijektionen, så kommer dessa två sättas samman till en del av dubbla storleken. Vi kan upprepa denna procedur tills att alla delar är distinkta. Denna procedur försätter fram tills bara en del av varje storlek återstår. Exempel på hur processen fungerar:

$$\begin{aligned} 3 + 1 + 1 + 1 + 1 &\rightarrow 3 + (1 + 1) + (1 + 1) \\ &\rightarrow 3 + 2 + 2 \rightarrow 3 + (2 + 2) \\ &\rightarrow 3 + 4 \end{aligned}$$

*Från distinkta till udda delar:* Inversen av att slå samman två distinkta delar är att dela en jämn del till två mindre lika delar. Upprepning av denna procedur leder till en samling av udda delar.

$$\begin{aligned}
4 + 3 &\rightarrow (2 + 2) + 3 \\
&\rightarrow 3 + 2 + 2 \\
&\rightarrow 3 + (1 + 1) + (1 + 1) \\
&\rightarrow 3 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}$$

Inversen till uppdelningen av en del till mindre delar är sammanslagningen. Med detta har vi en bijektion som bevisar Eulers partitionsidentitet [3].  $\square$

Vi lämnar Eulers partitionsidentitet och går vidare till den andra välkända partitionsidentiteten, Roger-Ramanujans partitionsidentitet. För denna partitionsidentitet kommer vi enbart redogöra för själva satsen men utelämna beviset, detta är på grund av att beviset är för komplicerat.

**Sats 7.12. (Rogers - Ramanujan första identitet)** *Partitioner av  $n$  i delar som alla är kongruenta med 1 eller 4 modulo 5 är lika många som partitioner av  $n$  där alla delar är distinkta och differensen är minst 2. Detta skrivs på följande sätt:*

$$p(n \mid \text{alla delar} \equiv 1 \text{ eller } 4 \pmod{5}) = p(n \mid \text{alla differenser mellan delar} \geq 2).$$

Vi illustrerar Sats (7.12) med följande exempel.

*Exempel 7.13.* Hur många partitioner av typer som finns i Sats 7.12 förekommer det när  $n = 5, n = 8$  och  $n = 9$ ?

$n$	differens med $\geq 2$	alla delar $\equiv 1$ eller $4 \pmod{5}$
5	5, 4+1	4+1, 1+1+1+1+1
8	8, 7+1, 6+2, 5+3	6+1+1, 4+4, 4+1+1+1+1
9	9, 8+1, 7+2, 6+3, 5+3+1	9, 6+1+1+1, 4+4+1, 4+1+1+1+1+1, 1+1+1...

Tabell 5: Rogers-Ramanujans identitet när  $n = 5, 8, 9$

## 8 Hardy-Ramanujans asymptotiska formel

I detta kapitel kommer vi kort berätta om Hardy-Ramanujans asymptotiska formel samt visa hur lite den egentligen skiljer sig från partitionsfunktionen  $p(n)$ . Detta kommer göras med hjälp av grafer. Vi kommer även grafiskt illustrera hur Fibonaccitalen är en övre gräns till  $p(n)$ .

Som vi tidigare nämnt besökte Ramanujan matematikern Hardy och tillsammans utvecklade de en asymptotisk formel. Denna formel kallas för Hardy-Ramanujans asymptotiska formel och upptäcktes år 1918. Formeln har egenskapen att räkna fram ett ganska exakt närmevärde för antalet partitioner av ett heltal  $n$ . Formeln är följande

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

Detta betyder att vänsterled och högerled är asymptotisk lika. För stora  $n$  blir det relativa felet mot närmevärdet mindre, det vill säga kvoten av

$$\frac{p(n)}{\frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}}$$

går mot 1 när  $n \rightarrow \infty$ .

Matematikern Hans Rademacher (1892–1969) fortsatte att forska vidare på denna formel och 20 år senare kom han fram till den formel som gav det exakta värdet av  $p(n)$ . Formeln ser ut på följande sätt

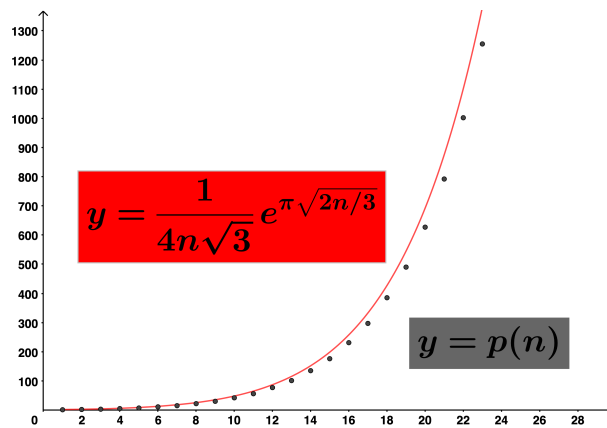
$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \cdot \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \sinh \left( \frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3} \left( n - \frac{1}{24} \right)} \right) \right)$$

