SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Matematiken i Mahjong

av

Ingrid Söderberg

2023 - K12

Matematiken i Mahjong

Ingrid Söderberg

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Per Alexandersson

2023

Abstract

The Mahjong game is an interesting game that includes mathematical problems based on combinatorics and probability theory. Using the elementary definitions and theorems of combinatorics and probability theory, the thesis analyzes combinations for a winning hand of different types; probabilities of different kinds of tile(s) in a starting hand; probabilities of target tiles to reach a winning hand of different types, and expected values of different options to build a winning hand; and then a player can choose to build the winning hand, which has the highest expected value among all options.

Keywords: Mahjong, combinatorics, combination, probability, expected value.

Sammanfattning

Mahjong-spelet är ett intressant spel som innehåller matematiska problem baserade på kombinatorik och sannolikhetsteori. I den här uppsatsen, med hjälp av kombinatorikens och sannolikhetslärans elementära definitioner och satser, analyseras kombinationer för en vinnande hand av olika typer; sannolikheter för olika sorters brickor i en starthand; sannolikheten för målbrickor att nå en vinnande hand av olika typer, och väntevärden för olika alternativ för att bygga en vinnande hand; och därefter kan en spelare välja att bygga den vinnande handen som har det högsta väntevärdet bland alla alternativ.

Nyckelord: mahjong, kombinatorik, kombination, sannolikhet, väntevärde.

Acknowledgements

First and foremost, I am very grateful to my supervisor, Per Alexandersson, for his sincere help and valuable guidance in this thesis writing.

I also place on record, my sincere thanks to the teacher in charge of this course of independent work, Annemarie Luger, and academic advisors, Gustav Jonzon and Jennifer Chamberlain, who have lent me their hand with my application for this course.

I take this opportunity to express gratitude to all the teachers and staff in the Department of Mathematics for their help and support.

Innehåll

1

Inledning

Mahjong brukar spelas med fyra deltagare med 144 eller 136 spelbrickor. Spelet har sitt ursprung i Kina men det finns flera berättelser om vem uppfinnaren var. Det stod i vissa offentliga dokument att uppfinnaren var Zhang Sui (Munk Yixing, 683–727) som var matematiker och astronom under Tangdynastin. Det antyder den naturliga kopplingen mellan mahjong och matematik. Oavsett om de gillar matematik eller inte, tycker många om att spela mahjong. Mahjong har gradvis spridits till många länder och regioner i världen, där spelreglerna varierar. Inom Kina finns det även olika spelsätt i olika områden. För att främja det internationella utbytet av Mahjong som en intellektuell sport, har World Mahjong Contest Center (WMCC) förenat Mahjong Competition Rules. (Yuan 2004, Förord) (WMCC 2006, Förord)

1.1 Syfte och frågeställning

Syftet med denna uppsats är att utforska några matematiska aspekter av Mahjong-spelet med hjälp av elementär kombinatorisk teori och sannolikhetslära.

De huvudsakliga frågorna blir därför:

- Hur många kombinationer finns det för en vinnande hand?
- Vad är vinstsannolikheten och väntevärdet för en spelare?

1.2 Tidigare forskning

Det finns inte så mycket tidigare forskning på området. I en artikel ”Mathematical aspects of the combinatorial game Mahjong” beräknas sannolikheten för att dra en vinnande hand med hjälp av datorprogrammeringsteknik (Python). Den vinnande handen antas i en enklare situation, där endast en serie brickor gäller (Cheng, Li & Li

2017, 3-5). Här ska vi generalisera till att ta med alla brickor, och ytterligare beräkna väntevärdet för en spelare, när hen vill få målbrickor för att nå en vinnande hand.

En kinesisk författare Zhengmin Yuan i hans bok *Majiang Yu Shuxue* (Mahjong och Matermatik) beräknar inte heller väntevärdet. Han beräknar kombinationer för att vinna och sannolikheten för någon bricka eller några brickor i en starthand. Men tydliga beskrivningar och förklaringar av olika beräkningar saknas. Författaren fokuserar mer på beräkningsresultat, till exempel, det totala antalet kombinationer av alla vinnande händer som ofta blandas ihop för att bara visa resultatet (Yuan 2004, 43-70). Beräkningarna baseras på flera olika mahjongregler, bland vilka det inte finns den internationell standarden mahjong (ibid.). Dessutom beräknas sannolikheten på ett felaktigt sätt: i samma formel, när kombinationen av någon bricka eller några brickor i en starthand beräknas, tycks varje bricka unik; men inte när kombinationen av de övriga brickorna i handen beräknas (Yuan 2004, 77). För att undvika liknande misstag, ser vi till att ha samma utgångspunkt vid våra beräkningar av samma typ. Vi ska lägga vikt på tydliga beskrivningar och förklaringar av olika beräkningar, det vill säga, hur man kan beräkna de kombinatoriska och sannolikhetslära problemen i mahjong. Då kan läsare hämta inspiration av denna uppsats, särskilt när de spelar mahjong.

Det finns en bok *Kasinoteori: sannolikhetslära med spelexempel*, där olika sannolikhetsteoretiska koncept byggs på konkreta spelexempel. Boken bidrar med de flesta definitioner och satser om kombinatorik och sannolikhetslära, som lägger den teoretiska grunden för denna uppsats. Trots att boken inte gäller mahjong, kan vi hämta inspiration av kapitlet Poker, där sannolikheten för olika händer beräknas (Andersson & Lindholm 2010, 151-154).

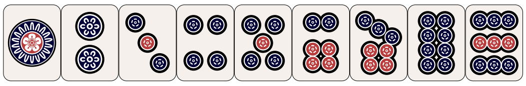
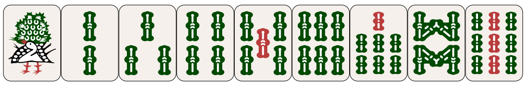
1.3 Mahjongutrustning

I uppsatsen används den internationella standarden mahjong som utgångspunkt. Den internationella standarden mahjong har 144 brickor som består av 6 sorters mönster/serier (tecken, cirklar, bambu, vindar, drakar och blommor) (WMCC 2006, 16).

1.3.1 108 NUMRERADE BRICKOR

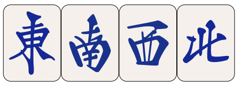
Det finns 108 numrerade brickor uppdelade i 3 serier: tecken (wan), cirklar (tong) och bambu (tiao). Serierna har respektive 9 valörer (1-9) med vardera 4 brickor (WMCC 2006, 16).

