



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Såpbubblor och matematik

av

Hanna Persson

2022 - No K9

Såpbubblor och matematik

Hanna Persson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2022

Såpbubblor och matematik

Hanna Persson

April, 2022

Abstract

Bubbles, and specifically soap bubbles, are truly fascinating. They are also the main subject for this paper. Which mathematical patterns and shapes are there in bubbles, and how can we use bubbles to explain mathematical phenomena? In this paper we examine a fraction of this, starting with a brief section about surface tension and bubbles. We present and prove the Steiner Tree Problem, which further on is connected to soap films and soap bubbles. Plateau's three principles about soap films are discussed. We look at how soap films behave in a tetrahedron and a cube, and examine which rules apply. At last we present what happens when two and three bubbles meet, and look at some geometrical patterns the bubbles follow according to the mathematical problems and theorems presented and proved earlier in the paper.

Förord

Jag vill rikta ett särskilt tack till min handledare, Torbjörn Tambour, för den vägledning, de tips och det stöd du gett mig under arbetet med denna uppsats. Tack även till mina nära och kära som stöttat mig, och då speciellt tack till Nathalie Wiberg för ditt otroliga engagemang, till Frida Sundberg för att du varit ett bollplank, och till John Agewall för det engagemang, den hjälp och det stöd du gett under hela arbetet.

Innehåll

Abstract	i
Förord	ii
1 Introduktion	1
1.1 Varför bubblor?	1
1.2 Struktur	1
2 Ytspänning	1
3 Steinerträd	3
3.1 Herons problem om kortast avstånd	3
3.2 Steiners trädproblem	4
3.3 Bevis av Steiners trädproblem	5
3.4 Steinerträd med fler än tre punkter	8
4 Tvåfilmer	9
4.1 Tvåfilmer och Steiners trädproblem	9
4.2 Plateaus tre principer	10
4.3 Tetraeder och kub	12
4.3.1 Tetraeder	12
4.3.2 Kub	13
5 Bubblor som sitter ihop	17
5.1 Två bubblor	17
5.2 Tre bubblor	20

6	Avslutning	23
7	Bildförteckning	24
8	Referenser	25
	Bilaga 1	26
	Lemma: Bolzano-Weierstrass sats	26
	Satsen om största och minsta värde	27
	Bilaga 2	28
	Lamis sats	28
	Sinussatsen	28

1 Introduktion

1.1 Varför bubblor?

Bubblor är ett fascinerande fenomen som intresserar såväl barn som vuxna. Utöver att bubblor kan vara fina och roliga att leka med, så är de väldigt mycket mer än så. De har flera olika användningsområden och används inom olika forskningsfält, så som fartygsteknik och medicin (Czerski, 2013), och dessutom finns det oändligt mycket att studera bara gällande bubblan i sig. Morgan (2015) ser såpbubblan som en metafor för universum, och han säger i sin föreläsning *Soap Bubbles and Mathematics* att "if you want to understand the universe, start out by understanding the soap bubble" (19 min 57 s). Även om syftet med detta arbete visserligen är att förstå såpbubblan i sig, så är det *inte* en strävan mot förståelse av universum. Syftet är snarare att jag vill fördjupa mig i, och synliggöra, en bråkdel av den matematik som finns runtomkring oss i någonting så vardagligt som såpbubblor. Ämnet är valt utifrån eget intresse för just såpbubblor. Jag har även en förhoppning om att kunna ta med mig tanken av att synliggöra matematiken runtomkring oss in i mitt framtida arbete som ämneslärare i matematik, och till mina framtida elever.

1.2 Struktur

Inledningsvis i texten har vi ett stycke som kort lyfter ytspänning och såpbubblor, främst i syfte att skapa en grundförståelse för bubblors uppträdande. Vidare presenteras **Steiners trädproblem** med hjälpsats och bevis. Sedan följer ett avsnitt om tvålfilmer och strukturer, delvis kopplat till Steiners trädproblem. Slutligen undersöker vi egenskaper hos bubblor som sitter ihop, två och tre stycken.

2 Ytspänning

Olika vätskor har egenskapen av en "hinna" vid gränsytan mellan vätska och luft. Spänningen i denna hinna, *ytspänningen*, beror på vilken vätskan är (Barnes, 2012). Vätskans gränsyta har ett överskott av energi, så kallad ytenergi, och detta beror på att molekylerna vid ytan har högre energi än molekylerna i det inre av vätskan. Anledningen till detta är att molekylerna vid ytan har färre bindningar dem emellan än molekylerna i vätskans inre, och färre bindningar medför högre energi. Ytenergin har som följd att vätskan strävar efter en minimal yta, och detta leder exempelvis till att en droppe vätska antar formen av en sfär (eller att en bubbla har en sfärisk form). Vi kan tolka ytenergin som en spänning, eller kraft per längd (Nationalencyklopedin, 2021).

Om vi har vätskan vatten och droppar i lite diskmedel eller såpa så kommer detta minska ytspänningen. En blandning av vatten och såpa har alltså en lägre ytspänning än vatten i sig, och detta är grundläggande för såpbubblors existens. Vattnets ytspänning är så pass stark att den ”drar sönder” eventuella bubblor som bildas, medan såpan i en blandning mellan såpa och vatten ändrar hur hinnan vid gränsytan beter sig genom att reducera ytspänningen, vilket gör att kraften som ”drar sönder” bubblan är svagare. Detta skapar förutsättning för såpbubblor att existera (Czerski, 2013).

Vi betraktar en bubbla och tänker oss att denna har ytspänning T . Vidare betraktar vi spänningen (kraft/längdenhet) på *halva* bubblan. Vi har alltså en tvålfilm i form av en halv bubbla, och har därmed delat bubblan längs dennes omkrets, se Figur 1. Vi ser omkretsen som en inbäddad linje i tvålfilmen, där kraften som verkar på denna med avseende på ytspänning ges av

$$2T \cdot 2\pi R = 4T\pi R,$$

där R är bubblans radie. Detta eftersom vi multiplicerar den givna kraften T med 2 (ty hinnan är tvåsidig), och längden på linjen är lika med bubblans omkrets vilken är $2\pi R$. Alltså bestäms kraften per längdenhet agerande på halva bubblan av $4T\pi R$. Denna kraft har motvikt i skillnaden i tryck, som vi kallar P , mellan luften utanför och inuti bubblan. Denna är beroende av snittets area, alltså arean av cirkeln som skär bubblan, och med vår givna radie R är denna lika med πR^2 . Vidare får vi kraften

$$P\pi R^2.$$

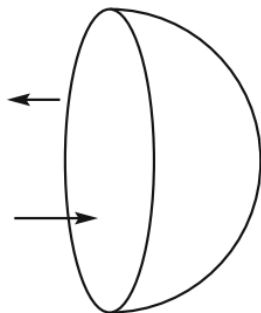
Förhållandet mellan dessa två krafter blir då

$$4T\pi R = P\pi R^2,$$

vilket är ekvivalent med

$$P = \frac{4T}{R},$$

enligt Barnes (2012).



Figur 1: Två krafter verkas på en halv bubbla: Den ena med avseende på ytspänning och den andra med avseende på lufttryck (Barnes, 2012, s.138).

3 Steinerträd

Ett *träd* är inom matematiken en graf som inte innehåller några cykler. Ett *Steinerträd* är ett träd där en eller flera extra punkter (så kallade Steinerpunkter) har adderats till grafen för att minska den totala kantsträckan mellan punkterna. För ett givet antal startpunkter kan det finnas flera möjliga Steinerträd. Vissa av dessa motsvarar lokala minimum, och andra globala minimum. De träd som svarar mot globala minimum kallas på engelska *Steiner minimal trees* (men här översatt till *minimala Steinerträd*) och dessa har den kortaste totala kantsträckan vi kan få mellan startpunkterna (Dutta m. fl., 2008). Nedan kommer vi studera just dessa globala minimum, alltså de minimala Steinerträden, men innan det kommer en hjälpsats till Steiners trädproblem presenteras och bevisas. Vidare kommer vi gå igenom Steiners trädproblem för tre punkter för att sedan utvidga till fler än tre punkter.

3.1 Herons problem om kortast avstånd

För beviset av Steiners trädproblem kan vi använda oss av **Herons problem om kortast avstånd** som hjälpsats, som i själva verket är reflektionslagen inom optiken och bygger på att ljuset tar den kortaste vägen.

Sats 1 (Herons problem om kortast avstånd): *Vi betraktar två givna punkter P och Q i planet, som ligger på samma sida om en linje L . Vi har även en punkt R på linjen L som vi vill placera ut så att sträckan*

$$PR + RQ,$$

blir så kort som möjligt. Lösningen på detta problem får vi genom spegling av punkten P i linjen L , och kallar reflektionen av P på andra sidan L för P' . Nu gäller att linjen $P'Q$ korsar L precis i den sökta punkten R som ger kortast möjliga summa av sträckorna PR och RQ (Courant & Robbins, 1996).

