



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Introduktion till Catalantalen

av

Xue Wang

2023 - K16

Introduktion till Catalantalen

Xue Wang

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Boris Shapiro

2023

Sammanfattning

Det finns många intressanta och regelbundna talföljder som förekommer inom matematiken. De mest välkända talföljderna är Fibonaccitalen, Pascals-triangeln och Catalantalen.

Talföljden av Catalantalen börjar med

$$\{C_n\}_{n=0}^{\infty} = 1, 1, 2, 5, 14, \dots$$

Den används för att beräkna antalet kombinationer av olika objekt. Till exempel, antalet monotona vägar av ett $n \times n$ rutnät som går från bottenpunkten till topppunkten där banan inte överstiger diagonalen, antalet olika typer av träd, polygon, med mera.

Ordet 'Catalantal' namngavs av matematikern John Riordan (22 April, 1903- 27 Augusti, 1988) år 1948, efter den belgiska matematikern Eugène Charles Catalan (30 Maj, 1814 – 14 Februari, 1894).

Syftet med detta arbete är att bekanta sig med Catalantalen samt olika kombinatoriska problem, där Catalantalen uppstår.

Huvudkällorna som användes är Roman (2015) och Stanley (2015). Romans bok (2015) introducerar ett antal olika objekt som kan beräknas med hjälp av Catalantalen, däremot presenterar Stanleys bok (2015) 214 olika objekt och fler bilds exempel av liknande slag.

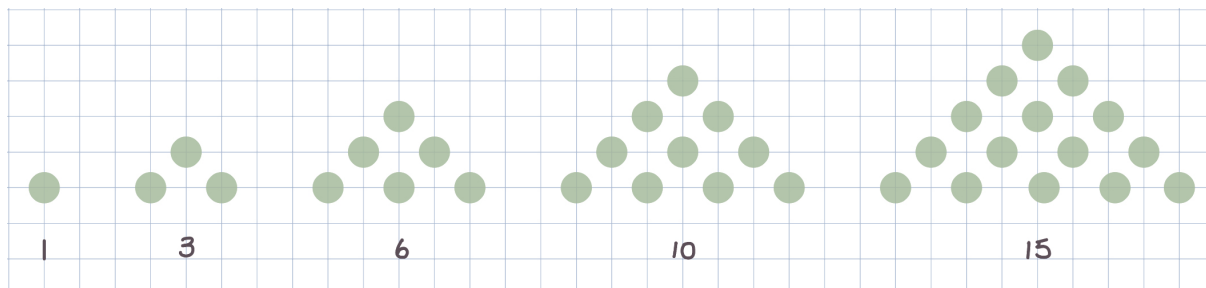
Innehållsförteckningen

1	Introduktion	1
1.1	Grunddefinitionen av Catalantalen och arbetets upplägg	1
1.1.1	Differensekvationen för Catalantalen	2
1.1.2	Genererade funktion	3
1.2	Huvudegenskaper hos Catalantalen	4
1.2.1	Integralform av Catalantalen	6
1.2.2	Förskjutna Catalan rekurrensrelationer	7
2	Catalantalen och vägar	7
3	Catalantalen och träd	10
3.1	Ordnade träd	10
3.2	Binära träd	11
3.3	Fullständiga binära träd	12
3.4	Icke-korsande och alternerande träd	13
4	Catalantalen och geometriska polygon	15
4.1	Icke-korsande linjer för polygon	15
4.2	Tesselationer av en trappa	17
5	Catalantalen och parenteser	18
6	Catalantalen och modulatoräkning	19
7	Tacksägelse	20
8	Referenser	21

1 Introduktion

Det finns många intressanta och regelbundna talföljder som förekommer inom matematik.

Ett exempel på en talföljd är en följd av antalet liksidiga punkter i trianglar med sidolängd n , se Figur 1. Bilden visar att antalet punkter växer som 1, 3, 6, 10, 15, \dots . Denna talföljd kallas för **triangelalen** (Triangular Number Sequence).



Figur 1: Mönster för triangelalen

Några andra exempel av välkända talföljder är Fibonaccitalen, Pascals-triangel, Catalantalen med mera.

Syftet med denna studie är att bekanta sig med Catalantalen, samt olika kombinatoriska problem, där Catalantalen uppstår. Arbetet betraktar huvudsakligen olika typer av träd, vägar samt polygon, som diskuteras i detalj, tillsammans med deras koppling till Catalantalen.

Därmed användes Roman (2015) och Stanley (2015), samt andra källor som referenser till denna studie. Roman (2015) introducerar steg för steg hur antalet olika objekt kan beräknas med hjälp av Catalantalen, medan Stanley (2015) presenterar 214 olika objekt som räknas med hjälp av Catalantal i form av övning samt flera bilder.

1.1 Grunddefinitionen av Catalantalen och arbetets upplägg

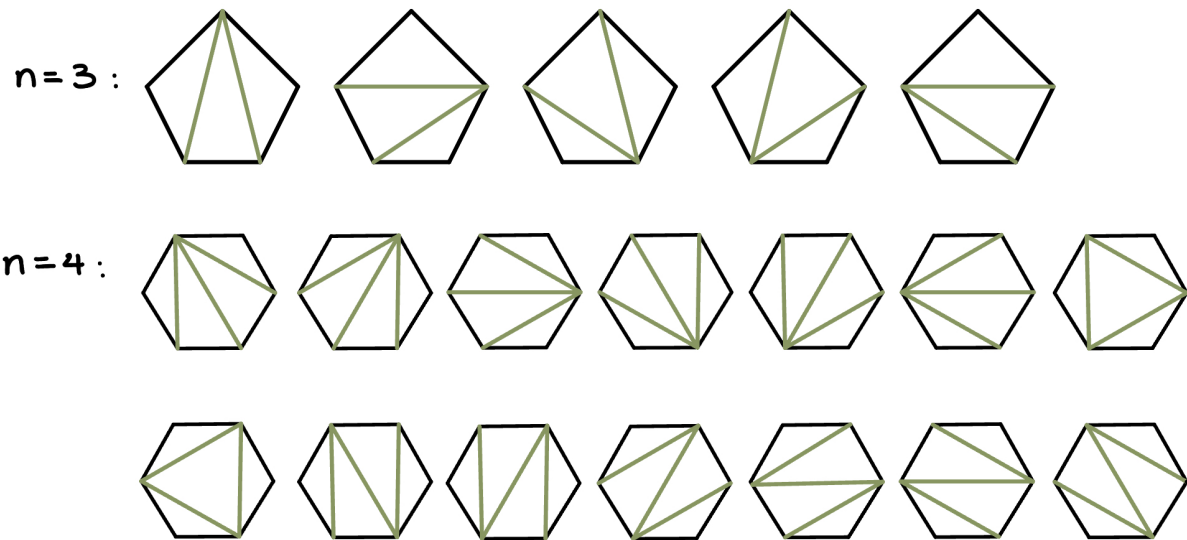
Om vi låter P_{n+2} vara beteckningen för en konvex polygon med $n + 2$ hörn och därefter delar upp polygonen med $n - 1$ diagonaler, där diagonalerna inte korsar varandra i polygonens insidan, och därmed resulterar denna uppdelning i n trianglar. Denna process kallas för triangulering av polygonen.