- Tecken (wan): 

- Cirklar (tong): 
- Bambu/Bam (tiao): 

1.3.2 28 TECKENBRICKOR UTAN SIFFOR

Det finns 28 teckenbrickor utan siffor, uppdelade i 2 serier: vindar (feng) och drakar/pilar (jian) (WMCC 2006, 17).

- Vindar (feng): 

  4 valörer, öst, väst, söder och norr, med vardera 4 brickor. Totalt 16 brickor.
- Drakar/Pilar (jian): 

  3 valörer, röd, grön och vit, med vardera 4 brickor. Totalt 12 brickor.

1.3.3 8 BONUSBRICKOR

Den här serien heter blommor (hua) och har 8 brickor med olika bilder på. De är vanligtvis märkta med 4 årstider (vår, sommar, höst och vinter) och 4 växter (plommon, orkidé, bambu och krysantemum). Varje valöre har endast en bricka. (WMCC 2006, 17)

- Blommor (hua): 

1.4 Grundläggande regler enligt WMCC 2006 (21-47)

1.4.1 Att blanda ihop brickorna

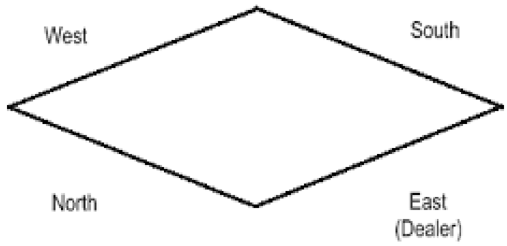
Alla fyra deltagare ska lägga alla brickor med valörsidan ner mot bordet, och blanda dem med båda händerna så att brickorna blandas ordentligt och slumpmässigt.

1.4.2 Att bygga murar

Varje deltagare ska framför sig själv bygga en mur med 36 brickor fördelade på två våningar. De fyra murarna bildar en fyrkant på bordet.

1.4.3 Att slå med tärningar för att avgöra var muren brytas

Fyra deltagare turas om att vara dealer som sitter i ostvinden.



Dealern är den första att slå med två tärningar. Det resulterande numret används för att bestämma vem som ska slå med tärningarna andra gången:

- Om summan av tärningarna är 5 eller 9 kommer dealern att slå med tärningarna igen.
- Om summan är 2, 6 eller 10 kommer spelaren till höger om dealern, som sitter i sydvinden, att slå med tärningarna.
- Om summan är 3, 7 eller 11 kommer spelaren mitt emot dealern, som sitter i västvinden, att slå med tärningarna.
- Om summan är 4, 8 eller 12 kommer spelaren till vänster om dealern, som sitter i nordvinden, att slå med tärningarna.

Summan av de två tärningskasten avgöra var muren kommer att brytas, det vill säga, vilken del av muren brickor börjar delas ut från. Räknat från den högra änden av spelarens (som kastar tärningarna andra gången) mur, bryts muren efter stapeln som indikeras av de två tärningskasten. Medurs i förhållande till brottet, drar dealern första 4 brickorna (2 staplar). Nästa spelare, som sitter i sydvinden, drar nästa 4 brickor till vänster om gapet, och så vidare. Efter att alla 4 spelare har dragit 4 brickor 3 gånger för totalt 12 brickor, fortsätter dealern att dra brickor, men den här gången dras den övre brickan från den första stapeln på murens ände och den övre brickan från den tredje stapeln. De övriga spelarna drar en bricka till i tur och ordning.

1.4.4 En starthand

Dealern har 14 brickor som starthand. Var och en av de övriga deltagarna tilldelas 13 brickor som starthand.

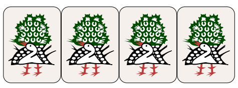
1.4.5 En spelprocess

Varje deltagare drar en ny bricka från muren, och lägger sedan en bricka mitt i området inuti muren, i tur och ordning. När man drar en bonusbricka, lägger man framför sig brickan med valörsidan uppåt, och drar en annan bricka från muren. Efter att en deltagare har dragit en ny bricka, eller gjort ett chow, pung eller kong (förklaringar till dem ses nedan), eller ersatt en bonusbricka, om handen inte blir en komplett mahjonghand måste hen slänga en bricka.

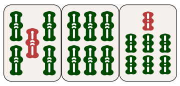
- Ett par
  Ett par är två identiska brickor. För exempel, ett par {1} i bam:

- Ett pung
  Ett pung är tre identiska brickor. För exempel, ett pung {1} i bam:

- Ett kong
  Ett kong är fyra identiska brickor. För exempel, ett kong {1} i bam:



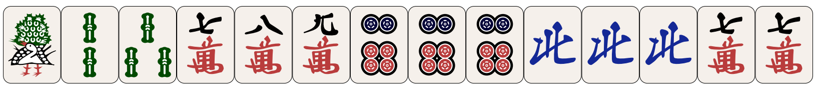
- Ett chow
  Ett chow är tre konsekutiva brickor ur samma serie. För exempel, ett chow {5, 6, 7} i bam:



1.4.6 En komplett mahjonghand (en vinnande hand)

En deltagare bildar en vinnande hand med minst 13 brickor på handen och en nydragen bricka eller en nyligen utlagd bricka av en annan deltagare.

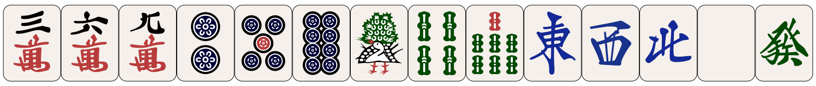
- Den grundläggande typen av en vinnande hand
  Den grundläggande typen av en vinnande hand är strukturerad med fyra sorters kombinationer och ett par. En sorts kombination kan vara chow, pung eller kong.
  (1) 11, 123, 123, 123, 123;
  (2) 11, 123, 123, 123, 111 (eller 1111);
  (3) 11, 123, 123, 111, 111 (eller 1111);
  (4) 11, 123, 111, 111, 111 (eller 1111);
  (5) 11, 111, 111, 111, 111 (eller 1111).
  Observera:
  1= en enstaka bricka; 11= ett par; 111= ett pung; 1111= ett kong; 123= ett chow.
  Här är ett exempel på den grundläggande typen av en vinnande hand, {1, 2, 3} i bam; {7, 8, 9} i tecken; {6, 6, 6} i cirklar; tre nordvindar och ett par 7 i tecken:



- En mahjonghand med en speciell struktur
  En mahjonghand med en speciell struktur är alla brickor i par eller fler enstaka brickor.
  (1) 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11 (Sju par);
  (2) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 11 (Tretton föräldralösa);
  (3) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 (Mindre/mer teckenbrickor och några brickor i något stigande ordning) (Detaljerade förklaringar ses i Avsnitt 2.1.2

Mer teckenbrickor och stigande brickor; Mindre teckenbrickor och stigande brickor.)

