



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Inversionsgeometri

av

Amanda Karlberg

2022 - L1

Inversionsgeometri

Amanda Karlberg

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2022

Sammanfattning

Detta arbete ger en introduktion till inversionsgeometri. Inledningsvis introducerar vi grunderna för inversionsgeometri, däribland definitionen och reglerna för inversion och hur transformationen fungerar för punkter, linjer och cirklar. Genom att använda inversionsgeometri löser vi sedan tre olika geometriska problem. Först behandlar vi Steiners porism, vilket säger att huruvida en Steinerkedja är öppen eller stängd inte beror av var den börjar. Genom att invertera Steinerkedjan i en specifik inversionscirkel kan vi enkelt bevisa porismet. Det andra problemet är relaterat till en arbelos, en skomakarkniv, med en inskriven kedja av cirklar. I den figuren kan den vertikala distansen mellan baslinjen och mittpunkten för en cirkel i kedjan bestämmas på ett särskilt vis, och genom inversion kan vi visa hur. Det sista problemet kallas för Apollonius problem och består av tre givna cirklar, till vilka vi konstruerar tangerande cirklar.

This paper gives an introduction to inversive geometry. Initially, we introduce the basics of inversive geometry, including the definition and rules of inversion and how the transformation works for points, lines and circles. By using inversive geometry we then solve three different geometric problems. First we deal with Steiner's porism, which states that whether a Steiner chain is open or closed does not depend upon where it starts. By inverting the Steiner chain in a specific circle of inversion, we easily can prove the porism. The second problem is related to an arbelos, a shoemaker's knife, with an inscribed chain of circles. In this figure, the vertical distance between the base line and the center of a circle in the chain is determined in a certain way, and by inversion we can show how. The last one is called Apollonius' problem and consist of three given circles, to whom we construct circles tangent.

INNEHÅLL

1	Introduktion	3
2	Inversion	5
2.1	Inversionstransformationen	5
2.2	Konstruktion av inversionspunkter	6
2.3	Inversion av linjer och cirklar	7
2.4	Egenskaper som bevaras under inversion	11
2.5	Radikala axlar och koaxiala cirklar	13
3	Steiners porism	17
3.1	Steinerkedja	17
3.2	Steiners porism	17
3.3	Hitta en fungerande inversionscirkel	18
3.4	Inverterade Steinerkedjor	21
4	Andra tillämpningar	23
4.1	Arbelos	23
4.2	Apollonius problem	25
5	Avslutning	28
	Referenser	29

1

INTRODUKTION

Geometri är en av de allra äldsta diciplinerna inom matematiken och intresset för geometriska figurer, former och egenskaper kan spåras över 4000 år bakåt i tiden. Från 600- till 200-talet före vår tidräkning fick geometrin ett uppsving genom grekiska filosofer och matematiker som Thales, Pythagoras, Platon, Euklides och Arkimedes. Bland annat utvecklades bevismetoderna inom geometrin till deduktion, från det tidigare induktiva, och de lade även grunden för det axiomatiska system som geometrin i stort vilat på sedan dess. Först under första halvan av 1800-talet introducerades däremot inversionsgeometrin.

Tack vare inversionsgeometrin har tidigare svårlösta och komplexa problem fått enklare lösningar. Genom att utföra en inversionstransformation för olika geometriska objekt, som punkter, cirklar och linjer, kan vissa satser bevisas och problem lösas betydligt smidigare. Detta eftersom många viktiga egenskaper och relationer inte förändras under inversion. Det är vad som kommer redogöras för i detta arbete.

Efter detta inledande kapitel kommer grunderna för inversion att presenteras i kapitel två. Först introduceras inversionstransformationen genom sin definition och de villkor som gäller för inversion. Därefter illustreras hur punkters inverser konstrueras, beroende på om de ligger innanför eller utanför inversionscirkelns rand. Detta följs av ett avsnitt om inversion av linjer och cirklar. Där visas hur olika typer av linjer och cirklar inverteras, både de som går genom inversionscirkelns mitt, de som skär inversionscirkeln och de som inte gör det. I efterföljande avsnitt redogörs även för andra egenskaper som inversionstransformationen bevarar, nämligen vinklars storlek och korsförhållande. Kapitlet avslutas med ett avsnitt om radikala axlar och koaxiala cirklar, som får särskilt relevanta egenskaper när dessa används för inversion.

I det tredje kapitlet visas Steiners porism. Kapitlet inleds med att Steinerkedjor definieras och följs av en redogörelse för vad Steiners porism säger. Nyckeln för att bevisa Steiners porism är att hitta en inversionscirkel som gör de givna cirklarna

koncentriska och hur detta görs presenteras i det efterföljande avsnittet. Avslutningsvis knyts kapitlet ihop genom att Steinerkedjor inverteras i en, för syftet, anpassad inversionscirkel och porismet bevisas.

Det fjärde kapitlet behandlar två andra geometriska problem som också löses med hjälp av inversion. I det första avsnittet utgår vi från en arbelos, en skomakarkniv, med en inskriven kedja av cirklar. Ur denna figur beräknar vi höjden från baslinjen till cirklarnas mittpunkter och ser att detta kan göras på samma sätt oavsett vilken cirkel i kedjan vi väljer och hur halvcirkelarna i vår arbelos är placerade. I det andra avsnittet hittar vi istället lösningar till Apollonius problem, vilket går ut på att till tre givna cirklar hitta andra cirklar som tangerar samtliga av dessa.

2

INVERSION

Inversion är en typ av transformation för att flytta punkter och objekt i ett plan. Det kan enklast förklaras som en spegling i en cirkel, i en så kallad inversionscirkel. På ett något slarvigt sätt kan det liknas med att cirkeln vänds ut och in. Transformationen är bijektiv vilket i detta fall innebär att varje punkt i planet, med undantag för inversionscirkelns medelpunkt O , under inversion konverteras till en, för denna punkt, unik punkt i planet.

2.1 INVERSIONSTRANSFORMATIONEN

Definition 2.1. Låt C vara en cirkel med medelpunkt O och radie r . Låt T vara transformationen som tar en punkt P till en punkt P' på strålen OP så att $|OP| \cdot |OP'| = r^2$. Då är T en inversion med avseende på inversionscirkeln C .

De två villkor som gäller för inversion av en punkt P till en punkt P' är således att P' ligger på strålen OP samt att $|OP| \cdot |OP'| = r^2$. Eftersom strålen OP är densamma som OP' och $|OP| \cdot |OP'| = |OP'| \cdot |OP|$ går inversionen även åt andra hållet. Det innebär att om P transformeras till P' så kommer P' transformeras till P under inversion. Vidare betyder det att samma inversion av en punkt två gånger ger identitetstransformationen.

I enlighet med inversionsvillkoren kommer punkter som befinner sig innanför inversionscirkeln transformeras till punkter utanför medan punkter som befinner sig utanför kommer transformeras till punkter innanför. Detta eftersom att om $|OP| > r$ måste $|OP'| < r$ för att villkoret att $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ ska gälla, och vice versa. Dessutom följer att punkter på inversionscirkelns rand transformeras till sig själva, då $|OP| = r$ och då behöver $|OP| = |OP'|$ för att $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ ska gälla och det finns enbart en punkt, nämligen P , som uppfyller detta om den dessutom ska ligga på strålen OP .

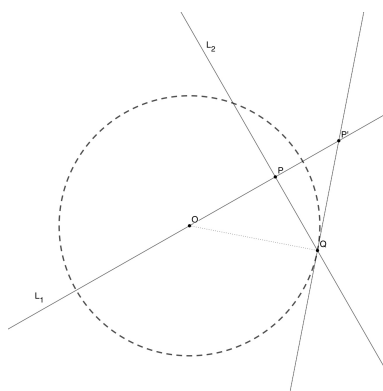
Vidare gäller att punkter som befinner sig nära inversionscirkelns rand inverteras till punkter som också är nära randen, men på andra sidan. Punkter nära inversionscirkelns mitt inverteras istället till punkter långt från inversionscirkeln och vice versa.