Låt C_n vara antalet trianguleringar av P_{n+2} . En direkt beräkning ger $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$, $C_6 = 132$, \dots . Denna talföljd förekommer ofta i olika räkneproblem inom kombinatorik och den kallas för **Catalantalen**, se Figur 2 som illustrerar C_3 och C_4 .

Ordet 'Catalantal' introducerades av matematikern John Riordan år 1948, efter den belgiska matematikern Eugène Charles Catalan, som arbetade inom olika områden i matematik, som till exempel talteori, kombinatorik med mera. År 1838 presenterade E. Catalan följande sats som presenterar formeln för Catalantalen.

Sats 1:

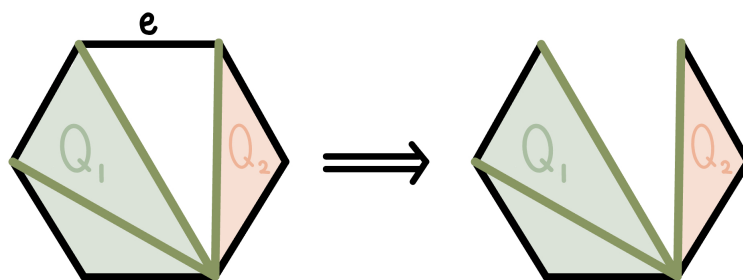
$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (1.1)$$



Figur 2: Två exempel för polyon när $n = 3$ och 4

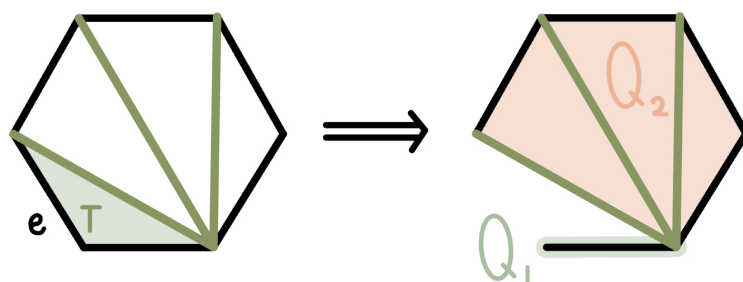
1.1.1 Differensekvationen för Catalantalen

Låt P_{n+3} vara beteckningen för en konvex polygon med $n + 3$ hörn, därefter väljs en kant, e , av P_{n+3} och en triangulering av polygonen. När vi tar bort kanten e , får vi två triangulerade polygoner med ett gemensamt hörn, som vi kan kalla för Q_1 och Q_2 , se Figur 3.



Figur 3: Exempel på en differenstrukturen triangulerad polygon

Om polygonen Q_i har $a_i + 2$ hörn (där i är ett heltal och beroende på hur många triangulerande polygoner det finns) så måste $a_1 + a_2 = n$ eftersom Q_1 och Q_2 har ett gemensamt hörn, vilket gör att $a_1 + 2 + a_2 + 2 - 1 = n + 3 \iff a_1 + a_2 = n$. Det finns en möjlighet att antingen Q_1 eller Q_2 består av en enda kant, vilket inträffar när den första / sista triangeln, T , som har en kant e kommer att ge en triangulerad polygon med ett extra kant, se Figur 4



Figur 4: Exempel på en triangulerad polygon, där Q_1 består av en enda kant

I ett sådant fall betraktar vi kanten som en polygon med 2 hörn och har $C_0 = 1$ trianguleringar. Om vi har två triangulerande polygoner med antalet vertex $a_1 + 2$ och $a_2 + 2$, kan vi istället slå ihop de till en triangulerad polygon med $n + 3$ vertex, främst genom att vända dessa polygoner. Eftersom det finns C_{a_i} trianguleringar av Q_i , så får vi följande relation:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \quad , \quad C_0 = 1 \\ &= C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_n C_0 . \end{aligned} \quad (1.2)$$

Shift av index i ekvationen (1.2) ger en differensekvation av Catalantalet C_n

$$C_{(n+1)-1} = C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + \cdots + C_{n-1} C_0 ,$$

eller

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k} . \quad (1.3)$$

1.1.2 Genererade funktion

Sats 2: Genererade funktionen av Catalantalen är

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n \geq 0} C_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + 132x^6 + \cdots \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x} . \end{aligned} \quad (1.4)$$

Bevis: Multiplicera uttryck (1.2) med x^n och summera på $n \geq 0$

$$\sum_{n \geq 0} C_{n+1} x^n = C_1 x^0 + C_2 x^1 + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \cdots ,$$

från uttryck (1.3) vet man att:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{k=1}^1 C_{k-1} C_{1-k} = C_0 \cdot C_0 = 1 \cdot 1 = 1 , \\ C_2 &= C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 + 1 = 2 , \\ C_3 &= C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 2 + 1 + 2 = 5 , \\ C_4 &= C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14 , \\ &\vdots \end{aligned}$$

så att

$$\sum_{n \geq 0} C_{n+1} x^n = 1 + 2x + 5x^2 + 14x^3 + \cdots . \quad (1.5)$$

Om vi jämför uttrycken (1.4) och (1.5) ser vi att

$$\sum_{n \geq 0} C_{n+1} x^n = \frac{C(x) - 1}{x} . \quad (1.6)$$

Formeln (1.6) kan även uttryckas på följande sätt

$$\frac{C(x) - 1}{x} = C(x)^2 \iff C(x)^2 - \frac{C(x)}{x} + \frac{1}{x} = 0, \quad (1.7)$$

eftersom

$$\begin{aligned} C^2(x) &= (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n + \dots)^2 \\ &= C_0^2 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 + \dots + (C_0C_n + \dots + C_nC_0)x^n + \dots \\ &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots \end{aligned}$$