För beviset av detta vill vi visa att $PR + RQ$ är mindre än $PR' + R'Q$ för alla punkter $R' \neq R$ på L . Eftersom punkten P' är speglingen av P i linjen L så gäller

$$PR = P'R,$$

samt

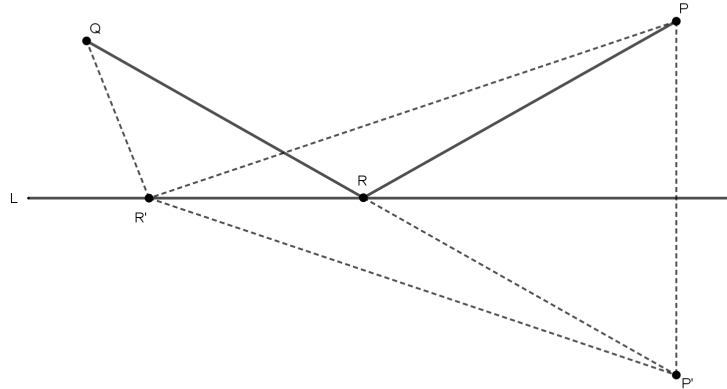
$$PR' = P'R'.$$

Vidare har vi

$$PR + RQ = P'R + RQ = P'Q,$$

och

$$PR' + R'Q = P'R' + R'Q.$$



Figur 2: Herons problem om kortast avstånd.

Vi noterar att $P'R' + R'Q$ måste vara större än $P'Q$. Detta ty de tre sidorna bildar en triangel, se Figur 2, och det gäller att summan av två sidor i en triangel alltid är större än den tredje sidan. Alltså måste $PR' + R'Q$ vara strikt större än $PR + RQ$ om R' är skiljt från R , vilket innebär att R måste vara den punkt på L som ger kortast möjliga summa av sträckorna PR och RQ , vilket skulle visas (Courant & Robbins, 1996).

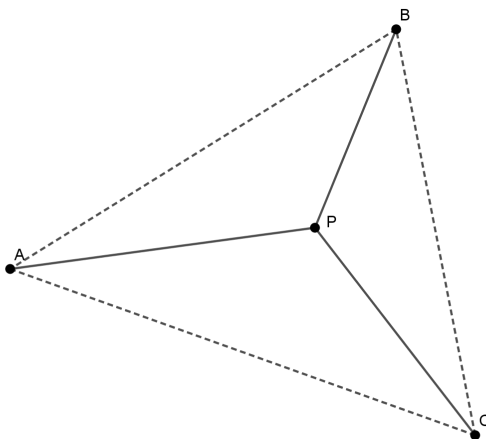
Vidare observerar vi att vinkeln mellan L och PR är lika stor som vinkeln mellan L och $P'R$. Vi ser även att vinkeln mellan L och $P'R$ är lika stor som den mellan L och RQ . Alltså gäller att vinkeln mellan L och PR måste vara lika med vinkeln mellan L och RQ om R placeras på sådant sätt att vi får kortast möjliga avstånd mellan punkterna P och Q via linjen L (Courant & Robbins, 1996).

3.2 Steiners trädproblem

Steiners trädproblem, även kallat "motorvägsproblemet" (Dutta m. fl., 2008), är döpt efter Jakob Steiner (1796-1863). Problemet går ut på att vi har tre punkter, A , B och C som vi vill koppla ihop med så kort kantsträcka som möjligt. Vi kan se det som att vi har tre byar (A , B och C) och att vi vill bygga vägar så att det går att ta sig mellan byarna, samtidigt

som vi vill minimera vägsträckan. Det visar sig att detta görs genom att bestämma en fjärde punkt, P , och placera denna så att vi får minsta möjliga summa av sträckorna AP , BP och CP (Courant & Robbins, 1996). Vi vill alltså välja P så att vi får det minimala Steinerträdet för de tre punkterna (Dutta m. fl., 2008), se Figur 3. Hur bestämmer vi då P ? Lösningen på problemet presenteras i Sats 2.

Sats 2 (Steiners trädproblem): *Vi vill koppla ihop tre punkter, A , B och C , med kortast möjliga kantsträcka. Om alla vinklar i triangeln ABC är mindre än 120° kan vi bestämma en punkt P sådan att vinklarna $\angle APB$, $\angle BPC$ samt $\angle CPA$ alla är lika med 120° . Om någon av vinklarna i triangeln ABC är större än eller lika med 120° , säg $\angle ACB$, så sammanfaller P med C (Courant & Robbins, 1996).*



Figur 3: Steinerträd med tre punkter samt inritad triangel.

3.3 Bevis av Steiners trädproblem

Liksom satsen är beviset hämtat från Courant och Robbins (1996). Vi antar att P är vår sökta minimipunkt och bevisar vart och ett av fallen från satsen. I fallet att P sammanfaller med en av punkterna A , B och C , där vinkeln vid C (alltså $\angle ACB$) är den största vinkeln i triangeln ABC , noterar vi att summan av sidorna CA och CB måste vara mindre än någon annan summa av två sidor i triangeln. Detta ty sidan AB måste vara den längsta sidan eftersom den står mot den största vinkeln. Alltså gäller

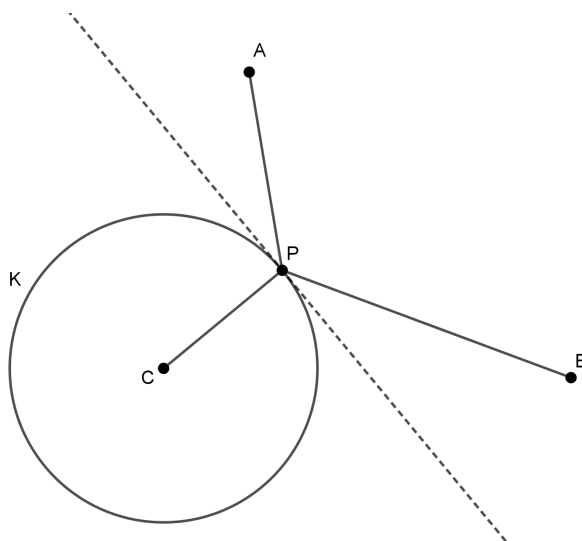
$$CA + CB < CA + AB,$$

samt

$$CA + CB < AB + CB.$$

Om P sammanfaller med en av punkterna A , B eller C följer nu att det måste vara med C ty detta hörn ger kortast kantsträcka.

I det andra fallet, då alla vinklar i ABC är mindre än 120° , bestämmer vi en cirkel K med mittpunkt C och radie CP . Då gäller att P måste vara den punkt på cirkeln K sådan att summan av kanterna AP och BP är så liten som möjligt (Courant & Robbins, 1996). Vi antar att både A och B ligger utanför cirkeln, och vi drar en tangent i punkten P , se Figur 4. Då säger Sats 1 att vinkeln mellan tangenten och kanten AP är lika stor som den mellan tangenten och BP om P är punkten som ger den kortaste summan av kanterna AP och BP . Av detta följer att även vinklarna mellan kanterna och cirkeln K är lika, samt vinklarna mellan kanterna och radien CP . Vi kan enligt Courant och Robbins (1996) använda samma resonemang för att visa att samma sak gäller för en cirkel med mittpunkt A med radie AP , samt cirkeln med mittpunkt B och radie BP . Vidare gäller därför att de tre vinklarna $\angle APB$, $\angle BPC$ och $\angle CPA$ är lika stora och därmed lika med 120° , vilket skulle visas.



Figur 4: Steinerträd med hjälpcirkel K .

Beviset ovan bygger på antagandet att A och B ligger utanför cirkeln K , så vi vill nu visa att detta måste vara fallet. Vi låter åtminstone en av punkterna, exempelvis A , ligga på eller innanför cirkeln K . Eftersom P ej sammanfaller med någon av punkterna A eller B så gäller $AB \leq AP + BP$. Det gäller även att $AC \leq CP$, i och med att A ligger innanför eller på cirkeln K . Av detta följer

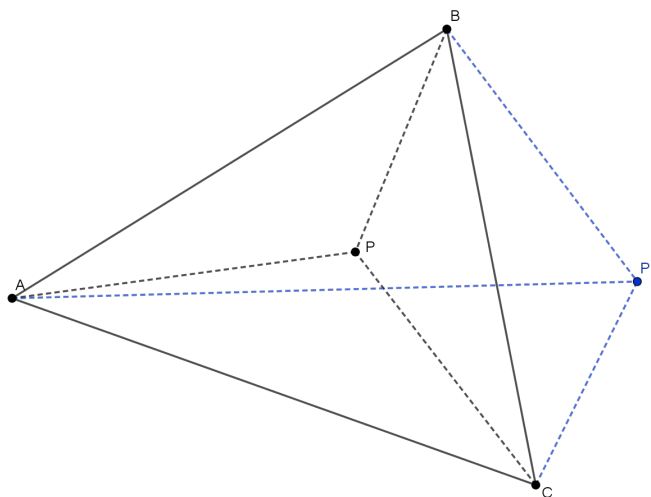
$$AP + BP + CP \geq AB + AC.$$

Utifrån denna olikhet observerar vi att kortast möjliga kantsumma mellan punkterna A , B och C fås då $P = A$, vilket är en motsägelse till vårt grundantagande att P inte sammanfaller med någon av A , B eller C . Därför måste både A och B ligga utanför cirkeln K med mittpunkten C . På motsvarande sätt kan vi visa samma sak för cirkelarna med mittpunkt A respektive B (Courant & Robbins, 1996).