2.2 KONSTRUKTION AV INVERSIONSPUNKTER

Nedan illustreras hur en punkts invers kan konstrueras. Beroende på om punkten ligger innanför eller utanför inversionscirkeln används här olika metoder.

För att hitta inversen P' till en punkt P som är innanför inversionscirkeln drar vi först linjen L_1 , genom O och P och därefter en annan linje, L_2 , som är ortogonal mot L_1 och går genom P . Vi låter sedan Q vara en punkt där L_2 skär inversionscirkelns rand och genom Q drar vi en tangent till inversionscirkeln, som således är ortogonal mot OQ . Den punkt där tangenten sedan skär L_1 kommer vara P' .

För att bevisa att P' är inversen till P inleder vi med att visa att $\triangle OQP \sim \triangle OP'Q$. Både $\angle OPQ$ och $\angle OQP'$ är räta, eftersom linjerna drogs ortogonalt. Dessutom är $\angle QOP$ och $\angle P'OQ$ lika stora eftersom den vinkeln är gemensam för båda trianglarna. Då trianglarna har två vinklar som är lika stora följer att tredje likformighetsfallet är uppfyllt och att $\triangle OQP \sim \triangle OP'Q$. Således är förhållandet mellan trianglarnas respektive sidor detsamma och $|OQ|/|OP'| = |OP|/|OQ|$. Eftersom $|OQ| = r$ får vi att $r/|OP'| = |OP|/r$ vilket kan skrivas om till $|OP| \cdot |OP'| = r^2$. Då dessutom P' ligger på linjen OP är båda villkoren för inversion uppfyllda.

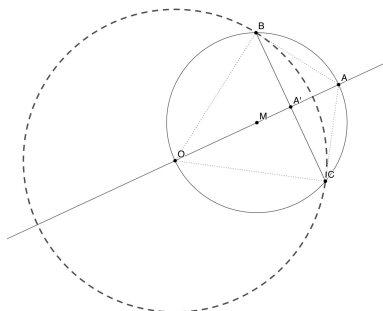


Figur 1: Konstruktion av invers till punkt innanför inversionscirkeln

För att hitta inversen A' till en punkt A som ligger utanför inversionscirkeln drar vi linjen L_1 genom O och A och kallar därefter mittpunkten på sträckan OA för M . Vi låter sedan M vara medelpunkten i en cirkel c_1 som går genom A och

kallar skärningspunkterna mellan c_1 och inversionscirkeln för B respektive C . Vi drar sedan sträckan BC . Skärningspunkten mellan BC och OA kommer vara A' .

För att visa att A' är inversen till A inleder vi även här med att visa att $\triangle OBA \sim \triangle OA'B$. Att $\angle OBA$ är rät följer av randvinkelsatsen, då den är inskriven i en halvcirkel av c_1 , och detsamma gäller för $\angle OCA$. Vidare ger randvinkelsatsen även att $\angle AOC \cong \angle ABC$ samt att $\angle AOB \cong \angle ACB$. Dessutom är $\triangle OBC$ likbent då både OB och OC motsvarar inversionscirkelns radie, r . Det innebär att $\angle OCB \cong \angle OBC$. Vidare gäller även att $\angle ACB + \angle OCB = \angle OCA$ och $\angle OBC + \angle ABC = \angle OBA$. Genom substitution får vi då att $\angle AOB + \angle OBC = \angle OCA$ samt att $\angle OBC + \angle AOC = \angle OCA$, av vilket det följer att $\angle AOB \cong \angle AOC$. Detta innebär att OA' är en bisektris till den likbenta $\triangle OBC$ och att $\angle OA'B$ således är rät och kongruent med $\angle OBA$. Då dessutom $\angle BOA \cong \angle A'OB$, eftersom den är gemensam för båda trianglarna, är det tredje likformighetsfallet uppfyllt för $\triangle OBA$ och $\triangle OA'B$. Det innebär att $|OB|/|OA'| = |OA|/|OB|$ och eftersom $|OB| = r$ följer att $r/|OA'| = |OA|/r$ och således gäller att $|OA| \cdot |OA'| = r^2$. Då dessutom A' ligger på linjen OA kan vi konstatera att A' är inversen till A .



Figur 2: Konstruktion av invers till punkt utanför inversionscirkeln

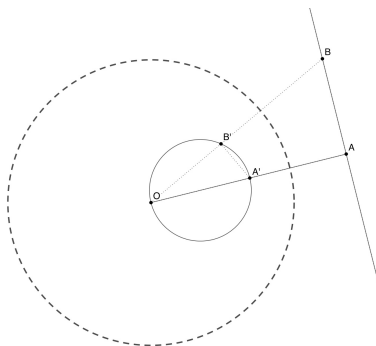
2.3 INVERSION AV LINJER OCH CIRKLAR

Efter att ha undersökt hur punkter transformeras under inversion kan vi även undersöka hur linjer och cirklar transformeras.

Vi inleder med att konstatera att alla linjer som går genom O inverteras till samma linje. I och med att alla punkter genom inversion transformeras till en punkt på samma linje genom punkten och O följer att alla punkter på en viss linje genom O kommer transformeras till punkter på samma linje. Detta innebär att linjen som helhet kommer transformeras till sig själv, även om varje enskild punkt inte gör det

utan bara de punkter där linjen skär inversionscirkeln.

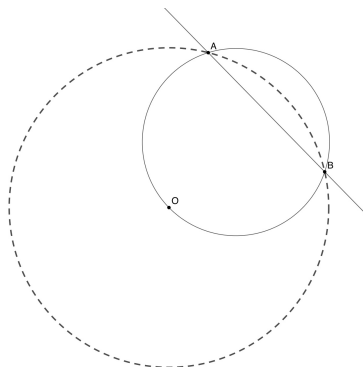
När det gäller linjer som inte går genom O inleder vi med att betrakta en linje som inte skär inversionscirkeln. Vi låter A och B vara punkter på linjen sådana att sträckan OA blir vinkelrät mot linjen och B är vilken annan punkt som helst på linjen. Om vi sedan betraktar A' och B' som inverser till A respektive B får vi att $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ samt att $|OB| \cdot |OB'| = r^2$, av vilket det följer att $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$ eller $|OA|/|OB| = |OB'|/|OA'|$. Om vi nu betraktar $\triangle OAB$ och $\triangle OB'A'$ kan vi konstatera att dessa är likformiga, eftersom $\angle AOB$ är densamma som $\angle B'OA'$ samt att $|OA|/|OB| = |OB'|/|OA'|$. Då $\angle OAB$ är rät är således även $\angle OB'A'$ det. Då B är en godtycklig punkt på linjen följer att för vilken position B än har kommer vinkeln vara rät. Vidare innebär detta att B' kommer ligga på en cirkel med OA' som diameter, eftersom en vinkel inskriven i en halvcirkel är rät. Således är inversen av en linje som inte går genom O och inte heller skär inversionscirkeln en cirkel som går genom O . Då inversen av en invers är det ursprungliga följer även att inversen av en cirkel som går genom O är en linje som inte går genom O .