där

$$A_k(n) = \sum_{0 \leq m < k, (m,k)=1} e^{\pi i (s(m,k) - \frac{2nm}{k})}$$

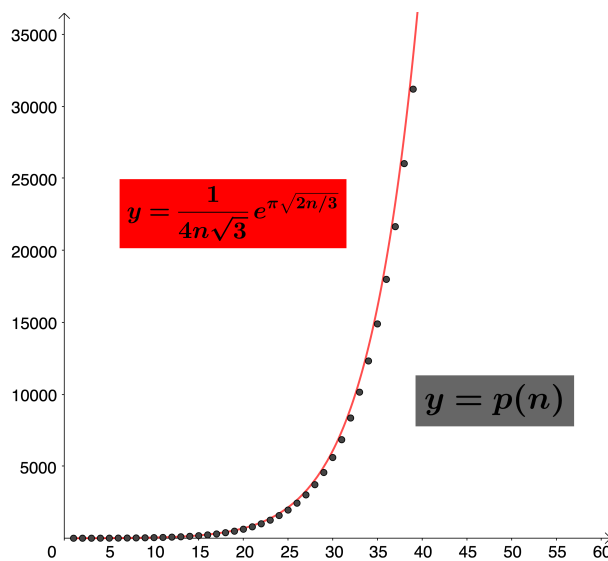
och funktionen  $s(m, k)$  är en så kallad Dedekindsomma [1]. Det här är en alltså formel för  $p(n)$ , så skulle vi sätta in talet 0 får vi talet 1 och sätter vi in talet 4 får vi talet 5 och så vidare. Denna formel är väldigt komplicerad. Av den anledningen kommer vi återvända till Hardy-Ramanujans enklare asymptotiska formel.

Det vi vill visa nu är hur bra den asymptotiska formeln är. Detta kommer vi göra med hjälp av grafer där vi skissar in både asymptotiska formeln och formeln för  $p(n)$ .



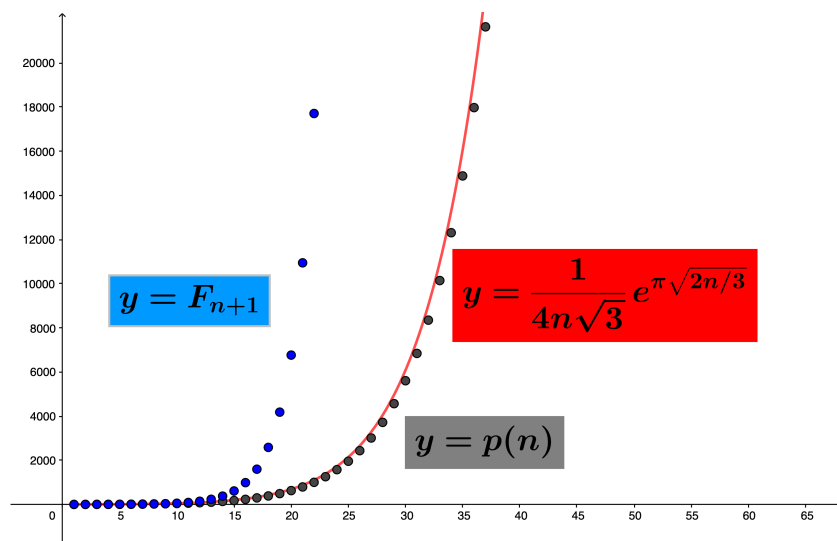
Figur 10: Asymptotiska formeln och  $p(n)$

Iakttar vi Figur 11 ser vi att det skiljer sig mellan den asymptotiska formeln och  $p(n)$  till en början för det positiva heltalen  $n$ . Detta ändras dock när för högre värden för heltalen  $n$ , då det relativa felet minskar.



Figur 11: Asymptotiska formeln och  $p(n)$

Det vi ser från Figur 12 är att Hardy-Ramanujans asymptotiska formel är nästan identisk i förhållande till  $p(n)$  för större värden av  $n$ .



Figur 12: Fibonaccis talföljd, Asymptotiska formeln och  $p(n)$

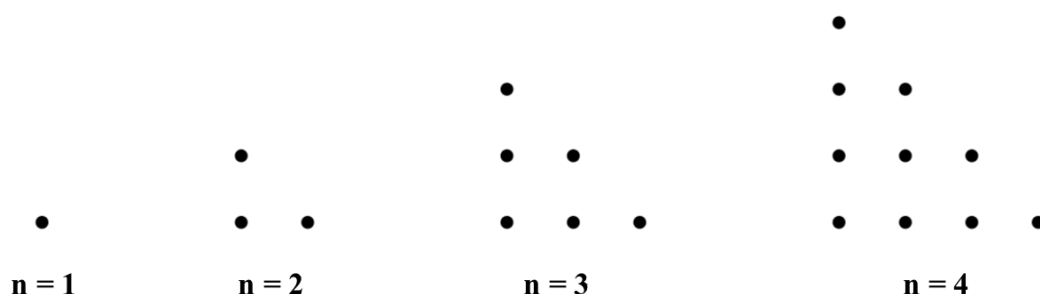
Vi har tidigare nämnt att Fibonaccis talföljd är en övregräns till  $p(n)$  och i Figur 12 finns alla de 3 graferna för att visa hur de förhåller sig mellan varandra [6].



