



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Flippa ur: flipgrannskap i dimermodellen

av

Ivo Thomasson

2023 - K11

Flippa ur: flipgrannskap i dimermodellen

Ivo Thomasson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Per Alexandersson

2023

Abstract

We introduce the height function on a domino tiling of a simply connected region and show that it gives the set of tilings the structure of a lattice. The fundamental relation in this structure is a flip, which consists of turning two adjacent dominos in a tiling 90° , and thus obtaining a new one. In particular, we show that we can get from a tiling to any other tiling of the same region by a sequence of flips. We then use this fact to simplify the combinatorial aspect of proving Kasteleyn, Temperley and Fishers formula for the amount of tilings of rectangular boards. Finally, we explore the order theoretical aspects of tilings by applying Birkhoff's representation theorem to the lattice of tilings of some types of regions.

Sammanfattning

Vi presenterar höjdfunktionen på en dominotäckning av ett enkelt sammanhängande område och visar att denna ger mängden av täckningar strukturen av ett gitter. Den grundläggande relationen i denna struktur är en flip, som består i att rotera två intilliggande dominos i en täckning 90° . I synnerhet visar vi att det går att komma från en täckning till vilken annan täckning som helst av samma område, genom en sekvens av flips. Detta faktum utnyttjar vi för att förenkla den kombinatoriska aspekten av beviset för Kasteleyn, Temperley och Fishers formel, som räknar det totala antalet täckningar av rektangulära bräden. Slutligen fördjupar vi den ordningsteoretiska aspekten av dominotäckningar genom att tillämpa Birkhoffs representationsats på täckningsgittret för några olika områden.

Förord

Först och främst vill jag tacka min handledare Per för all hjälp och inspiration med arbetet. Jag vill även tacka Jennifer för den studievägledning jag fått under dessa år samt Sylvester och Viktor för korrekturläsning. Utan vänner, studiekamrater och familj, som tålmodigt lyssnat på mitt dominoprät och gett värdefull input hade det inte varit möjligt att skriva denna uppsats så stort tack till er alla!

Begrepp och notation

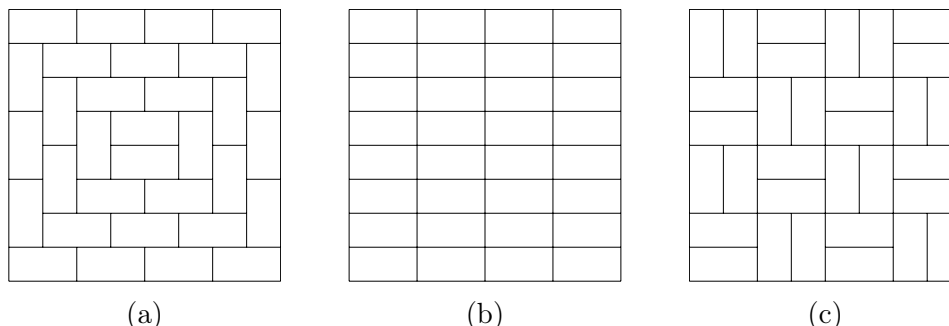
R	ett område i gittret	a region
T	en täckning av gittret med brickor	a tiling
\mathbb{Z}^2	det kvadratiska gittret	the square lattice
$\mathcal{O}(P)$	mängden av nedåtmängder till P	the order ideals of P
\mathcal{T}_R	mängden av täckningar av R	the set of tilings of R
$x \wedge y$	mötet av x och y	the meet of x and y
$x \vee y$	fogen av x och y	the join of x and y

Innehåll

1	Introduktion	1
1.1	Tillämpade dominos	2
2	Resultat	3
2.1	Täckbarhet	3
2.2	Höjdfunktionen	4
2.3	Att få ordning på täckningar	9
2.4	Flippa ur	12
2.5	Kasteleyn, Temperley och Fishers formel	14
3	Fördjupning och breddning	19
3.1	Det triangulära gittret	19
3.2	Flipgrannskap genom Youngtablåer	20
3.3	Ett homologiskt perspektiv på flipgrannskap	21
3.4	Avstånd i flipgrafer	21
3.5	\mathcal{T}_R och Birkhoffs representationssats	22
3.6	Unimodalitet	28
3.7	Sannolikhetsfördelningar och slumpgenerering	29
	Referenser	30
4	Appendix	31
A	En algoritm för maximal höjdfunktion	31

1 Introduktion

Kan ett schackbräde täckas av dominos? Med en domino avser vi en rektangulär bricka som täcker två intilliggande rutor på brädet. Svaret är ja, för att täcka de 64 rutorna på brädet behöver vi 32 stycken dominos. I Figur 1 visar vi upp tre olika täckningar av schackbrädet.



Figur 1: Tre olika täckningar av schackbrädet

En naturlig fråga att ställa är då: på hur många *olika* sätt kan vi täcka schackbrädet med dominos? Om läsaren vill få en känsla för problemet, föreslår jag att med hjälp av ett rutat papper hitta de 36 olika täckningarna av brädet som är fyra gånger fyra rutor stort. Det visar sig att det finns 12 988 816 olika täckningar av schackbrädet, vilket vi kan räkna ut med hjälp av följande formel som publicerades 1961 av P.W. Kasteleyn [6] samt Temperley och Fisher [14], oberoende av varandra:

$$Z_{mn} = \prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} 2 \left[\cos^2 \left(\frac{k\pi}{m+1} \right) + \cos^2 \left(\frac{l\pi}{n+1} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Med hjälp av denna formel, kan vi räkna ut antalet dominotäckningar av godtyckliga rektangulära bräden. Detta gör vi genom att låta m och n vara brädets sidlängder. Med $m = n = 8$ får vi alltså 12 988 816. Vi noterar dock att åtminstone den ena av rektangelns sidor måste vara jämn om Z_{mn} ska vara större än noll. I Avsnitt 2.5 kommer vi redogöra för den kombinatoriska delen av beviset för Kasteleyn, Temperley och Fishers formel.

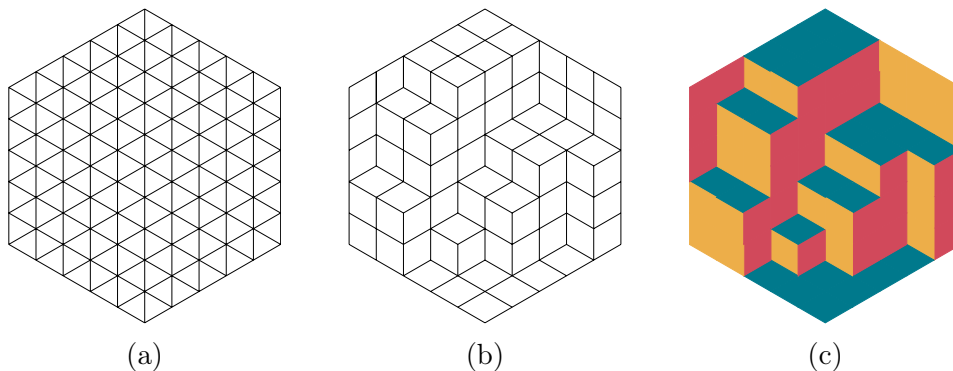
Innan dess kommer vi dock undersöka vissa kombinatoriska aspekter hos domino-täckningar, i synnerhet ska vi behandla konceptet av en *flip*. En flip är operationen som består i att rotera två intilliggande dominos i vår täckning nittio grader och på så vis erhålla en ny täckning, som i Figur 2.



Figur 2: Dessa två täckningar av 3×4 -brädet skiljer sig med *en* flip.

För att undersöka hur den lokala operationen i form av en flip relaterar olika täckningar av ett bräde till varandra, kommer vi i Avsnitt 2.2 introducera en *höjdfunk-*

tion. Höjdfunktionen introducerades i [15] och bygger på ett sätt att läsa en täckning som en tredimensionell struktur. Detta kan på ett suggestivt sätt illustreras med hjälp av fallet där vårt bräde består av liksidiga trianglar istället för kvadrater, där motsvarigheten till dominos blir romber som täcker två trianglar var. I det triangulära gittret finns det tre möjliga orienteringar på en romb. I Figur 3 ser vi att om vi associerar en färg till varje orientering antar varje täckning en uppenbart tredimensionell karaktär. Även om den rumsliga representationen av en rektangulär



Figur 3: En av 232848 täckningar av hexagonen med sidlängd 5

dominotäckning inte är lika grafiskt slående, kommer höjdbegreppet ge oss ett sätt att jämföra täckningar med varandra. Vi visar utifrån detta att mängden av täckningar av ett enkelt sammanhängande område är ett ändligt gitter. Gitterstrukturen gör att vi kan konstatera att mängden av täckningar är *flipsammanhängande*, det vill säga att för två godtyckliga täckningar av ett område, kan vi komma från den ena till den andra genom en sekvens av flips. Detta kommer vi utnyttja i vårt bevis av Kasteleyn, Temperley och Fishers formel.

1.1 Tillämpade dominos

När Kasteleyn, Temperley och Fisher hittade den exakta formeln för antalet dominotäckningar av rektangulära bräden, så var det inte av ett rent kombinatoriskt intresse. Alla tre forskade inom den gren av fysiken som kallas för *statistisk mekanik*. Den statistiska mekaniken tillämpar statistiska och sannolikhetsteoretiska förklaringsmodeller på system som består av stora mängder mikroskopiska enheter. I detta kontext är en domino en symbol för en molekyl som består av två atomer, en så kallad diatomär molekyl; på engelska, en *dimer* (läs *dajmer*). Om vi täcker ett rutnät med dominos, får vi en grovt förenklad, tvådimensionell modell av ett fysikaliskt system bestående av dimers. Förenklad därför att vi förutsätter dels att systemet har maximal densitet, det vill säga saknar tomrum och dels för att vi bara tillåter två orienteringar av varje partikel i planet (vertikal eller horisontell).

Känner vi till systemets fysikaliska egenskaper, kanske vi vet att det genomgår en fasövergång då partiklarna, eller laddningarna är orienterade på ett visst sätt. Om vi då till exempel vill beräkna sannolikheten för att ett visst tillstånd ska uppstå behöver vi veta hur många olika tillstånd systemet kan befinna sig i totalt. I fysikens terminologi är vi då intresserade av att hitta systemets partitionsfunktion, eller tillståndssumma. Trots att dimermodellen är en grovt förenklad modell, visade

Kasteleyn, Temperley och Fisher att den har en exakt matematisk lösning. Detta faktum ger modellen en tjusning, antalet modeller med exakta lösningar är inte många till antalet. Vi nämner till exempel den två-dimensionella Isingmodellen och dess generalisering i Pottsmodellen, som ger insikt i ferromagnetiska system. Om läsaren önskar fördjupa sig i detta material rekommenderar vi standardverket *Exactly Solved Models In Statistical Mechanics* av Rodney J. Baxter.

2 Resultat

2.1 Täckbarhet

I denna uppsats har jag valt att fokusera på rektangulära områden för att Kasteleyn, Temperley och Fishers formel rör just dessa. Gällande de kombinatoriska resultat som kommer presenteras i de följande avsnitten, gäller dessa i allmänhet områden som är *enkelt sammanhängande* (utan hål). Vi har redan konstaterat att det enda kriteriet för att ett rektangulärt område ska gå att täcka med dominos är att åtminstone en av sidorna är ett jämt antal enheter lång. För mer oregelbundna områden blir situationen mer komplex. För att överbygga avståndet mellan denna text (om rektangulära bräden) och den övriga litteraturen (om mer generella bräden) ger vi dock en överblick, och tar tillfället i akt att introducera vissa begrepp som vi kommer referera till i fortsättningen.

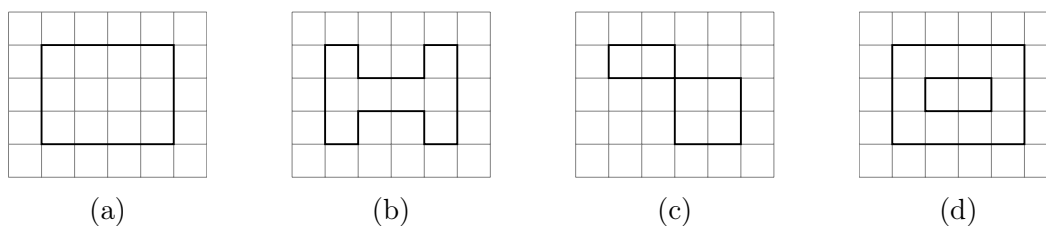
Definition (Det kvadratiske gittret). Genom att dela upp det Euklidiska planet i kvadratiske enhetsrutur får vi ett kvadratiske gitter. Vi betecknar det med \mathbb{Z}^2 .

Ifall vi låter en punkt vara utgångspunkten $(0,0)$, kan vi ge resten av punkterna i gittret heltalskoordinater. Vi kommer även hänvisa till det triangulära gittret som vi kallar p6m. Ett grundläggande verktyg för att besvara frågeställningarna vi har framför oss är graf-begreppet.

Definition (Graf). En graf $G = (V, E)$ består av en mängd V av element som kallas noder, och en mängd E av ordnade eller oordnade par av element från V , som kallas för kanter. Om kanterna är ordnade par, så kallas G för en *riktad* graf, annars kallas G för oriktad.

Vi kan ge gittret strukturen av en oriktad graf genom att låta dess noder vara element i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ och säga att det finns en kant mellan noderna (m,n) och (m',n') om antingen $m' = m \pm 1$ och $n' = n$ eller $m' = m$ och $n' = n \pm 1$.

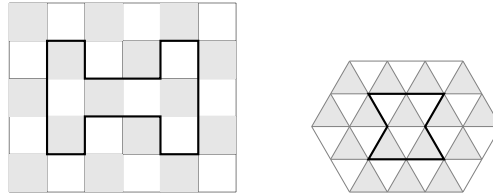
Definition (Område). Ett område R är en enkel polygon i gittret (se Figur 4).