Figur 3: Inversen av en linje som inte skär inversionscirkeln

Om vi vidare undersöker en linje som skär inversionscirkeln, men inte går genom O , gäller samma argumentation som ovan. I detta fall kan dock skärningspunkterna mellan linjen och inversionscirkeln, C och D , särskilt betraktas eftersom dessa transformeras till sig själva under inversion. Detta betyder att bilden av en linje som skär inversionscirkeln men inte går genom O transformeras till en cirkel som går genom O och skär inversionscirkeln i samma punkter som linjen gör det. I de fall där linjen tangerar inversionscirkeln gäller följaktligen att den transformeras till en cirkel som går både genom O och tangeringspunkten men inte genom någon annan punkt på inversionscirkeln. Även i dessa fall gäller dessutom det omvända, alltså att en cirkel

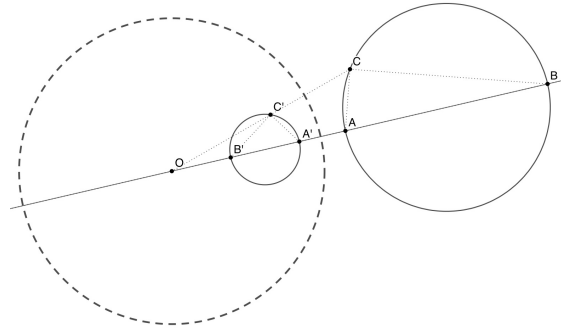
som går genom O och skär eller tangerar inversionscirkeln inverteras till en linje som bevarar skärnings- eller tangeringspunkten med inversionscirkeln.



Figur 4: Inversen av en linje som skär inversionscirkeln

När vi nu har undersökt inversion av samtliga linjer samt cirklar som går genom O återstår cirklar som inte går genom O . Inledningsvis kan vi konstatera att inversionscirkeln själv inverteras till sig själv, eftersom varje enskild punkt på cirkeln gör det.

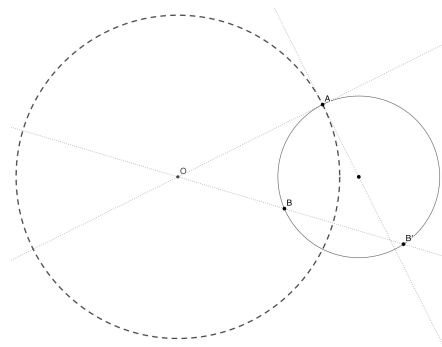
Vidare undersöker vi en cirkel som befinner sig utanför inversionscirkeln. Vi låter A och B vara punkter på cirkeln sådana att AB är cirkelns diameter och att linjen AB fortsätter genom O . Vidare låter vi C vara en godtycklig punkt på cirkeln, samt A' , B' och C' vara inverser till A , B respektive C . Enligt definitionen av inversion har vi att $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ samt att $|OC| \cdot |OC'| = r^2$, av vilket det följer att $|OA| \cdot |OA'| = |OC| \cdot |OC'|$ eller $|OA|/|OC| = |OB'|/|OC'|$. Detta i kombination med att $\angle AOC = \angle C'OA'$ medför att $\triangle OAC$ och $\triangle OC'A'$ är likformiga, enligt det första likformighetsfallet. På motsvarande sätt följer att även $\triangle OBC \sim \triangle OC'B'$. Utifrån detta kan vi konstatera att $\angle OAC \cong \angle OC'A'$. Samtidigt är $\angle OAC$ en yttervinkel till $\triangle ABC$, vilket innebär att $\angle OAC = \angle ACB + \angle ABC$. Eftersom $\angle ABC = \angle OBC$ och $\triangle OBC \sim \triangle OC'B'$ följer att $\angle ABC \cong \angle OC'B'$. Vi kan därför konstatera att $\angle OAC = \angle OC'A' = \angle ACB + \angle OC'B'$. Dessutom är $\angle OC'A' = \angle OC'B' + \angle B'C'A'$, vilket innebär att $\angle ACB = \angle B'C'A'$. Eftersom $\angle ACB$ är inskriven i en halvcirkel är den dessutom rät och således är även $\angle B'C'A'$ det. Det innebär att även $\angle B'C'A'$ är inskriven i en halvcirkel, med $A'B'$ som diameter, oavsett vilken punkt på den ursprungliga cirkeln som C är. Av detta följer alltså att en inversen av en cirkel utanför inversionscirkeln är en cirkel innanför inversionscirkeln, som inte går genom O .



Figur 5: Inversen av en cirkel som inte går genom O

Då inversen av en invers är det ursprungliga följer det omvända, alltså att inversen till en cirkel innanför inversionscirkeln som inte går genom O är en cirkel utanför inversionscirkeln.

Vidare finns ett särskilt relevant specialfall av cirklar som inte går genom inversionscirkelns mitt, nämligen de cirklar som skär inversionscirkeln ortogonalt. Dessa cirklar inverteras nämligen till sig själva, men inte punkt för punkt. Om en cirkel skär inversionscirkeln ortogonalt i punkten A är linjen OA en tangent till cirkeln. Från en annan punkt på cirkeln, B , dras linjen OB som bildar en korda. Vi kallar den kordans andra skärningspunkt för B' . I enlighet med kordasatsen är $|OA|^2 = |OB| \cdot |OB'|$ och eftersom $|OA| = r$ gäller att $r^2 = |OB| \cdot |OB'|$, vilket är definitionen av inversion. Detta betyder att B' är inversen till B och ligger på samma cirkel.



Figur 6: Inversen av en cirkel ortogonal mot inversionscirkeln är sig själv.

Vi kan sammanfatta inversioner av cirklar och linjer i följande satser.

Sats 2.2. *Inversen av en linje som går genom inversionscirkelns medelpunkt, O , är sig själv.*

Sats 2.3. *Inversen av en linje som inte går genom inversionscirkelns medelpunkt, O , är en cirkel som går genom O och bevarar eventuella skärnings- eller tangeringspunkter med inversionscirkeln.*

Sats 2.4. *Inversen av inversionscirkeln är inversionscirkeln.*

Sats 2.5. *Inversen av en cirkel som inte går genom O är också en cirkel som inte går genom O .*

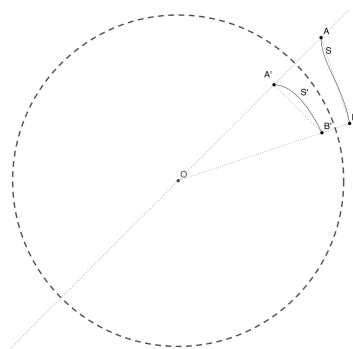
Sats 2.6. *Inversen av en cirkel som skär inversionscirkeln ortogonalt är samma cirkel.*

2.4 EGENSKAPER SOM BEVARAS UNDER INVERSION

Vi har tidigare undersökt vad inversion innebär för punkter, cirklar och linjer. Nu ska vi se vidare kring egenskaper som bevaras under inversion, nämligen vinklar och korsförhållanden.

Vi ska nu undersöka vad som gäller för vinklar mellan två kurvor som skär varandra, vilket definieras som vinklarna mellan kurvornas tangetner i skärningspunkten. Om kurvorna inverteras kommer vinklarna mellan dem att vara lika stora som innan, med riktningen blir motsatt.

Vi inleder med att visa att detta gäller för en kurva S som går genom A och B och skär en linje genom O i punkten A . Som vi visat tidigare är $\angle OBA \cong \angle OA'B'$ eftersom $\triangle OBA \sim \triangle OA'B'$. Om vi låter B närma sig A längs kurvan närmar sig B' även A' . Samtidigt går AB mot att bli en tangent till kurvan S i punkten A medan $A'B'$ går mot en tangent till S' i A' . Detta innebär att både $\angle OBA$ och $\angle OA'B'$ går mot att bli vinklar mellan tangenterna och linjen, samtidigt som de fortsätter vara lika stora. Vi kan därför konstatera att vinkeln mellan linjen OA och kurvan S i punkten A bevaras, men den genomlöps åt motsatt håll.



Figur 7: Vinklar bevarar sin storlek men vänds åt motsatt håll

Om vi låter en annan kurva också skära linjen OA vid A och visar att storleken på vinklarna även där bevaras under inversion kan vi, genom addition och subtraktion av vinklar, visa att vinklarna även mellan två godtyckliga kurvor bevaras.