Här är ett exempel på den speciella typen av en vinnande hand, {3, 6, 9} i tecken; {2, 5, 8} i cirklar; {1, 4, 7} i bam; ostvind, västvind, nordvind, vit drake och grön drake:



1.4.7 Vinnarens poängsättningar

Olika vinnande händer kommer att få olika poäng, som i högsta grad beror på svårighetsnivån på den vinnande handen. Det finns totalt 81 olika poängelement (fan) som tillhör 12 poängklasser (detaljer finns i WMCC 2006, 33-47). Några typiska fan presenteras senare tillsammans med en matematisk analys.

2

Matematisk analys

2.1 Kombinationer för en vinnande hand

Här utnyttjas tre satser ur Biggs (2002) och Andersson & Lindholm (2010):

Sats 2.1.1. *Additionsprincipen: Om det respektive finns* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *sätt att göra ett val i* n *fall, då blir det totalt* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ *sätt hela valet genomföras på (Biggs 2002, 91-92).*

Sats 2.1.2. *Multiplikationsprincipen: Om ett val ska genomföras i* n *steg där respektive finns* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *sätt att göra respektive del, då blir det totalt* $x_1 x_2 \cdots x_n$ *sätt hela processen utföras på (Andersson & Lindholm 2010, 66).*

Sats 2.1.3. *Dragning utan återläggning utan ordning: Om* k *stycken dras från* n *objekt och ordningen inte spelar roll, är antalet sätt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(Andersson & Lindholm 2010, 70).

Sats 2.1.4. *Dragning med återläggning utan ordningshänsyn: Om* k *stycken dras från* n *objekt med återläggning och utan hänsyn till ordning, är antalet sätt*

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

(Biggs 2002, 109).

2.1.1 Kombinationer för den grundläggande typen

Enligt Avsnitt 1.3.6, är den grundläggande typen av en vinnande hand strukturerad med fyra sorters kombinationer och ett par. Det innebär att antalet chow och pung eller kong brukar vara 4 i en vinnande hand.

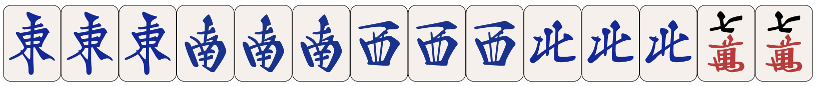
- Antalet sätt att bilda ett par
  Ett par kan bildas ur 34 valörer (27 numrerade valörer + 4 vindar + 3 drakar), om inget annat är begränsat. Då blir antalet sätt $\binom{34}{1} = 34$, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning. Men olika poängelement (fan) har olika specifika krav så att alla 34 valörerna inte alltid gör det möjligt att bilda ett par. Så det är bättre att notera n_{par} som en mängd där ett par kan bildas, och antalet sätt att bilda ett par är $\binom{n_{par}}{1}$.

- Antalet sätt att bilda ett chow
  Det finns 3 numrerade serier som respektive har 9 valörer (1-9). Bland 1-9 kan 7 olika chow bildas, så de 3 serierna har $7+7+7 = 21$ sätt att bilda ett unikt chow, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning och Sats 2.1.1 om Additionsprincipen. På grund av att olika poängelement (fan) har olika specifika krav, noterar vi n_{chow} som en mängd där ett chow kan bildas. Till skillnad från andra sorter, kan ett chow upprepas upp till fyra gånger i en vinnande hand, om det inte finns någon begränsning. Så antalet sätt att bilda k $(0 \leq k \leq 4)$ chow är $\binom{n_{chow}+k-1}{k}$, enligt Sats 2.1.4 om Dragning med återläggning utan ordningshänsyn.

- Antalet sätt att bilda ett pung eller kong
  I en vinnande hand, är antalet pung eller kong $4-k$ om k chow har bildats. Vi noterar $n_{pung/kong}$ som en mängd, där ett pung eller kong kan bildas efter att ett par och k chow har bildats. Då blir antalet sätt att bilda $4-k$ pung eller kong är $\binom{n_{pung/kong}}{4-k}$ enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning.

Alltså är antalet sätt att bilda den grundläggande typen av en vinnande hand $\sum_{k=0}^{4} \binom{n_{par}}{1} \cdot \binom{n_{chow}+k-1}{k} \cdot \binom{n_{pung/kong}}{4-k}$, enligt Sats 2.1.1 om Additionsprincipen och Sats 2.1.2 om Multiplikationsprincipen. Men denna formel kan även variera på grund av att olika poängelement (fan) har olika specifika krav. Låt oss titta på två exempel.

Stora fyra vindar. Poängklass: 88 poäng.
Ett exempel på denna typ av fan:



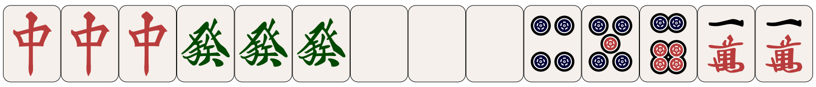
En vinnande hand består av pung eller kong med alla fyra vindar, och ett par med andra valörer.

- Antalet sätt att bilda ett par
  Det finns 30 valörer (27 numrerade valörer + 3 drakar), där ett par kan bildas på antalet sätt $\binom{30}{1}$.

- Antalet sätt att bilda pung eller kong av alla fyra vindar
  Antalet pung och/eller kong är 4. Samtidigt är mängden begränsad av de fyra vindarna, där totalt 4 pung eller kong kan bildas. Om k $(0 \leq k \leq 4)$ kong har valts, är antalet sätt $\binom{4}{k}$. Då är antalet pung $4-k$, och det finns också $4-k$ valörer där pung kan bildas. Så antalet sätt att bilda $4-k$ pung är $\binom{4-k}{4-k}$.

Alltså är antalet Stora fyra vindar $\sum_{k=0}^{4} \binom{30}{1} \cdot \binom{4}{k} \cdot \binom{4-k}{4-k} = 480$.

Stora tre drakar. Poängklass: 88 poäng.
Ett exempel på denna typ av fan:



En vinnande hand består av pung eller kong med alla tre drakar, ett chow eller pung och ett par med andra valörer.