Avslutningsvis vill vi visa att det faktiskt existerar en punkt P som löser problemet. Vi bestämmer en funktion $f(P)$ sådan att

$$f(P) = AP + BP + CP.$$

Om $P = (x, y)$ så är f en kontinuerlig funktion av x och y . Kanterna samt det inre av triangeln ABC bildar en kompakt mängd, så f är kontinuerlig på denna kompakta mängd. Eftersom en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd enligt **Satsen om största och minsta värde**, se Bilaga 1, antar ett minsta värde måste vår funktion $f(P)$ anta sitt minsta värde någonstans i triangeln ABC , antingen på kanten eller i det inre. Därmed existerar en punkt P som ger ett minsta värde. Vi kan lätt övertyga oss om att det inte finns någon punkt utanför triangeln ABC som ger oss ett mindre värde genom att betrakta Figur 5. Vi ser att om vi låter punkten P_1 röra sig i riktning mot punkten P kommer den totala kantsträckan minska. Detta gäller för alla punkter P_1 utanför triangeln ABC , och därmed finns ingen punkt utanför ABC som ger kortare kantsträcka än vår funna punkt P . Beviset är klart.

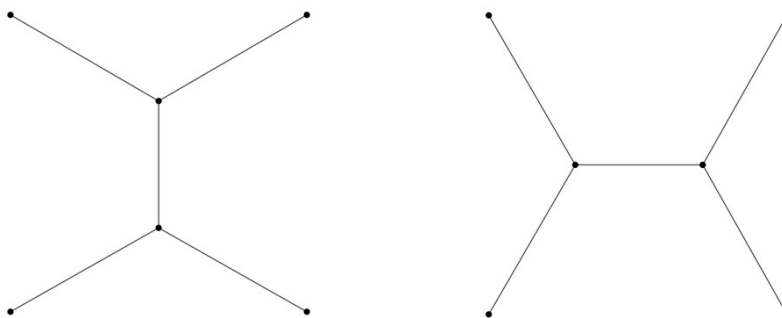


Figur 5: Triangeln ABC med punkter P och P_1 .

3.4 Steinerträd med fler än tre punkter

I fallet med tre punkter har vi som bevisat ovan *en* (Om P inte sammanfaller med någon av punkterna A , B eller C) eller *noll* (Om P sammanfaller med A , B eller C) Steinerpunkter. Om $n = 3$ har vi alltså som flest $n - 2$ Steinerpunkter, och det visar sig att detta samband även gäller för n större än 3 då vi söker minimala Steinerträd (Dutta m. fl., 2008). Courant och Robbins (1996) skriver att ”to find the really significant extension of Steiner’s problem we must abandon the search for a single point P . Instead, we look for the ‘street network’ of shortest total length” (s.360). Vid fler än tre startpunkter behöver vi alltså utvidga och öppna upp för möjligheten att fler Steinerpunkter kan behövas för att finna det minimala Steinerträdet.

Antal Steinerpunkter, och formen på det minimala Steinerträdet, beror på antal startpunkter i trädet samt hur dessa är placerade. Dessutom finns det inte alltid en entydig lösning på problemet. Om vi exempelvis har fyra punkter placerade som hörnen i en kvadrat får vi två möjliga minimala Steinerträd, se Figur 6, med samma kantlängd. Gemensamt för alla Steinerpunkter, oavsett antal startpunkter i trädet, är att det alltid kommer vara tre kanter som möts i Steinerpunkten med 120° vinklar mellan dem (Courant & Robbins, 1996).

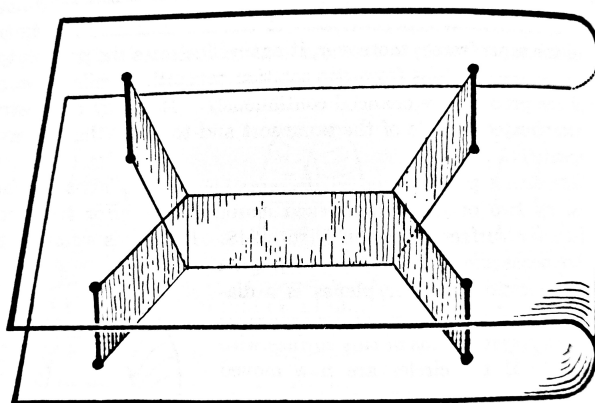


Figur 6: Två möjliga minimala Steinerträd med punkter i hörnen av en kvadrat.

4 Tvåfilmer

4.1 Tvåfilmer och Steiners trädproblem

Att använda sig av såpbubblor och tvåfilmer kan vara en effektiv metod för att lösa Steiners trädproblem och andra liknande problem. Dutta m. fl. (2008) använder tvåfilmer för att undersöka Steinerträd med upp till sex stycken startpunkter. Alltså kan såpfilmer användas för att förklara Steiners trädproblem, och vice versa. Vi föreställer oss att vi har två parallella plexiglasskivor som sitter ihop med x antal vinkelräta pinnar, där x är större än eller lika med 3 (Courant & Robbins, 1996). Vidare tänker vi oss att vi doppar dessa plexiglasskivor i en såpbubbelblandning (en blandning mellan såpa/diskmedel och vatten) och lyfter upp dem. Av detta kommer det bildas tvåfilmer mellan pinnarna, och sättet vi lyfter upp skivorna på kommer påverka utfallet av formen på tvåfilmerna. Däremot kommer filmerna, oavsett hur vi lyfter upp skivorna, forma ett *lokalt* minimum. Tvåfilmernas utformning är även beroende av pinnarnas diameter (Dutta m. fl., 2008), men diameters betydelse kommer inte undersökas närmare i detta arbete. Fokus kommer heller inte ligga på de alternativa lokala minimum som kan fås beroende på hur vi drar upp skivorna ur såpbubbelblandningen, utan vi kommer fokusera på de träd som är Steinerträd och som motsvarar *globala* minimum. Vid dessa globala minimum kommer tvåfilmerna att mötas om tre med 120° vinklar mellan dem, precis som enligt lösningen på Steiners trädproblem, se Figur 7 för exempel med fyra punkter.



Figur 7: Steinerträd med fyra punkter visualiserat av tvåfilmer (Courant & Robbins, 1996, s.392).

Morgan (2015) lyfter att det finns *två* möjligheter då tvåfilmer möts. Den ena är den vi tagit upp ovan, alltså att de möts tre stycken med vinklar på 120° dem emellan. Då möts filmerna längs en kurva. Det andra alternativet är att fyra stycken filmer möts i en punkt, men då

med vinklar på cirka 109° mellan filmerna, och i själva verket är det då fyra kurvor där tre tvåfilmer möts som möter varandra i punkten. Dessa är de enda två möjligheterna som finns oavsett hur konstellationerna ser ut, och utöver exempelvis tvåfilms-konstellationer likt den med plexiglasskivorna tillämpas det även på såpbubblor (Morgan, 2015). Fallet med fyra tvåfilmer som möts definieras av fyra plan i \mathbb{R}^3 som möts i en tetraeders mittpunkt. Dessa generella regler kring vinklar mellan tvåfilmer och tvåfilmers form kan sammanfattas i tre principer formulerade av fysikern och matematikern Joseph Plateau (1801-1883) (Courant & Robbins, 1996).

4.2 Plateaus tre principer

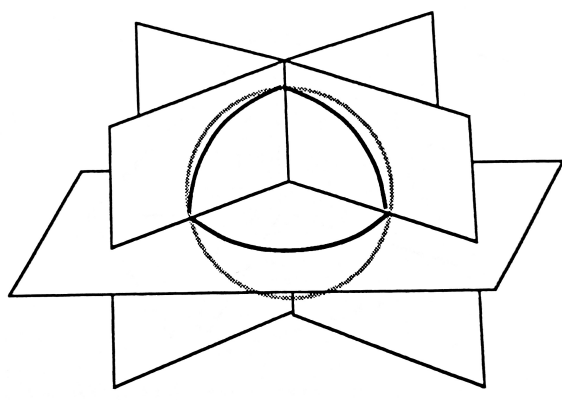
Plateaus tre principer om tvåfilmer, hämtade från Courant och Robbins (1996), presenteras nedan i Sats 3.

Sats 3 (Plateaus tre principer): *För tvåfilmers utformning gäller följande:*

1. *De består av ett ändligt antal ytor, antingen platta eller lätt kurvade.*
2. *Det finns två sätt vilka dessa ytor kan mötas på. Antingen möts precis tre ytor längs en kurva, eller så möts precis fyra sådana kurvor i en punkt.*
3. *Då tre ytor möts gör de det med vinklar på 120° mellan dem, och då fyra kurvor möts sker det med mellanliggande vinklar på ungefär 109° .*

Enligt Courant och Robbins (1996) bevisade Frederick Almgren och Jean Taylor år 1976 att alla dessa principer följer av den enskilda principen att en tvåfilm kommer anta den form som ger den minsta totala arean, vilket är en central egenskap för tvåfilmer och såpbubblor. Vi ska nu argumentera för de tre principerna ovan, och börja med den andra och den tredje principen. Ett fullständigt bevis kommer dock inte presenteras i detta arbete, utan läsaren hänvisas till Taylor (1976) för beviset.