Figur 4: (a) och (b) är områden, eftersom randen till (c) korsar sig själv är det inte ett område; och (d) är inte enkelt sammanhängande.

Ett nödvändigt kriterium för täckbarhet kan vi erhålla genom att färglägga vårt område. Om vi färglägger varannan ruta svart och varannan vit i ett schackrutmönster, så inser vi att området måste innehålla lika många svarta som vita rutor för att det ska finnas en täckning. I Figur 5 ser vi två områden som trots att de uppfyller färgläggningsskriteriet inte går att täcka med dominos respektive romber.

Definition. Ett område i \mathbb{Z}^2 (p6m) som inte går att täcka med dominos (romber) kallar vi för otäckt.

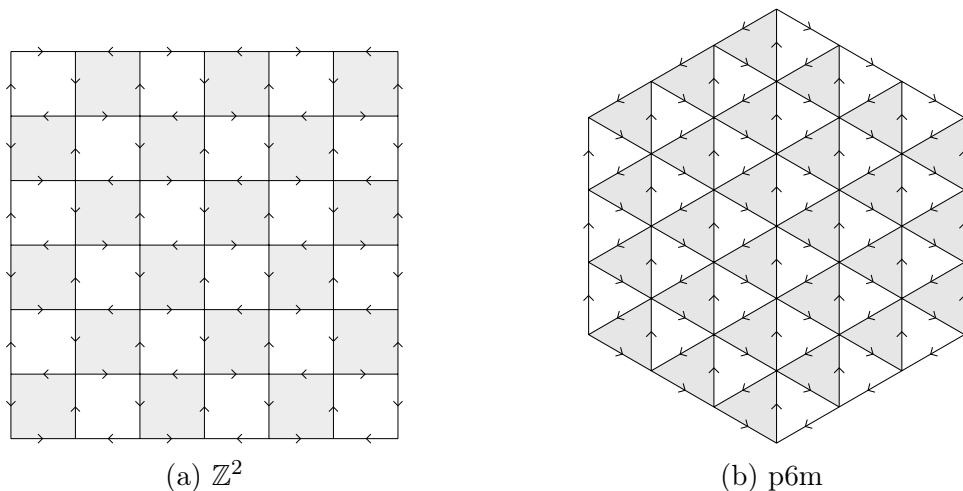


Figur 5: Två otäcka områden

Vi inser alltså att färgkriteriet inte är *tillräckligt* för att garantera täckbarheten hos ett område. Vi kommer i denna uppsats inte beskriva det tillräckliga villkoret för täckbarhet, men följande kapitel kommer ge läsaren alla verktyg för att kunna åstadkomma ett sådant själva.

2.2 Höjdfunktionen

Vi såg i Figur 3 att täckningar av p6m med romber hade en tydlig rumslig interpretation, som staplade lådor i ett rum, vi antydde också att dominotäckningar kunde ges en rumslig tolkning. I detta avsnitt ska vi ge dessa tolkningar en matematisk innebörd genom att visa att varje täckning av ett område kan associeras till en unik så kallad höjdfunktion. För att beskriva vår höjdfunktion, så introducerar vi en riktning på kanterna i våra gitter. Vi riktar kanterna så att vi med hänsyn till schackrutfärgläggningen får cykler som går motsols runt svarta rutor, och medsols runt vita. I Figur 6 visar vi denna orientering på våra två gitter.



(a) \mathbb{Z}^2

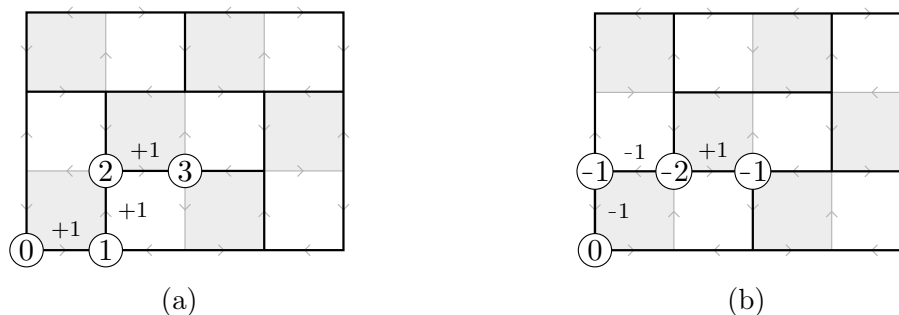
(b) p6m

Figur 6: Orientering på gittret

Ifall vi nu betraktar en täckning T av det orienterade gittret med dominos, kan vi till en nod v associera en höjd $h(v)$ [10, p. 714]. Vi åstadkommer detta genom att först välja en startnod v_0 och låta dess höjd vara $h(v_0)$. Sedan låter vi $(v_0, e_1, \dots, e_n, v)$ vara en väg från v_0 till v som aldrig skär en domino i T i två bitar och definierar höjden av v enligt följande:

$$h(v) = h(v_0) + \sum_{i=1}^n o(e_i) \quad \text{där} \quad o(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{om } e_i \text{ följdes i orienteringens riktning} \\ -1 & \text{annars.} \end{cases} \quad (2)$$

Här är alltså e_i kanterna i vår valda väg från v_0 till v . I Figur 7 visar vi hur höjderna på samma noder skiljer sig mellan två täckningar, beroende på villkoret att vår väg måste färdas längs dominobrickornas kanter. Den analytiskt lagda kan tänka på höjdfunktionen som en slags diskretiserad kurvintegral där orienteringen vi valt på gittret är ett vektorfält; denna analogi kommer visa sig stämma väl överens med flera av de följande påståendena.



Figur 7: Vi kan inte välja samma väg till $(2, 1)$ i båda täckningarna, vilket ger olika höjder.

Genom att välja en startnod i vår täckning (vår konvention kommer vara att välja områdets nedre vänstra hörn) och initiera dess höjd till 0, vill vi med höjdfunktionen tilldela varje nod i området en höjd. Om detta ska vara en väldefinierad operation måste vi försäkra oss om att höjden av en nod v som erhålls på detta vis är oberoende av vårt val av väg i täckningen. För att göra det kommer vi att tala om höjdskillnaden mellan två noder i en täckning T som induceras av en väg (som aldrig skär en domino i T i två). Vi väljer då notationen $h(v \rightarrow v')$ för att beteckna att vi beräknar höjden på v' utifrån startnoden v .

Påstående 1. Fixera en väg mellan v och v' , då kommer $h(v \rightarrow v') + h(v' \rightarrow v) = 0$.

Bevis. För varje kant i vägen mellan v och v' så kommer $o(e)$ med avseende på vägen från v till v' vara inversen av $o(e)$ med avseende på vägen från v' till v , eftersom vi färdas längs kanten i omvänd riktning. \square

Lemma 2 (En sluten krets i en täckning ger ingen höjdskillnad [15]). Låt $(v_0, e_1, \dots, e_n, v_0)$ vara en krets som börjar och slutar i v_0 , om vi använder höjdfunktionen för att med avseende på denna krets beräkna höjden på v_0 , så kommer vi få 0.

Bevis. Induktion på antalet dominos som omsluts av vägen: Vi kontrollerar att oavsett hur vi placerar vår domino i det orienterade gittret så kommer höjdfunktionen för en väg som omsluter n dominos få $\sum o(e_i) = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$, alltså håller påståendet för basfallet. Antag sedan att $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_n, e_n, v_0)$ är en krets

som omsluter ett område täckt av n stycken dominos. Om $n > 1$ så kan vi välja två noder v_m och v_k (m eller k kan vara 0) som passeras av vår krets, och en enkel båge $V = (v_m, e'_1, \dots, e'_n, v_k)$ mellan v_m och v_k som skär det större området i två mindre (se Figur 8a).

Antag att vi har kunnat välja en båge så att den ena av dess ändpunkter är just v_0 , låt den andra vara v_k . Ifall vi låter $K = (v_0, e_1, \dots, e_k, v_k, e'_n, \dots, e'_1, v_0)$ och $K' = (v_0, e'_1, \dots, e'_n, v_k, e_{k+1}, \dots, e_n, v_0)$ vara två kretsar som börjar och slutar i v_0 men som omsluter de respektive områdena som bågen spjälkade upp det större till (se Figur 8b) kommer det enligt induktionsantagandet gälla att

$$\sum_{e \in K} o(e) = 0 = \sum_{e \in K'} o(e),$$

vilket medför att

$$\underbrace{o(e_1) + \dots + o(e_k) + \overbrace{o(e'_n) + \dots + o(e'_1)}^{e' \in \vec{V}}}_{e \in K} + \underbrace{\overbrace{o(e'_1) + \dots + o(e'_n)}^{e' \in \overleftarrow{V}} + o(e_{k+1}) + \dots + o(e_n)}_{e \in K'} = 0.$$

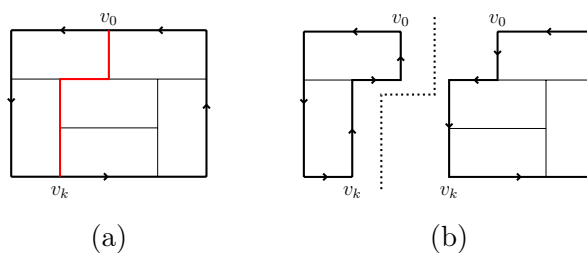
Det följer av Påstående 1 att

$$o(e'_n) + \dots + o(e'_1) + o(e'_1) + \dots + o(e'_n) = 0$$

eftersom $h(v_0 \rightarrow v_k) + h(v_k \rightarrow v_0) = 0$. Detta ger att

$$o(e_1) + \dots + o(e_k) + o(e_{k+1}) + o(e_n) = 0,$$

men detta var just $h(v_0 \rightarrow v_0)$ med avseende på en krets som omsluter en region täckt av n stycken dominos. I det fall då vi inte kan dra en enkel båge genom vårt områdes inre vars ena ändpunkt är v_0 , får vi låta v_0 passeras av blott den ena av kretsarna runt våra delområden. Kancelleringen av de termer i bågen som traverseras i båda riktningarna kommer i detta fall bli densamma. Alltså kan vi konstatera att lemmat håller för alla kretsar i en täckning. \square



Figur 8: Induktionssteget i bevis 1.

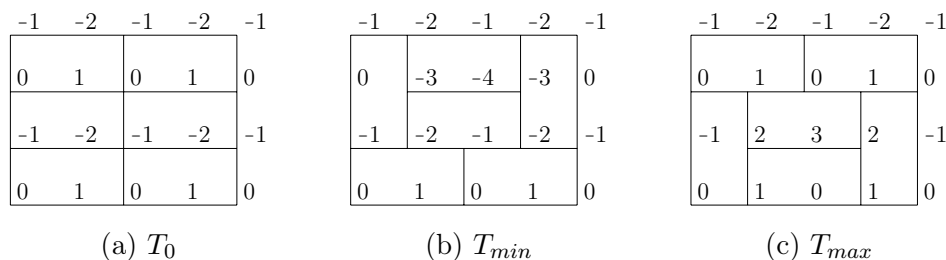
Nu är vi redo att konstatera att $h(v_0 \rightarrow v)$ är väldefinierad, dimermodellens svar på integralens vägoberoende:

Sats 3 (Höjdfunktionen är väldefinierad). Låt T vara en täckning, v_0 en startnod och v en nod i området. Då är $h(v_0 \rightarrow v)$ oberoende av vägen.

Bevis. Låt $V = (v_0, e_1, \dots, e_n, v)$ vara en väg från v_0 till v och $V' = (v_0, e'_1, \dots, e'_k, v)$ en annan sådan, vi vill visa att $h_V(v_0 \rightarrow v) = h_{V'}(v_0 \rightarrow v)$. Antag för enkelhetens skull att v_0 och v är de enda noderna som passeras både i V och V' . Ifall vi följer V' i omvänd riktning och lappar ihop den med V får vi en krets $(v_0, e_1, \dots, e_n, v, e'_k, \dots, e'_1, v_0)$, enligt Lemma 2 kommer $h(v_0 \rightarrow v_0)$ med avseende på denna krets vara noll. Men av definitionen av höjdfunktionen följer det att $h(v_0 \rightarrow v_0) = h_V(v_0 \rightarrow v) + h_{V'}(v \rightarrow v_0)$. Alltså har vi att $h_V(v_0 \rightarrow v) = -h_{V'}(v \rightarrow v_0)$, varpå vi utnyttjar Påstående 1 för att vända tillbaka riktningen i vilken vi följer V' och får då $h_V(v_0 \rightarrow v) = h_{V'}(v_0 \rightarrow v)$.

I de fall då vägarna V och V' sammanstrålar i fler noder, så kan vi använda induktion på antalet kretsar i T som bildas av de två vägarna, och tillämpa resonemanget ovan på var och en av dem. \square

Det följer nu av definitionen av höjdfunktionen och Sats 3 att vi efter att ha satt höjden på det nedre vänstra hörnet av vårt område till 0 kan med avseende på en täckning tilldela alla noder i området höjder. Vi skriver då $h(v)$ istället för $h(v_0 \rightarrow v)$. I och med detta så kan vi tala om höjdfunktionen för en *täckning*, $h(T)$. I Figur 9 visar vi upp höjdfunktionerna till tre olika täckningar, läsaren kan med fördel kopiera någon av dem till gittret i Figur 6a och försäkra sig om att de ifall den nedre vänstra rutan i brädet är svart erhåller samma höjder på noderna.



Figur 9: Tre olika täckningar av 3×4 -brädet

Vi noterar två egenskaper hos höjdfunktionen på en täckning:

1. Höjdfunktionen på randen till ett område är oberoende av täckningen.
2. Ifall två noder i en täckning är grannar i gittret, men kanten emellan dem delar en domino i mitten, så är höjdskillnaden mellan noderna 3, annars är den 1.