- Antalet sätt att bilda ett par
  Det finns 31 valörer (27 numrerade valörer + 4 vindar), där ett par kan bildas på antalet sätt $\binom{31}{1}$.

- Antalet sätt att bilda ett chow eller pung

  – Antalet sätt att bilda ett chow
    Här är antalet chow 1, så det finns $\binom{21}{1}$ sätt att bilda ett unikt chow.

  – Antalet sätt att bilda ett pung
    Det finns 31 valörer (27 numrerade valörer + 4 vindar), där ett pung kan bildas. Men ett par har redan bildats med någon valör, där bara 2 brickor är kvar och ett pung inte kan bildas. Antalet sätt att bilda ett pung blir $\binom{30}{1}$.

  Så antalet sätt att bilda ett chow eller pung är $\binom{21}{1} + \binom{30}{1}$, enligt Sats 2.1.1 om Additionsprincipen.

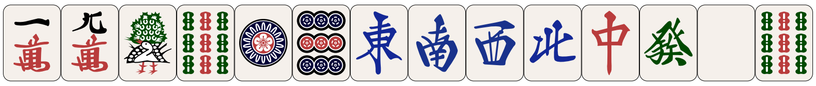
- Antalet sätt att bilda pung eller kong av alla tre drakar
  Efter att 1 chow eller pung redan har bildats, blir antalet pung och/eller kong 3. Samtidigt är mängden begränsad av de tre drakarna, där totalt 3 pung eller kong kan bildas. Om k $(0 \leq k \leq 3)$ kong har valts, är antalet sätt $\binom{3}{k}$. Då är antalet pung $3-k$, och det finns också $3-k$ valörer där pung kan bildas. Så antalet sätt att bilda $3-k$ pung är $\binom{3-k}{3-k}$.

Alltså är antalet Stora tre drakar $\sum_{k=0}^{3}\binom{31}{1}\cdot\left(\binom{21}{1}+\binom{30}{1}\right)\cdot\binom{3}{k}\cdot\binom{3-k}{3-k} = 12648.$

2.1.2 Kombinationer för en vinnande hand med en speciell struktur

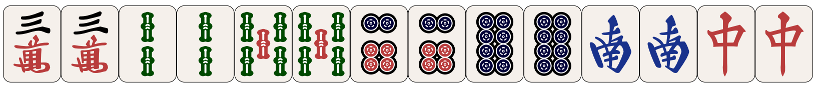
Enligt Avsnitt 1.3.6, kan en vinnande hand ha en speciell struktur, där alla brickor i par eller fler enstaka brickor finns. Det finns motsvarande poängelement (fan) vi kan undersöka.

Tretton föräldralösa. Poängklass: 88 poäng.
Ett exempel på denna typ av fan:



En vinnande hand består av singlar av de 13 valörerna, som är $\{1, 9\}$ i 3 numrerade serier + 3 drakar + 4 vindar, tillsammans med en extra bricka bland dessa. Då blir antalet sätt $\binom{13}{13}\cdot\binom{13}{1} = 13$, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning och Sats 2.1.2 om Multiplikationsprincipen.

Sju par. Poängklass: 24 poäng
Ett exempel på denna typ av fan:

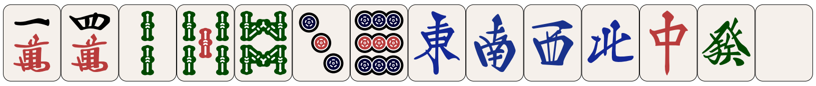


En vinnande hand består av sju par. Fyra identiska brickor får anses vara 2 par i den internationella standarden mahjong.

Det finns 34 valörer (27 numrerade valörer + 3 drakar + 4 vindar). Låt k $(0 \leq k \leq 3)$ vara antalet grupper som respektive består av 2 lika par, det vill säga, k valörer med vardera 4 identiska brickor. Ur 34 valörer väljs k valörer på $\binom{34}{k}$ sätt. De övriga $7-2k$

paren väljs ur de återstående $34-k$ valörerna på $\binom{34-k}{7-2k}$ sätt. Då kan Sju par bildas på $\sum_{k=0}^{3}\binom{34}{k}\cdot\binom{34-k}{7-2k}=16417104$, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning och Sats 2.1.1 om Additionsprincipen.

Mer teckenbrickor och stigande brickor. Poängklass: 24 poäng
Ett exempel på denna typ av fan:



En vinnande hand består av 7 enstaka teckenbrickor och 7 brickor av talföljder som tillhör olika separata stigande sekvenser (till exempel $\{1,4,7\}$ i bam, $\{2,5,8\}$ i tecken och $\{3,6,9\}$ i cirklar, var och en av de tre talföljderna måste tillhöra olika stigande sekvenser, men inte nödvändigtvis i denna ordning). Observera att varken brickornas serier eller talföljderna kan upprepas.

- Antalet sätt att bilda 7 enstaka teckenbrickor
  Det finns 7 valörer (3 drakar + 4 vindar), där 7 enstaka teckenbrickor kan bildas på antalet sätt $\binom{7}{7}$, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning.

- Antalet sätt att bilda 7 brickor av talföljder som tillhör olika separata stigande sekvenser
  Det finns 9 separata stigande sekvenser:
  $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$ i bam;
  $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$ i tecken;
  $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$ i cirklar.
  I denna vinnande hand kan varje sekvens endast dyka upp en gång.
  De 7 brickorna bör vara i form av 3 brickor på en stigande sekvens ur en serie, 2 brickor ur en annan stigande sekvens ur en annan serie, och 2 brickor ur sekvensen resterande ur serien resterande i bam, tecken och cirklar.

  – Antalet sätt att bilda 3 brickor ur en serie
    De 3 brickorna är i form av en talföljd, som kan väljas ur de 9 separata stigande sekvenserna. Då är antalet sätt $\binom{9}{1}$, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning.

  – Antalet sätt att bilda första 2 brickorna ur en annan stigande sekvens ur en annan serie

Efter att de 3 brickorna bildas i form av en talföljd, finns det respektive 2 separata stigande sekvenser i två serier resterande i bam, tecken och cirklar. Till exempel, efter att $\{1, 4, 7\}$ i bam har valts finns det 4 sekvenser kvar: $\{2, 5, 8\}$, $\{3, 6, 9\}$ i tecken och $\{2, 5, 8\}$, $\{3, 6, 9\}$ i cirklar. Då kan de 2 brickorna väljas ur de 4 sekvenserna på $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}$ sätt, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning och Sats 2.1.2 om Multiplikationsprincipen.