## 9 Pentagonaltal

Ett pentagonaltal är ett figurtal som utvidgar begreppen triangeltal och kvadrattal. Att veta vad som karakteriserar pentagonaltalen kan vara mindre känt. Vi börjar med något vi är bekanta med sen tidigare, triangeltal och kvadrattal. Följden för triangeltalen är  $1, 3, 6, 10, 15, \dots$

Tal som kan skrivas som summan av  $n$  på varandra följande naturliga tal från 1 till  $n$  kallas triangeltal. Anledningen till att dessa kallas triangeltal är att en liksidig triangel bildas med punkten lika med talets värde. Som det framgår i Figur 13 är det första triangeltalet 1. Det andra triangeltalet är antalet punkter i det första liksidig triangel med två punkter vid basen, det vill säga 3.



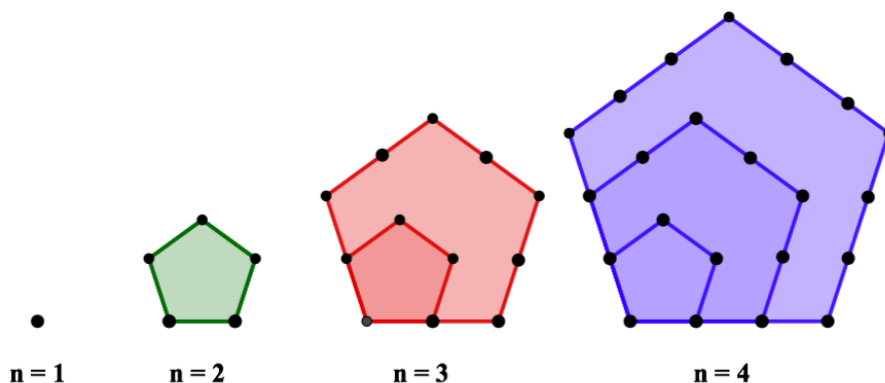
Figur 13:

För att hitta det  $n$ :te triangeltalet  $T_n$ , kan vi räkna ihop summan av alla heltal  $1, 2, 3, \dots$  upp till  $n$  och sätta ihop två likadana trianglar till en rektangel alltså  $2T_n$ . Rektangeln har  $n$  rader med  $n + 1$  kolumner och sätter vi ihop dessa får vi  $n(n + 1) = 2T_n$  punkter. Hälften i rektangeln, alltså triangeltalen blir

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = T_n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Kvadrattal är  $n^2$  för alla positiva heltal  $n$  är antalet punkter i en kvadrat med sidlängd  $n$ .

Vi går nu vidare till pentagonaltalen. Pentagonaltalet är antalet punkter i en regelbunden femhörning med  $n$  punkter per sida som i Figur 14 och betecknas  $p_n$ . I Figur 14 ser vi de 4 första regelbundna femhörningarna med sidlängd 1, 2, 3 respektive 4 punkter. Vi har att  $p_1 = 1, p_2 = 5, p_3 = 12, p_4 = 22$  och näst kommande term i följderna är  $p_5 = 35$ .



Figur 14: 4 första regelbundna femhörningar

Vi noterar att antalet punkter i den  $(n + 1)$ :ta femhörningen är lika med antalet punkter i den  $n$ :te femhörningen med ytterligare 3 sidor. För var och en av dessa tre sidor tillkommer  $n + 1$  punkter. Iakttar vi nu antalet punkter som är involverade, ser vi att två punkter överlappar och detta kan skrivas om så att  $p_{n+1} = p_n + 3(n + 1) - 2$ .

Vi tar ett exempel genom att titta på de ovanstående femhörningarna. För att konstruera femhörningen  $n = 3$  tar vi femhörning  $n = 2$  och adderar  $3(n + 1) - 2$ . Det vi får är  $5 + 3(2 + 1) - 2 = 12$  och detta är alltså antalet punkter som förekommer i femhörningen  $n = 3$ . På samma sätt är antalet punkter i femhörning  $n = 4$  lika med femhörning  $n = 3$  adderat med  $3(3 + 1) - 2$ , genom detta får vi att femhörning  $n = 4$  består av 22 punkter. Allmänt är antalet punkter i  $(n + 1)$ :te femhörningen densamma som i den  $n$ :te femhörningen plus  $3(n + 1) - 2$  punkter.