Ytterligare egenskaper som vi ska visa bevaras under inversion är korsförhållanden.

Definition 2.7. För fyra punkter, A , B , C och D , på en linje definieras deras korsförhållande som

$$(A, B; C, D) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|} = \frac{|AC|}{|BC|} \div \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Vi visar att korsförhållandet för fyra punkter på en linje genom inversionscirkelns mittpunkt, O , bevaras under inversion. Vi låter a motsvara sträckan $|OA|$, $b = |OB|$, $a' = |OA'|$ och så vidare. Således kan $|AC|$ skrivas som $|OC| - |OA| = c - a$. Enligt definitionen för inversion kan vi även beteckna $a' = r^2/a$. För sträckor i motsatt riktning, exempelvis $|A'C'|$, gäller att $|A'C'| = -|C'A'| = -(a' - c') = c' - a'$. Korsförhållandet för de ursprungliga punkterna är

$$\frac{|AC|}{|BC|} \div \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{c - a}{c - b} \div \frac{d - a}{d - b}.$$

För korsförhållandet för de inverterade punkterna gäller att

$$\frac{|A'C'|}{|B'C'|} \div \frac{|A'D'|}{|B'D'|} = \frac{c' - a'}{c' - b'} \div \frac{d' - a'}{d' - b'}.$$

Genom omskrivning får vi

$$\frac{\frac{r^2}{a} - \frac{r^2}{c}}{\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{c}} \div \frac{\frac{r^2}{a} - \frac{r^2}{d}}{\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{d}} = \frac{r^2 \left(\frac{c-a}{ac} \right)}{r^2 \left(\frac{c-b}{bc} \right)} \div \frac{r^2 \left(\frac{d-a}{ad} \right)}{r^2 \left(\frac{d-b}{bd} \right)},$$

vilket kan förenklas och då får vi att

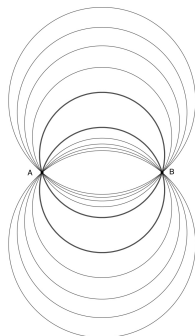
$$\frac{bc(c-a)}{ac(c-b)} \div \frac{bd(d-a)}{ad(d-b)} = \frac{b(c-a)}{a(c-b)} \div \frac{b(d-a)}{a(d-b)} = \frac{(c-a)}{(c-b)} \div \frac{(d-a)}{(d-b)}.$$

Vi kan då konstatera att

$$\frac{|A'C'|}{|B'C'|} \div \frac{|A'D'|}{|B'D'|} = \frac{|AC|}{|BC|} \div \frac{|AD|}{|BD|}.$$

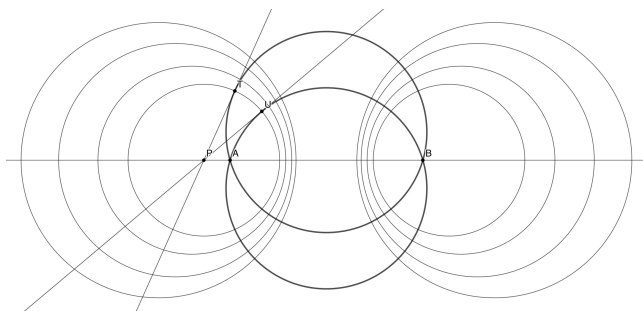
2.5 RADIKALA AXLAR OCH KOAXIALA CIRKLAR

Vidare undersöker vi hur mängder av cirklar kan inverteras. Vi inleder med att betrakta cirklar som skär varandra i två punkter, A och B . Samtliga cirklar som går genom dessa punkter kan ses som en mängd, här kallad K (för korsande cirklar).



Figur 8: Cirklar genom A och B .

Från två av cirklarna, godtyckligt valda från mängden K , kan vi finna en mängd cirklar som är ortogonala mot de ursprungliga cirklarna. Vi börjar med att dra en linje mellan cirklarnas skärningspunkter, A och B , och sedan välja en godtycklig punkt P på linjen. Från P dras sedan en tangent till vardera cirkel. Tangentpunkterna kallar vi T och U . Vi kan, med hjälp av kordasatsen, konstatera att $|PT|^2 = |PA| \cdot |PB| = |PU|^2$ och således är $|PT| = |PU|$ och vi kan dra en cirkel genom T och U med P som medelpunkt. Denna cirkel kommer då vara ortogonal mot de ursprungliga eftersom dess radie är tangenter till dem. Då P är en godtycklig punkt kan vi betrakta samtliga cirklar med dessa egenskaper som en mängd E (för ej korsande cirklar). Samtliga cirklar i mängden K är ortogonala mot samtliga cirklar i E .



Figur 9: Cirklar ortogonala mot de ursprungliga cirklarna.

Cirkelmängderna E och K kallas för koaxiala cirklar då cirklarna inom mäng-

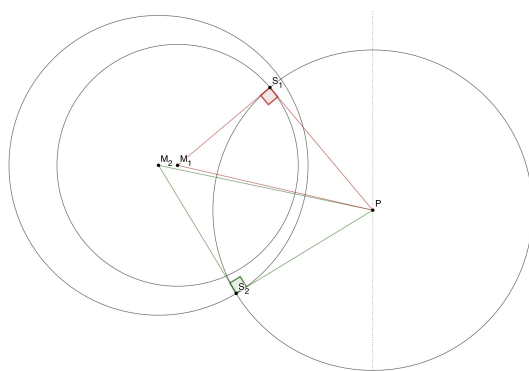
derna har sina medelpunkter på samma linje samt att de har en gemensam *radikal axel*.

Definition 2.8. För två icke-koncentriska cirklar med medelpunkter M_1 och M_2 samt radier r_1 och r_2 gäller att för varje punkt P på deras radikala axel är $|PM_1|^2 - r_1^2 = |PM_2|^2 - r_2^2$.

Om det från en punkt P på den radikala axeln, som ligger utanför cirklarna, dras tangenter till cirklarna kommer avståndet vara lika långt mellan P och respektive tangeringspunkt.

I detta fall är den linje som går genom cirklarnas medelpunkter i K den radikala axeln till cirklarna i E , och dessutom vice versa.

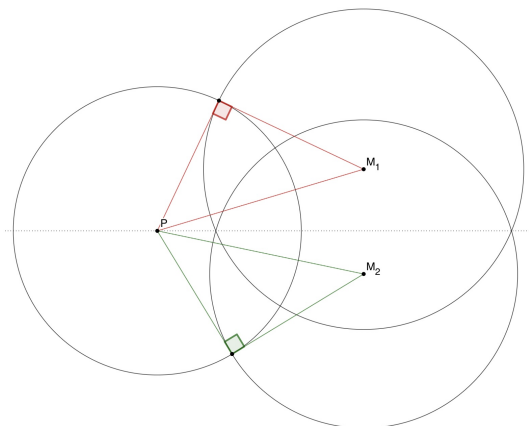
För att visa att medelpunkterna för cirklarna i K bildar den radikala axeln för cirklarna i E väljer vi två godtyckliga cirklar från E och kallar deras medelpunkter för M_1 och M_2 samt en godtycklig cirkel från K och låter dess medelpunkt vara P . Vi låter vidare S_1 och S_2 motsvara en skärningspunkt mellan vardera cirkel från E med cirkeln från K . Då cirklarna från E är ortogonala mot cirkeln från K är både $\angle M_1S_1P$ och $\angle M_2S_2P$ räta och därför är $\triangle M_1S_1P$ och $\triangle M_2S_2P$ rätvinkliga. Genom att applicera Pythagoras sats får vi att $|PS_1|^2 = |PM_1|^2 - |M_1S_1|^2$ samt $|PS_2|^2 = |PM_2|^2 - |M_2S_2|^2$. Då $|M_1S_1|$ och $|M_2S_2|$ är cirklarnas radier ersätter vi beteckningarna för dessa med r_1 och r_2 . Vidare är $|PS_1| = |PS_2|$ eftersom sträckorna motsvarar radien av cirkeln från K . Således har vi att $|PM_1|^2 - r_1^2 = |PM_2|^2 - r_2^2$. Eftersom P är en godtycklig medelpunkt från K innebär detta att medelpunkterna för cirklarna i K bildar den radikala axeln till cirklarna i E .