Vi börjar med att utnyttja att tvåfilmen har en jämn yta och reducerar problemet till ett problem om plan i rummet. Detta gör vi genom att betrakta och förstora upp ett mycket litet område kring en linje där tre ytor möts, eller en punkt där fyra ytor möts. I detta lilla område kommer ytorna nästan att vara platta, och ju mindre område vi väljer att förstora upp, desto plattare uppträder de. Även om detta är en förenkling och att det därmed finns en felmarginal i relation till verkligheten, så är det tillräckligt att bevisa Plateaus andra och tredje princip för plan (istället för kurvade ytor) (Courant & Robbins, 1996).

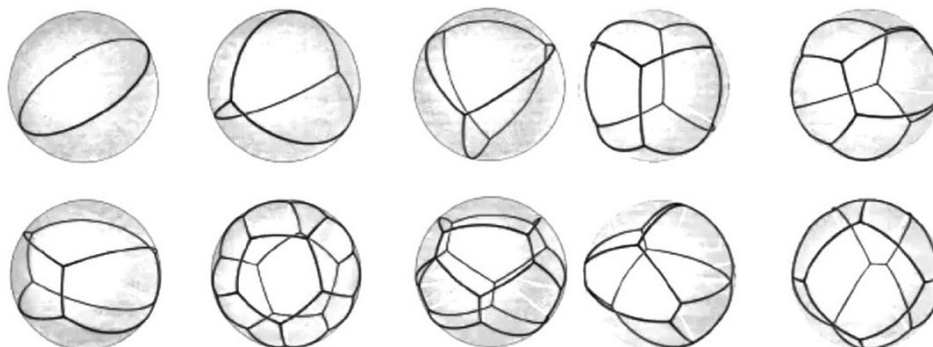


Figur 8: Förändring av ett system av plan till ett system av storcirkelbågar (Courant & Robbins, 1996, s.516).

Fortsättningsvis reducerar vi problemet till ett problem om linjer på en sfär. Vi föreställer oss sfären och tänker oss att vi har ett antal plan som skär igenom denna sfär så att den är centrerad kring linjen där planen skär varandra, se Figur 7 för exempel på hur tre plan möts längs en linje. Har vi fyra plan kommer planen istället skära varandra i en punkt och sfären kommer då att vara centrerad kring denna punkt. Vidare ersätter vi planen med storcirkelbågar, se Figur 8 (Courant & Robbins, 1996). En storcirkel är den största möjliga cirkel vi kan rita på en sfär och uppkommer då vi söker kortast möjliga avstånd mellan två punkter på sfären (Wikipedia, 2021b). Alltså motsvarar storcirkelbågarna kortast möjliga avstånd mellan två punkter. Vi kan översätta Steiners trädproblem till att handla om sfärer, därav gäller det att bågarna möts med mellanliggande vinklar på 120° (Courant & Robbins, 1996).

Vidare visar det sig att det finns precis tio uppsättningar, se Figur 9, av storcirkelbågar som uppfyller våra krav (Morgan, 2015). Beviset av detta kommer ej behandlas i det här arbetet, men det återfinns som nämnt tidigare i Taylor (1976). Var och en av dessa uppsättningar av storcirkelbågar har en motsvarande formation av plan, och nästa steg i beviset är att söka efter deformationer av plan-formationerna som minimerar den totala ytan, genom att exempelvis lägga till nya ytor. Om vi kan finna en sådan deformation som reducerar totala arean så kan vi räkna bort motsvarande formation av storcirkelbågar på en sfär (Courant & Robbins, 1996). Morgan (2015) menar att Taylor (1976) visade att alla förutom tre av de tio uppsättningarna är instabila och går att deformera till en form med mindre area. De tre uppsättningar som motsvarar minimala ytor är de tre första formationerna på översta raden i Figur 9, alltså en enkel storcirkel runt sfären, tre semicirklar som möts med 120° vinklar, samt fyra semicirklar som formar en kurvad tetraeder-liknande figur (se Avsnitt 4.3.1 för tetraeder). Motsvarande uppsättning av plan är för den första formationen en enkel, plan yta. För formation två är det tre ytor som möts med mellanliggande vinklar på 120° , och

för den tredje formationen har vi fyra kurvor som möts med mellanliggande vinklar på 109° . Plateaus andra och tredje principer följer omedelbart av detta (Courant & Robbins, 1996).



Figur 9: Tio uppsättningar av storcirkelbågar (Morgan, 2015, 21 min 16 s).

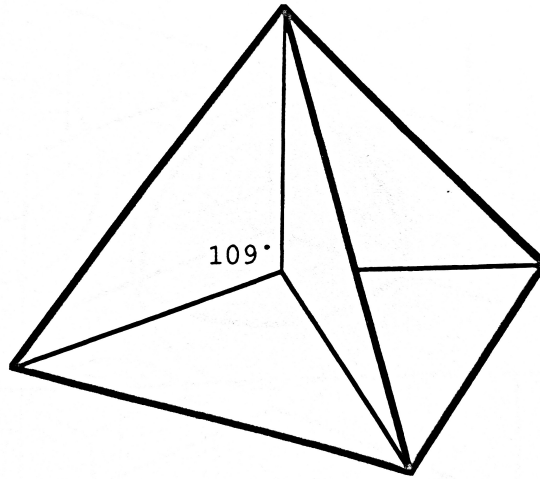
För att kunna visa Plateaus första princip behöver vi ta hänsyn till möjligheten att komplexare former existerar, och detta innebär i sin tur att en generalisering av konceptet area är nödvändig för att anpassa det till dessa mer komplexa former. Sedan kan vi dela upp problemet i två steg, där vi först vill bevisa att det överhuvudtaget existerar komplexa former som minimerar denna generaliserade area. Det andra steget blir att använda detta, i syfte att bevisa att denna komplexa form i själva verket är en relativt enkel form som är en sammansättning av ett ändligt antal jämna ytor (Courant & Robbins, 1996).

4.3 Tetraeder och kub

Detta avsnitt kommer dels behandla vad som händer om vi doppar en ram i form av en tetraeder i såpbubbelblandning, dels vad som händer om vi istället har en ram i form av en kub. Tvåfilmerna inuti tetraedern eller kuben kommer, inte helt oväntat, följa Plateaus tre principer. Vi kommer först kort beskriva tvåfilmernas utformning i en tetraeder, för att sedan mer utförligt beräkna relationen mellan filmerna inuti en kub.

4.3.1 Tetraeder

Om vi väljer att doppa ramen av en tetraeder i såpbubbelblandning skulle vi kunna tänka oss att tvåfilmerna fyller ut tetraederns sidor och formar en pyramid. Detta är dock inte fallet, vilket Morgan (2015) tar upp. I själva verket får vi fyra stycken kurvor mellan de triangulära tvåfilmerna som möts i en punkt i tetraederns mitt med mellanliggande vinklar på 109° , se Figur 10, enligt Plateaus principer.

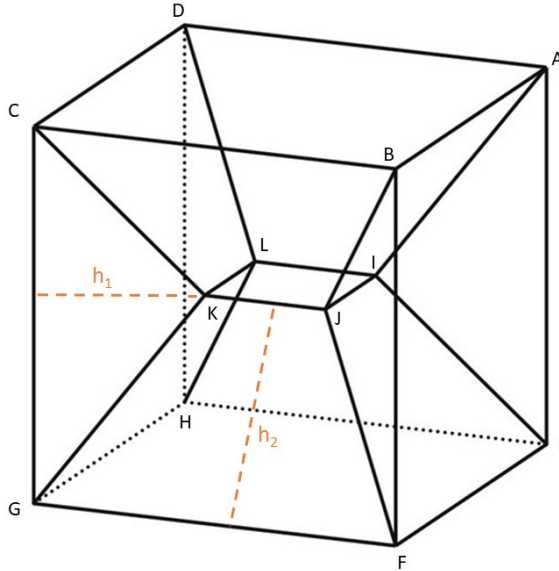


Figur 10: Tetraeder (Courant & Robbins, 1996, s.515).

4.3.2 Kub

Om vi istället doppar en ram i form av en kub i såpbubbelblandning kommer det resultera i 13 tvåfilmer inom kuben. Vi har då en tvåfilm utgående från var och en av de tolv kanterna, och sedan en tvåfilm där de möts i mitten, likt Figur 11. Åtta av filmerna har formen av parallelltrapetser, fyra av dem är triangulära och den i mitten är kvadratliknande. Tvåfilmerna möts om tre längs kurvor och alltså måste de mötas med 120° vinklar. Dessutom måste den totala arean vara den minsta möjliga (Barnes, 2012).

Vi vill nu bestämma sidlängden på den kvadratliknande filmen i mitten, och vi gör antagandet att filmen är just en kvadrat. Vidare antar vi att kuben har sidan 2, och att kvadratfilmen har sidan $2x$. Vi antar sedan att alla filmer är platta och räknar ut vad x måste vara för att finna den minimala arean. Vi utgår från att kvadratfilmens mittpunkt är densamma som kubens mittpunkt. Inledningsvis beräknar vi kortaste avståndet från mitten av en av kubens sidor till kvadratfilmen, exempelvis från mitten av sidan $BCGF$ till linjen JK , enligt Figur 11. Kortaste avståndet från kubens sida till kvadratfilmens mittpunkt är 1 (ty kuben har sida 2), medan kortaste avståndet från kanten på kvadratfilmen till dess mitt är x . Därmed måste minsta möjliga avståndet från mitten av sidan $BCGF$ till linjen JK vara lika med $1 - x$. Motsvarande gäller för kvadraterna $ABFE$, $ADHE$ och $CDHG$ till linjerna IJ , LI respektive KL .