**Sats 9.1.** *Pentagonaltal ges av följande formel [6]*

$$p_n = \frac{3n^2 - n}{2}. \quad (9.2)$$

Vi ska nu visa att Sats 9.1 stämmer genom ett induktionsbevis

*Bevis.* Vi kontrollerar att detta stämmer  $p_1 = 1 = \frac{3 \cdot 1^2 - 1}{2}$ , så  $p_n = \frac{3n^2 - n}{2}$  är sant för  $n = 1$ . Antag att det är sant för ett givet  $n$ , alltså det  $n$ :te pentagonaltalet beräknas med  $p_n = \frac{3n^2 - n}{2}$ . Nästa steg blir att visa

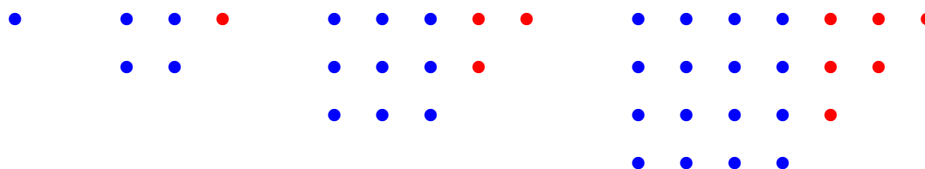
$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + 3(n+1) - 2 \\ &= \frac{3n^2 - n}{2} + 3n + 1 \\ &= \frac{3(n+1)^2 - (n+1)}{2}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Nu har vi bevisat att om  $p_n = \frac{3n^2 - n}{2}$  så är  $p_{n+1} = \frac{3(n+1)^2 - (n+1)}{2}$ . Eftersom vi vet att det är sant för basfallet  $n = 1$  så är det enligt principen för matematisk induktion sant för alla  $n \geq 1$ .  $\square$

Pentagonaltalen är väldigt nära besläktade med triangel- och kvadrattalen. För att beräkna  $p_n$  kan man dela upp formeln som en summa av triangeltal och kvadrattal. Vi kan skriva pentagonaltalen så att

$$p_n = \frac{3n^2 - n}{2} = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + T_{n-1}. \tag{9.4}$$

Det  $n$ :te pentagonaltalet för  $n \geq 0$  räknas ut med addition av  $n^2$  och  $T_{n-1}$ . Vi visar även i Figur 15 hur det kan se ut för de fyra första pentagonaltalen.



Figur 15: Första typen av pentagonaltal

Vi får en följd som ser ut på följande sätt  $0, 1, 5, 12, 22, 35, 51 \dots$

Pentagonaltal  $p_n$  för  $n > 0$  kallas ibland för pentagonaltal av den första typen. Om vi istället sätter in negativa tal i Sats 9.1 får man pentagonaltal av den andra typen som är

$$P_n = \frac{3n^2 + n}{2} = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + T_n. \quad (9.5)$$

Med hjälp av Ferrersdiagram visar vi i Figur 16 hur det kan se ut



Figur 16: Andra typen av pentagonaltal

Genom att sätta in de negativa talen,  $-1, -2, -3 \dots$  i formeln får vi denna följd  $2, 7, 15, 26, 40, 57, 77 \dots$  vilket motsvarar alltså antalet punkter i den yttersta femhörningen. Den första och andra typen av pentagonaltal tillsammans kallas för de generaliserade pentagonaltalen och kommer att ha en stor betydelse när vi bevisar Eulers pentagonalsats i nästa kapitel [1]. De generaliserade pentagonaltalen ser ut på följande sätt

$n$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6
$p_n$	0	1	2	5	7	12	15	22	26	35	40	51	57

Tabell 6: Generaliserade pentagonaltal

Tabell 6 visar följderna för de generaliserade pentagonaltalen ordnade i stigande ordning.

**Definition 9.6.** Den partition av ett generaliserat pentagonaltal som ges av Ferrersdiagrammet i Figur 15 respektive Figur 16 kallas för pentagonalpartitionen.

## 10 Eulers pentagonalsats

I detta kapitel kommer vi att presentera Eulers pentagonalsats som är en annan viktig partitionsidentitet. Eulers pentagonalsats kommer även illustrera de generaliserade pentagonaltalens betydelse.

**Sats 10.1.** *För alla positiva heltal  $n$  så gäller att*

$$U(n) = J(n) + \epsilon(n)$$

där  $U(n) = p(n \mid \text{udda antal distinkta delar})$  och  $J(n) = p(n \mid \text{jämmt antal distinkta delar})$ . Vidare är  $\epsilon(n) = (-1)^m$  om  $n = \frac{m(3m \pm 1)}{2}$  för något heltal  $m$ , annars är  $\epsilon(n) = 0$  [1].