Figur 10: Medelpunkterna i K bildar radikal axel till cirklarna i E .

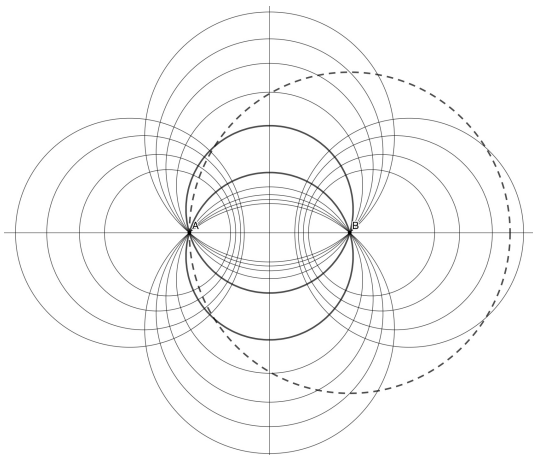
För att vidare visa att medelpunkterna för cirklarna i E bildar den radikala axeln för cirklarna i K väljer vi på motsvarande sätt två godtyckliga cirklar från K och

kallar deras medelpunkter för M_1 och M_2 samt en godtycklig cirkel från E och låter dess medelpunkt vara P . Med samma argumentation som ovan, med rätvinklighet och Pythagoras sats, får vi att medelpunkterna för cirklarna i E bildar den radikala axeln till cirklarna i K .



Figur 11: Medelpunkterna i E bildar radikal axel till cirklarna i K .

Vi undersöker vidare vad som händer med dessa cirkelmängder om de inverteras med avseende på en inversionscirkel som går genom A och med medelpunkt B .

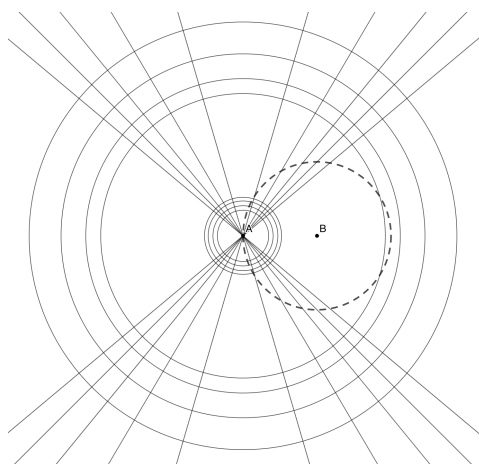


Figur 12: Cirklar från K och E samt inversionscirkeln.

Vi inleder med att invertera cirklarna i mängden K . Vi har tidigare visat att cirklar som går genom inversionscirkelns mitt inverteras till linjer som inte går genom inversionscirkelns mitt. Eftersom alla cirklar i K går genom B kommer dessa inverteras till linjer som inte går genom B . Vidare vet vi att A ligger på inversionscirkelns kant och därför kommer inverteras till sig själv, och eftersom alla cirklar i

K även går genom A kan vi konstatera att cirklarna inverteras till linjer som går genom A .

För cirklarna i mängden E , som inte går genom B , gäller istället att de inverteras till cirklar som inte heller går genom B . Eftersom vi visat att vinklar bevaras under inversion betyder det att även de inverterade cirklarna behöver vara vinkelräta mot linjerna i K . För att detta ska gälla behöver alla de inverterade cirklarna ha sin medelpunkt i A , då det är där alla linjer som inverterats från K möts. Cirklarna blir således *koncentriska*.



Figur 13: Inversen av cirklar från K och E samt inversionscirkeln.

Vi ser alltså att det är möjligt att invertera två cirklar som inte skär varandra, liksom cirklarna i E , till koncentriska cirklar. Denna möjlighet kommer vi få användning för i nästa kapitel, där vi också visar hur en inversionscirkel med denna egenskap hittas samt förklarar varför det fungerar.

3

STEINERS PORISM

Ett klassiskt geometriskt problem som utan inversion är väldigt svårt att lösa, men med hjälp av det blir hanterbart, är vad som kallas för Steiners porism. Utgångspunkten för porismet är vad som kallas för Steinerkedjor. Detta kommer först att introduceras innan porismet presenteras och bevisas med hjälp av inversionsgeometri.

3.1 STEINERKEDJA

En Steinerkedja utgår från två givna cirklar, α och β , som inte skär varandra. Eftersom cirkelarna inte skär varandra kan den ena cirkeln antingen ligga helt innanför eller helt utanför den andra.

Definition 3.1. En Steinerkedja är en sekvens av ett begränsat antal, n , cirklar som tangerar de två givna och icke korsande cirkelarna, α och β , samt sina två grannar i sekvensen.

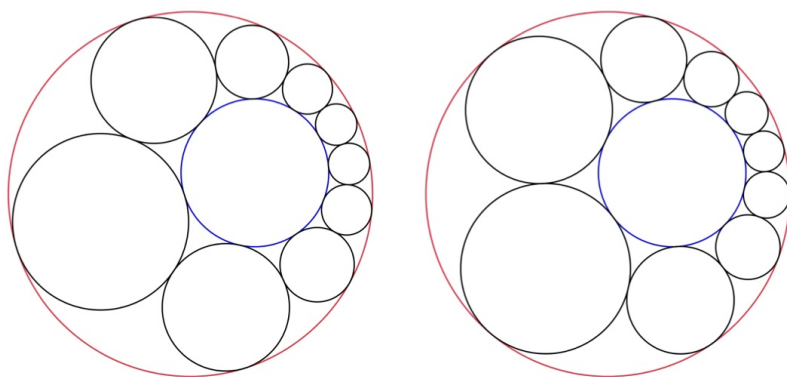
Definition 3.2. En Steinerkedja är stängd om även den första och sista cirkeln tangerar varandra, och annars är den öppen.

3.2 STEINERS PORISM

En central egenskap för Steinerkedjor är vad som sammanfattas i Steiners porism.

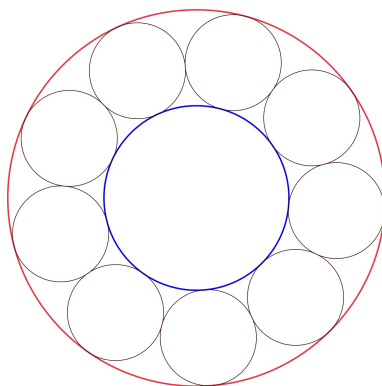
Steiners porism *Om det finns en stängd Steinerkedja med n cirklar för två givna cirklar α och β så finns det oändligt många stängda Steinerkedjor med n cirklar för α och β .*

Detta innebär att det inte spelar någon roll var den första cirkeln i kedjan sätts in.



Figur 14: Två stängda Steinerkedjor för samma givna cirklar.

För en Steinerkedja där α och β är koncentriska är det uppenbart att placeringen av kedjans startcirkel inte spelar någon roll eftersom samtliga cirklar blir lika stora och en förflyttning av startcirkeln enbart är en rotation av hela bilden. Så länge vi kan se till att α och β är koncentriska kan vi därför enkelt visa att Steiners porism gäller. För att göra detta använder vi oss av inversion.



Figur 15: En Steinerkedja där de givna cirkelarna är koncentriska.