Figur 11: Kub. Originalbilden är hämtad från Barnes (2012, s.150). Bokstäverna samt de streckade linjerna för h_1 och h_2 är tillagda i efterhand.

Vidare beräknar vi arean för de triangulära tvålfilmerna, och vi utgår från triangeln CGK i Figur 11. Triangelns bas är linjen CG och dess höjd kallar vi h_1 . Sedan tänker vi oss att vi ritar in en rätvinklig triangel i figuren där h_1 är triangelns hypotenus. En katet ritar vi från punkten K till sidan $BCGF$, så att kateten står i rät vinkel till sidan. Den andra kateten låter vi binda ihop hypotenusan och första kateten. Vinkeln mellan de två kateterna kommer då vara 90° . Var och en av dem har sida $1-x$, i och med att de motsvarar avståndet mellan en av kubens sidor och kvadratfilmen i mittens sida (som vi beräknat ovan). Alltså har vi en rätvinklig triangel med sidorna $1-x$, $1-x$ och h_1 . Vi använder nu **Pythagoras sats** för att bestämma h_1 och erhåller

$$h_1 = \sqrt{(1-x)^2 + (1-x)^2} = \sqrt{2}(1-x).$$

Vi ser nu att arean för var och en av triangelarna är lika med

$$\frac{2\sqrt{2}(1-x)}{2} = \sqrt{2}(1-x).$$

Fortsättningsvis beräknar vi parallelltrapetsernas areor, och även här använder vi oss av en rätvinklig triangel och Pythagoras sats för att bestämma höjden, som vi kallar h_2 . Vi utgår från parallelltrapetsen $JKGF$ i Figur 11, och använder återigen att kortaste avståndet mellan kvadraten $BCGF$ och linjen JK är $1-x$. Vi ritar nu en triangel med hypotenus

h_2 . Ena kateten sträcker sig från punkten där h_2 möter JK till sidan $BCGF$ i rät vinkel, och den andra kopplar ihop första kateten med hypotenusan längs sidan $BCGF$. Andra kateten kommer ha längden 1 eftersom denna motsvarar halva kubens sida. Därmed har vi en rätvinklig triangel med sidor 1, $1 - x$ och h_2 . Pythagoras sats ger nu

$$h_2 = \sqrt{1^2 + (1 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

Parallelltrapetsen har parallella sidor $2x$ och 2 ((kvadratfilmens respektive kubens sida), så vi får arean

$$\frac{2x + 2}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = (x + 1) \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

Arean för kvadratfilmen i mitten är $2x \cdot 2x = 4x^2$. Den totala arean, A , för de åtta trapetsformade filmerna, de fyra triangulära filmerna och kvadratfilmen i mitten ges vidare av

$$A = 8(x + 1) \sqrt{x^2 - 2x + 2} + 4\sqrt{2}(1 - x) + 4x^2.$$

För att finna minsta möjliga area undersöker vi minsta värdet för funktionen

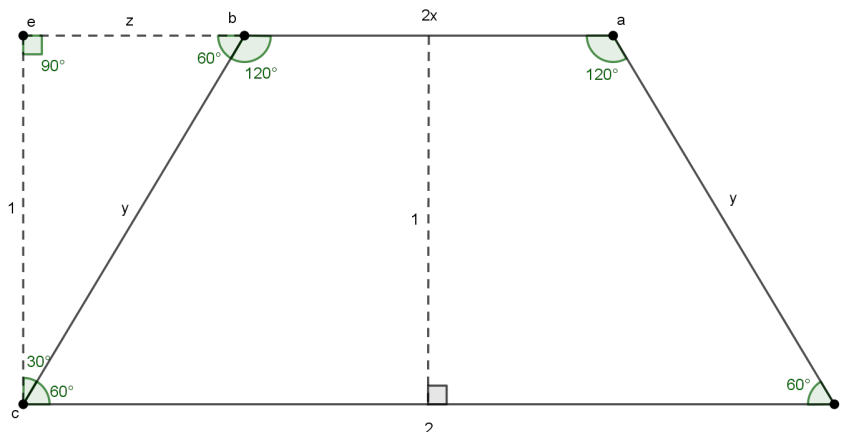
$$f(x) = 8(x + 1) \sqrt{x^2 - 2x + 2} + 4\sqrt{2}(1 - x) + 4x^2,$$

i *första kvadranten*. Det visar sig att $f(x)$ har ett lokalt minimum då $x \approx 0,073$, och att detta är det minsta värdet funktionen antar i första kvadranten. Därmed fås den minsta möjliga totala arean då x är ungefär lika med $0,073$.

Beräkningar utifrån de 13 filmernas areor ger oss alltså det optimala förhållandet för en minimal total area, och detta ges då x är ungefär lika med $0,073$. Nu tar vi istället hänsyn till att filmerna måste mötas med vinklar på 120° och betraktar mötet mellan kvadratfilmen i mitten och de trapetsformade filmerna. Vi förstår oss att vi har ännu en parallelltrapets, men att dennes bas delar sidan $EHGF$ på mitten och att dess motstående sida är inbäddad i kvadratfilmen i mitten, så att parallelltrapetsen är vinkelrät mot både $EHGF$ och kvadratfilmen $ILKJ$. Alltså kommer ena sidan ha längd 2, och den andra $2x$, se Figur 12. Längden på trapetsens två övriga sidor är okänd, så vi kallar denna längd y , där $y = h_2$ enligt notationen ovan. Linjerna med längd y är alltså inbäddade i varsin trapetsfilm. Eftersom kvadratfilmen $ILKJ$ ligger mitt i kuben så kommer trapetsen ha höjden 1. Vi kallar dess hörn för a , b , c och d . Vinklarna vid hörnen a ($\angle dab$) och b ($\angle abc$) kommer båda vara 120° , detta ty de motsvarar vinklarna längs linjer där tre tvåfilmer möts. Utgående från att parallelltrapetsen är likbent gäller då att $\angle bcd$ och $\angle cda$ är 60° vardera, ty vinkelsumman i en fyrhörning är 360° .

Vi ritar även en rätvinklig hjälptriangel cbe , se Figur 12, sådan att triangelns hypotenusan har längd y , ena kateten är lika med trapetsens höjd så denna har längd 1, och vi kallar andra katetens längd för z . Om vi kan bestämma längden av z kan vi sedan bestämma x , ty

$$2x + 2z = 2.$$



Figur 12: Hjälptrapets för att bestämma sidlängden på tvålfilmerna i mitten av kuben, med utgångspunkt i Plateaus tredje princip.

I triangeln cbe gäller att $\angle ecb = 30^\circ$, ty $\angle ecb + \angle bcd = 90^\circ$. På liknande sätt ser vi att $\angle cbe$ måste vara 60° . Vi använder oss av den trigonometriska funktionen tangens för att bestämma z . Vi betraktar triangeln cbe och ser att

$$\tan 30^\circ = \frac{z}{1} = z,$$

och eftersom $\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$ gäller

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vi stoppar in detta värde på z i ekvationen $2x + 2z = 2$ och erhåller

$$2x + \frac{2}{\sqrt{3}} = 2,$$

vilket ger oss det ungefärliga värdet 0,423 på x .

Beroende på om vi utgår från att tvålfilmerna söker minimal area eller att filmerna möts om tre med mellanliggande vinklar på 120° får vi olika värden på x . Vi har alltså en motsägelse och kan enligt Barnes (2012) utgå från att något antagande vi gjort inte stämmer. Det visar sig att antagandet att tvålfilmerna i mitten är kvadratformade är felaktigt, vilket upptäcks då kuben doppas i såpbubbelblandning och resultatet betraktas. I själva verket har filmerna i mitten lätt kurvade kanter, och dessutom är de trapetsformade filmerna inte platta utan de är sadelformade (Barnes, 2012).

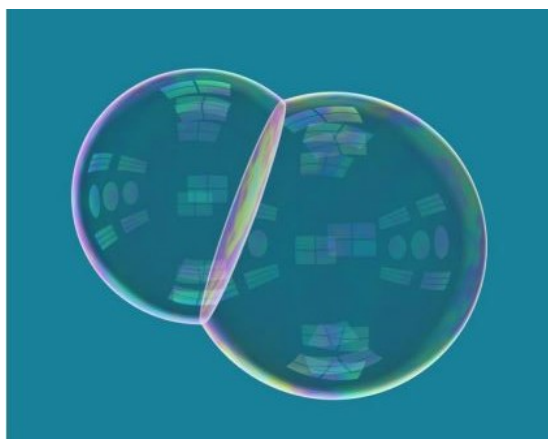
5 Bubblor som sitter ihop

Att enskilda såpbubblor är sfärformade är nog någonting de flesta känner till. Enkelt förklarat beror detta på just egenskapen att tvålfilmer söker minimal yta, ty till en given volym är en sfär minsta möjliga arean för en omslutande yta (Barnes, 2012). Frågan är dock vad som händer om vi har fler bubblor som sitter ihop? Har dessa några särskilda egenskaper och följer de några speciella mönster? Det ska vi undersöka nedan. Vi kommer betrakta vissa av dessa egenskaper för *två* och *tre* ihopsittande bubblor.