Vi formulerar också ett påstående om skillnaden mellan höjdfunktioner för olika täckningar, men introducerar dessförinnan följande notation: vi kallar höjden av noden v med avseende på täckningen T för $h_T(v)$.

Påstående 4. Låt T och T' vara två olika täckningar av ett område och v en nod i området, då är $h_T(v) - h_{T'}(v)$ en multipel av 4.

Bevis. Vi vet av egenskap 1 att påståendet är trivialt uppfyllt om v ligger på randen, eftersom $h_T(v) - h_{T'}(v) = 0$ i sådana fall. Därför antar vi att v inte ligger på randen till området. Låt nu $V = (v_0, e_1, \dots, e_n, v)$ vara en rak väg i gittret från en nod v_0 som ligger på randen till vår nod v . Rak i den meningen att koordinaterna för noderna i V är fixerade i x - eller y -led, vi kräver inte av denna väg att den inte

skär några dominos på mitten. Vi utför nu induktion på längden av V , det vill säga avståndet från v till randen.

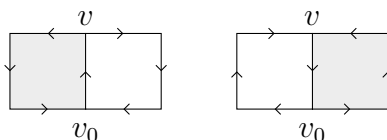
Basfallet blir en väg av längd 1, då finns dessa tre alternativ för kanten e_1 :

1. e_1 går längs kanten av en domino i både T och T' , i sådana fall kommer höjdfunktionen tilldela v samma höjd i de båda täckningarna.
2. e_1 skär en domino i mitten i båda täckningarna vilket ger att $h_T(v) = h_{T'}(v)$.
3. e_1 skär en domino i mitten i T men inte i T' (eller vice versa), om vi har en svart ruta på vänster sida när vi följer e_1 från v_0 till v så kommer höjden minska med 3 med avseende på T men öka med 1 med avseende på T' . Om vi har en vit ruta på vänster sida så kommer höjden av v vara 3 högre än v_0 med avseende på T men 1 mindre med avseende på T' (se Figur 10). I båda fallen är höjdskillnaden 4.

Antag nu att påståendet gäller för alla noder som är $n - 1$ raka steg från randen till ett område, då har vi att 4 delar $h_T(v_{n-1}) - h_{T'}(v_{n-1})$. Enligt precis samma resonemang som vi anförde gällande basfallet, så kommer något av följande gälla då vi förlänger vägen med 1 steg och når v :

1. både $h_T(v)$ och $h_{T'}(v)$ ökar alternativt minskar med 1 i förhållande till respektive höjder på v_{n-1} ,
2. både $h_T(v)$ och $h_{T'}(v)$ ökar alternativt minskar med 3,
3. $h_T(v) = h_T(v_{n-1}) \pm 1$ och $h_{T'}(v) = h_{T'}(v_{n-1}) \mp 3$ eller vice versa.

I alla fallen blir vårt påstående uppfyllt, alltså gäller påståendet oavsett hur lång den kortaste raka sträckan från v till randen är. □



Figur 10: Basfallet i Påstående 4.

Det är uppenbarligen så att efter ett val av startnod och höjd på densamma, så motsvarar alla täckningar av ett område en unik höjdfunktion. Vi vill nu försäkra oss om att varje höjdfunktion som uppfyller vissa krav, kan göras till en täckning.

Påstående 5 ([12]). Låt f vara en funktion från noderna i R till heltalen och (v, v') en kant i \mathbb{Z}^2 som följer orienteringen vi definierat på gittret. Antag att f uppfyller följande:

- (i) $f(v_0) = 0$,
- (ii) $f(v') = f(v) + 1$ eller $f(v') = f(v) - 3$,
- (iii) $f(v') = f(v) + 1$ om (v, v') ligger på randen till R .

Då finns det en täckning T sådan att $h_T(v) = f(v)$ för alla v i R .

Bevis. Betrakta en svart ruta i gittret och låt $(v_0, v_1, v_3, v_4 = v_0)$ vara en cykel runt rutan i orienteringens riktning, vi ser att (ii) tvingar tre av dess noder till att få en höjdskillnad av 1. Säg att $f(v_1) = f(v_0) + 1$, $f(v_2) = f(v_1) + 1$, $f(v_3) = f(v_2) + 1$, då måste $f(v_0) = f(v_3) - 3$. Samma kommer gälla för alla cykler runt vita rutor. Det gäller uppenbarligen att den kant i en svart ruta som f tilldelar en höjdskillnad på tre, kommer vara den kant i den intilliggande vita rutan som får höjdskillnad 3, och vice versa. En funktion som uppfyller (i-iii) etablerar alltså en bijektion mellan svarta och vita intilliggande rutor inuti området. Genom att täcka alla de kanter (v, v') för vilka $|f(v') - f(v)| = 3$ erhåller vi alltså en dominotäckning. \square

2.3 Att få ordning på täckningar

När vi i föregående kapitel med viss möda definierat en kanonisk kodning av en täckning T till en höjdfunktion $h(T)$, undrar vi vad detta ska vara bra för. I detta kapitel ska vi göra en utflykt in i ordningsteorin. Denna gren av matematiken undersöker *mängder* utrustade med något sätt att jämföra olika element i mängden. Från ordningsteorin ska vi hämta upp några verktyg som kommer hjälpa oss att förstå hur olika täckningar av samma område kan jämföras. Det kommer visa sig att nyttan med vår kära höjdfunktion är att den kan användas för att ge mängden av täckningar av ett område en så kallad *partiell ordning*.

Definition (Partiell ordning [1]). Låt P vara en mängd. En partiell ordning av P är en binär relation \leq på P sådan att följande gäller för alla $x, y, z \in P$:

- (i) $x \leq x$ (reflexivitet),
- (ii) $x \leq y$ och $y \leq x$ medför att $x = y$ (antisymmetri),
- (iii) $x \leq y$ och $y \leq z$ medför att $x \leq z$ (transitivitet).

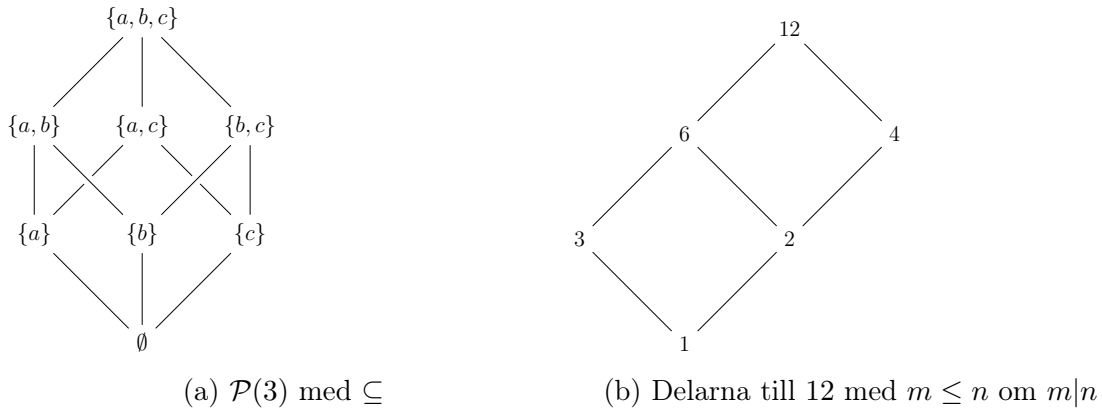
Vi använder snabbskriften *pomängd* för att beteckna partiellt ordnade mängder. Om det gäller att $x \leq y$ och $x \neq y$ så skriver vi $x < y$.

Det som skiljer en pomängd från en totalt ordnad mängd, är att det kan finnas par av element som är ojämförbara. Ett klassiskt exemplet på en pomängd är mängden av alla delmängder till en mängd av n element (vanligen kallad potensmängden $\mathcal{P}(n)$), där ordningen ges av mängdinklusion \subseteq .

Definition (Täckningsrelationen). Låt P vara en pomängd och låt $x, y \in P$. Vi säger att y *täcker* x och skriver $x \prec y$ om $x < y$ och $x \leq z < y \implies x = z$.

Informellt innebär $x \prec y$ att det inte finns några element som ligger mellan x och y . I Figur 11a visar vi upp ett sätt att visualisera partiellt ordnade mängder grafiskt som kallas för Hassediagram, där ser vi att $\{a\}$ och $\{b\}$ är ojämförbara, men båda är delmängder till $\{a, b\}$. I Hassediagram är elementen i pomängden noder, och kanterna representerar täckningsrelationer. Noder och kanter ritas så att element som är större än andra ritas längre upp i diagrammet.

Vi har redan sett att vi alltid kan tala om en höjdskillnad mellan en och samma nod relativt till olika täckningar. I Påstående 4 visade vi att denna skillnad alltid är en multipel av 4. Nu vill vi definiera ett sätt att säga att en täckning är större än en annan. Först så etablerar vi följande notation: vi kallar mängden av alla täckningar av ett område R för \mathcal{T}_R .



Figur 11: Två välbekanta pomängder.

Definition (Ordning på täckningar). Låt $T, T' \in \mathcal{T}_R$ vara två täckningar av området R . Vi säger att:

- $T \leq T'$ om det gäller för alla noder $v \in R$ att $h_T(v) \leq h_{T'}(v)$.

Ordningen jämför alltså höjderna på alla noder i R med avseende på T och T' , och bara om *alla* höjder i T är högre (lägre) än i T' säger vi att T är högre (lägre) än T' . Med lite eftertanke inser vi att denna ordning uppfyller kraven för att kallas en partiell ordning. Om vi tittar på de tre täckningarna av 3×4 -brädet i Figur 9 ser vi att $T_0 \leq T_{max}$ och $T_{min} \leq T_0$, till exempel. I Figur 12 har vi satt höjder på den täckning som vi illustrerade i Figur 2a. Om vi kallar den för T_a så ser vi att T_a och T_0 är ojämförbara. Detta eftersom höjden på noden $(1, 1)$ är högre i T_a än i T_0 medan höjden på noden $(3, 2)$ är lägre i T_a . Vi introducerar vidare följande definitioner.

	-1	-2	-1	-2	-1
0	1	0	-3	0	
-1	2	-1	-2	-1	
0	1	0	1	0	

Figur 12: Höjder på täckningen i Figur 2a

Definition (Topp och botten). Låt P vara en pomängd, vi säger att P har en topp om det finns ett element $\top \in P$ sådant att $x \leq \top$ för alla $x \in P$. Om det finns ett element $\perp \in P$ så att $x \geq \perp$ för alla x , så säger vi att P har en botten.

Vi noterar till exempel att $\mathcal{P}(3)$ har både topp $\top = \{a, b, c\}$ och botten $\perp = \emptyset$. Vi vill dock kunna göra mer lokala analyser av pomängder och introducerar därför konceptet av övre och undre begränsningar:

Definition. Låt P vara en pomängd och låt $S \subseteq P$ en delmängd av P , vi säger att ett element $x \in P$ är en *övre begränsning* till S om $s \leq x$ för alla $s \in S$. Motsvarande formulering med \geq istället för \leq ger att x är en *undre begränsning* till S .

Genom att betrakta pomängden av delare till 12 i Figur 11b, ser vi att 6 och 12 båda är övre begränsningar till mängden $\{2, 3\}$, vilket föranleder följande definition:

Definition. Vi säger att x är en *minsta övre begränsning*, eller *supremum* till $S \subseteq P$ om:

- (i) x är en övre begränsning till S , och
- (ii) $x \leq y$ för alla övre begränsningar y av S .

I sådana fall skriver vi $x = \sup S$. Vi definierar den *största undre begränsningen* eller *infimum* av S analogt.

Vi kommer ofta tala om supremum eller infimum för delmängder bestående av två element och introducerar därför följande notation. Vi kallar $\sup\{x, y\}$ för *fogen* av x och y och skriver $x \vee y$ när denna existerar, $\inf\{x, y\}$ kallar vi för *mötet* av x och y och skriver vi $x \wedge y$. Supremum (infimum) av en delmängd S kallar vi för fogen (mötet) av S och skriver $\bigvee S$ ($\bigwedge S$). I $\mathcal{P}(3)$ ser vi att $\{a\} \vee \{b\} = \{a, b\}$ och mer generellt i sammanhanget $\mathcal{P}(n)$ har vi att fogen av två delmängder är dess union, medan mötet av två delmängder är dess snitt. Vi uppmanar läsaren till att fundera över vilka de gängse termerna för fog och möte är i kontexten av delbarhet (se Figur 11b).

Definition (Gitter). Låt P vara en pomängd, om $x \vee y$ och $x \wedge y$ existerar för varje par $x, y \in P$, så kallar vi P för ett gitter.

Det visar sig igen att ordningsteorin kan leda till begreppsförvirring i vårt fall, då vi nu har två olika innebörder av ordet gitter att förhålla oss till. Vi hoppas kunna göra distinktionen tydlig genom att använda \mathbb{Z}^2 och p6m, när vi åsyftar gittret som uppdelning av planet. Vi återgår nu till våra dominos och definierar följande:

Definition. Låt $T, T' \in \mathcal{T}_R$, och $h(T), h(T')$ vara dess höjdfunktioner. Vi kallar $\max\{T, T'\}$ för den funktion som till varje nod v i R tilldelar höjden $\max\{h_T(v), h_{T'}(v)\}$. Funktionen $\min\{T, T'\}$ tar istället minimum av höjden med avseende på T och T' i varje nod.

Lemma 6 ([12]). Låt T och T' vara två täckningar av R , då är $\max\{T, T'\}$ och $\min\{T, T'\}$ giltiga höjdfunktioner för täckningar av R .