Således, för de flesta heltal  $n$  gäller

$$p(n \mid \text{jämmt antal distinkta delar}) = p(n \mid \text{udda antal distinkta}),$$

dock finns det undantag för denna regel. Undantagen uppstår när  $n$  är ett generaliserat pentagonaltal. Om vi har ett heltal  $n$  som inte är ett generaliserat pentagonaltal får vi att  $U(n) - J(n) = 0$ . När heltalet  $n$  är ett generaliserat pentagonaltal, är  $U(n) - J(n)$  endera  $-1$  då det finns en mer med udda distinkta delar, eller  $+1$  om det finns en mer med jämmt antal distinkta delar. Se följande tabell som visar värden på  $\epsilon(n)$  för de första 6 generaliserade pentagonaltalen.

$n$	$U(n)$	$J(n)$	$\epsilon(n)$
0	0	1	-1
1	1	0	+1
2	1	0	+1
5	1	2	-1
7	2	3	-1
12	8	7	+1

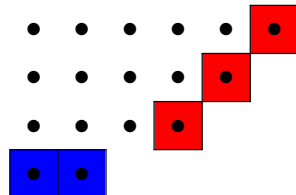
Tabell 7:  $\epsilon(n)$  för de 6 första generaliserade pentagonaltalen

Notera att  $\epsilon(0) = U(0) - J(0) = -1$ , detta på grund av att triviala partitionen 0 av heltalet 0 anses vara en partition som är jämn. Beviset till denna sats är ett bijektivt bevis som upptäcktes av den amerikanska matematikern Fabian Franklin år 1881. Innan beviset börjar vi med att definiera några begrepp som kommer att användas.

**Definition 10.2.** Vi betecknar bottenraden i Ferrersdiagrammet för en partition  $\lambda$ , med  $B = B(\lambda)$  och antalet punkter i  $B$  benämns med  $b = b(\lambda)$ .

**Definition 10.3.** För en partition  $\lambda$  som endast innehåller distinkta delar finns det en diagonal som har sin startpunkt i övre högra hörnet i Ferrersdiagrammet som fortsätter nedåt med 45 graders lutning tills antal punkter längs den linjen tar slut. Den diagonalen benämner vi med  $D = D(\lambda)$  och antalet punkter i  $D$  betecknar vi  $d = d(\lambda)$ .

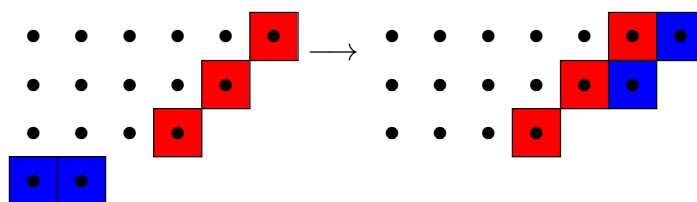
Vi illustrerar detta med följande figur.



Figur 17: De blå punkterna är  $B(\lambda)$  och de röda punkterna är  $D(\lambda)$

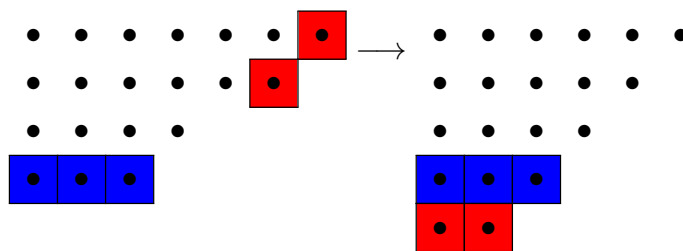
*Bevis.* Låt  $n$  vara ett positivt heltal och låt  $M$  vara mängden av alla distinkta partitioner av  $n$ . Franklins idé var att försöka införa en bijektion  $f : M \rightarrow M$  som tar en partition med distinkta delar och byter pariteten från udda antal distinkta delar till jämnt antal distinkta delar och vice versa. Att införa en bijektion på mängden  $M$  visar sig fungera i alla fall förutom när man har en pentagonalpartition i  $M$ . I detta bevis börjar vi med att beskriva Franklins transformationer och visar när bijektionen är giltig. Franklin definierade transformationen av en partition  $\lambda$  med hjälp av Ferrersdiagram på följande sätt:

Om bottenraden  $B(\lambda)$  är kortare eller lika lång som diagonalen  $D(\lambda)$  så flyttas punkterna i  $B(\lambda)$  så att de bildar en ny diagonal precis till höger om den ursprungliga diagonalen  $D(\lambda)$ .



Franklins transformation om  $b(\lambda) \leq d(\lambda)$

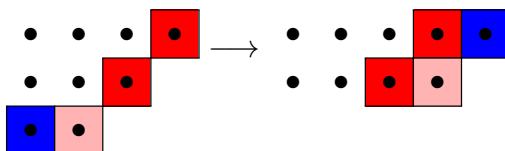
Om  $B(\lambda)$  innehåller strikt fler punkter än  $D(\lambda)$  så ersätter  $D(\lambda)$  bottenraden och bildar en ny bottenrad  $B(\lambda)$ .