5.1 Två bubblor

Då två bubblor möts bildas tre tvålfilmer, varav en är den gemensamma filmen mellan och de övriga två är det som återstår av var och en av bubblorna, se Figur 13. Om de två bubblorna har exakt samma volym kommer filmen i mitten att vara platt. Annars är den kurvad och alltså en del av en större sfär (Barnes, 2012). Hutchings m. fl. (2000) sammanfattar detta i Sats 4 om dubbelbubblor.

Sats 4: *Vi har i \mathbb{R}^3 två separata områden S_1 och S_2 , med givna volymer v_1 och v_2 , som vi vill stänga in i såpbubblor med så liten total omslutande area som möjligt. Den unika lösningen på detta är en dubbelbubbla bestående av tre sfäriska tvålfilmer som möts längs en gemensam cirkel med 120° vinklar. Om $v_1 = v_2$ är filmen i mitten en platt yta.*



Figur 13: Dubbelbubbla (Hutchings m. fl., 2000, s.46).

Hutchings m. fl. (2000) ger ett bevis av satsen, men deras bevis kommer inte lyftas i detta arbete. Den intresserade läsaren hänvisas därför till Hutchings m. fl. (2000) för deras bevis.

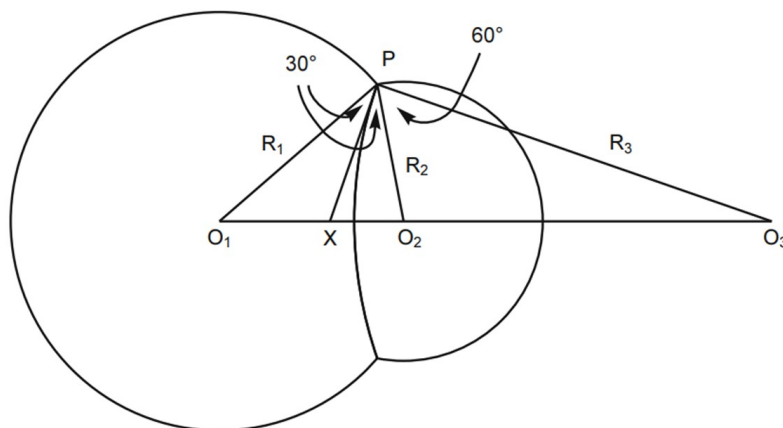
Vi ska istället vidare betrakta krafterna på en punkt där de tre tvålfilmerna möts. På grund av att ytspänningen är jämnt fördelad har vi tre lika krafter som verkar på punkten (Barnes, 2012). Vi vet från Avsnitt 4 om Tvålfilmer att om vi har tre filmer som möts längs en kurva kommer de att mötas med mellanliggande vinklar på 120° . Barnes (2012) ger förklaringen att vinklarna mellan filmerna är lika stora av symmetriskäl, och att detta i själva verket är ett specialfall av **Lamis sats**, som i sin tur i princip är **Sinussatsen**, se Bilaga 2 för båda dessa satser.

Vi kallar ena bubblans mittpunkt O_1 , och dess radie R_1 . På samma sätt har den andra bubblan mittpunkt O_2 och radie R_2 , medan sfären som tvålfilmen i mitten är en del av (förutsatt att v_1 inte är lika med v_2) har mittpunkt O_3 och radie R_3 . Ritar vi en tangent för var och en av tvålfilmerna i punkten P där de möts så kommer tangenterna mötas med vinklar på 120° . I och med detta kommer sfärernas radier även dem mötas med 120° . Av detta följer att båda vinklarna $\angle O_1PO_2$ och $\angle O_2PO_3$ är lika med 60° . Den mellanliggande tvålfilmens tangent kallar vi PX , och denna är en bisektris till $\angle O_1PO_2$, så både $\angle O_1PX$ och $\angle XPO_2$ är 30° stora, precis som i Figur 14. Det gäller att de tre mittpunkterna O_1 , O_2 och O_3 ligger på en linje (Barnes, 2012). Vi har även ett samband mellan de tre radierna, hämtat från Barnes (2012), som vi sammanfattar i en sats.

Sats 5: För en dubbelbubbla med tre ihopsittande tvålfilmer gäller att tvålfilmernas radier (R_1 , R_2 och R_3) förhåller sig till varandra enligt

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1},$$

där R_3 är den mellanliggande filmens radie.



Figur 14: Förhållande mellan tre tvålfilmer i en dubbelbubbla (Barnes, 2012, s.139).

Vi bevisar nu Sats 5 och påminner oss om, från Avsnitt 2, att trycket, P , på en såpbubbla ges av formeln

$$P = \frac{4T}{R},$$

där T är ytspänningen och R bubblans radie. Trycket på bubblan är alltså omvänt proportionellt till dess radie. Därmed kan vi bestämma radien på sfären den mellanliggande filmen är en del av genom att bestämma skillnaden i tryck mellan filmens två sidor. För bubbla 1 har vi trycket $P_1 = 4T/R_1$, och för bubbla 2 gäller $P_2 = 4T/R_2$. För den mellanliggande filmen har vi därför $4T/R_1$ i tryck på ena sidan, och $4T/R_2$ på den andra. Av detta följer

$$P_3 = \frac{4T}{R_3} = \frac{4T}{R_2} - \frac{4T}{R_1},$$

vilket medför

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1},$$

vilket var precis det vi ville visa (Barnes, 2012).

Ett alternativt sätt att härleda sambandet mellan tvåfilmernas radier är att använda faktumet att det är 120° mellan filmerna. Vi betraktar Figur 15 där vi ritat in ännu en punkt, Y , samt en sträcka O_2Y parallell till O_1P . Det gäller att vinklarna $\angle PO_2Y$ och $\angle O_1PO_2$ är lika stora. Därmed måste samtliga vinklar i triangeln PYO_2 vara lika med 60° vilket innebär att triangeln är liksidig med sidlängd R_2 . Eftersom sidan PO_3 har längd R_3 måste längden av YO_3 vara $R_3 - R_2$. Trianglarna O_1PO_3 och O_2YO_3 är likformiga då de delar en vinkel (den vid O_3), samt då $\angle O_1PO_3$ och $\angle O_2YO_3$ är lika stora. I och med att trianglarna är likformiga förhåller sig sidorna till varandra enligt följande:

$$\frac{R_3 - R_2}{R_2} = \frac{R_3}{R_1}.$$

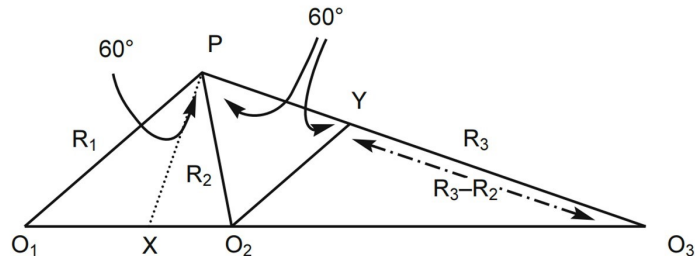
Vi dividerar med R_3 och erhåller

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1},$$

vilket är ekvivalent med

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1},$$

och vi är klara (Barnes, 2012).

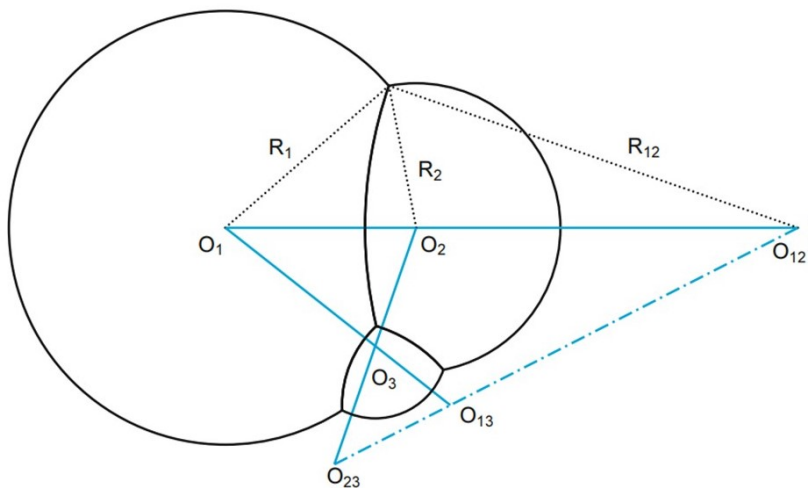


Figur 15: Förhållande mellan tvåfilmernas radier då två bubblor sitter ihop (Barnes, 2012, s.140).