Bevis. Vi visar att den funktion som fås av att ta $\max\{T, T'\}$ uppfyller krav (i-iii) i Påstående 5 och därmed är en täckning. Vår strategi kommer vara att visa att krav (ii) är uppfyllt för alla par av noder som är grannar i gittret. Låt alltså v och v' vara två noder i R sådana att kanten från v till v' går i orienteringens riktning. Eftersom T och T' är täckningar så vet vi att:

- (i) $h_T(v') = h_T(v) + 1$ eller $h_T(v') = h_T(v) - 3$, och
- (ii) $h_{T'}(v') = h_{T'}(v) + 1$ eller $h_{T'}(v') = h_{T'}(v) - 3$.

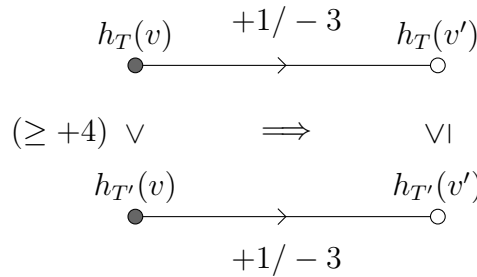
Antag att $h_T(v) > h_{T'}(v)$, i sådana fall kommer $\max\{T, T'\}$ per definition sätta höjden av v till $h_T(v)$. Vi vill nu försäkra oss om att maxfunktionen i detta fall sätter höjden av v' till $h_T(v')$ och inte $h_{T'}(v')$ om $h_{T'}(v') < h_T(v')$, om inte så skulle villkor (ii) i Påstående 5 inte vara uppfyllt. Vi får av Påstående 4 att $h_T(v) \geq h_{T'}(v) + 4$. Alltså har vi att:

$$h_T(v') \stackrel{(i)}{\geq} h_T(v) - 3 \stackrel{P.4}{\geq} h_{T'}(v) + 4 - 3 \stackrel{(ii)}{\geq} h_{T'}(v') - 1 + 4 - 3 = h_{T'}(v').$$

Vilket visar att $\max\{T, T'\}$ betar sig väl på de noder där $h_T(v) > h_{T'}(v)$. Se Figur 13 för en diagrammatisk representation. Antag istället att $h_T(v) < h_{T'}(v)$, då har vi att:

$$h_T(v') \stackrel{(i)}{\leq} h_T(v) + 1 \stackrel{P.4}{\leq} h_{T'}(v) - 4 + 1 \stackrel{(ii)}{\leq} h_{T'}(v') + 3 - 4 + 1 = h_{T'}(v').$$

Om $h_T(v) = h_{T'}(v)$ så är det omöjligt att en motsägelse uppstår gentemot maxfunktionens värde på v' , eftersom både T och T' är giltiga täckningar. Eftersom $\max\{T, T'\}$ uppfyller villkor (i) och (iii) från Påstående 5 trivialt, och ovanstående resonemang visar att den uppfyller även villkor (ii) så har vi visat att maximum av T och T' också är en täckning. Ett resonemang som är identiskt upp till ordning, visar att även minimum av T och T' är en täckning. \square



Figur 13: Maxfunktionen väljer $h_T(v')$ om $h_T(v) > h_{T'}(v)$.

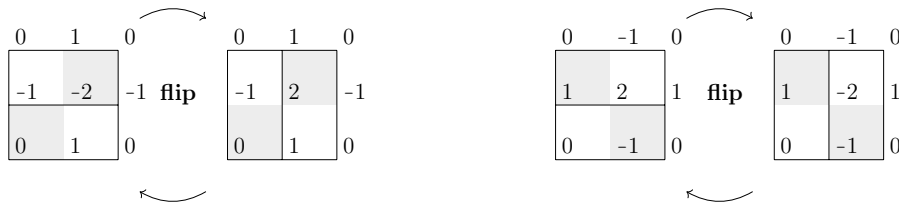
Sats 7. Mängden \mathcal{T}_R av alla dominotäckningar av R under ordningen på täckningar definierad ovan är ett gitter.

Bevis. Låt T och T' vara två täckningar av R , då är $T \vee T' = \max\{T, T'\}$ och $T \wedge T' = \min\{T, T'\}$. \square

2.4 Flippa ur

Vi har definierat en ordning på täckningar, visat att \mathcal{T}_R är ett gitter, och definierat en formel som hittar fogen $T \vee T'$ och mötet $T \wedge T'$ av två täckningar av R , allt utan att precisera vad som utgör *täckningsrelationen* mellan två täckningar. När gäller det att $T \prec T'$, alltså att T' är strikt större än T men att skillnaden emellan dem är minimal?

Definition (Flip). En flip i en täckning T är den lokala operationen som består i att identifiera två intilliggande dominos i T , rotera dem 90° och därmed erhålla en ny täckning T' .

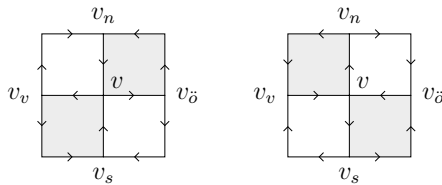


Figur 14: Höjden av en flip

Vi vill nu förstå hur en flip i en täckning påverkar dess höjdfunktion: i Figur 14 ser vi att en flip antingen sänker eller höjer höjden på den nod v som är flippens rotationsaxel med 4, men lämnar resten av höjderna oförändrade. Den minimala skillnaden mellan två *jämförbara* täckningar T och T' måste per definition uppnås då T och T' skiljer sig i höjd med avseende på endast en nod v . Enligt Påstående 4 är den minimala skillnaden mellan $h_T(v)$ och $h_{T'}(v)$ just 4, alltså utgörs täckningsrelationen i \mathcal{T}_R av flips. Vi kallar en flip som ökar höjden av sin flipaxel för en *uppåtgående flip* och en flip som minskar höjden för en *nedåtgående flip*. Vidare kallar vi noden v för ett *lokalt maximum* i T om:

- (i) v inte ligger på randen, och
- (ii) $h_T(v) > h_T(v_i)$ för alla fyra grannar till v i \mathbb{Z}^2 .

Den duala definitionen ger att v är ett *lokalt minimum*.



Figur 15: Noden i det orienterade gittret

Påstående 8. En nedåtgående (uppåtgående) flip runt axeln v är möjligt om och endast om v är ett lokalt maximum (minimum) i T .

Bevis. Antag att rutan sydväst om v är svart och kalla v :s fyra grannar för $v_v, v_{\bar{o}}, v_s, v_n$ (se Figur 15). Om en flip är möjlig med v som axel, så gäller det på grund av höjdfunktionens definition antingen att

1. $h_T(v_v) = h_T(v) + 1 = h_T(v_{\bar{o}})$ och $h_T(v_n) = h_T(v) + 3 = h_T(v_s)$, om våra två dominos ligger ner, eller att
2. $h_T(v_n) = h_T(v) - 1 = h_T(v_s)$ och $h_T(v_v) = h_T(v) - 3 = h_T(v_{\bar{o}})$ om de står upp.

Samma falluppdelning gäller om rutan sydväst om v är vit.

Antag å andra sidan att v är ett lokalt maximum eller minimum och att v är hörnet för någon domino i T . Då finns det en väg längs dominokanter, som går genom v . Ponera utan förlust av generalitet att denna väg är v_v, e_1, v, e_2, v_n , av hur vi konstruerat orienteringen på gittret så kommer e_1 och e_2 båda gå i vägens riktning

eller båda emot. Av höjdfunktionens definition får vi då att $h_T(v_v) > h_T(v) > h_T(v_n)$ eller att $h_T(v_v) < h_T(v) < h_T(v_n)$, vilket motsäger att v är ett lokalt maximum eller minimum. \square

Vi gör nu vissa betydande anmärkningar gällande mängder av täckningar:

1. Den kanske mest slående följderna av Sats 7 är att för två godtyckliga täckningar T, T' av ett område, så kan vi komma från den ena till den andra genom en sekvens av flips. Det visar sig att titeln till uppsatsen är missledande, det går inte att flippa ur, utan flips är synnerligen enkla och väluppförda små operationer, som kan ta oss till vilken täckning som helst under rätt förutsättningar. En vedertagen formulering av detta påstående är att "flipgrafan är sammanhängande". Notera dock att detta bara gäller områden som har de egenskaper vi har definierat, det vill säga att de är enkelt sammanhängande. Om det finns hål i området är det lätt att hitta två täckningar som inte går att flippa till varandra.
2. Eftersom ett icke-tomt ändligt gitter alltid har en topp och botten, följer det att en region R har en högsta respektive lägsta täckning. Den uppmärksamme läsaren inser att vi redan stött på sådana täckningar i Figur 9 och faktum är att Figur 1a är den minimala täckningen för schackbrädet. En intuition som kan förklara det generella utseendet för dessa täckningar är att en monotont stigande (sjunkande) väg i det orienterade gittret måste vara just en trappa, men trappan kan bara fortsätta till områdets mitten, om den ska hinna ner i tid till randen på andra sidan. Läsaren uppmanas att tänka efter hur den maximala täckningen av schackbrädet ser ut.
3. Vi kan med hjälp av en algoritm generera den minsta respektive största täckningen av ett område, denna algoritm presenterar vi för den intresserade i Appendix A.

2.5 Kasteleyn, Temperley och Fishers formel

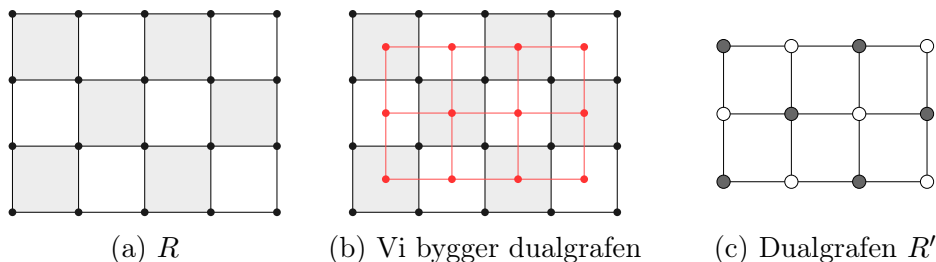
I och med detta avsnitt ska vi på ett subtilt sätt skifta perspektiv. När vi vill använda matematiska verktyg för att räkna antalet täckningar av ett bräde blir en av de första stegen att försöka utröna hur den information som finns i en täckning kan göras om till något slags numeriskt objekt, som vi sedan kan manipulera och analysera med de otaliga verktyg som finns till hands. Höjdfunktionen som uppvisats i föregående avsnitt är uppenbarligen en kodning av en täckning som ger stora möjligheter att förstå både den lokala och globala strukturen hos mängden av täckningar av ett område. I det rektangulära fallet blir denna kodning en $(m + 1) \times (n + 1)$ -matris, och med den maximala täckningen och nedåtgående flips, är det inte svårt att skriva datorkod som genererar alla täckningar av ett område. Det är dock uppenbart att mängden tid denna algoritm tar för att generera alla täckningar av ett område ökar exponentiellt i förhållande till dess storlek. Om vår målsättning blott är att beräkna kardinaliteten av \mathcal{T}_R behöver vi koda informationen i en täckning på ett nytt sätt.

Vi har sett att ett rektangulärt område R är en delgraf till \mathbb{Z}^2 med $(m + 1)(n + 1)$ noder, där m, n är längden på rektangelns sidor. Uppenbarligen är R en *planär* graf, det vill säga en graf som vi kan rita upp på papper utan att någon kant korsar

en annan. De ytor som begränsas av kanterna i R är just enhetsrutorna som \mathbb{Z}^2 delar upp planet i. Som så ofta i grafteorin låter följande definition mycket mer komplicerad än vad den är:

Definition. Dualgrafan till en planär graf G , är en graf där noderna utgörs av ytorna i en planär inbäddning av G . I dualgrafan till G finns det en kant mellan två noder om dessa ytor i G skiljs åt av en kant i G .

I dualgrafan till en rektangulär delgraf R av \mathbb{Z}^2 är noderna rutorna i R och två noder är grannar om deras rutor är grannar i R . Vi illustrerar konceptet med avseende på vårt välbekanta 3×4 -bräde i Figur 16.



Figur 16: Ett rektangulärt område representerat på två olika sätt.

Definition. En graf kallas för *bipartit* om vi kan dela upp noderna i två disjunkta mängder M och M' , sådana att ingen kant i grafen går mellan två noder från samma mängd.

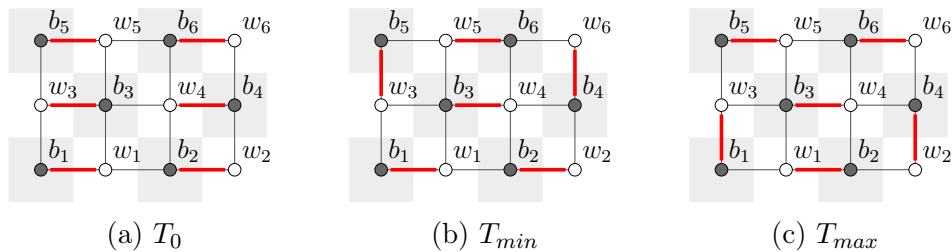
I dualgrafan R' kan en domino ses som en kant mellan två intilliggande noder och en täckning av R' blir då en så kallad *perfekt matchning* av R' . Vi noterar att för alla områden R som går att täcka med dominos, så kommer dualgrafan R' att vara bipartit, och antalet noder i de två disjunkta mängderna lika stort. Detta påstående är ekvivalent med anmärkningen vi gjorde i Avsnitt 2.1: det måste finnas lika många svarta som vita rutor för att ett område ska gå att täckas med dominos.

Definition (Perfekt matchning). Låt $G = (V, E)$ vara en graf, en perfekt matchning av G är en delmängd M av kantmängden E sådan att varje nod i G angränsar exakt en kant i M .