Franklins transformation om  $b(\lambda) > d(\lambda)$

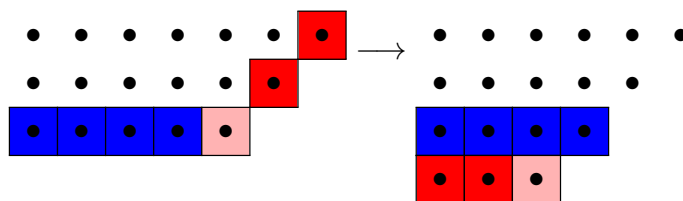
Om  $B(\lambda)$  och  $D(\lambda)$  är disjunkta kan man ganska enkelt konstatera att transformationen går att genomföra utan problem. Nu undersöker vi för vilka fall transformationen är möjlig om  $B(\lambda) \cap D(\lambda) \neq \emptyset$ .

Fall 1: Om  $b < d$  så flyttar vi upp bottenraden  $B(\lambda)$  och bildar en ny diagonal precis till höger om den ursprungliga diagonalen  $D(\lambda)$  och då är transformationen möjlig.



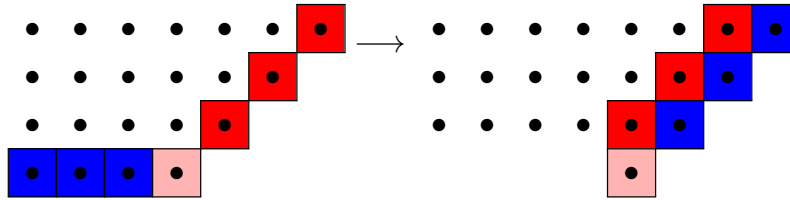
Fall 1 : Franklins transformation om  $b(\lambda) < d(\lambda)$

Fall 2: Om  $b > d + 1$  flyttas diagonalen  $D(\lambda)$  ner och den nya bottenraden kommer att vara kortare än den gamla bottenraden och då är transformationen möjlig.



Fall 2 : Franklins transformation om  $b(\lambda) > d(\lambda) + 1$

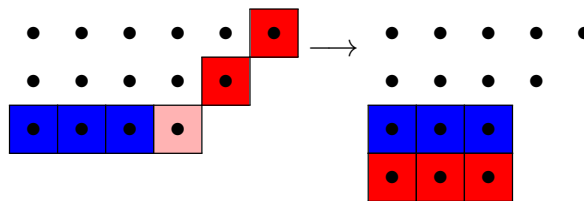
Fall 3: Om  $b = d$  så ska  $B(\lambda)$  flyttas upp till diagonalen och bilda en ny diagonal och vi får följande



Fall 3 : Franklins transformation om  $b(\lambda) = d(\lambda)$

Transformationen är inte möjlig att genomföra enligt Franklins regler eftersom vi får ett otillåtet diagram. Vi noterar att detta inträffar då  $\lambda$  är en pentagonalpartition av första typen.

Fall 4: Om  $b(\lambda) = d(\lambda) + 1$  så flyttas diagonalen  $D(\lambda)$  ner och bildar en ny bottenrad och detta illustreras på följande sätt



Fall 4 : Franklins transformation om  $b(\lambda) = d(\lambda) + 1$

I detta fall är transformation ej möjlig på grund av att vi får en partition som innehåller två rader med samma antal punkter. Alltså har vi en partition som inte är distinkt. Detta inträffar då  $\lambda$  är en pentagonalpartition av den andra typen. Sammanfattningsvis kan vi nu konstatera att det är endast i fallen då  $\lambda$  är en pentagonalpartition som Franklins transformation ej är möjlig [6].

Vi låter nu mängden  $M' \subseteq M$  bestå av alla distinkta partitioner av  $n$  förutom pentagonalpartitionen, när sådan finns. Då har vi en bijektion  $f : M' \rightarrow M'$  som tar en partition  $\lambda$  med udda distinkta delar till en partition  $f(\lambda)$  med jämnt antal distinkta delar, och vice versa.  $M'$  innehåller alltså lika många partitioner med udda antal distinkta delar som med jämnt antal distinkta delar. När  $n$  inte är ett pentagonaltal är  $M' = M$ , så vi är alltså klara. Om  $n = \frac{m(3m \pm 1)}{2}$ , består  $M \setminus M'$  av exakt en partition med  $m$  delar, så  $M$  har en extra partition med jämnt antal delar om  $m$  är jämn, och med udda antal delar om  $m$  är udda. Därmed är satsen bevisad.  $\square$



## 11 Bevis för Eulers rekursionsformel

Beviset som kommer presenteras nedan har inspirerats från en youtube video med namnet “The Hardest ‘What comes next?’” från matematikern Bukard Polster [6]. I denna video illustrerar Polster beviset för ett specialfall med heltalet  $n = 13$ , däremot ger vi här ett allmänt bevis.