– Antalet sätt att bilda andra 2 brickorna ur sekvensen resterande ur serien resterande

  Efter att de 3 brickor och första 2 brickorna bildas, fins det en sekvens ur en serie kvar. Till exempel, efter att $\{1, 4, 7\}$ i bam och $\{2, 5, 8\}$ i tecken har valts, finns det endast sekvensen $\{3, 6, 9\}$ i cirklar. Då kan andra 2 brickorna väljas ur sekvensen på $\binom{3}{2}$ sätt, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning.

Då är antalet sätt att bilda de 7 brickorna av talföljderna är $\binom{9}{1} \cdot \left(\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}\right) \cdot \binom{3}{2}$.

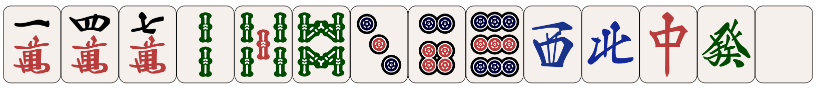
Alltså är antalet Mer teckenbrickor och stigande brickor

$$\binom{7}{7} \cdot \left(\binom{9}{1} \cdot \left(\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}\right) \cdot \binom{3}{2}\right) = 324$$

enligt Sats 2.1.2 om Multiplikationsprincipen.

Mindre teckenbrickor och stigande brickor. Poängklass: 12 poäng

Ett exempel på denna typ av fan:



En vinnande hand består av 14 brickor, dels av 7 enstaka teckenbrickor, dels av 9 brickor av talföljder som tillhör olika separata stigande sekvenser (till exempel $\{1, 4, 7\}$ i bam, $\{2, 5, 8\}$ i tecken och $\{3, 6, 9\}$ i cirklar, var och en av de tre talföljderna måste tillhöra olika stigande sekvenser, men inte nödvändigtvis i denna ordning). Observera att varken brickornas serier eller talföljderna kan upprepas.

Det finns 9 separata stigande sekvenser:

$\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{3, 6, 9\}$ i bam;

$\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$ i tecken;
$\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$ i cirklar.
I denna vinnande hand kan varje sekvens endast dyka upp en gång.

Det är givet att antalet teckenbrickorna och brickorna av talföljderna är 14 i denna hand. Men antalet teckenbrickorna är mindre än 7 och antalet brickorna av talföljderna är inte större än 9. Så det finns två fall: 6 enstaka teckenbrickor + 8 brickorna av talföljderna; 5 enstaka teckenbrickor + 9 brickorna av talföljderna.

- Fall 1: 6 enstaka teckenbrickor + 8 brickorna av talföljderna
  - Antalet sätt att bilda 6 enstaka teckenbrickor
    Det finns 7 valörer (3 drakar + 4 vindar), där 6 enstaka teckenbrickor kan bildas på antalet sätt $\binom{7}{6}$, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning.
  - Antalet sätt att bilda 8 brickor av talföljder som tillhör olika separata stigande sekvenser
    De 8 brickorna bör vara i form av 3 brickor på en stigande sekvens ur en serie, 3 brickor ur en annan stigande sekvens ur en annan serie, och 2 brickor ur sekvensen resterande ur serien resterande i bam, tecken och cirklar.
    * Antalet sätt att bilda första 3 brickorna ur en serie
      De 3 brickorna är i form av en talföljd, som kan väljas ur de 9 separata stigande sekvenserna. Då är antalet sätt $\binom{9}{1}$, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning.
    * Antalet sätt att bilda andra 3 brickorna ur en annan stigande sekvens ur en annan serie
      Efter att första 3 brickorna bildas i form av en talföljd, finns det respektive 2 separata stigande sekvenser i två serier resterande i bam, tecken och cirklar. Till exempel, efter att $\{1,4,7\}$ i bam har valts, finns det 4 sekvenser kvar: $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$ i tecken och $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$ i cirklar. Då kan andra 3 brickorna, i form av en talföljd ur de 4 sekvenserna, bildas på $\binom{4}{1}$ sätt, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning.
    * Antalet sätt att bilda de 2 brickorna ur sekvensen resterande ur serien resterande

Efter att första 3 brickor och andra 3 brickorna bildas, fins det en sekvens ur en serie kvar. Till exempel, efter att $\{1, 4, 7\}$ i bam och $\{2, 5, 8\}$ i tecken har valts, finns det endast sekvensen $\{3, 6, 9\}$ i cirklar. Då kan de 2 brickorna väljas ur sekvensen på $\binom{3}{2}$ sätt, enligt Sats 2.1.3 om Dragning utan återläggning utan ordning.

Då är antalet sätt att bilda de 8 brickorna av talföljderna $\binom{9}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}$.

Då i Fall 1 är antalet sätt $\binom{7}{6} \cdot \left(\binom{9}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}\right)$.

- Fall 2: 5 enstaka teckenbrickor + 9 brickorna av talföljderna. På ett liknande sätt kan vi fått antalet sätt i Fall 2. Det blir $\binom{7}{5} \cdot \left(\binom{9}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3}\right)$.

Alltså är antalet Mindre teckenbrickor och stigande brickor

$$\binom{7}{6} \cdot \left(\binom{9}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}\right) + \binom{7}{5} \cdot \left(\binom{9}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3}\right) = 1512$$

enligt Sats 2.1.1 om Additionsprincipen.

Från undersökningen på de speciella strukturerna, kan det ses att formeln för den grundläggande typen också mer eller mindre används. Vid räkningar av kombinationer för en vinnande hand, oavsett den grundläggande typen eller de speciella strukturerna, fins det alltid olika kombinationer av Additionsprincipen, Multiplikationsprincipen, satsen om Dragning utan återläggning utan ordning och/eller satsen om Dragning med återläggning utan ordningshänsyn. Här fokuserar vi ofta på valörerna, snarare än att tänka på att varje bricka är unik. Efter räkningen kan man se att en vinnande hand med högre poäng brukar ha färre kombinationer.

2.2 Vinstsannolikheter och väntevärde

Enlig den klassiska sannolikhetsdefinitionen kan sannolikheten för händelsen A betecknas:

$$P(A) = \frac{\text{antalet gynnsamma utfall}}{\text{antalet möjliga utfall}}. \tag{1}$$

Här utnyttjas ytterligare två definitioner och en sats ur Andersson & Lindholm (2010):

Definition 2.2.1. Olika händelser $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sägs vara oberoende om

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

(Andersson & Lindholm 2010, 14).