Vi kallar mängden av vita noder i R' för W och bestämmer en numrering av dessa från 1 till $k = \frac{mn}{2}$, på samma sätt ger vi de svarta noderna namnen $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. I Figur 17 visar vi täckningarna från Figur 9 som matchningar, en matchning innebär alltså att vi färglägger kanterna i grafen på ett sådant vis att varje nod angränsar en och endast en färglagd kant. Vi inser att informationen i en matchning, utifrån en numrering av de svarta respektive vita noderna, kan kodas som en permutation. Om vi skriver permutationen med tvåradsnotation, och låter den övre raden beteckna de svarta nodernas index och den undre de vitas, så får vi från de tre täckningarna i Figur 17 följande permutationer från S_6 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$\sigma(T_0)$ $\sigma(T_{min})$ $\sigma(T_{max})$



Figur 17: Tre olika matchningar av 3×4 -grafen

Uppenbarligen är avbildningen från matchningar S_k inte en surjektion, eftersom det inte alls är säkert att en godtycklig permutation kommer skicka en svart nod på en vit nod som är dess granne i R' . Vi behöver alltså hitta ett sätt att enbart räkna de permutationer som motsvarar matchningar. För att göra det återoppar vi konceptet av en *grannmatris*: en grannmatris för en graf G med $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ är en kvadratisk $n \times n$ -matris $A_{i,j}$ där vi associerar varje rad och kolumn med en av noderna i vår graf, sedan sätter vi $a_{i,j} = 1$ om v_i och v_j är grannar i G , $a_{i,j} = 0$ annars. Grannmatrisen är alltså en tabell över vilka noder som är grannar med vilka. Detta är grannmatrisen för 3×4 -grafan:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
w_1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
w_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
w_3	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
w_4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
w_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
w_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
b_1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b_3	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
b_4	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
b_5	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
b_6	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Vi noterar att grupperingen i svarta och vita noder gör så att grannmatrisen antar en form som är specifik för bipartita grafer, nämligen:

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Blocken av nollor uppstår eftersom svarta (vita) noder inte kan vara grannar med svarta (vita) noder. Att grannmatrisen sedan är symmetrisk, är något som gäller i allmänhet för oriktade grafer; om v_i och v_j är grannar i grafen, så kommer både $a_{i,j}$ och $a_{j,i}$ vara lika med 1. All information finns alltså kodad i ett av blocken A eller A^T och vi väljer därför att fortsätta arbeta med blott A . För ett godtyckligt rektangulärt $m \times n$ -bräde blir A alltså en $k \times k$ -matris, där $k = \frac{mn}{2}$. I A representerar varje kolumn en svart nod och varje rad en vit. Vi ger nu A följande viktning (kallad för en *Kasteleynviktning*):

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{om kanten } (w_i, b_j) \text{ är horisontell,} \\ \iota = \sqrt{-1} & \text{om kanten } (w_i, b_j) \text{ är vertikal.} \end{cases} \quad (3)$$

Så här ser A ut för 3×4 -brädet, med numreringen från Figur 17:

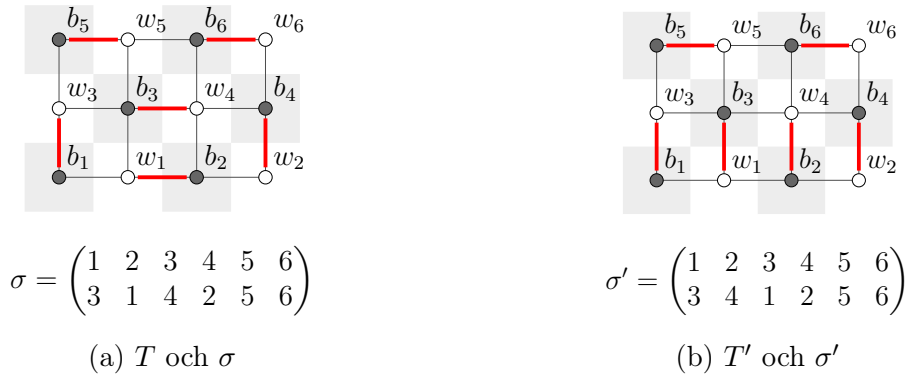
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
w_1	1	1	ι	0	0	0
w_2	0	1	0	ι	0	0
w_3	ι	0	1	0	ι	0
w_4	0	ι	1	1	0	ι
w_5	0	0	ι	0	1	1
w_6	0	0	0	ι	0	1

Sats 9 (Kasteleyn). Antalet perfekta matchningar ges av $|\det A|$.

Bevis. Vi använder oss av permutationsdefinitionen av determinanten för en $k \times k$ -matris:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{k,\sigma(k)}. \quad (4)$$

Vi argumenterade ovan för att varje perfekt matchning kan kodas som en permutation av k element efter att vi har numrerat de svarta respektive vita noderna i grafen med talen $1, 2, \dots, k$. De permutationer som inte svarar mot någon matchning kommer inte att ge något bidrag till (4) på grund av hur vi definierat A ; om σ är sådan att $\sigma(i) = j$ men b_j är inte granne med w_i , så är $a_{i,\sigma(i)} = 0$. Den första termen i varje term i (4) kan dock väcka en viss oro; om vi vill att denna summa ska räkna antalet täckningar, så måste vi vara säkra på att olika matchningar inte kan cancellera varandra. För att undanröja den oron kommer vi visa att två täckningar som skiljer sig med en *flip* bidrar med samma tecken till summan. Eftersom vi visat i Sats 7 att mängden av täckningar är *flipsammanhängande*, så skulle detta garantera att alla matchningar räknas med samma tecken. Låt alltså T och T' vara två täckningar som skiljer sig åt med en flip. Låt σ och σ' vara de permutationer som motsvarar respektive täckning.



Figur 18: Permutationerna motsvarande två täckningar som skiljer sig med en flip har olika tecken.

Eftersom T och T' är identiska upp till en flip, så kommer permutationerna σ och σ' vara identiska i varje kolumn förutom två. Detta innebär att skillnaden mellan de två permutationerna är en transposition av två av elementen, alltså är $\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma')$. Å andra sidan så kommer en flip enligt hur vi definierade viktningen av A ge att

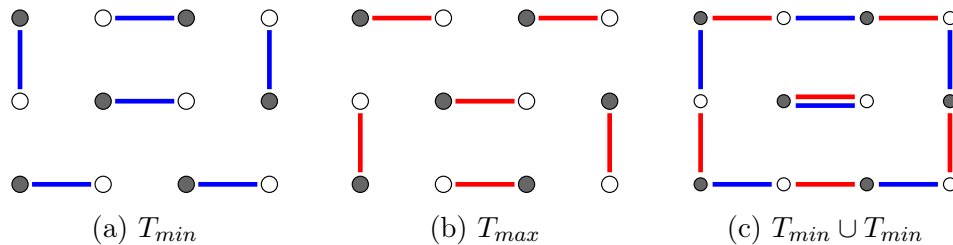
$$\frac{a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{k,\sigma(k)}}{a_{1,\sigma'(1)} a_{2,\sigma'(2)} \cdots a_{k,\sigma'(k)}} = -1$$

eftersom två stycken ettor (horizontella kanter) på ena sidan av bråkstrecket byts ut mot två stycken ι :n (vertikala kanter) på andra sidan av bråkstrecket, medan resten av matriselementen är de samma. Alltså får vi att

$$\frac{\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{k,\sigma(k)}}{\operatorname{sgn}(\sigma') a_{1,\sigma'(1)} a_{2,\sigma'(2)} \cdots a_{k,\sigma'(k)}} = 1,$$

vilket visar att alla täckningar räknas med samma tecken till summan. För vissa bräden kommer determinanten bli rent imaginär, detta eftersom antalet stående dominos i en täckning av ett område (och därmed antalet ι :n i varje term i 4) är invariant modulo två. För att kompensera för detta så tar vi absolutbeloppet av $\det A$. \square

Kasteleyns bevis skiljer sig från detta i vissa avseenden; i [6] hänvisar Kasteleyn till *Pfaffianen* av den kompletta grannmatrisen för R' . För skevsymmetriska $2n \times 2n$ -matriser (matriser A sådana att $A = -A^T$) är determinanten kvadraten av ett polynom i matrisens element, detta polynom kallas för Pfaffianen. Denna har likt determinanten en kombinatorisk definition, men i Pfaffianen är denna grundad i en partition av $2n$ i par, som på ett naturligt sett för tankarna till en kodning av en perfekt matchning av noderna i R' (varje kant i matchningen är ett par). När Kasteleyn etablerat korrespondensen mellan Pfaffianen och antalet perfekta matchningar, behöver han - som vi har gjort - visa att alla matchningar räknas med samma tecken till summan. Utan att ha visat att \mathcal{T}_R är flipsammanhängande, så behöver Kasteleyn bevisa ett lite mer generellt påstående. Om vi tar någon matchning T och ritar den ovanpå en annan, så kommer det bildas en union av disjunkta cykler (se Figur 19). Genom att "vrida" den ena täckningen ett steg längs dessa cykler, kommer den ena övergå i den andra. Det räcker då att visa att en vridning längs med en cykel, är lika med en udda permutation.



Figur 19: Unionen av två matchningar är en union av disjunkta cykler.

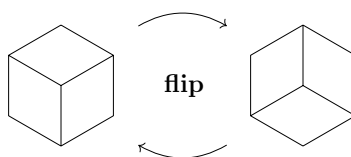
Det som återstår för att bevisa att Kasteleyn, Temperley och Fishers formel ger antalet dominotäckningar av $m \times n$ -brädet, är den linjära algebra som krävs för att beräkna $\det A$. Detta är ett diagonaliseringsargument, som ger egenvärdena i formelns produktutveckling. Vi lämnar denna del av beviset därhän, men hänvisar läsaren till originalet [6] för en fullständig härledning, eller till [7] för en skissartad sådan.

3 Fördjupning och breddning

I detta avsnitt ämnar jag relatera min uppsats till den befintliga litteraturen, och föreslå frågeställningar som vore intressanta att undersöka vidare.

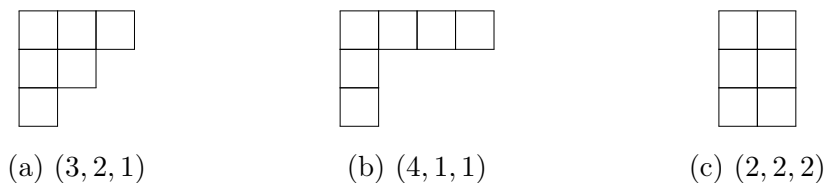
3.1 Det triangulära gittret

Dominobrickornas analogi i det triangulära gittret p6m introducerades i Figur 3, och en orientering av p6m visades i Figur 6b, men romberna lämnades sedan utanför berättelsen. Det gäller dock att en höjdfunktion för dessa täckningar kan definieras på samma sätt, och att påståendena 1 till 8 från Avsnitt 2.2-2.4 kan med smärre modifikationer anpassas till att gälla det triangulära fallet. Som vi anmärkte så ser rombtäckningar ut som staplade lådor. Desutom ser en flip i en region i p6m ut som att vi tar bort eller lägger till en låda (se Figur 20). Det finns en formel som räk-



Figur 20: En flip av tre intilliggande romber

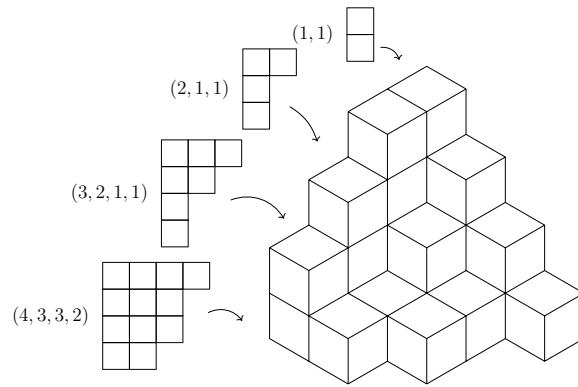
nar antalet rombtäckningar av hexagonala områden som bygger på *planpartitioner*. En *heltalspartition* är ett sätt att skriva ett heltal som summan av andra heltal, utan hänsyn till deras ordning. Till exempel är $(3 + 2 + 1)$, $(4 + 1 + 1)$, $(2 + 2 + 2)$ tre olika partitioner av 6. Ett vedertaget sätt att representera heltalspartitioner är genom *Youngdiagram*, där en rad av enhetskvadrater representerar en av termerna i partitionen, och raderna är ordnade enligt avtagande längd (se Figur 21). En



Figur 21: Tre Youngdiagram av storlek 6.

generalisering av heltalspartitioner till tre dimensioner är den så kallade *planpartitionen*. En planpartition är en hög av Youngdiagram, där de övre vänstra rutorna i de staplade diagrammen linjerar och fotavtrycket för ett diagram är mindre än det som ligger under. I Figur 22 ser vi att en planpartition är just en rombtäckning av ett område i det triangulära gittret. En formel för antalet planpartitioner som får plats i en $A \times B \times C$ stor låda härleddes redan 1896 av P.A. MacMahon och denna beskriver alltså även antalet rombtäckningar av en hexagon med sidlängder A, B, C :

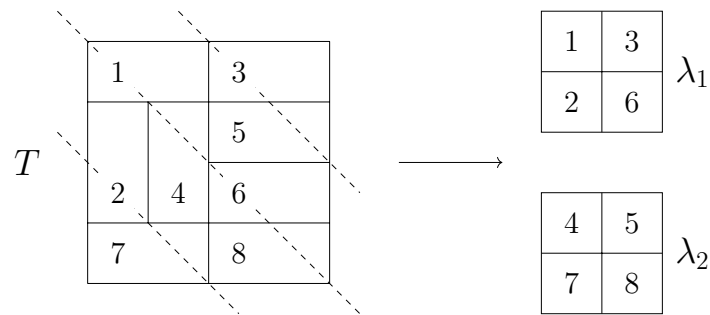
$$\prod_{i=1}^A \prod_{j=1}^B \prod_{k=1}^C \frac{i + j + k - 1}{i + j + k - 2}$$