Alltså gäller

$$C^2(x) = \sum_{n \geq 0} C_{n+1}x^n.$$

Därefter användes uttryck (1.7) samt pq-formeln (det vill säga för $x^2 + px + q = 0$ så har vi att $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$) för att lösa ut $C(x)$ ur ekvationen, vilket resulterar till

$$C(x) = \frac{1}{2x} \pm \sqrt{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2x} \pm \sqrt{\frac{1-4x}{4x^2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}. \quad (1.8)$$

För att bestämma det rätta tecknet notera att

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2x + \dots \quad (1.9)$$

Om vi sätter in uttryck (1.9) i uttryck (1.8), får vi

$$C(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{x} - 1 + \dots,$$

vilket inte stämmer överens med uttryck (1.4). Däremot testar vi med det negativa tecknet och får

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + x + \dots \quad \square$$

1.2 Huvudegenskaper hos Catalantalen

Catalantalen har följanden egenskaper:

Sats 3:

1. $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$,
2. $C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$,
3. $C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$, $C_0 = 1$.

Bewis för punkt 1: Catalantalen ges av följande:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= \binom{2n}{n} - \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}. \end{aligned} \quad \square$$

Bevis för punkt 2: Låt oss påminna om Vandermondes konvolutions formel för att utveckla formel (2):

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{r=0}^k \binom{m}{r} \binom{n}{k-r}.$$

För $m = k = r$, ges följande

$$\binom{n+n}{n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \binom{n}{n-r},$$

eftersom $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$, får man

$$\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Därmed är det bevisat att sats 1 kan även formuleras på uttryck 2 sats 1.

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2. \quad \square$$

Bevis för punkt 3: När $n = 0$, gäller följande

$$C_0 = \frac{1}{0+1} \binom{2 \cdot 0}{0} = 1.$$

Vidare

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!}.$$

Från ekvation (1.1) får man att $(2n)! = n!(n+1)!C_n$, vilket betyder att

$$C_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+2)(n+1)n!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)n!(n+1)!C_n}{(n+2)(n+1)n!(n+1)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)C_n}{(n+2)(n+1)}.$$

Alltså får vi

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)} C_n. \quad \square$$

Sats 4: Catalantalen har följande asymptotisk

$$C_n / \left(\frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{3/2}}} \right) \rightarrow 1 \quad \text{när} \quad n \rightarrow \infty.$$

Bevis för Sats 4: Stirling approximation för $n!$ är

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

vilket ger att

$$C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{1}{n+1} \frac{2\sqrt{\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 4^n \sim \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 4^n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{3/2}}}.$$

Detta medför att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C_n / \left(\frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{3/2}}} \right) = 1. \quad \square$$

1.2.1 Integralform av Catalantalen

Sats 5: För $n \geq 0$ kan Catalantalen även uttryckas i integralform

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^4 x^{n-1/2} (4-x)^{1/2} dx. \quad (1.10)$$

Bevis: Med hjälp av partialintegration $\left(\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \right)$ kan vi bevisa att uttrycket (1.10) är ekvivalent med uttryck 3 sats 1.

Första steg: sätt

$$g'(x) = (4-x)^{1/2} \quad \text{och} \quad f(x) = x^{n-1/2},$$

så att

$$g(x) = -\frac{1}{3/2}(4-x)^{3/2} \quad \text{och} \quad f'(x) = (n-1/2)x^{n-3/2},$$

vilket resulterar till

$$C_n = \left[-\frac{1}{3/2}(4-x)^{3/2}x^{n-1/2} \right]_0^4 - \int_0^4 (n-1/2)x^{n-3/2} \left(-\frac{1}{3/2}(4-x)^{3/2} \right) dx. \quad (1.11)$$

Vidare faktoriserar ut konstanterna i integralen

$$C_n = \left[-\frac{1}{3/2}(4-x)^{3/2}x^{n-1/2} \right]_0^4 + \frac{n-1/2}{3/2} \int_0^4 x^{n-3/2}(4-x)^{3/2} dx. \quad (1.12)$$

Den första termen till vänster i uttryck (2.3), insatt i hakparentesen, försvinner och därmed kan integralen till höger utvecklas vidare till följande

$$\int_0^4 x^{n-3/2}(4-x)^{3/2} dx = \int_0^4 x^{n-3/2}(4-x)(4-x)^{1/2} dx, \quad (1.13)$$

vilket blir

$$4 \int_0^4 x^{n-3/2}(4-x)^{1/2} dx - \int_0^4 x^{n-1/2}(4-x)^{1/2} dx = 4C_{n-1} - C_n. \quad (1.14)$$

Efter insättningen av uttryck (2.4) i (2.3), får vi

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{n-1/2}{3/2}(4C_{n-1} - C_n) \iff C_n + \frac{n-1/2}{3/2}C_n = \frac{n-1/2}{3/2}4C_{n-1}, \\ &\iff C_n \left(1 + \frac{n-1/2}{3/2} \right) = \frac{n-1/2}{3/2}4C_{n-1}. \end{aligned}$$

Vidare divideras högerledet med $\left(1 + \frac{n-1/2}{3/2}\right)$, så att

$$C_n = \frac{n-1/2}{3/2} 4C_{n-1} / \left(\frac{n-1/2}{3/2} + 1\right) = \frac{n-1/2}{3/2} 4C_{n-1} \cdot \frac{3/2}{(n-1/2) + (3/2)},$$

$$\Leftrightarrow C_n = \frac{4(n-1/2)}{n+1} C_{n-1} = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}. \quad \square$$

1.2.2 Förskjutna Catalan rekurrensrelationer

I många delar av denna uppsats kommer vi att använda en förskjuten rekurrensrelation för att bevisa sambandet mellan Catalantalen och andra matematiska begrepp.