Definition 2.2.2. Väntevärdet av en slumpvariabel X ges av $E[X] = \sum_x xP(X = x)$, där $\sum_x$ betecknar summan över alla värden som X kan anta (Andersson & Lindholm 2010, 41).

Sats 2.2.3. *$P(A) = 1 - P(A^c)$, där A^c betecknar komplementet till händelsen A*

(Andersson & Lindholm 2010, 11).

Vi fokuserar på vad som händer efter att spelet faktiskt har börjat. För tärningskastningsdelen, hänvisa till första kapitlet Craps i boken *Kasinoteori: sannolikhetslära med spelexempel* (Andersson & Lindholm 2010, 1-32).

2.2.1 Sannolikheter för olika sorters brickor i en starthand (13 brickor)

I en starthand vad är sannolikheter för enstaka brickor, ett par, ett pung, ett kong och ett chow? Den internationella standarden mahjong har 144 brickor och en starthand brukar ha 13 brickor. För att mer exakt beräkna sannolikheten, tänker vi att alla brickor är unika här. Då är antalet möjliga utfall $\binom{144}{13}$. Låt k vara antalet brickor som ett par, ett pung eller ett kong har, $2 \leq k \leq 4$. Vi kan först välja en valör bland de 34 valörerna. Ur valören kan vi ha vilka k brickor som helst av de 4 identiska brickorna. Antalet sätt att välja denna sorts brickor är $\binom{34}{1} \cdot \binom{4}{k}$. För att enkelt beräkna, låt oss anta att övriga $13 - k$ brickor är enstaka utan blommor. Sen kan vi välja $13 - k$ valörer bland resten 33 valörer. Ur vart och en av de $13 - k$ valörerna kan vi ha vilken som helst av de 4 brickorna. Så antalet sätt att välja de $13 - k$ vanliga enstaka brickorna är $\binom{33}{13-k} \cdot \binom{4}{1}^{13-k}$. Då är sannolikheten för denna sorts brickor i en starthand

$$P(\text{en sorts brickor}) = \frac{\binom{34}{1} \cdot \binom{4}{k} \cdot \binom{33}{13-k} \cdot \binom{4}{1}^{13-k}}{\binom{144}{13}}. \tag{2}$$

- Sannolikheten för exakt ett par i en starthand är $\frac{\binom{34}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{33}{11}\cdot\binom{4}{1}^{11}}{\binom{144}{13}} = 0.15739.$

- Sannolikheten för exakt ett pung i en starthand är $\frac{\binom{34}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{33}{10}\cdot\binom{4}{1}^{10}}{\binom{144}{13}} = 0.01255.$
- Sannolikheten för exakt ett kong i en starthand är $\frac{\binom{34}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{33}{9}\cdot\binom{4}{1}^{9}}{\binom{144}{13}} = 0.00033.$

Formeln ovan varierar när det gäller en entsaka bricka eller minst ett chow i en starthand, på grund av att de har sitt specifika urvalssätt.

- Sannolikheten för r $(0 \leq r \leq 8)$ blommor i en starthand
  Det finns totalt 8 blommor, som endast har en bricka av varje valör. Antalet sätt att välja r blommor är $\binom{8}{r}$. Sen kan vi välja $13 - r$ valörer bland de 34 valörerna. Ur vart och en av de $13 - r$ valörerna kan vi ha vilken som helst av de 4 brickorna. Antalet sätt att välja de $13 - r$ vanliga enstaka brickorna är $\binom{34}{13-r} \cdot \binom{4}{1}^{13-r}$. Då är antalet gynnsamma utfall av r blommor och övriga $13-r$ vanliga enstaka brickor i en starthand $\binom{8}{r} \cdot \binom{34}{13-r} \cdot \binom{4}{1}^{13-r}$. Sannolikheten är $\frac{\binom{8}{r}\cdot\binom{34}{13-r}\cdot\binom{4}{1}^{13-r}}{\binom{144}{13}}$. Till exempel, $r = 0$, sannolikheten för enstaka brickor utan blommor i en starthand är $\frac{\binom{34}{13}\cdot\binom{4}{1}^{13}}{\binom{144}{13}} = 0.05919.$
- Sannolikheten för minst ett chow i en starthand
  Det finns 3 numrerade serier, som respektive har 9 valörer (1-9). Bland 1-9 kan 7 olika chow bildas, så de 3 serierna har 21 sätt att bilda ett unikt chow. Då är antalet sätt att välja ett chow $\binom{21}{1} \cdot \binom{4}{1}^{3}$. Ett chow är ur 3 valörer så övriga 10 enstaka brickor utan blommor väljs ur resten 31 valörer. Antalet sätt att välja 10 vanliga enstaka brickor är $\binom{31}{10} \cdot \binom{4}{1}^{10}$. Men bland de 13 brickorna kan mer chow möjligen bildas. Så här säger vi att sannolikheten för minst ett chow i en starthand är $\frac{\binom{21}{1}\cdot\binom{4}{1}^{3}\cdot\binom{31}{10}\cdot\binom{4}{1}^{10}}{\binom{144}{13}} = 0.05936.$

Från undersökningen ovan, kan vi se att exakt få ett kong i en starthand är svårast.

2.2.2 Sannolikheter för målbrickor i en vinnande hand (14 brickor)

För att bygga en vinnande hand vill en spelare få någon målbricka som är nydragen från muren eller nyligen utlagd av andra spelare. Enligt formeln för sannolikheten för händelsen A (Ekvation(1)), är sannolikheten för en målbrikca A_1:

$$P(A_1) = \frac{\binom{n_{A_1}}{1}}{\binom{N}{1}} = \frac{n_{A_1}}{N} \tag{3}$$

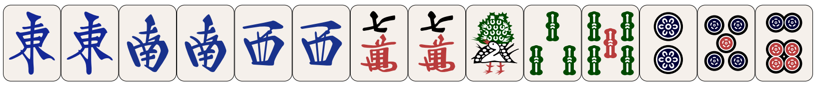
där n_{A_1} betecknar antalet tillgängliga målbrickor (på muren och/eller i de andra spelarnas händer), och N betecknar antalet tillgängliga brickor (på muren och i de andra spelarnas händer).