Figur 22: Fyra Youngdiagram staplade på varandra bildar denna planpartition

3.2 Flipgrannskap genom Youngtablåer

Det finns ett bevis för att flipgrafen är sammanhängande som bygger på *Youngtablåer*, argumentet presenteras bland annat i Igor Paks artikel *Ribbon Tile Invariants* [9]. Resonemanget är en tillämpning av något som kallas för *rim hook-bijektionen*, som dock inte bevisas i Paks text. Vi presenterar en flyktig skiss av dominofallet nedan. Om T är en täckning av R med n dominos, så kan vi till varje domino i täckningen associera ett av talen $1, 2, \dots, n$ med samma villkor som det för Youngtablåer, alltså att en domino med talet n inte får ligga till vänster om eller under en domino med talet m , om $n > m$. Denna konstruktion kallar Pak för en *rim hook tableau*. Vi väljer att skriva talet i den nedre rutan av stående dominos och i den vänstra av liggande dominos och drar sedan varannan diagonal genom det underliggande gittret. Genom att läsa av de tal som korsas av diagonalerna respektive de som inte gör det, kan vi bilda två Youngtablåer. Konstruktionen visas i Figur 23. I bildrummet för den-

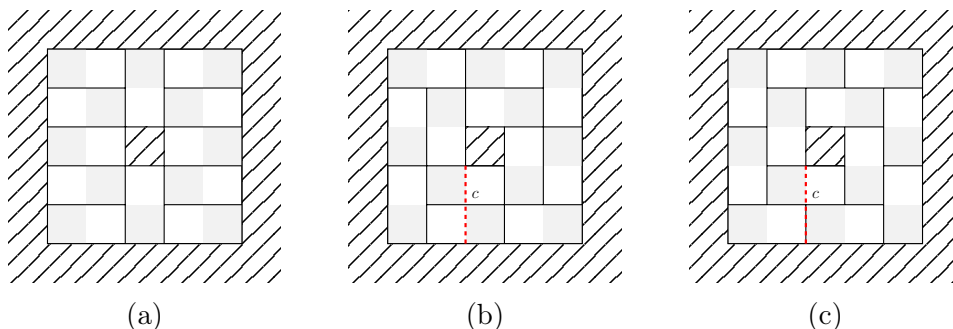


Figur 23: Rim hook tableau skickas på Young tableaux

na avbildning kan vi definiera transpositioner inuti eller mellan våra Youngtablåer. Dessa måste leda till en tillåten numrering av rutorna, d.v.s. en som är växande både radvis och kolumnvis. En transposition inom en tableau, till exempel att byta plats på 2 och 3 inuti λ_1 , får resultatet i T att numreringen av brickorna ändras. En transposition *mellan* Youngtablåer, till exempel att vi byter plats på 2 och 4, ser vi istället som en flip av de två dominosarna. Kontentan i bijektionen är att den relativa ordningen mellan talen i rutorna, bevaras av avbildningen. Eftersom alla möjliga numreringar av λ_1 och λ_2 går att nå genom dessa transpositioner så drar vi slutsatsen att \mathcal{T} är flipsammanhängande. Här är dominofallet ett specialfall, rim-hook bijektionen gäller för en hel kategori av brickor som kallas för *ribbons* på engelska.

3.3 Ett homologiskt perspektiv på flipgrannskap

I det fall där R inte är enkelt sammanhängande, så är \mathcal{T}_R i regel inte sammanhängande. Vi visar till exempel i Figur 24 två täckningar av ett punkterat 5×5 -bräde där vi inte kan flippa oss från den ena till den andra. I Sats 1.1 och 1.2 i [13] visas med hjälp av homologiska argument ett kriterium för att två täckningar ska ligga i samma komponent i flipgrafan. Vi tillämpar kriteriet på det punkterade 5×5 -brädet



Figur 24: Vi ser att (a) och (b) är i samma komponent av flipgrafan medan (c) inte har några möjliga flips.

på följande vis. Ett snitt c är en linje längs rutnätets linjer mellan två randpunkter som inte delar upp R i flera ickesammanhängande områden. Flödet över ett snitt c bestäms genom att en domino som korsas av snittet och har sin vita ruta på vänster sida bidrar med 1 till flödet, medans en domino som korsas av c med sin vita ruta på höger sida bidrar med -1 . Två täckningar ligger i samma komponent om och endast om flödet över snittet c är samma för båda täckningarna. I Figur 24b och Figur 24c har vi gjort ett snitt c , och ser att flödet över snittet skiljer sig mellan de två täckningarna. Ifall R har n håligheter, gör vi n snitt, och jämför flödet över alla dessa mellan täckningar. Vi noterar att fallet då R är enkelt sammanhängande är ett specialfall, då flödet över 0 snitt alltid är noll, och alltså ligger alla täckningar i samma komponent.

3.4 Avstånd i flipgrafer

I en artikel från 2017 behandlar Parlier och Zappa avstånd i \mathcal{T}_R för några olika typer av områden [10]. Med avstånd avses antalet flips mellan två täckningar. De börjar med att referera till Sats 3.2 från [13], som konstaterar att avståndet mellan två täckningar T och T' av ett område R ges av formeln

$$d(T, T') = \sum_{v \in R} \frac{|h_T(v) - h_{T'}(v)|}{4}. \quad (5)$$

Sedan bevisar de att en alternativ formel för $d(T, T')$, som bygger på vad vi anmärkte i slutet av Avsnitt 2.5, nämligen att unionen av två täckningar är en disjunkt union av cykler. Parlier och Zappa introducerar en orientering på dessa cykler och visar sedan att

$$d(T, T') = \sum_{v \in R} |c^+(v) - c^-(v)|, \quad (6)$$

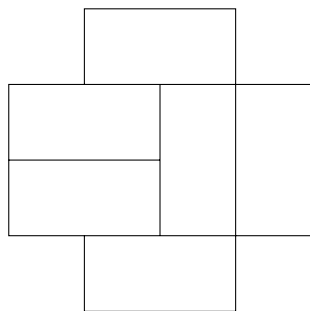
där $c^+(v)$ och $c^-(v)$ är antalet positivt respektive negativt orienterade cykler runt noden v . Ur (6) härleder de en generell formel för det maximala avståndet mellan

täckningar i \mathcal{T}_R då R är ett rektangulärt bräde, låt oss kalla detta för *diametern* av \mathcal{T}_R , vi anmärker att detta maximala avstånd realiseras av $d(T_{min}, T_{max})$. Låt alltså R vara ett bräde av storlek $m \times n$, där åtminstone en av m och n är jämn. Antag att $m \geq n$, då är (Sats **C** i [10])

$$\text{diam}(\mathcal{T}_R) = \begin{cases} \frac{mn^2}{4} + \frac{n^3}{12} + \frac{n}{6} & \text{om } n \text{ är jämn,} \\ \frac{mn^2}{4} - \frac{n^3}{12} + \frac{n}{12} - \frac{m}{4} & \text{annars.} \end{cases} \quad (7)$$

3.5 \mathcal{T}_R och Birkhoffs representationsats

Beräkningen av antalet dominotäckningar av olika sorters områden tycks vara ett ganska utforskat område, ett känt resultat från 1992 visar att antalet täckningar av en så kallad *aztekisk diamant* (se Figur 25) av storlek n har den synnerligen enkla formeln $2^{\binom{n+1}{2}}$ [3]. Christopher Douglas går i en fin artikel igenom resonemanget i [3] med avsikt att ge en överblick av processen att förmoda och sedan bevisa formler för antal dominotäckningar på olika områden [2]. I en artikel från 1999 ger James Propp en överblick av forskningsläget, bland annat har det vid det laget gjorts stora framsteg på olika sorters mutilerade bräden (olika standardbräden med borttagna rutor) [11].



Figur 25: En av 8 täckningar av den aztekiska diamanten av ordning 2

Ett område som vid en första anblick inte verkar fått lika mycket uppmärksamhet rör den mer lokala studien av egenskaperna hos \mathcal{T}_R sedd som gitter eller graf, därför ska vi ägna detta viss uppmärksamhet. För att göra texten i möjligaste mån självständig så introducerar vi först ännu några definitioner från ordningsteorin.

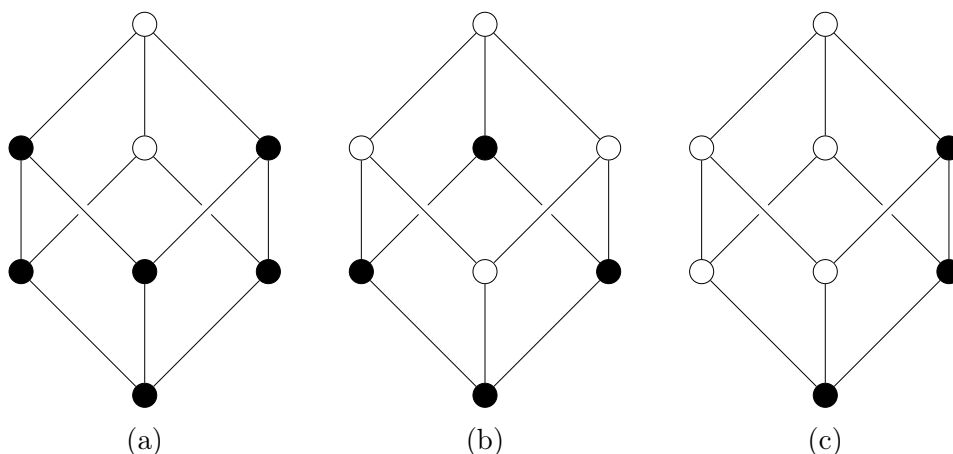
Definition. Låt P vara en pomängd, en *kedja* $K \subseteq P$ är en totalt ordnad delmängd av P . En *antikedja* är en delmängd av P där inga element är jämförbara med ordningen i P .

I $\mathcal{P}(3)$ (se Figur 11a) är $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ ett exempel på en antikedja, och $\emptyset \subseteq \{c\} \subseteq \{b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$ ett exempel på en kedja. I Hassediagram blir alltså en kedja en mängd av noder genom vilken vi kan dra en väg som hela tiden går uppåt (eller nedåt), medans arketypen av en antikedja är en mängd av noder som ligger på samma våning i Hassediagrammet. En kedja av *maximal längd* är i kontexten av flipgrafen en sekvens av uppåtgående flips som tar oss från den minimala täckningen av ett område till den maximala.

Definition. Låt P vara en pomängd, en *nedåtmängd* $O \subseteq P$ är en delmängd av P sådan att för alla $x \in O$ och $y \in P$ så implicerar $y \leq x$ att $y \in O$.

En nedåtmängd (även kallat ordningsideal, eller ibland blott ideal) är alltså en delmängd av P som är "sluten under att gå nedåt", några exempel på nedåtmängder visar vi i Figur 26. Vi representerar en delmängd av en pomängd genom att fylla i de element i Hassediagrammet som ingår i delmängden. En intuition för nedåtmängder är då att när vi färglägger en nod, så kommer färgen sippra nedåt till alla noder som ligger nedanför. Det visar sig att mängden av alla nedåtmängder till en pomängd P under inklusion, är ett komplett gitter, detta benämner vi $\mathcal{O}(P)$. Ett naturligt sätt att bilda nedåtmängder av en pomängd är att börja med en delmängd och sedan lägga till alla element som är mindre än något element i delmängden, vi formaliserar denna konstruktion:

Definition. Låt $x \in P$, vi kallar $\downarrow x = \{y \in P \mid y \leq x\}$ för den *nedre tillslutningen* av x . Låt $M \subseteq P$ vara en delmängd, vi kallar $\downarrow M = \bigcup_{x_i \in M} \downarrow x_i$ för den nedre tillslutningen av M .



Figur 26: (a) och (b) är nedåtmängder till $\mathcal{P}(3)$, (c) är det inte.

För ändliga pomängder gäller att alla nedåtmängder är den nedre tillslutningen av någon antikedja. Vi vill nu formalisera den indelning i nivåer som vi kan skönja i Hassediagrammen för pomängder, och introducerar därför konceptet av en *rangfunktion*.

Definition. Låt P vara en pomängd och $x, y \in P$, en rangfunktion ρ är en funktion från P till \mathbb{N} sådan att:

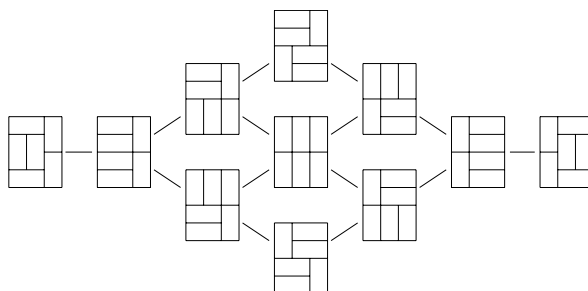
- (i) ρ är konsekvent med ordningen i P , för alla $x \leq y$ så gäller det att $\rho(x) \leq \rho(y)$, och
- (ii) ρ är konsekvent med täckningsrelationen i P , för alla $x \prec y$ så gäller det att $\rho(y) = \rho(x) + 1$.

En pomängd för vilken vi kan definiera en rangfunktion kallas för *graderad*. För ändliga pomängder P gäller det att P är graderad om och endast om alla maximalt långa kedjor i P har samma längd, rangfunktionen är entydigt bestämd när vi satt $\rho(\perp) = 0$. Ofta har rangfunktionen en intuitiv innebörd, i $\mathcal{P}(n)$ ges $\rho(X)$ av antalet

element i delmängden X . I ett delbarhetsgitter ges $\rho(n)$ av antalet primtalsfaktorer i n räknade med multiplicitet. I dominosammanhanget är $\rho(T)$ antalet uppåtgående flips som behövs för att komma från T_{min} till T .