Antag att

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1-a} D_{k+a} D_{n-k-1}, \quad D_a = 1 \quad (1.15)$$

där $n \geq a + 1$ och a är en heltal. Sedan ersätta D_n så att $F_{n-a} = D_n$ vilket ger oss att $F_0 = D_a = 1$ och

$$F_{n-a} = \sum_{k=0}^{n-1-a} F_k F_{n-k-1-a}.$$

Om vi ersätter n med $n + 1$ får vi Catalan rekurrensrelationen

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_k F_{n-k-1} \quad \text{för } n \geq 1,$$

så att $D_{n+a} = F_n = C_n$.

2 Catalantalen och vägar

Catalantalen kan användas för att beräkna antalet monoton stigar i ett $n \times n$ rutnät som går från sin bottenpunkt till sin topppunkt där banan inte överstiger diagonalen. Förflyttningen sker kvadratvis och därmed bildas ett antal olika vägbanor.

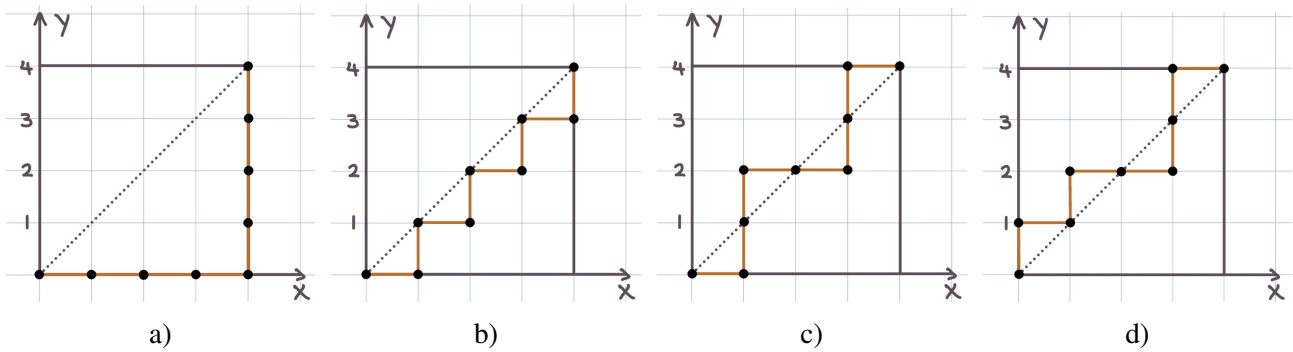
Som ett exempel, så kan vi börja vid punkten $(0, 0)$ i xy -plan och kan betrakta två typer av steg (det vill säga ett steg till höger eller ett steg upp):

$$\text{Höger: } (x, y) \longrightarrow (x + 1, y) \quad \text{Uppåt: } (x, y) \longrightarrow (x, y + 1),$$

förflyttning sker från punkt $(0, 0)$ till $(4, 4)$ med de definierade stegen ovan. Således kommer varje sådan väg att bestå av 4 steg till höger och 4 steg uppåt. Dessutom kan vi beskriva förflyttning i höger samt uppåt genom en kombinatorisk uttryck:

$$\frac{8!}{4!4!} = \binom{8}{4} = 70.$$

Det vill säga det finns 70 sådana vägar att ta sig från punkt $(0,0)$ till $(4,4)$. Figur 5 visar fyra av dessa 70 möjliga vägar.



Figur 5: 4 olika vägar för att ta sig från punkt (0,0) till punkt (4,4)

Antag nu att vi återigen börjar från punkten (0,0) och går till punkten (4,4) med samma typer av steg, det vill säga, 4 steg till höger och 4 steg uppåt. Dock, ska vi inte gå över linjen $y = x$, däremot kan vi gå med linjen, det vill säga vi kan hamna på punkt (1,1), (2,2), \dots , (n,n).

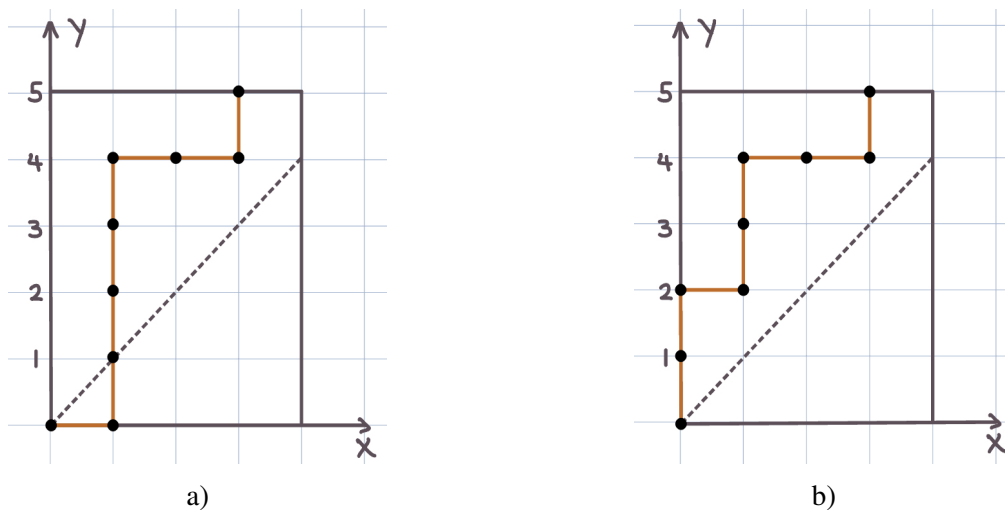
Låt oss titta på Figur 5, där de vägar som visas i a) och b) är dem vägar som vi vill ha. Det som visas är en gemenskap mellan dessa vägar, där båda börjar sitt först steg till höger och avslutar sitt sista steg uppåt. Om vi vet antalet banor från (0,0) till (4,4) där banorna korsar linjen $y = x$, så kan vi subtrahera det från det totala antalet banor (70 st).

Låt oss betrakta figur 5c), som presenterar en situation där vägbanan strider emot vår definition om att inte överstiga diagonalen. Figuren börjar med ett höger steg och sedan med ett uppåt riktat steg, däremot så fortsätter nästa steg att förflytta sig uppåt och vid denna steg så blir antalet uppåt-steg flera än antalet vänster-steg.