5.2 Tre bubblor

I fallet då tre bubblor möts förhåller sig bubbla 1 och 2 till varandra som enligt ovan, och bubbla 3 kommer placera sig så att den vidrör de andra två. I och med att det alltid går att bestämma ett plan som går genom tre godtyckliga punkter i rummet gäller det att de tre bubblorna är symmetriska kring det plan som går genom de tre mittpunkterna. Vidare gäller att om vi tittar nära på en punkt där de tre bubblorna möts ser tvåfilmerna ut som raka linjer (även om de egentligen är kurvade) som möts likt tvåfilmerna i en tetraeder (se Avsnitt 4.3.1), och punkten där bubblorna möts motsvarar tetraederns mittpunkt. Därmed förhåller sig filmerna till varandra med mellanliggande vinklar på 109° (Morgan, 2015), vilket överrensstämmer med Plateaus tredje princip.

I kommande resonemang väljer vi att följa den notation som Barnes (2012) använder, och gör därför en förändring mot notationen i Avsnitt 5.1. O_1 och O_2 betecknar fortfarande två av bubblornas mittpunkter, och vi sätter O_3 som den tredje bubblans mittpunkt. Respektive radie kallar vi R_1 , R_2 och R_3 . Den mellanliggande filmen mellan bubbla 1 och 2 har mittpunkt O_{12} och radie R_{12} . Vidare kallar vi mittpunkt och radie för filmen mellan bubbla 1 och 3 för O_{13} och R_{13} , och på samma vis sätter vi O_{23} och R_{23} som namn på mittpunkt och radie för filmen mellan bubbla 2 och 3. Vi vet från Avsnitt 5.1 att O_1 , O_2 och O_{12} måste ligga på en linje (den tredje bubblan påverkar inte förhållandet mellan bubbla 1 och 2). Av detta följer att även O_1 , O_3 och O_{13} ligger på en linje, samt O_2 , O_3 och O_{23} . Detta är dock inte de enda punkterna som ligger på en rät linje, utan samma sak gäller även för de mellanliggande filmernas mittpunkter. Vi utgår från Barnes (2012) och formulerar detta i en sats.



Figur 16: Tre bubblor som möts (Barnes, 2012, s.143).

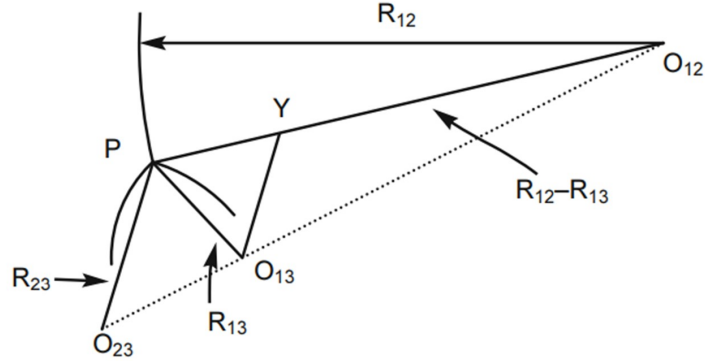
Sats 6: *Då tre bubblor sitter ihop som i Figur 16 gäller följande:*

1. *Punkterna O_1 , O_2 och O_{12} ligger på en linje. Likaså O_1 , O_3 och O_{13} , samt O_2 , O_3 och O_{23} .*
2. *Det gäller även att de mellanliggande filmernas mittpunkter, alltså O_{12} , O_{13} och O_{23} ligger på en rät linje.*
3. *Av detta följer att de sex mittpunkterna, i grupper om tre, ligger på fyra rätta linjer som bildar kanterna i en fullständig fyrsiding. De sex punkterna är de punkter där kanterna möts. (Barnes, 2012).*

Innan beviset av Sats 6 vill vi definiera begreppet *fullständig fyrsiding*. En fullständig fyrsiding är en figur bestående av fyra linjer som möts vid sex stycken punkter (Wolfram-Mathworld, 2021), som i den blå figuren i Figur 16.

Punkt 1 i Sats 6 följer av egenskaperna hos dubbelbubblor. Punkt 2 och 3 ska vi nu bevisa och beviset är hämtat från Barnes (2012). Vi börjar med att notera att var och en av linjerna som binder ihop tre mittpunkter svarar mot en punkt där motsvarande tre tvåfilmer möts. Vidare, för linjen genom O_{12} , O_{13} och O_{23} , antar vi att dessa tre filmer möts i en punkt P , se Figur 17. Vi bestämmer en punkt Y på PO_{12} på samma sätt som för två bubblor, alltså så att linjen $O_{13}Y$ är parallell till $O_{23}P$ och så att triangeln $O_{13}YP$ är liksidig. Vi har att $PO_{12} = R_{12}$, samt $PO_{13} = R_{13}$. Det gäller då att längden av YO_{12} är lika med längden av $PO_{12} = R_{12}$ minus längden av $PY = PO_{13} = R_{13}$. Alltså följer

$$YO_{12} = R_{12} - R_{13}.$$



Figur 17: Bevis av punkt 2 i Sats 6 (Barnes, 2012, s.144).

Vi vet från Avsnitt 2 att respektive radie för de mellanliggande filmerna bestäms av skillnaden i tryck på var sida av filmen. Bublorna har tryck P_1 , P_2 respektive P_3 , så för de mellanliggande filmerna gäller

$$P_{12} = \frac{4T}{R_{12}} = P_2 - P_1,$$

$$P_{13} = \frac{4T}{R_{13}} = P_3 - P_1,$$

samt

$$P_{23} = \frac{4T}{R_{23}} = P_3 - P_2.$$

Vi ser nu att förhållandet mellan sidorna $O_{23}P$ och PO_{12} är detsamma som mellan sidorna $O_{13}Y$ och YO_{12} , samt att vinklarna mellan sidparen båda är 120° och att de därmed är lika stora. Därmed gäller

$$\angle O_{23}O_{12}P = \angle O_{13}O_{12}Y.$$

Av detta följer att trianglarna $O_{23}PO_{12}$ och $O_{13}YO_{12}$ är likformiga. Vidare ser vi att O_{13} är en punkt på linjen $O_{23}O_{12}$ (Barnes, 2012). Alltså ligger de tre punkterna på en linje.

Vi kan se att för varje punkt där tre tvåfilmer möts så existerar en linje innehållandes mittpunkterna till sfärerna som filmerna är en del av. Vi har alltså fyra linjer som tillsammans formar en fullständig fyrsiding (Barnes, 2012). Vi har därmed bevisat punkt 2 och 3 i Sats 6.

6 Avslutning

Vi har i detta arbete presenterat och bevisat matematiska satser och problem som kan relateras till tvåfilmer och såpbubblor. Vi har även betraktat regler och principer som gäller för tvåfilmer och visat hur dessa påverkar tvåfilmernas och såpbubblors utformning. Vidare har vi betraktat ihopsittande bubblor, två och tre stycken, och tittat på några geometriska strukturer för dessa.

Detta arbete har endast behandlat en bråkdel av den matematik som finns i relation till tvåfilmer och såpbubblor. Vidare vore det intressant att titta på fler matematiska problem som kan visualiseras och lösas med hjälp av tvåfilmer eller bubblor, samt att betrakta vad som händer då fler än tre bubblor sitter ihop.

7 Bildförteckning

Figur 1 är hämtad från Barnes (2012, s.138).

Figurerna 2, 3, 4, 5 och 6 är skapade av Hanna Persson i Geogebra.

Figur 7 är hämtad från Courant och Robbins (1996, s.392).

Figur 8 är hämtad från Courant och Robbins (1996, s.516).

Figur 9 är hämtad från Morgan (2015, 21 min 16 s).

Figur 10 är hämtad från Courant och Robbins (1996, s.515).

Figur 11 är ursprungligen hämtad från Barnes (2012, s.150). Bokstäverna i figuren samt de streckade linjerna h_1 och h_2 är tillagda i efterhand.

Figur 12 är skapad av Hanna Persson i Geogebra.

Figur 13 är hämtad från Hutchings m. fl. (2000, s.46).

Figur 14 är hämtad från Barnes (2012, s.139).

Figur 15 är hämtad från Barnes (2012, s.140).

Figur 16 är hämtad från Barnes (2012, s.143).

Figur 17 är hämtad från Barnes (2012, s.144).

Figurerna 18 och 19 är skapade av Hanna Persson i Geogebra.

8 Referenser

- Barnes, J. (2012). *Gems of Geometry*. Springer.
- Courant, R. & Robbins, H. (1996). *What is Mathematics? An elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford University Press, Inc.
- Czerski, H. (2013). The Science of Bubbles (Full Science Documentary): Spark. Hämtad 15 december 2021, från https://www.youtube.com/watch?v=6-Ub_r_GFZY
- Dutta, P., Khastgir, S. P. & Roy, A. (2008). Steiner trees and spanning trees in six-pin soap films. <https://arxiv.org/abs/0806.1340>
- Hutchings, M., Morgan, F., Ritoré, M. & Ros, A. (2000). Proof of the Double Bubble Conjecture. *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, 6, 45–49.
- Morgan, F. (2015). Frank Morgan: Soap Bubbles and Mathematics. Hämtad 22 november 2021, från <https://www.youtube.com/watch?v=CbpfxOdUzU>
- Nationalencyklopedin. (2021). ytspänning. Hämtad 15 december 2021, från <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/ytsp%C3%A4nning>
- Persson, A. & Böiers, L. C. (2010). *Analys i en variabel* (3. utg.). Studentlitteratur.
- Szulkin, A. (2015). *Kompletterande material till kursen Matematik II, Matematisk Analys del A*. Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet.
- Taylor, J. E. (1976). The Structure of Singularities in Soap-Bubble-Like and Soap-Film-Like Minimal Surfaces. *Annals of Mathematics*, 103(3), 489–539. <http://www.jstor.org/stable/1970949>
- Wikipedia. (2021a). Lamis sats. Hämtad 13 december 2021, från https://sv.wikipedia.org/wiki/Lamis_sats
- Wikipedia. (2021b). Storcirkel. Hämtad 29 november 2021, från <https://sv.wikipedia.org/wiki/Storcirkel>
- Wikipedia. (2022). Satsen om största och minsta värde. Hämtad 6 januari 2022, från https://sv.wikipedia.org/wiki/Satsen_om_st%C3%B6rsta_och_minsta_v%C3%A4rde
- Wolfram-Mathworld. (2021). Complete Quadrilateral. Hämtad 22 december 2021, från <https://mathworld.wolfram.com/CompleteQuadrilateral.html>

Bilaga 1

Lemma: Bolzano-Weierstrass sats

Nedan formuleras och bevisas Bolzano-Weierstrass sats, i syfte att sedan kunna använda detta i beviset av Satsen om största och minsta värde (som används i Avsnitt 3.3). Beviset är hämtat från Persson och Böiers (2010).