I kapitel 6 presenterades Eulers rekursionsformel

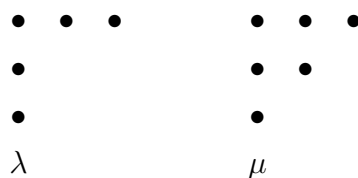
$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left( p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right)$$

som även kan skrivas om som

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - \dots$$

som kan användas för att rekursivt beräkna värden av  $p(n)$ .

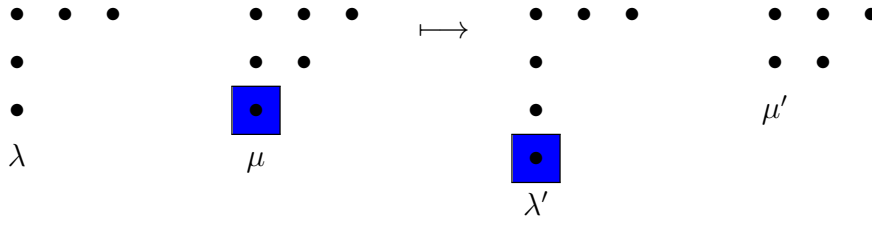
*Bevis.* Låt  $n$  vara ett heltal. Vi låter  $M = M(n)$  vara mängden som består av par  $(\lambda, \mu)$ , där  $\lambda$  är en godtycklig partition och  $\mu$  en distinkt partition, och partitionerna tillsammans adderas till  $n$ . Vi tillåter  $\lambda$  och  $\mu$  även vara partitioner av 0. Nedan illustreras  $\lambda$  och  $\mu$  som ett element i mängden  $M(11)$  med hjälp av Ferrersdiagram.



Figur 18:  $(\lambda, \mu) \in M(11)$

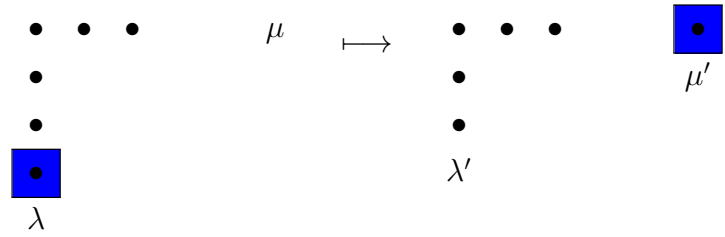
Vi vill konstruera en bijektion  $f : M \rightarrow M$ . Tag  $(\lambda, \mu)$  i  $M(n)$ . Nu ska vi tala om vad  $f(\lambda, \mu) = (\lambda', \mu')$  ska vara. Det vi vill är att  $\mu'$  ska bli en ny distinkt partition som tillsammans med  $\lambda'$  adderas upp till  $n$  samt att pariteten hos  $\mu'$  ska vara omvänd mot pariteten av  $\mu$ .

Bijektionen  $f$  definieras på följande sätt: Om  $b(\lambda) \geq b(\mu)$  så flyttas punkterna i bottenraden  $B(\mu)$  till en ny bottenrad i  $\lambda$  så att vi får ett nytt par  $(\lambda', \mu')$ . Ett undantag blir fallet då  $b(\mu) = 0$ , vilket inträffar om  $\mu$  är en partition av 0. Då ska istället bottenraden i  $B(\lambda)$  flyttas så att vi får en ny rad i  $\mu'$ . Transformationen illustreras nedan:



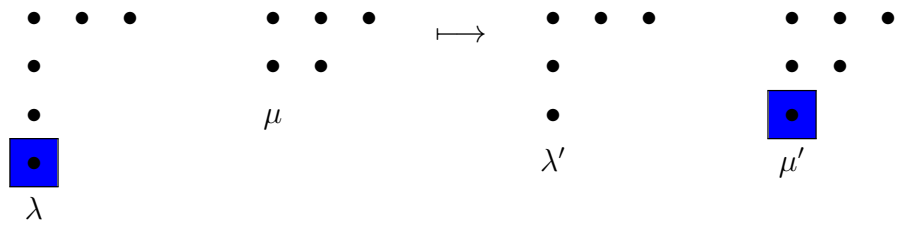
$$f(3 + 1 + 1, 3 + 2 + 1) = (3 + 1 + 1 + 1, 3 + 2)$$

Ett exempel när  $\mu$  är en partition av 0 är;



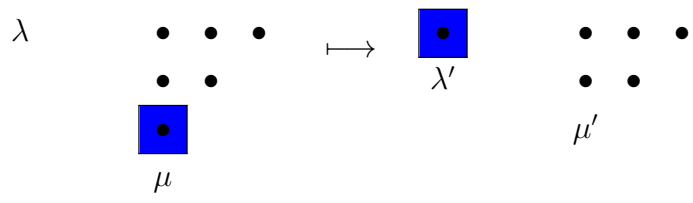
$$f(3 + 1 + 1 + 1, 0) = (3 + 1 + 1, 1)$$