Vidare kan vi introducera en notation och beteckna steg till höger som H och steg upp som U:

$$H, U, U, | H, H, U, U, H \longleftrightarrow H, U, U, | U, U, H, H, U .$$

För steg till vänster av skiljtecken i vänsterled samt högerled motsvarar de steg som överstiger linjen $y = x$. Det vi gjorde i transformationen är att byta ut alla H till V och alla V till H, till vänster sidan av skiljtecknet. Som exempel så har Figur 5c) transformerats till Figur 6a). Figur 5d) är ytterligare en annan banan som vi vill justera på grund av dess överstigning av linjen $y = x$. Figur 6b) presenterar transformationen av Figur 5d) med samma metod som användes för 6a).



Figur 6: Transformerade vägar för Figur 5 c) respektive d)

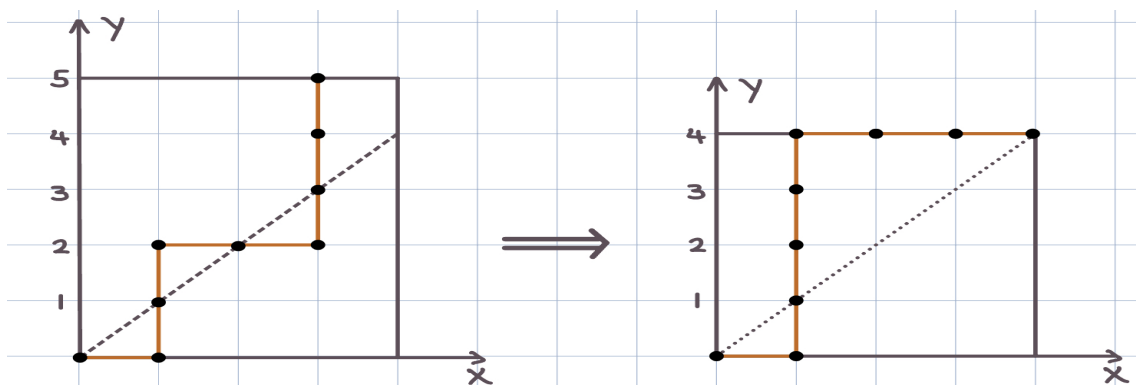
Om vi kan transformera slutsteg från (4,4) till (3,5), så kan vi transformera slutsteg från (3,5) till (4,4), eftersom transformationen är reversibel. Vi kan bevisa detta med hjälp av ett exempel, där vi antar att vi börjar från punkt (0,0) till (3,5) med följande vägbeskrivning:

H, U, U, | H, H, U, U, U .

Som tidigare används skiljtecknet för att skilja positionen av de steg som överstiger linjen $y = x$. I detta fall är det vid tredje positionen för andra U-steg. Vi behåller den vänstra sidan av skiljtecknet och transformerar den högra sidan med att ersätta U till V och V till U, vilket resulterar i följande vägbeskrivning:

H, U, U, | U, U, H, H, H .

Transformationen visas i Figur 7, däremot visar denna vägbeskrivning en dålig bana som vi vill undvika när vi vill resa från (0,0) till (4,4), eftersom den överstiger diagonalen.



Figur 7: Ett exempel av väg-transformation.

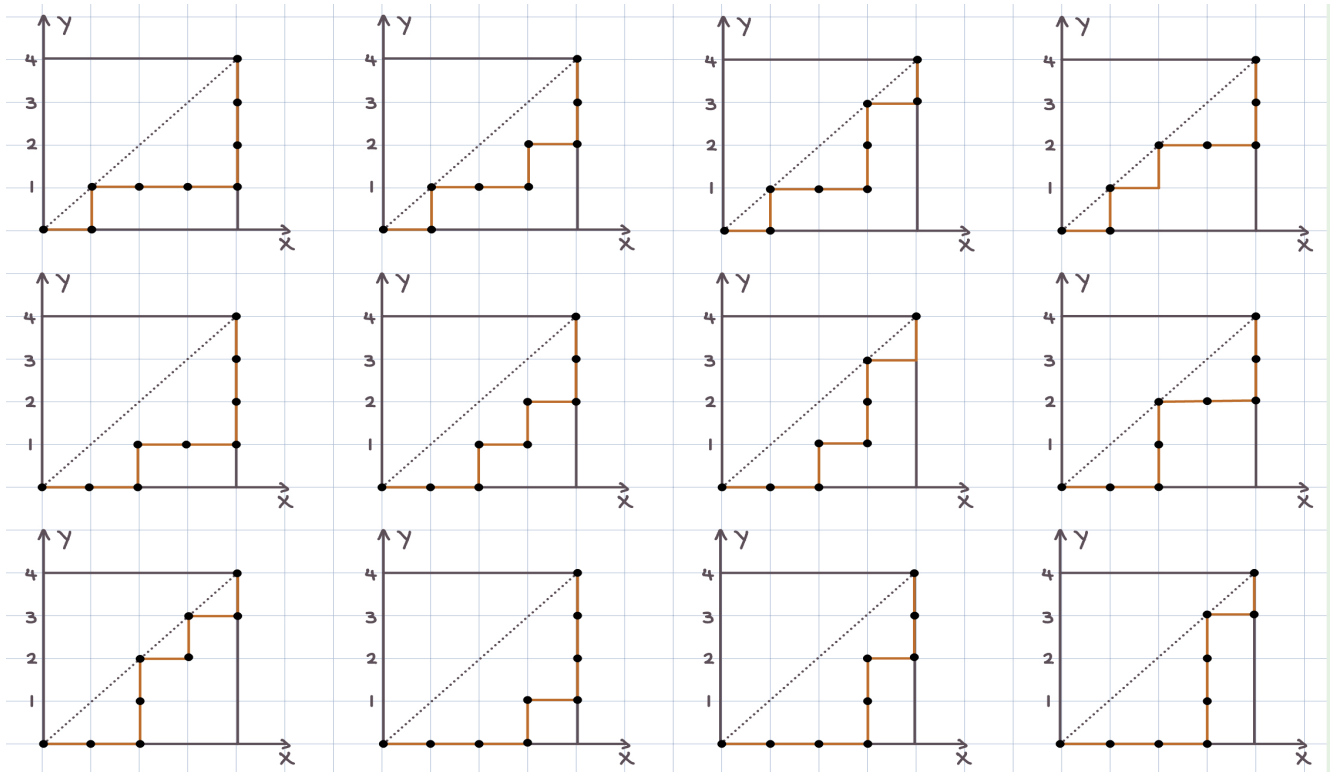
Transformationen hjälper oss att räkna ut antalet dåliga bannor för 3 steg till höger och 5 steg uppåt, alltså har vi

$$\frac{8!}{3!5!} = \binom{8}{3} = 56$$

sätt. Nu vet vi antalet dåliga samt totala möjliga bannor och därmed så kan vi räkna ut antalet bannor som inte överstiger linjen $y = x$. Följaktligen, så är antalet bannor

$$\binom{8}{4} - \binom{8}{3} = \frac{8!}{4!4!} - \frac{8!}{3!5!} = 70 - 56 = 14,$$

där banan inte överstiger linjen $y = x$. I Figur 5 har vi visat 2 möjliga sätt att ta sig från punkt (0,0) till (4,4), och vidare presenteras de resterande 12 möjliga vägar i Figur 8.