Om det finns målbrickor $A_1, A_2, \ldots, A_n$, då är sannolikheten

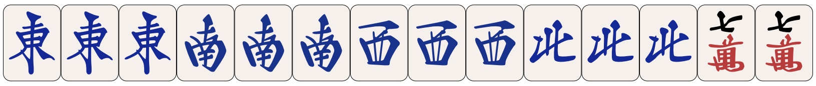
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\binom{n_{A_i}}{1}}{\binom{N-i+1}{1}} = \frac{n_{A_1}}{N} \cdot \frac{n_{A_2}}{N-1} \cdots \frac{n_{A_n}}{N-n+1} \tag{4}$$

enligt Definition 2.2.1 av oberoende händelser. Målbrickorna brukar fås sekventiellt i tid, så vi behöver ta hänsyn till ordningen på dem. Om de n målbrickorna är disjunkta, behöver sannolikheten multipliceras med $n!$. Om vissa målbrickor är lika, behöver sannolikheten multipliceras med en multinomialkoefficient.

Till exempel, en spelare har

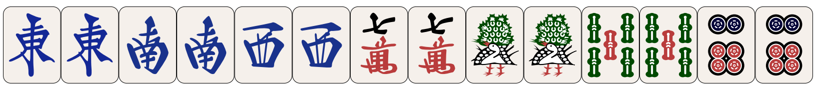


i handen. För att nå en typ av Stora fyra vindar



behöver hen ytterligare få 1 ostvind, 1 sydvind, 1 västvind och 3 nordvindar. Om 1 ostvind, 1 sydvind, 1 västvind och 1 nordvind tidigare redan har kasserats mitt i området inuti muren, då finns 1 ostvind, 1 sydvind, 1 västvind och 3 nordvindar kvar på muren och/eller i de andra spelarnas händer. Om antalet brickor på muren och i de andra spelarnas händer är 58, blir sannolikheten för målbrickorna $\frac{1}{58} \cdot \frac{1}{57} \cdot \frac{1}{56} \cdot \frac{3}{55} \cdot \frac{2}{54} \cdot \frac{1}{53} \cdot \binom{6}{1,1,1,3} = 2.47064 \cdot 10^{-8}$.

Spelaren kan också ha andra målbrickor för att nå ett annat fan, till exempel, en typ av Sju par:



Hen behöver ytterligare få ett 1 i bam, ett 5 i bam och ett 5 i cirklar. Om det finns två 1 i bam, ett 5 i bam och tre 5 i cirklar kvar på muren och/eller i de andra spelarnas händer, och antalet brickor på muren och i de andra spelarnas händer är 58, blir sannolikheten för målbrickorna $\frac{2}{58} \cdot \frac{1}{57} \cdot \frac{3}{56} \cdot 3! = 1.94452 \cdot 10^{-4}$, som är mycket större än sannolikheten för målbrickorna för Stora fyra vindar. Det innebär att lättare att nå Sju par än att nå Stora fyra vindar, vilket är stämt med deras respektive kombinationer i Avsnitt 2.2 (antalet Stora fyra vindar är 480 medan antalet Sju par är 16417104).

2.2.3 Väntevärde

I likhet med exemplet på fotbollsspel (Andersson & Lindholm 2010, 8-11), i mahjong kan en spelare vinna, förlora eller spela oavgjort. Så $\{\text{vinna}\}^c = \{\text{förlora eller oavgjort}\}$ och därmed $P(\{\text{förlora eller oavgjort}\}) = 1 - P(\{\text{vinna}\})$, enligt Sats 2.2.3 om sannolikheten för komplementet. När det gäller exemplet i Avsnitt 2.2.2, är sannolikheten för komplementet till en vinnande hand av Stora fyra vindar $1 - 2.47064 \cdot 10^{-8}$; sannolikheten för komplementet till en vinnande hand av Sju par $1 - 1.94452 \cdot 10^{-4}$.

Låt oss fortsätta med exemplet i Avsnitt 2.2.2. Spelaren har två eller mer alternativ att bygga en vinnande hand. Om alla alternativen kan nå samma poängklass, behöver hen bara välja det som har en störst sannolikhet för målbrickorna. Men om de kan nå olika poängklasser, behöver hen jämföra deras väntevärden. Låt X och Y vara slumpvariablerna som motsvarar den poäng Stora fyra vindar respektive Sju par ger. Om spelaren lyckas med Stora fyra vindar, får hen 88 poäng; om hen lyckas med Sju par, får hen 24 poäng enligt WMCC (2006, 33-47). Om hen inte lyckas med någon vinnande hand, får hen 0 poäng. Enligt Definition 2.2.2 av väntevärde,

$$E[X] = \sum_x xP(X = x) = 88 \cdot 2.47064 \cdot 10^{-8} + 0 \cdot (1 - 2.47064 \cdot 10^{-8}) = 2.17416 \cdot 10^{-6}$$

$$E[Y] = \sum_y yP(Y = y) = 24 \cdot 1.94452 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot (1 - 1.94452 \cdot 10^{-4}) = 4.66685 \cdot 10^{-3}$$

då spelaren bör välja att bygga den typ av Sju par, som har större väntevärde. På det här sättet kan en spelare välja att bygga den vinnande handen, som har störst väntevärde bland alla alternativ.

3

Slutsats och eventuell framtida forskning

Sammanfattningsvis, har vi undersökt hur många kombinationer det finns för en vinnande hand och vad som är väntevärdet och vinstsannolikheten för en spelare. Undersökingen bygger på elementär kombinatorisk teori och sannolikhetslära, bland annat, Additionsprincipen, Multiplikationsprincipen, satsen om Dragning utan återläggning utan ordning, satsen om Dragning med återläggning utan ordningshänsyn, definitioner av oberoende händelser, komplementet till en händelse och väntevärdet av en slumpvariabel. Valörerna står i focus vid beräkningen av kombinationerna, medan vi behöver tänka på att varje bricka är unik vid beräkningen av sannolikheten och väntevärdet.

- Kombinationer för en vinnande hand
  Antalet sätt att bilda den grundläggande typen av en vinnande hand är

  $$\sum_{k=0}^{4} \binom{n_{par}}{1} \cdot \binom{n_{chow} + k - 1}{k} \cdot \binom{n_{pung/kong}}{4-k}$$

  där n_{par}, n_{chow}, $n_{pung/kong}$ betecknar respektive mängd, där ett par, ett chow, ett pung eller kong kan bildas; k $(0 \leq k \leq 4)$ betecknar antalet chow som behövs i handen. Men den här formeln varierar även på grund av att olika poängelement (fan) har olika specifika krav. Formeln används också mer eller mindre vid undersökningen på de speciella strukturerna. Under räkningsprocessen av kombinationer för en vinnande hand, fins det alltid olika kombinationer av Additionsprincipen, Multiplikationsprincipen och andra satser om dragning på olika sätt. Efter räkningen av några exempel kan vi se att en vinnande hand med högre poäng brukar ha färre kombinationer.