Definition. Låt P vara en graderad pomängd med en maximal kedja av längd n , till P associerar vi *Whitneytalen* W_0, W_1, \dots, W_n där $W_i = |\{x \in P \mid \rho(x) = i\}|$.

Whitneytalen till en pomängd P är alltså en följd av tal som beskriver hur många element det finns på varje våning i Hassediagrammet till P . Även om det må vara en definition som är ny för oss, känner vi redan till Whitneytalen för flera pomängder. Whitneytalen för $\mathcal{P}(n)$ ges till exempel av den n :te raden i Pascals triangel. I Figur 27 visar vi upp Hassediagrammet för $\mathcal{T}_{3 \times 4}$, roterat 90° av platskäl.



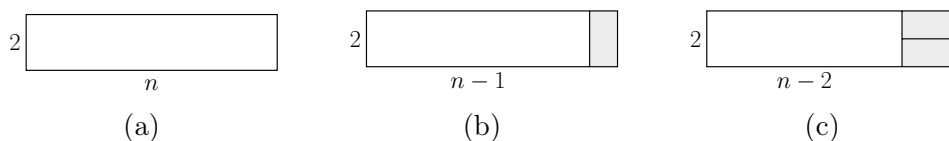
Figur 27: Whitneytalen för $\mathcal{T}_{3 \times 4}$ är 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1

Definition. Låt P vara en graderad pomängd, polynomet

$$\sum_{k=0}^n W_n x^k$$

kallas för den *ranggenererande funktionen* till P .

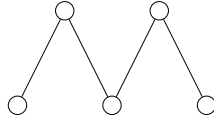
Den ranggenererande funktionen till $\mathcal{P}(n)$ är alltså $(1+x)^n$. Vi ska nu uppehålla oss lite vid täckningar av $2 \times n$ -bräden. Det är lätt att inse att $|\mathcal{T}_{2 \times n}|$ ges av det n :te Fibonaccitalet F_n (se Figur 28), vi gör här valet att $F_0 = 1$ och $F_1 = 1$. Vi kan också uttrycka Fibonaccitalen med ordningsteoretiska medel, och behöver då introducera *staketet*.



Figur 28: $|\mathcal{T}_{2 \times n}| = |\mathcal{T}_{2 \times (n-1)}| + |\mathcal{T}_{2 \times (n-2)}|$

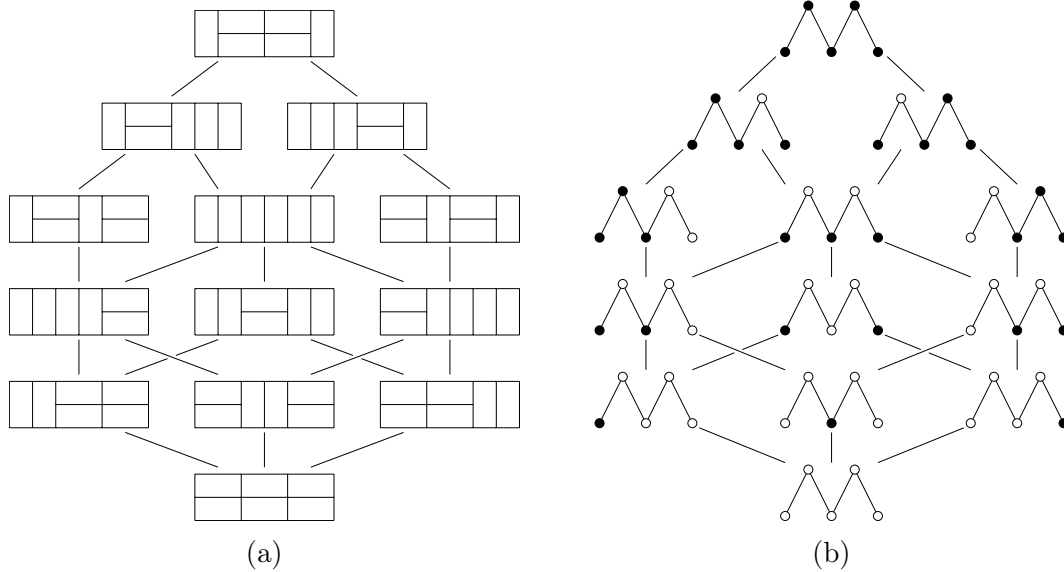
Definition. Låt $Z_n = \{z_1, \dots, z_n\}$ vara en pomängd sådan att $z_1 \leq z_2 \geq z_3 \leq \dots \leq z_n$. Vi kallar Z_n för *staketet* på n element, namnet kommer av Hassediagrammets utseende (se Figur 29).

Det är nämligen så att antalet nedåtmängder av det n :te staketet motsvarar ett Fibonaccital, med den numreringen vi har valt så gäller det att $|\mathcal{O}(Z_n)| = F_{n+1}$. Detta faktum kan till exempel inses genom att dela upp nedåtmängderna till Z_n i de som



Figur 29: Staketet på fem element, Z_5

innehåller z_n och de som inte gör det. Vi har också konstaterat att $\mathcal{O}(P)$ för någon pomängd P är ett gitter, vad som kanske är förvånande är att Hassediagrammet för $\mathcal{T}_{2 \times n}$ är isomorft med det för $\mathcal{O}(Z_{n-1})$. Vid en första anblick är det inte uppenbart vilken den ordningsbevarande bijektionen emellan de två mängderna i Figur 30a och Figur 30b är.



Figur 30: Ordningisomorfien mellan $\mathcal{T}_{2 \times n}$ och $\mathcal{O}(Z_5)$

Vad korrespondensen ges av är dock lätt att inse med hjälp av höjdfunktionen. Som vi vet är höjden på noderna som ligger på randen oberoende av täckningen, medan de "inre" noderna ändrar värde då vi utför en sekvens av flips. Om vi benämner de 5 inre noderna på 6×2 -brädet a, b, c, d, e så gäller det för T_{min} att bara a, c och e går att flippa. För att kunna flippa b måste vi först ha flippat både a och c , och så vidare. Vi vet också att varje nod bara kan flippa en gång, annars skulle höjden skilja sig för mycket från randens höjd. Om vi ger noderna i staketet samma etiketter a, b, c, d, e , så motsvarar alltså en flip i nod a i Figur 30a att fylla i nod a i Figur 30b, och så vidare.

Sekvensen av Whitneyantal för $\mathcal{T}_{2 \times n} \cong \mathcal{O}(Z_{n-1})$ har nummer A079487 i OEIS, och i [8] visar Munarini och Zagaglia att de ranggenererande funktionerna ges av rekursionen:

$$f_n(x) = \begin{cases} x f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x) & \text{om } n \text{ är udda,} \\ f_{n-1}(x) + x^2 f_{n-2}(x) & \text{annars,} \end{cases} \quad \text{med } f_0(x) = 1 \text{ och } f_1(x) = 1 + x. \quad (8)$$

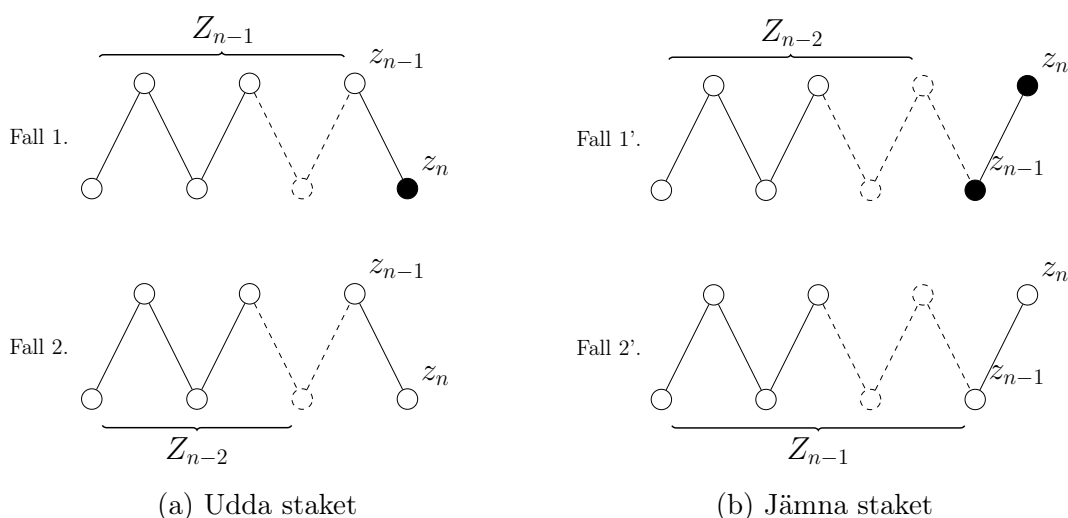
Vi kan övertyga oss om att denna formel håller med ett kombinatoriskt argument, vi åminner oss att koefficienten av grad k i $f_n(x)$ motsvarar antalet nedåtmängder till Z_n med k element. Om n är udda har vi att antalet nedåtmängder med k element kan delas in i två fall:

1. z_n ingår varpå vi räknar antalet nedåtmängder med $k - 1$ element för Z_{n-1} .
2. z_n ingår inte. Då kan inte heller z_{n-1} ingå och alltså räknar vi antalet nedåtmängder med k element till Z_{n-2} .

Fall 1. ger termen $xf_{n-1}(x)$ och Fall 2. ger termen $f_{k-2}(x)$ i (8). Om n är jämn så kan antalet nedåtmängder med k element delas in i

- 1'. z_n ingår, då ingår även z_{n-1} och alltså räknar vi antalet nedåtmängder med $k - 2$ element i Z_{n-2} .
- 2'. z_n ingår inte, då räknar vi antalet nedåtmängder med k element i Z_{n-1} .

Fall 1'. ger termen $x^2f_{n-2}(x)$ och Fall 2'. ger bidraget $f_{n-1}(x)$, resonemanget illustreras i Figur 31.



Figur 31: Rekursionsformeln för den ranggenererande funktionen till $\mathcal{O}(Z_{n-1})$

Det visar sig att sådan bijektion som den vi visat mellan $\mathcal{T}_{2 \times n}$ och $\mathcal{O}(Z_{n-1})$ kan generaliseras till andra bräden, för att konstatera detta behöver vi först visa att gittret \mathcal{T}_R är *distributivt*.

Definition. Låt L vara ett ändligt gitter, om fogar distribuerar över möten, det vill säga att:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ för alla } a, b, c \in L,$$

så kallas L för distributivt.

Lemma 10. Låt L vara ett gitter, då gäller det att:

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ för alla } a, b, c \in L.$$

Bevis.

- (i) Vi har att $a \wedge b \leq a$ och $a \wedge c \leq a$ för alla $a, b, c \in L$. Av det följer att $a \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

- (ii) Vidare så har vi att $b \vee c \geq b \geq a \wedge b$ och $b \vee c \geq b \geq a \wedge c$ för alla a, b, c . Av detta följer att $b \vee c \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Tillsammans ger (i) och (ii) att $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. □

Påstående 11. \mathcal{T}_R är distributivt.

Bevis. Vi vill alltså visa att $\min\{T_1, \max\{T_2, T_3\}\} = \max\{\min\{T_1, T_2\}, \min\{T_1, T_3\}\}$ för alla $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}_R$. Lemma 10 ger oss den ena olikheten, det räcker alltså att visa att $\min\{T_1, \max\{T_2, T_3\}\} \leq \max\{\min\{T_1, T_2\}, \min\{T_1, T_3\}\}$. Vår definition av \leq , \max och \min för täckningar utgår från en nodvis jämförelse. Låt $v \in R$ och låt $a = h_{T_1}(v)$, $b = h_{T_2}(v)$ och $c = h_{T_3}(v)$. En falluppdelning visar att det inte finns några på $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sådana att $\min\{a, \max\{b, c\}\} > \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\}$. Alltså gäller vår olikhet för varje nod $v \in R$, vilket var det vi ville visa. □

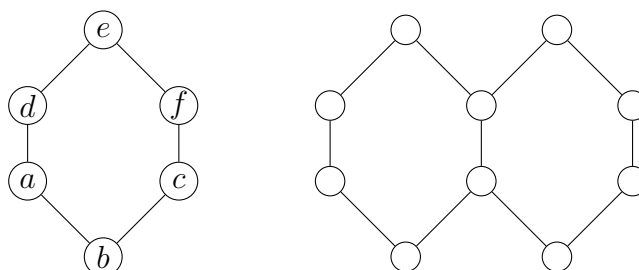
Sats 12 (Birkhoffs representationssats). Låt L vara ett distributivt gitter, då finns det en pomängd P sådan att $L \cong \mathcal{O}(P)$.

Birkhoffs sats, vars bevis vi inte kommer presentera här, säger alltså att relationen som uppvisades mellan mängden av täckningar av $2 \times n$ -brädet och mängden av nedåtmängder till det $(n - 1)$:e staketet inte är ett sammanträffande. Eftersom vi visat i Påstående 11 att \mathcal{T}_R alltid är ett distributivt gitter, så följer det av Sats 12 att vi alltid kan hitta en pomängd sådan att gittret av dess nedåtmängder är isomorft med \mathcal{T}_R . Vidare ger Birkhoffs sats i sin fullständiga form ett sätt att konstruera denna pomängd, för att beskriva denna behöver vi ännu en definition.

Definition. Låt L vara ett gitter, ett element $a \in L$ kallas för *fog-irreducibelt* om

- (i) a inte är botten (\perp) i L , och
- (ii) a inte kan uttryckas som fogen av några b, c i L som är skilda från a .