Om  $b(\lambda) < b(\mu)$  så flyttas punkterna i  $B(\lambda)$  till en ny bottenrad i  $\mu$  så att vi får ett nytt par  $(\lambda', \mu')$ . Ett undantag blir fallet då  $b(\lambda) = 0$ , vilket inträffar om  $\lambda$  är en partition av 0. Då ska bottenraden i  $B(\mu)$  flyttas så att vi får en rad i  $\lambda'$ . Transformationen illustreras nedan:



$$f(3 + 1 + 1 + 1, 3 + 2) = (3 + 1 + 1, 3 + 2 + 1)$$

Ett exempel när  $\lambda$  är en partition av 0 är;



$$f(0, 3 + 2 + 1) = (1, 3 + 2)$$

Vi delar nu upp mängden  $M$  till delmängderna  $M_U$  och  $M_J$  efter antalet delar som finns i  $\mu$  så att:

$$M_U = \{(\lambda, \mu) \in M \mid \mu \text{ har udda antal delar}\}$$

$$M_J = \{(\lambda, \mu) \in M \mid \mu \text{ har jämnt antal delar}\}.$$

Eftersom  $f$  ändrar pariteten hos  $\mu$ , får vi en bijektion

$$f : M_U \rightarrow M_J$$

$$\text{så att } |M_U| = |M_J|.$$

Antalet element i dessa mängder är

$$|M_U| = \sum_{k=0}^n p(n-k)U(k)$$

och

$$|M_J| = \sum_{k=0}^n p(n-k)J(k),$$

där summan räknas av alla par av  $(\lambda, \mu)$ . Detta för att om  $\mu$  är en partition av  $k$ , då måste  $\lambda$  vara en partition av  $n-k$ . Antalet godtyckliga partitioner beräknas då med  $p(n-k)$  och antalet udda distinkta partitioner med  $U(k)$ , på samma sätt kan vi beskriva  $M_J$ .

Eftersom  $|M_U| = |M_J|$  får vi

$$\sum_{k=0}^n p(n-k)U(k) = \sum_{k=0}^n p(n-k)J(k)$$

Relationen kan skrivas om till:

$$\sum_{k=0}^n p(n-k)(U(k) - J(k)) = 0$$

Från Eulers pentagonalsats vet vi redan att  $(U(k) - J(k)) = \epsilon(k)$  och relationen kan skrivas om på följande vis:

$$\sum_{k=0}^n p(n-k)\epsilon(k) = 0$$

Om vi tar termen för  $k = 0$  för sig själv får vi:

$$p(n)\epsilon(0) + \sum_{k=1}^n \epsilon(k)p(n-k) = 0.$$

Från Tabell 7 vet vi att  $\epsilon(0) = -1$  och då kan vi skriva om ekvationen på följande sätt:

$$p(n) = \sum_{k=1}^n \epsilon(k)p(n-k)$$

Från Eulers pentagonalsats har vi att  $\epsilon(k) = (-1)^m$  om  $k$  är ett  $\frac{m(3m\pm 1)}{2}$ , annars är  $\epsilon(k) = 0$ . Vi kan ändra övre gränsen i formeln för summa notationen från  $n$  till oändligheten för enligt definition 6.2 har vi att  $p(n) = 0$  för alla  $n < 0$ . Eftersom  $\epsilon(k) = 0$  för alla heltal  $n$  som inte är ett pentagonaltal så kan vi negligera dessa termer och summera enbart över pentagonaltalen.

Då kan vi skriva om formeln på följande sätt

$$p(n) = \sum_{k=1}^n \epsilon(k)p(n-k)$$

$$\iff$$

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left( p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right)$$

och därmed är satsen bevisad. □

## Referenser

- [1] Andrews, George E. and Eriksson Kimmo. *Integer partitions*. Cambridge University Press, (2004).
- [2] Biggs, Norman L. *Discrete mathematics*. Oxford University Press, (2008).
- [3] Eriksson, Kimmo, and Gavel, Hillevi. *Diskret matematik: fördjupning*. Studentlitteratur, Lund, (2003)
- [4] Gautschi, Walter. *Leonhard Euler: his life, the man, and his works*. SIAM review 50.1, 3-33 (2008)
- [5] O'Connor, John. J., and Robertson, Edmund, F. *Leonhard Euler. Mac-Tutor History of Mathematics*. University of St Andrews, Scotland. (1998).
- [6] Polster, Burkard [Mathologer]. *The hardest "What comes next" (Euler's pentagonal formula)* [Youtube] (2020).  
<https://www.youtube.com/watch?v=iJ8pnCO0nTY>