Figur 8: Ytterligare 12 möjliga vägar.

Vi betecknar D_n som antalet möjliga vägar som vi vill gå då vi förflyttar oss från punkt $(0,0)$ till (n,n) , där $n \geq 0$. Precis som tidigare med $n = 4$, så har vi nu vägarna som består av n steg till höger och n steg uppåt, där vägarna inte överstiger linjen $y = x$, så att antalet möjliga vägar är

$$D_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}. \quad (2.1)$$

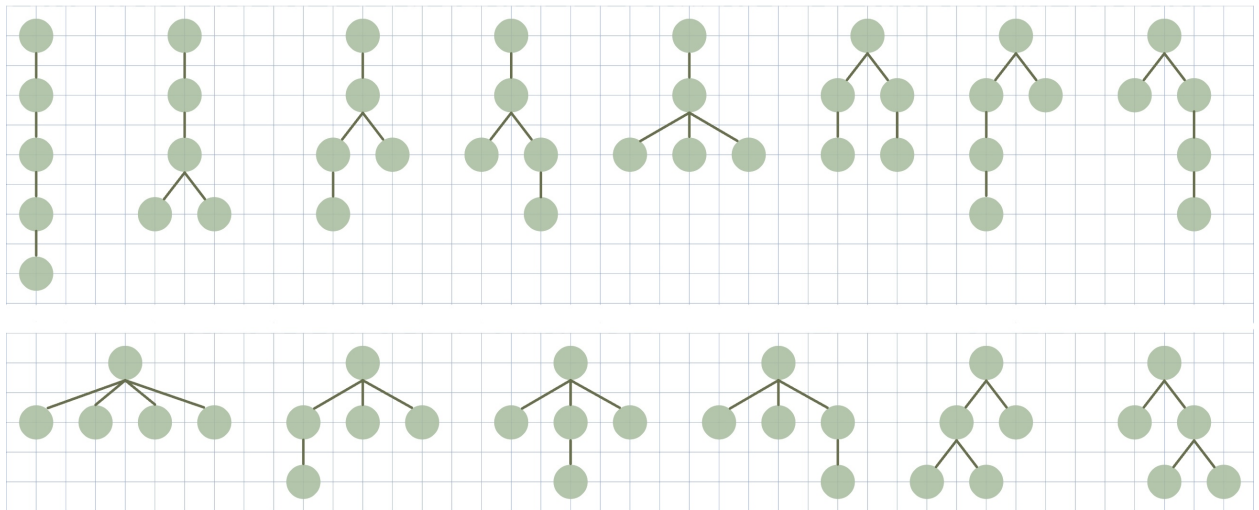
När $n = 0$ finns det bara en möjlig väg, därmed $D_0 = 1$. Ekvation (2.1) är ekvivalent med sats 2.1, vilket betyder att $D_n = C_n$, där $n \geq 0$.

3 Catalantalen och träd

Catalantalen är bura för att räkna olika typer av träd. Denna avsnitt kommer handlar om hur Catalantalen användes inom grafteorin.

3.1 Ordnade träd

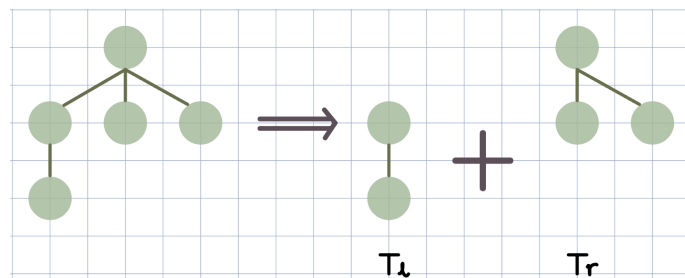
Ett ordnat träd (kallas även för ett plant träd eller ett catalanträd) T är definierad enligt följande. Roten till trädet kallas för vertex v och trädet kan inte vara tomt, vilket betyder att P består antingen av ett vertex eller av en följd (T_1, T_2, \dots, T_m) av underträd T_i där $1 \leq i \leq m$, var och ett av underträden är ett ordnat träd. Exempel på Figur 9 visar några ordnade träd med 5 vertex.



Figur 9: Exempel för ordnade träd med 5 vertex

Antag att ett ordnat träd T kan falla sönder i två underträd T_l och T_r med hjälp av kanten mellan T och T_l , se Figur 10. Låt $T_{n,k}$ vara en skog av alla ordnade träd T_n vars vänster underträd har k vertex, då kan följande avbildning definieras

$$T_{n,k} \longrightarrow T_k \times T_{n-k} . \quad (3.1)$$



Figur 10: En exempel på en nedbrytning av ett ordnade träd

D_n betecknas för antalet ordnade träd med n vertex. Nedbrytningsmodellen (uttryck (3.1)) ger följande:

$$D_n = \sum_{k=1}^{n-1} D_k D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-2} D_{k+1} D_{n-k-1} \quad , \quad n \geq 2 . \quad (3.2)$$