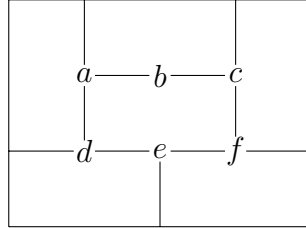
Som vanligt är det lättast att förstå definitionen utifrån Hassediagrammet för L , där de fog-irreducibla elementen är de som täcker ett och endast ett element, det vill säga har ett och endast ett nedåtgående streck. Det visar sig att den pomängd P vars existens utlovas i Sats 12 är mängden av fogirreducibla element i L , under ordningen från L [1, p. 118]. Vi kan nu tillämpa satsen på $\mathcal{T}_{3 \times 4}$ i Figur 27, och får då att mängden av fog-irreducibla element i gittret bildar pomängden \Diamond_1 , som visas i Figur 32. Mer generellt hävdar vi att $\mathcal{T}_{3 \times 2n}$ motsvarar $\mathcal{O}(\Diamond_{n-1})$. Korrespondensen



Figur 32: \Diamond_1 och \Diamond_2 .

etableras på samma sätt som för staketet och $2 \times n$ -bräden, genom att vi ger de interna noderna i $3 \times 2n$ -brädet namn. I Figur 33 visar vi upp den minimala täckningen

av 3×4 -brädet med noder namngivna på ett sätt som etablerar korrespondensen mellan $\mathcal{T}_{3 \times 4}$ och $\mathcal{O}(\diamond_1)$: vi måste först flippa i noden b , gör vi det kan vi sedan flippa i a eller c , och först när vi flippat i a, b, c, d, f så kan vi flippa i e , vilket tar oss till den maximala täckningen. Generellt sett så har vi märkt att för ett rektangulärt bräde av fixerad höjd, så är det lätt att gissa hur dess mängd av fog-irreducibla element växer i takt med att bredden på brädet växer.



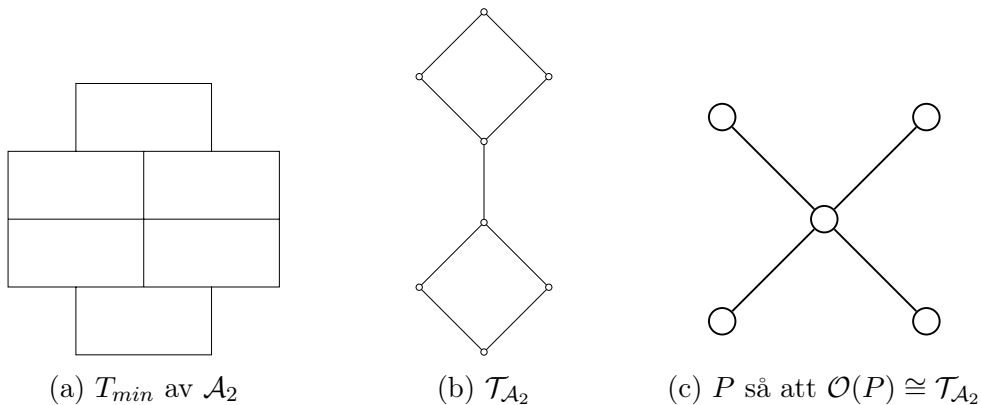
Figur 33: 3×4 -brädet med namn på de interna noderna.

3.6 Unimodalitet

Vi säger att en talföljd $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ är *unimodal* om den först växer och sedan avtar, det vill säga att det finns något k så att $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k$ och $a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$. Unimodalitet verkar i allmänhet vara svårt att bevisa för godtyckliga sekvenser. Vi dristar oss dock att ställa följande förmodan:

Förmodan 13. Låt R vara ett rektangulärt område, då är följden av Whitneyantal för \mathcal{T}_R unimodal.

Enligt Sats 6 i [8] gäller denna förmodan för $R = 2 \times n$, beviset är dock inte helt enkelt och utgår från att vi hittat rekurrensen (8). En sådan är inte trivial att finna för högre bräden, därför skulle vi önska ett mer generellt angreppssätt. Ett exempel på ett område som inte ger ett unimodalt täckningsgitter är den aztekiska diamanten av ordning 2, \mathcal{A}_2 , som vi känner igen från Figur 25. I Figur 34b visar vi upp $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_2}$, pomängden i Figur 34c är den pomängd vars gitter av nedåtmängder är isomorf med $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_2}$.



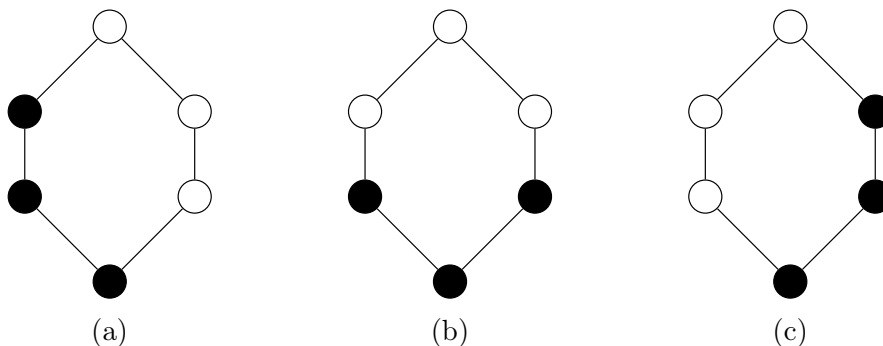
Figur 34: Flipgrafen till \mathcal{A}_2 är inte unimodal

Det skulle vara intressant att fundera kring vad som karakteriserar pomängder vars gitter av nedåtmängder är isomorf med en flipgraf till något område, och hur

egenskaper hos den ena översätts till den andra. Som ett specialfall av detta, om det finns någon karakterisering av områden som ger unimodala täckningsgitter.

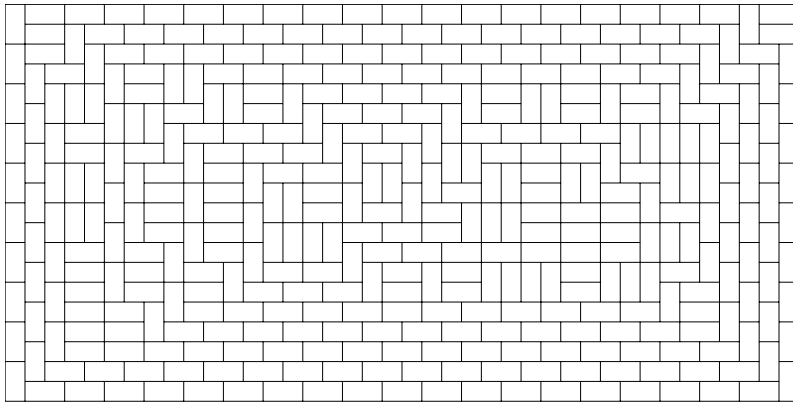
3.7 Sannolikhetsfördelningar och slumpgenerering

Den sista aspekten av dominotäckningar jag tar upp har ägnats ganska mycket uppmärksamhet. Det är frågan om hur man kan generera slumpmässiga täckningar av ett område och egenskaperna hos dessa. Den aztekiska diamanten är inte bara välstuderad på grund av den enkla formeln för att räkna dess täckningar, utan även för att den uppvisar särskilda egenskaper vid slumpgenerering. För det första så finns det en enkel algoritm för att generera en slumpmässig täckning av \mathcal{A}_n (denna beskrivs mycket väl i [4]). Sedan visar det sig att en slumpmässigt vald täckning har så kallade frysta regioner, och att den ickefrysta regionens rand konvergerar mot en cirkel [5]. Samma fenomen uppstår när den liksidiga hexagonen fylls med romber, men inte i för dominotäckningar av kvadrater. En sorts slumpgenerering



Figur 35: De tre nedåtmängderna av \diamond_1 med tre element.

som definitivt inte kommer ge en jämlik fördelning, beskriver vi just för att den har en fin analogi till de sorters pomängder vi beskrivit i Figur 30, Figur 32 och Figur 34c. Vi utgår från den minimala täckningen av brädet och utför sedan en sekvens av uppåtgående flips, där vi i varje steg väljer nästa flip slumpmässigt bland de möjliga uppåtgående flipsen. Motsvarande handling på den pomängd vars gitter av nedåtmängder är isomorf med mängden av täckningar av brädet blir att släppa en kula in i Hassediagrammet. Kulan kommer alltid rulla nedåt i diagrammet, så länge det finns tomma fack. I Figur 35 så visar vi upp de lägen vi kan befinna oss i efter att ha gjort tre uppåtgående flips från den minimala täckningen av 3×4 -brädet alternativt släppt ner tre kulor i Hassediagrammet för \diamond_1 . Uppenbarligen är (b) dubbelt så sannolik som (a) eller (c). Vi måste även specificera hur många kulor vi ska släppa ner/hur många flips vi ska göra. I Figur 36 visar vi en enligt denna metod genererad täckning av 20×40 -brädet, där vi startat med den maximala täckningen och sedan gjort 333 slumpmässigt valda nedåtgående flips.



Figur 36: En slumpmässigt genererad täckning av 20×40 -brädet

Referenser

- [1] Davey, B. A. och H. A. Priestley: *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, Cambridge, andra utgåva, 2002.
- [2] Douglas, C.: *An Illustrative Study of the Enumeration of Tilings: Conjecture Discovery and Proof Techniques*. <https://faculty.uml.edu//jpropp/Enumeration.pdf>, 1996. [Online; hämtad 26-april-2023].
- [3] Elkies, N., G. Kuperberg, J. Propp och M. Larsen: *Alternating-Sign Matrices and Domino Tilings (Part I)*. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1:111–132, 1992.
- [4] Fusy, É.: *Random sampling of domino and lozenge tilings*. *Snapshots of Modern Mathematics from Oberwolfach*, (2):1–10, 2016.
- [5] Jockusch, W., J. Propp och P. Shor: *Random Domino Tilings and the Arctic Circle Theorem*, 1998.
- [6] Kasteleyn, P.W.: *The statistics of dimers on a lattice*. *Physica*, 27(12):1209–1225, 1961.
- [7] Kenyon, R.: *An introduction to the dimer model*. arXiv:math/0105054, 2003.
- [8] Munarini, E. och N. Zagaglia Salvi: *On the rank polynomial of the lattice of order ideals of fences and crowns*. *Discrete Mathematics*, 259:163–177, 2002.
- [9] Pak, I.: *Ribbon Tile Invariants*. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(12):5525–5561, 2000.
- [10] Parlier, H. och S. Zappa: *Distances in Domino Flip Graphs*. *The American Mathematical Monthly*, 124(8):710–722, 2017.
- [11] Propp, J.: *Enumeration of Matchings: Problems and Progress*. *New Perspectives in Geometric Combinatorics*, 38:255–298, 1999.
- [12] Rémila, E.: *The lattice structure of the set of domino tilings of a polygon*. *Theoretical Computer Science*, 322(2):409–422, 2004.

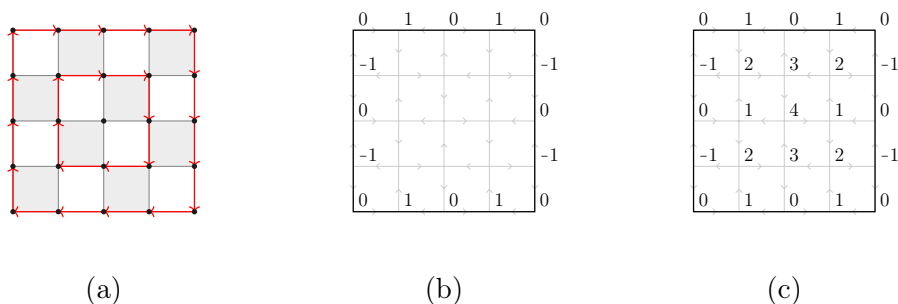
- [13] Saldanha, N., C. Tomei, M. Casarin Jr. och D. Romualdo: *Spaces of Domino Tilings*. *Discrete Computational Geometry*, 14:207–233, 1995.
- [14] Temperley, H. N. V. och M. E. Fisher: *Dimer problem in statistical mechanics—an exact result*. *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, 6(68):1061–1063, 1961.
- [15] Thurston, W. P.: *Conway’s Tiling Groups*. *The American Mathematical Monthly*, 97(8):757–773, 1990.

4 Appendix

A En algoritm för maximal höjdfunktion

För att minimera implementeringsdetaljerna beskriver vi processen att generera den maximala täckningen av rektangulära områden.

- Steg 1. Välj en startnod på randen och sätt utifrån den höjden på alla randens noder. Om cykeln runt området inte ger en höjdskillnad på 0 så går inte området att täcka.
- Steg 2. Besök nu de noder som är grannar med någon nod på randen i cyklisk ordning. Kontrollera för varje besökt nod höjden på dess redan besökta grannar. Utifrån dessa och nodens position i gittret, kommer det finnas flera möjliga höjder på noden. Välj den maximala. Om det inte finns någon höjd sådan att höjdskillnaden mellan noden och dess grannar blir 1 eller 3 så går inte området att täcka. Sätt höjden på alla noder i området genom att successivt fortsätta inåt i området. Processen beskrivs i Figur 37.



Figur 37

Om vi betraktar nod $(1, 1)$ i Figur 37b så ser vi att den skulle kunna få höjden 2 eller -2 eftersom det går att gå ett steg i orienteringens riktning från nod $(1, 0)$ som har höjd 1, eller gå ett steg *mot* riktningen från nod $(0, 1)$ som har höjd -1 . Algoritmen väljer då 2, och fortsätter med nod $(1, 2)$. När det inte finns några fler noder att besöka så har vi satt den maximala höjden på varje nod, vilket visas i Figur 37c.