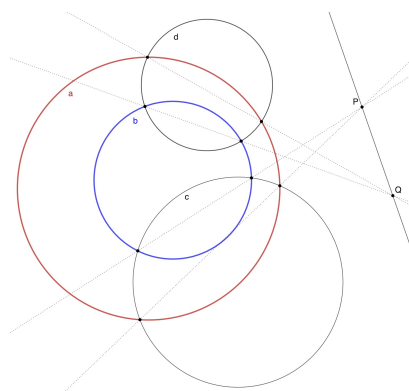
3.3 HITTA EN FUNGERANDE INVERSIONSCIRKEL

Då Steiners porism är mer eller mindre uppenbart om de två givna cirkelarna är koncentriska behöver vi hitta en inversionscirkel som möjliggör detta. I tidigare kapitel konstaterade vi att det var möjligt för två cirklar som inte skär varandra att inverteras till koncentriska cirklar. Här inleder vi med att förklara hur en sådan inversionscirkel hittas och förklarar sedan varför det fungerar.

För att invertera två icke-skärande cirklar, a och b , så de blir koncentriska krävs en inversionscirkel som har sin mittpunkt där alla cirklar som är ortogonala mot a

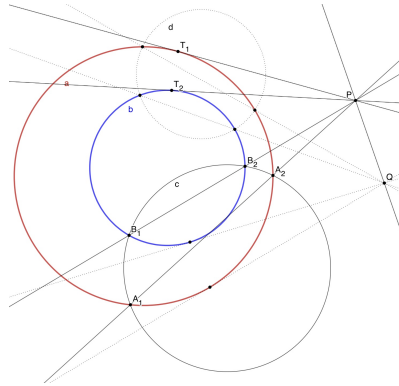
och b korsar varandra. Vi inleder med att hitta cirklarnas radikala axel och sedan två cirklar som är ortogonala till både a och b för att slutligen hitta skärningarna mellan dessa.

För att hitta den radikala axeln börjar vi med att rita en tredje cirkel, c , som skär både a och b i två punkter vardera. Vidare ritas linjerna för de gemensamma kordorna för cirkel a och c samt b och c . Den punkten där kordorna skär varandra kallar vi för P . Vi upprepar sedan samma procedur för ytterligare en cirkel, d , och kallar skärningspunkten mellan dessa kordor för Q . Då är linjen PQ den radikala axeln.



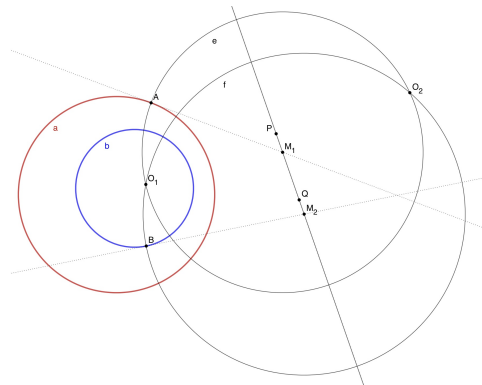
Figur 16: Konstruktion av den radikala axeln till a och b .

Då vi vet att punkter på den radikala axeln kännetecknas av att avståndet till cirklarnas respektive tangeringspunkt från punkten är detsamma undersöker vi detta för att säkerställa att det är den radikala axeln vi hittat. Från punkten P drar vi en tangent till cirkel a och en till b och kallar tangeringspunkterna för T_1 och T_2 . Vidare kallar vi skärningspunkterna mellan cirkel a och c för A_1 och A_2 samt skärningspunkterna mellan cirkel b och c för B_1 och B_2 . Genom att använda kordasatsen får vi att $|A_1P| \cdot |A_2P| = |B_1P| \cdot |B_2P|$, att $|T_1P|^2 = |A_1P| \cdot |A_2P|$ och att $|T_2P|^2 = |B_1P| \cdot |B_2P|$. Det innebär att $|T_1P| = |T_2P|$ och således är punkten P på den radikala axeln. Genom att göra samma procedur för kordorna som skär varandra i Q och tangenter till cirkel a och b som går genom Q ser vi att även det avståndet är lika och således ligger även Q på den radikala axeln till cirkel a och b . Eftersom det bara går att dra en linje mellan två punkter måste PQ vara den radikala axeln.



Figur 17: Linjen PQ är den radikala axeln till a och b .

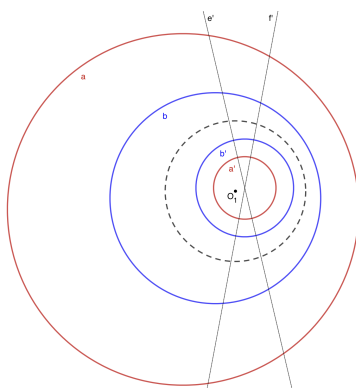
För att sedan rita två cirklar som är ortogonala till a och b använder vi den radikala axeln. Vi väljer en punkt på någon av cirklarna, i detta fall a , som vi kallar A och drar en tangent till cirkeln i den punkten. Skärningspunkten mellan tangenten och den radikala axeln kallar vi för M_1 . Vi ritar sedan en cirkel, e , som går genom A och har M_1 som medelpunkt. Cirkel e är då ortogonal med cirkel a och cirkel b . Genom att välja en annan punkt på antingen cirkel a eller b och upprepa proceduren ovan får vi ytterligare en ortogonal cirkel till både a och b , vilken vi kallar för f . Vi vet att dessa cirklar är ortogonala eftersom de har sina medelpunkter på den radikala axeln, vilket vi i tidigare avsnitt visade gäller för ortogonala cirklar.



Figur 18: Ortogonala cirklar till a och b .

Skärningspunkterna mellan cirkel e och f , O_1 och O_2 , är då möjliga medelpunkter för en inversionscirkel som gör cirklarna a och b koncentriska under inversion. Om vi ritar en inversionscirkel med O_1 som medelpunkt och inverterar cirkel a och b med avseende på denna kommer alltså de inverterade cirklarna, a' och b' , vara koncentriska.

För att förklara detta inleder vi med att konstatera att om vi genom en inversionscirkel med O_1 som medelpunkt inverterar cirkel e och f kommer dessa transformeras till linjer, e' och f' , som inte går genom O_1 , i enlighet med sats 2.3. Punkten O_2 kommer inverteras till en punkt på båda dessa linjer och således vara en skärningspunkt mellan dem. När a och b inverteras med avseende på samma inversionscirkel kommer dessa, enligt sats 2.5, att inverteras till cirklar som inte går genom inversionscirkelns medelpunkt, a' och b' . Vidare kommer dessa cirklar vara ortogonala mot de båda linjerna e' och f' eftersom vinklar bevaras. För att det ska gälla måste skärningspunkterna mellan linjerna vara mittpunkt till både a' och b' . Detta gör dem koncentriska.



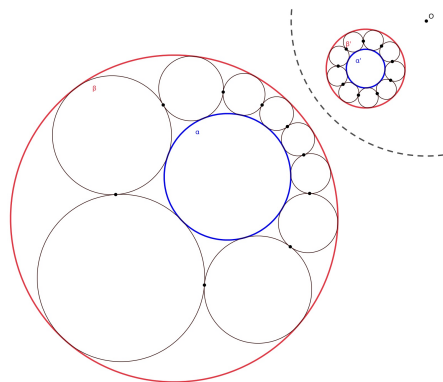
Figur 19: De inverterade cirklarna är koncentriska.

3.4 INVERTERADE STEINERKEDJOR

Vi har tidigare visat att varje punkt inverteras till en, för denna, unik punkt samt att vinklar bevaras under inversion. Detta innebär således att om en Steinerkedja inverteras så kommer cirklarna som tangerar varandra i den ursprungliga bilden även tangera varandra efter inversion. Varje cirkel i kedjan kommer alltså även efter inversion att tangera α och β samt sina grannar. Om dessutom den första och sista cirkeln tangerar varandra, och kedjan således är sluten, kommer dessa att tangera varandra även efter inversion.