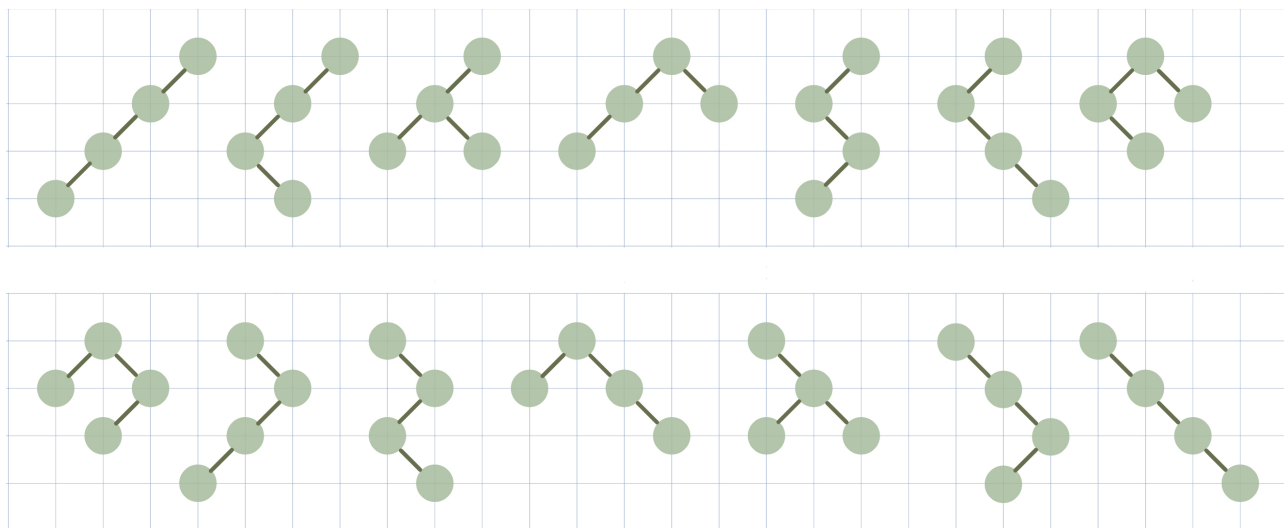
Relationen sammanfaller med differensekvationen, vilket betyder att den är en förskjuten Catalan rekurrensrelation,

$$D_{n+1} = C_n .$$

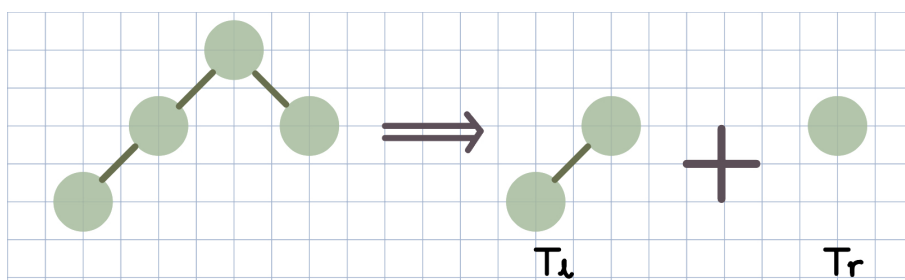
3.2 Binära träd

Binära träd är en typ av träd med n vertex där $n \geq 1$ och varje vertex har högst 2 barn. Binära träd (med n vertex) är uppbyggd av en rotpunkt v , ett vänster underträd (T_l) med k vertex och ett höger underträd (T_r) med $n-k-1$ (där $0 \leq k \leq n-1$) vertex, där rotpunkten v är kopplade till rotpunkterna

av varje underträd. Underträden T_1 och T_2 definieras som binära träd om de inte är tomma. Figur 11 visar några binära träd med 4 vertex och Figur 12 visar ett exempel på hur en binära träd kan fördelas.



Figur 11: Exempel av binära träd med 4 vertex



Figur 12: En exempel på en nedbrytning av ett binära träd

Låt $T_{n,k}$ vara skog av alla binära träd T_n , där nedbrytningen definierar en familj av bijektioner.

$$T_{n,k} \longrightarrow T_k \times T_{n-k-1} .$$

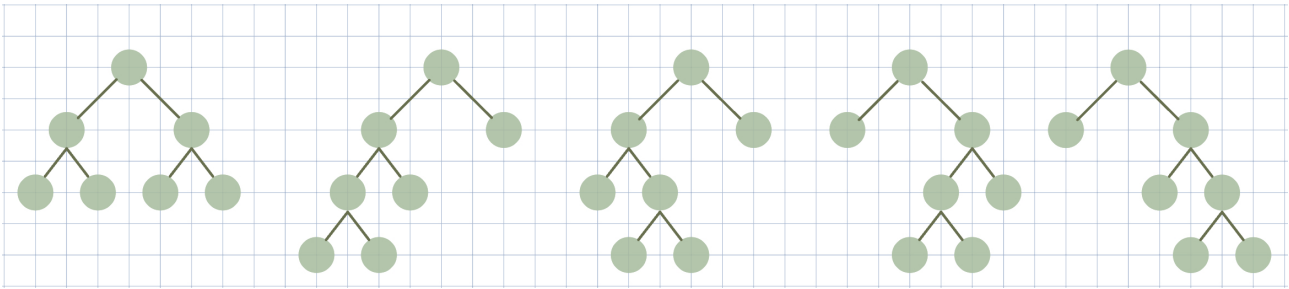
Detta resulterar till att antalet binära träd (betecknat med D_n) med n vertex uppfyller differensekvationen, alltså är

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} D_k D_{n-k-1} ,$$

för $n \geq 1$. Då $D_0 = 1$ har vi en förskjuten Catalan rekurrensrelation, så att $D_n = C_n$.

3.3 Fullständiga binära träd

Ett fullständigt binärt träd är ett binär träd där varje nod har exakt 0 eller 2 barn. Figur 13 visar några exempel för fullständigt binära träd med 7 vertex.



Figur 13: Exempel av en fullständiga binära träd med 7 vertex

Låt $T_{n,k}$ vara en skog av alla fullständiga binära träd T med $2n + 1$ vertex. Vi kan använda rotvertexet och dess infallande kant hos T som vårt nexus, så att vi kan vidare fördela T till ett vänster underträd med $2k + 1$ vertex och ett höger underträd med $2n - 2k - 1$ vertex, där $0 \leq k \leq n - 1$ och $n \geq 1$, se Figur 14.