- Vinstsannolikheter och väntevärde
  Sannolikheten för en sorts brickor i en starthand är

$$P(\text{en storts brickor}) = \frac{\binom{34}{1} \cdot \binom{4}{k} \cdot \binom{33}{13-k} \cdot \binom{4}{1}^{13-k}}{\binom{144}{13}}$$

  där k $(2 \leq k \leq 4)$ betecknar antalet brickor ett par, ett pung eller ett kong har. Men den här formeln varierar när det gäller en entsaka bricka eller minst ett chow i en starthand, på grund av att de har sitt specifika urvalssätt. Efter räkningen kan man se att få ett kong i en starthand är svårast.

  Sannolikheten för målbrickor för att nå en vinnande hand är

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{n_{A_i}}{N - i + 1}$$

  där n_{A_i} betecknar antalet tillgängliga målbrickor (på muren och/eller i de andra spelarnas händer), och $N - i + 1$ betecknar antalet tillgängliga brickor (på muren och i de andra spelarnas händer). Om de n målbrickorna är disjunkta, multipliceras sannolikheten med $n!$; om vissa målbrickor är lika, multipliceras sannolikheten med en multinomialkoefficient. Enligt räkningen av några exempel, en vinnande hand med högre poäng har mindre sannolikheten för målbrickor. Det vill säga, det är svårare att nå en vinnande hand med högre poäng. Det är stämt med räkningen av kombinationer, den vinnande hand med högre poäng har färre kombinationer.

  Med definitioner av komplementet och väntevärdet, genom

$$E[X] = \sum_{x} xP(X = x)$$

  (där $\sum_x$ betecknar summan över alla värden som en slumpvariabel X kan anta), kan man räkna ut väntevärden på olika alternativ att bygga en vinnande hand. Bland alla alternativ, bör man sträva efter den vinnande handen som har störst väntevärdet.

På grund av begränsad tid och andra resurser, beräknas resultatet ovan endast utifrån de grundläggande teorierna, och det kan finnas ett visst gap från verkligheten. I en framtida forskning skulle det vara värdefullt att undersöka om det finns ett samband mellan vinstsannolikheter och till exempel, spelares sittplats, tärningskast i början, och så vidare.

Referenser

[1] Andersson, Patrik; & Lindholm, Mathias. 2010. *Kasinoteori : sannolikhetslära med spelexempel.* Stockholm: Liber.

[2] Biggs, Norman L.. 2002. *Discrete Mathematics.* 2. uppl. Oxford: Oxford University Press.

[3] Cheng, Yuan; Li, Chi-Kwong. & Li, Sharon H.. 2017. *Mathematical aspect of the combinatorial game Mahjong.* https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.07345.

[4] Schmitz, Daniel. 2021. The mahjong package. https://ctan.math.utah.edu/ctan/tex-archive/graphics/mahjong/mahjong.pdf (Hämtad 2023-01-16).

[5] World Mahjong Contest Center. 2006. *Mahjong Competition Rules.* Peking: China Leisure Research Center.

[6] Yuan, Zhengmin. 2004. *Majiang Yu Shuxue.* [Mahjong och Matermatik]. Chengdu: Chengdu Time Press.

BILDFÖRTECKNING

Alla bilder på mahjongbrickor, förutom blommbrickor, skapas med koder tack vare ”The mahjong package” av Daniel Schmitz. Alla bilder i uppsatsen har märke Public Domain eller Creative Commons, eller har fått tillstånd från ägaren.

Bild 1 på blommor i Avsnitt 1.2.3
World Mahjong Organization. *Disijie shijie majiang jinbiaosai yongpai (huapai).* [Mahjongbrickor (blommor) för det fjärde världsmästerskapet i mahjong]. http://www.mindmahjong.com/info/showinfo.asp?id=1116 (Hämtad 2023-03-30).

Bild 2 på att bland ihop brickorna i Avsnitt 1.3.1
Hu, Albert. 2020.
https://unsplash.com/s/photos/mahjong (Hämtad 2023-05-16).

Bild 3 på brickamurar i Avsnitt 1.3.2
Wikimedia Commons. 2023.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mahjong_setup_wall_1.jpg (Hämtad 2023-05-16).

Bild 4 på deltagares plater i Avsnitt 1.3.3
Wikidot. 2013. *Mahjong Wiki.*
http://mahjong.wikidot.com/basic-rules (Hämtad 2023-05-16).

Bild 5 på att slå med två tärningar i Avsnitt 1.3.3
Skitterphoto.
https://www.pexels.com/sv-se/foto/chans-fokus-fritid-kub-705171/ (Hämtad 2023-05-20).

Bild 6 på att spela mahjong i Avsnitt 1.3.5
Griffin, Peter.
https://www.publicdomainpictures.net/se/view-image.php?image=6998&picture=mahjong (Hämtad 2023-05-16).

- Sannolikheten för minst ett chow i en starthand

Det finns 3 numrerade serier, som respektive har 9 valörer (1-9). Bland 1-9 kan 7 olika chow bildas, så de 3 serierna har 21 sätt att bilda ett unikt chow. Då är antalet sätt att välja ett chow $\binom{21}{1}\binom{4}{1}^3$. Ett chow är ur 3 valörer så övriga 10 enstaka brickor utan blommor väljs ur resten 31 valörer. Antalet sätt att välja 10 vanliga enstaka brickor är $\binom{31}{10}\binom{4}{1}^{10}$. Men det kan hända att, till exempel, {2,3,4} i bam med {5} i bam bland de andra brickorna = {3,4,5} i bam med {2} i bam bland de andra brickorna. Så vi behöver använda sållprincipen för att undvika en dubbel räkning. Det finns 6 talföljder, såsom {1,2,3,4}, bland 1-9 och de 3 serierna har 18 sådana talföljder. Då är antalet sätt att välja en sådan talföljd $\binom{18}{1}\binom{4}{1}^4$. Antalet sätt att välja 9 andra brickor är $\binom{30}{9}\binom{4}{1}^9$. Dessutom bland de 13 brickorna kan mer chow möjligen bildas. Så här säger vi att sannolikheten för minst ett chow i en starthand är $\frac{\binom{21}{1}\binom{4}{1}^3\binom{31}{10}\binom{4}{1}^{10}}{\binom{144}{13}} - \frac{\binom{18}{1}\binom{4}{1}^4\binom{30}{9}\binom{4}{1}^9}{\binom{144}{13}} =$ 0.04298.