Cirklar som tangererar samma två givna koncentriska cirklar kommer vara lika stora eftersom avståndet mellan de koncentriska cirklarna är lika långt överallt och detta avstånd motsvarar de andra cirklarnas diameter. Detta innebär att cirklarna i Steinerkedjan efter inversion kommer vara lika stora. Det spelar därför ingen roll var den första cirkeln i kedjan placeras utan bilden kommer bli densamma oavsett, om än roterad.

Genom att utföra en inversion som gör de givna cirkarna α och β koncentriska kan vi således konstatera att Steinerkedjan, om den från början var sluten, kommer fortsätta vara sluten och var den inleds inte kommer vara avgörande för dess slutenhet.



Figur 20: Inveterad stängd Steinerkedja

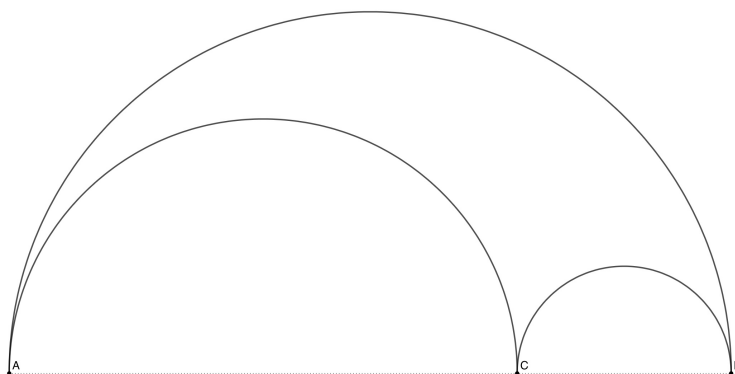
Vi vet också att en öppen Steinerkedja aldrig kan inverteras till en stängd. Detta eftersom skärnings- och tangeringspunkter bevaras under inversion. Två cirklar som skär varandra i två punkter kommer även efter inversion att ha två skärningspunkter och således inte tangera varandra. Detsamma gäller för två cirklar som inte har någon gemensam punkt, som då inte heller har någon punkt gemnsamt efter inversion.

ANDRA TILLÄMPNINGAR

Inversionsgeometri kan även användas för att lösa andra geometriska problem. I detta kapitel kommer två andra exempel på detta, *Arbelos-problemet* och *Apollonius problem*, att presenteras. De båda kan lösas genom inversion, vilket visas nedan.

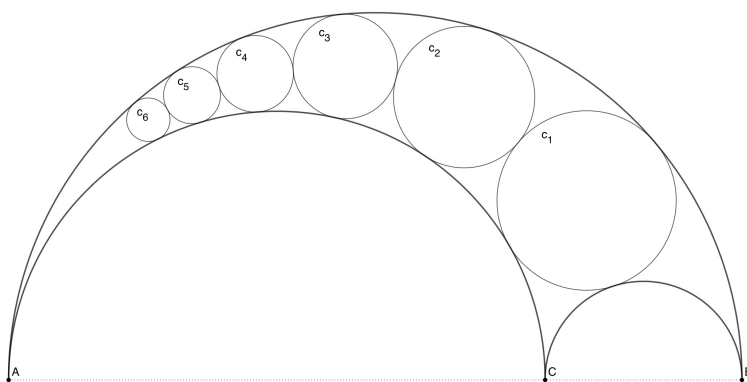
4.1 ARBELOS

Ordet arbelos är grekiska för skomakarens kniv och syftar till en figur som liknar ett sådant verktyg. Figuren består av tre halvcirklar som tangerar varandra och respektive halvcirkels diameter går genom en gemensam linje. Om A , B och C är punkter på en linje och AB , BC och AC är halvcirklar på samma sida om linjen har vi en arbelos.



Figur 21: En arbelos.

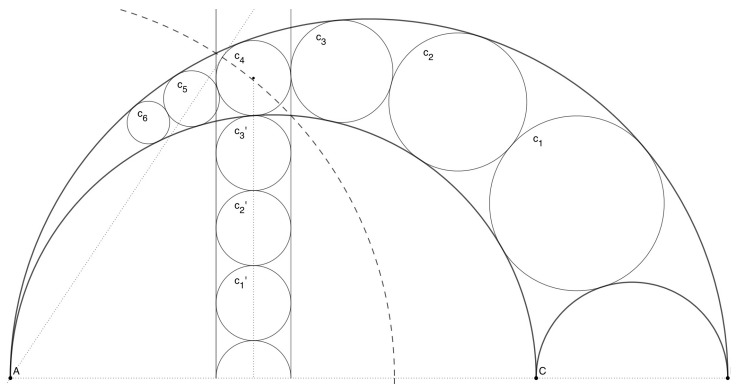
I en arbelos kan vi skriva in en kedja med cirklar, liknande en Steinerkedja, där cirkeln i kedjan tangerar de tre halvcirkeln samt sina två grannar. Denna konstruktion har egenskapen att höjden från linjen AB till medelpunkten för cirkel c_n , den n :e cirkeln, är nd_n där d_n är diametern för cirkel c_n . För att visa denna egenskap används inversion.



Figur 22: En arbelos med en inskriven kedja med cirklar.

En fungerande inversionscirkel i sammanhanget har sin medelpunkt i A och är ortogonal mot cirkel c_n . Vi visar egenskapen för cirkel c_4 men principen och argumentationen gäller i allmänhet. Genom att först dra en tangent till cirkel c_4 genom A kan vi sedan konstruera den inversionscirkel vi söker, som går genom tangeringspunkten och har A som mitt. Denna är ortogonal till c_4 .

Vi inleder med att konstatera att c_4 inverteras till sig själv i och med att den är ortogonal mot inversionscirkeln. Halvcirkelarna AB och AC kommer med avseende på denna inversionscirkel inverteras till linjer som går genom deras respektive skärningspunkt med inversionscirkeln och som tangerar c_4 . Då både punkt B och C ligger på linjen AB genom inversionscirkelns mitt kommer dessa punkters inverser ligga på samma linje, och således inverteras halvcirkel BC till en halvcirkel med diamtern på linjen. Den inverterade halvcirkeln, $B'C'$, kommer även tangera linjerna som de andra halvcirkelarna inverteras till. Halvcirkeln $B'C'$ kommer därför ligga mellan linjerna och ha samma diameter som c_4 . Cirkel c_1 inverteras till en cirkel som efter inversion tangerar alla halvcirkelars inverser och c'_1 kommer därför också ligga mellan linjerna och tangera halvcirkel $B'C'$. För cirkel c_2 och c_3 gäller också att deras inverser, som också bevarar cirkelformen, ska tangera linjerna samt sina grannars inverser. Detta innebär att de inverterade cirklarna, och halvcirkel $B'C'$ ligger vertikalt under och har samma diameter som c_4 . Avståndet från linjen AB till mitten av c_4 är således summan av halva diametrarna av c_4 och $B'C'$ samt diametrarna för c'_1 , c'_2 och c'_3 , vilket motsvarar $4d_4$.



Figur 23: Illustration av cirkelns och halvcirkelns inverser.

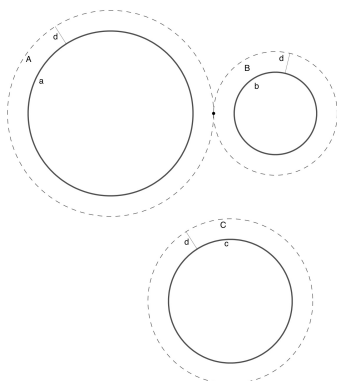
Principen är densamma oavsett vilken cirkel vi väljer och gäller således i allmänhet. Detta eftersom att cirkel c_n är ortogonal mot inversionscirkeln och då inverteras till sig själv, att halvcirkelarna AB och AC inverteras till linjer på samma sätt då de går genom inversionscirkelns mitt och att halvcirkeln BC inverteras till en halvcirkel med samma diameter som c_n . Vidare bevarar alla cirklar före c_n i kedjan sina tangeringspunkter med halvcirkelarna och sina grannar och inverserna har således samma diameter som c_n . Avståndet från linjen AB till mitten av c_n är därför $d_n(n - 1) + 2(\frac{1}{2}d_n) = nd_n$.