Bolzano-Weierstrass sats: *Vi kan för varje begränsad talföljd, (x_k) , välja en konvergent delföljd.*

För beviset bestämmer vi ett begränsat intervall $I = [a, b]$. Vidare antar vi att alla element (x_k) i talföljden tillhör intervallet I . Om vi kallar intervallets mittpunkt c så gäller att det i åtminstone ett av delintervallen $[a, c]$ och $[c, b]$ kommer finnas oändligt många element ur talföljden, i och med att talföljden i sig innehåller oändligt många element.

Vi väljer ett delintervall med oändligt många element och betecknar detta I_1 . Vi väljer även ut ett element x_{k_1} ur intervallet. Vidare upprepar vi precis samma procedur och halverar I_1 . På samma sätt som ovan kommer åtminstone ett av intervallen innehålla ett oändligt antal element, så vi väljer ett sådant och kallar det I_2 . Alltså gäller

$$I_2 \subseteq I_1.$$

Vi väljer även ut ett element x_{k_2} tillhörande I_2 sådant att k_2 är strikt större än k_1 . Vi fortsätter sedan på samma sätt vilket kommer ge oss en följd av intervall så att

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \dots$$

Till varje intervall hör ett element x_{k_j} med strängt växande index. Kan vi nu bevisa att delföljden (x_{k_j}) är konvergent är vi klara.

Den successiva intervallhalvering vi utfört ovan gör att längden på intervallen går mot 0. Vi kan nu använda oss av **Intervallinkapslingssatsen** som följer nedan.

Lemma: Intervallinkapslingssatsen: *Om vi har en följd av avtagande intervall $(I_k = [a_k, b_k])$ så att*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \dots,$$

så gäller att både talföljden av vänsterändpunkter (a_k) samt den av högerändpunkter (b_k) har existerande gränsvärden då k går mot oändligheten. Om det dessutom gäller att längden av intervallen $(b_k - a_k)$ går mot noll då k går mot oändligheten så är

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k.$$

För beviset av Intervallinkapslingssatsen hänvisas till Persson och Böiers (2010). Eftersom intervallhalveringen leder till att intervalllängden går mot 0 kan vi som nämnt ovan använda oss av Intervallinkapslingssatsen. Vi ser att högerändpunkterna har samma gränsvärde som vänsterändpunkterna i intervallen I_j . Vi kallar detta gränsvärde φ . Eftersom x_{k_j} tillhör I_j måste x_{k_j} ha gränsvärdet φ då j går mot oändligheten. Alltså har vi valt ut en konvergent delföljd ur en begränsad talföljd, och beviset är klart (Persson & Böiers, 2010).

Satsen om största och minsta värde

Satsen om största och minsta värde: *Om en funktion f är kontinuerlig på en kompakt mängd så gäller att f antar ett största och ett minsta värde på mängden* (Persson & Böiers, 2010).

Inledningsvis bevisar vi satsen för en variabel på ett slutet intervall från a till b , för att sedan utvidga till funktioner av flera variabler över kompakta mängder. Vi låter M vara lika med supremum av funktionen f , alltså

$$M = \sup f(x).$$

Egenskaperna hos supremum medför att det existerar en talföljd (x_k) som tillhör det slutna intervallet från a till b ($(x_k) \subseteq [a, b]$), sådan att $f(x_k)$ har gränsvärde M då k går mot oändligheten. Bolzano-Weierstrass sats säger att en talföljd (x_k) innehåller en konvergent delföljd (x_{k_j}) med gränsvärde φ då $j \rightarrow \infty$, för något $\varphi \in [a, b]$. Detta, samt att f är kontinuerlig, medför därför

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = f(\varphi).$$

Vi ser nu att $f(\varphi)$ måste vara lika med M . Därmed är M det största värdet för funktionen $f(x)$ och alltså antas ett största värde. Vi kan på samma sätt visa att funktionen antar ett minsta värde genom att låta m beteckna infimum av f , och istället betrakta gränsvärdet av funktionen då x går mot *minus* oändligheten och vidare använda samma resonemang som ovan (Szulkin, 2015).

Fortsättningsvis vill vi utvidga till funktioner av flera variabler över kompakta mängder. Eftersom f är kontinuerlig så avbildar funktionen kompakta mängder på kompakta mängder. I och med att en kompakt mängd är sluten och begränsad så existerar supremum (M) och infimum (m) för f på mängden, och vidare kan vi då bestämma φ_1 och φ_2 som tillhör mängden så att $f(\varphi_1) = m$ och $f(\varphi_2) = M$. Hade detta inte varit möjligt hade mängden inte varit sluten och därmed inte kompakt (Wikipedia, 2022). Alltså har vi visat att en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd antar ett största och minsta värde.

Bilaga 2

Lamis sats

Lamis sats, uppkallad efter matematikern Bernard Lami (1640-1715), säger att om tre krafter verkar på en punkt med statisk jämvikt så måste var och en av krafterna vara proportionell till sinus av vinkeln mellan de två andra krafterna (Barnes, 2012). Om vi har tre krafter, A , B och C , och vinklar α , β och γ , så gäller alltså

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma},$$

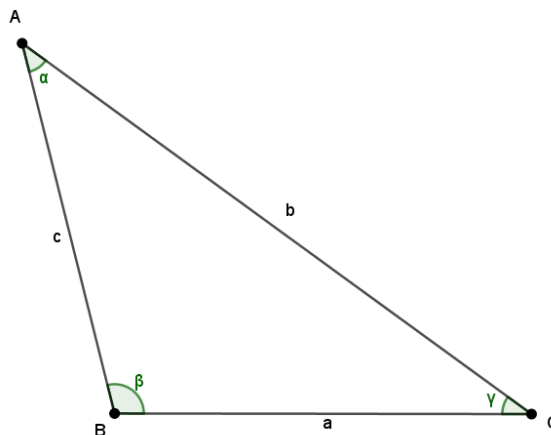
(Wikipedia, 2021a). Precis som nämns i Avsnitt 5.1 är detta en variant av Sinussatsen, vilken vi formulerar och bevisar här nedan.

Sinussatsen

Sinussatsen: Vi har en godtycklig triangel ABC med sidor a , b och c , se Figur 18, där sidan a är motstående till A , b motstående till B och c till C . Vi kallar vinkeln vid hörnet A för α , vinkeln vid B för β och den vid C kallar vi γ . Då gäller

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

(Persson & Böiers, 2010).



Figur 18: Triangeln ABC .

För beviset av Sinussatsen inför vi den omskrivna cirkeln till triangeln ABC , enligt Figur 19. Vidare väljer vi en punkt A' på cirkeln så att $A'C$ är en diameter till cirkeln. Då gäller att triangeln $A'BC$ har en rät vinkel vid hörnet B . Triangeln $A'BC$ är alltså rätvinklig. Det gäller även att båginkeln vid A' är lika med vinkeln vid A , alltså α , ty dessa står på samma cirkelbåge. Vi kallar den omskrivna cirkelns radie R , och för triangeln $A'BC$ gäller nu

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R},$$

vilket medför

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{1}{2R}.$$

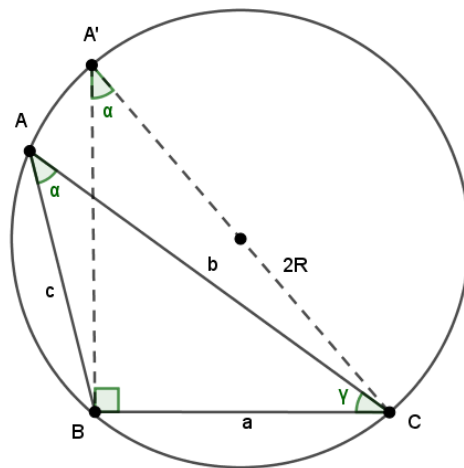
Vi erhåller

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{1}{2R}, \quad \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{1}{2R},$$

på samma sätt. Alltså måste

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

och beviset är klart (Persson & Böiers, 2010).



Figur 19: Hjälppfigur för beviset av sinussatsen.