4.2 APOLLONIUS PROBLEM

Apollonius problem går ut på att konstruera en cirkel som tangerar tre givna cirklar. De givna cirklarna kan vara av olika storlek och deras positioner till varandra kan variera. Problemet kan ha åtta olika lösningar, där lösningscirkeln antingen tangerar alla cirklar inifrån, alla cirklar utifrån, två av cirklarna inifrån (på tre olika sätt) och en utifrån eller en inifrån och två utifrån (på tre olika sätt). Det finns också fall där problemet saknar lösning, som exempelvis om en av de givna cirklarna är helt innanför en annan eller om cirklarna har samma radier och medelpunkterna på samma linje.

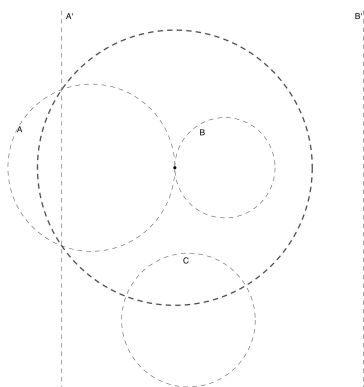
Vi ska nu visa hur inversion kan tillämpas för att hitta två lösningar. Vi låter tre cirklar, a , b och c , vara givna. Därefter ökar vi alla cirklarnas radie med d så pass att de två cirklarna som ligger närmast varandra tangerar varandra. De förstörade cirklarna kallar vi för A , B och C . Då de nya cirklarna fortfarande har samma medelpunkter som de ursprungliga kommer lösningscirkelns mitt vara densamma, men radien på den rätta lösningscirkeln kommer skilja sig från den förenklade med

d. Således undersöker vi inledningsvis endast lösningen för A , B och C .



Figur 24: De givna cirklarna med deras respektive förstörade version.

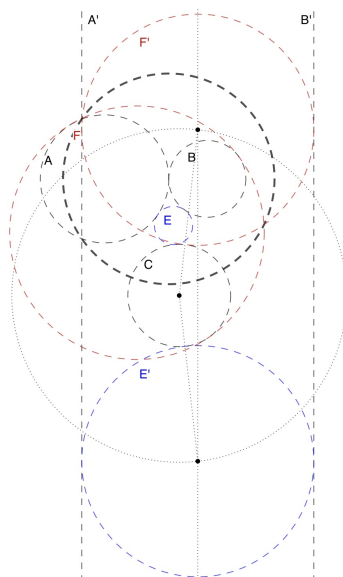
Dessa cirklar transformerar vi nu genom inversion. Vi låter inversionscirkeln ha sin mitt i den punkt där cirklarna A och B tangerar varandra och ser till att den är ortogonal mot cirkel C . Detta gör att cirkel C är oförändrad under inversion medan cirklarna A och B blir till linjer. Linjerna A' och B' är dessutom parallella eftersom cirklarna A och B endast har en gemensam punkt och det är inversionscirkelns mitt, som under inversion går mot oändligheten. Det innebär att linjerna aldrig skär varandra.



Figur 25: Inverser och inversionscirkeln.

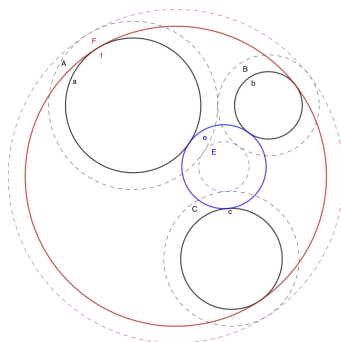
Utifrån dessa inverser kan vi nu hitta en cirkel som tangerar A' , B' och C' . Denna cirkel, som vi kallar E' , har sin medelpunkt på linjen mittemellan linjerna A' och B' och en diameter som motsvarar närmsta avståndet mellan linjerna A' och B' . Om vi låter radien för E' vara $r_{E'}$ och radien för C vara r_C kommer en cirkel med samma mitt som C och med radie $r_{E'} + r_C$ att korsa mittlinjen mellan A' och B' i två punkter. Någon av dessa två låter vi vara medelpunkt för E' och den andra låter vi

vara medelpunkt för en annan cirkel, F' , med samma egenskaper som E' . Eftersom E' och F' tangerar både A' , B' och C' och vi vet att tangeringspunkter bevaras under inversion kommer inverserna till E' och F' , alltså E och F , att tangera cirklarna A , B och C . På så vis har vi hittat E och F som två lösningar för problemet med de förstörade cirklarna.



Figur 26: Cirklarna E och F tangerar A , B och C .

Målet är slutligen att hitta cirklar som tangerar de ursprungliga cirklarna. Genom att addera respektive subtrahera d till radierna för cirkel E och F , men behålla medelpunkterna, kommer vi hitta dessa lösningar. Vi kallar dessa cirklar för e respektive f .



Figur 27: Cirklarna e och f tangerar alla de tre givna cirklarna a , b och c .

5

AVSLUTNING

Detta arbete har syftat till att ge en introduktion till inversionsgeometrin och visa hur inversion kan användas för att lösa geometriska problem. Vi inledde med att förklara grunderna för inversionstransformationen och vad den innebär för punkter, cirklar och linjer. Utifrån dessa grunder kunde vi visa att vinklar och korsförhållanden bevaras under inversion, även om vinklarna bytte riktning. Därefter introducerade vi konceptet med cirklars radikala axlar och koaxiala cirklar. Vi visade hur funktionellt detta kan vara i kombination med inversion, då cirkelmängder kan få särskilda egenskaper om en inversionscirkel väljs med detta i åtanke.

Denna grund gjorde att vi senare kunde lösa tre specifika geometriska problem. Vi tog oss först an Steiners porism och visade att det, med hjälp av de givna cirklarnas radikala axel och två ortogonala cirklar, är möjligt att finna en inversionscirkel som gör de givna cirklarna koncentrisk. När de givna cirklarna och Steinerkedjan inverteras med avseende på denna inversionscirkel kunde vi med enkelhet visa giltigheten i Steiners porism.

Därefter konstruerade vi en arbelos med en inskriven kedja med cirklar, där vi visade att höjden från figurens baslinje till en cirkels mitt alltid kan bestämmas på samma sätt. Slutligen hittade vi även lösningar till Apollonius problem. För att kunna lösa samtliga av dessa problem tillämpade vi inversionsgeometri.

Vi har inom ramen för detta arbete enbart visat på några av inversionsgeometrins möjliga användningsområden. Transformationen kan exempelvis även tillämpas i tre dimensioner, men då med hjälp av en inversionssfär istället för en inversionscirkel. Detta möjliggör att ännu fler geometriska problem kan lösas enklare. Bland annat finns en tredimensionell motsvarighet till Steiners porism, nämligen Soddys hexlet.

REFERENSER

- [1] Barnes, John. (2012). *Gems of Geometry*. Andra upplagan. Berlin: Springer.
- [2] Euclid., Euclides, Fitzpatrick, Richard. & Heiberg, Johan Ludvig (2008). Euclid's elements of geometry: the Greek text of J.L. Heiberg (1883-1885) : from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883-1885. Revised and corrected - 2008.
- [3] Ogilvy, Charles Stanley (1990). *Excursions in Geometry*. New York: Dover.
- [4] Wikipedia. (31 januari 2022). Geometri. I *Wikipedia*. Hämtad 15 november 2022, från sv.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometri&oldid=50113360
- [5] Wikipedia. (23 September 2022). Inversive geometry. I *Wikipedia*. Hämtad 15 November 2022, från https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Inversive_geometry&oldid=1111938930