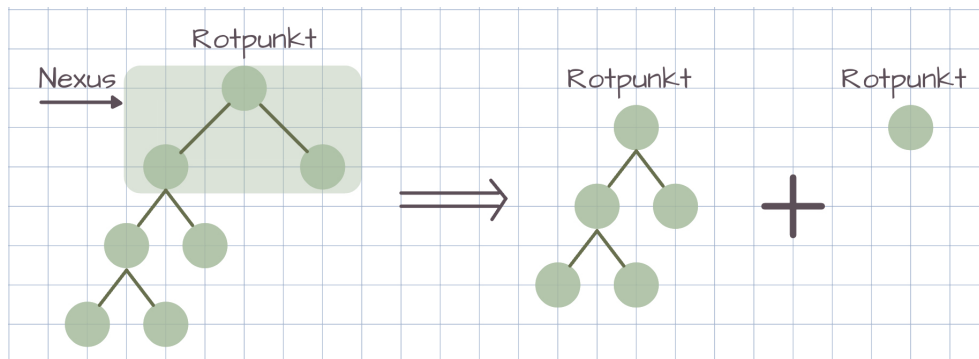
Fördelningen kan definieras som

$$T_{n,k} \longrightarrow T_k \times T_{n-k-1} . \quad (3.3)$$

Antalet fullständiga binära träd (D_n) med $2n + 1$ vertex uppfyller differensekvationen, så att

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} D_k D_{n-k-1} ,$$

för $n \geq 1$. Man kan konstaterar att man får en förskjuten Catalan rekurrensrelation, vilket betyder att $D_n = C_n$.



Figur 14: Ett exempel av fördelning av ett fullständigt binära träd med 7 vertex

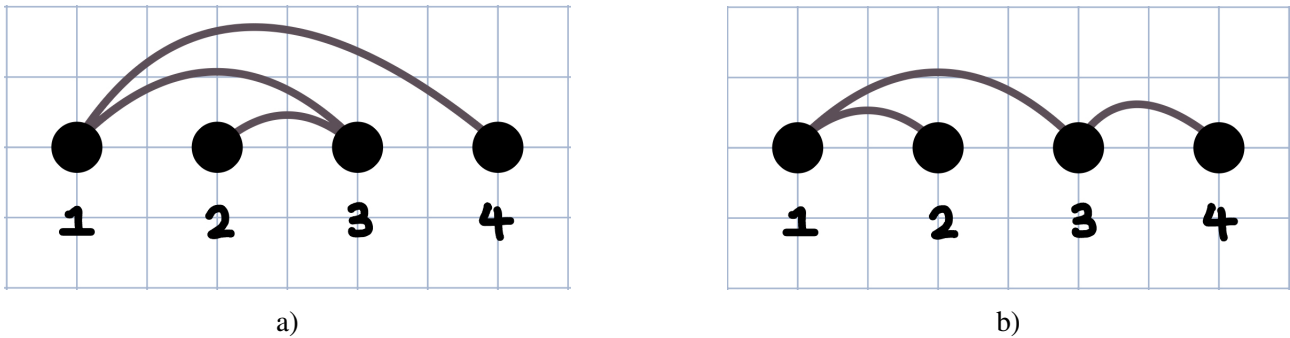
3.4 Icke-korsande och alternerande träd

Antag att vi ritar n punkter på en rak linje och markerar dessa med $1, \dots, n$. Vi kopplar ihop två punkter (betecknade med i och j) av en kant som inte faller under linjen och har följande egenskaper:

1. **icke-korsande:** inga kanter får kors varandra.
2. **alternerande:** beroende på vertexs nummer sträcker sig kanterna i en viss riktning, det vill säga, antingen riktar den sig åt vänster eller åt höger. Ordet "alternerande" kommer från det faktum att om man börjar från någon punkt i trädets och sedan följer efter den tillhörande väg så kommer man fram till vertexen i följande ordning: större vertex, mindre vertex, större, \dots .

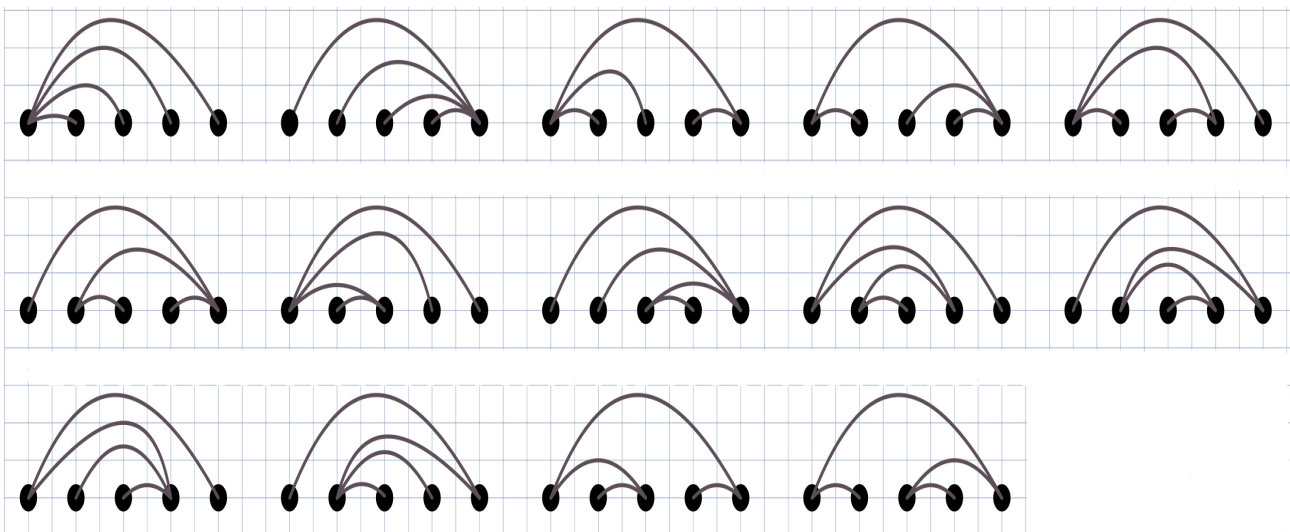
Egenskapen av icke-korsande och alternerande träd illustreras på Figur 15a) där kanterna från vertex 1 sträcker sig åt vänster till vertex 3 och 4, medan kanterna från vertex 3 sträcker sig åt höger till vertex 1 och 2, samt att kanterna inte skär varandra.

Däremot i Figur 15b) visas en icke-korsande och icke-alternerande träd, eftersom kanterna inte skär varandra, vilket uppfyller egenskaperna för icke-korsande träd. Notera att kanterna i vertex 3 sträcker sig både i vänster och höger riktning, som är ett motsägelse till ett alternerande egenskap.



Figur 15: Exempel av a) icke-korsande och alternerande egenskaper, b) icke-korsande och icke-alternerande egenskaper.

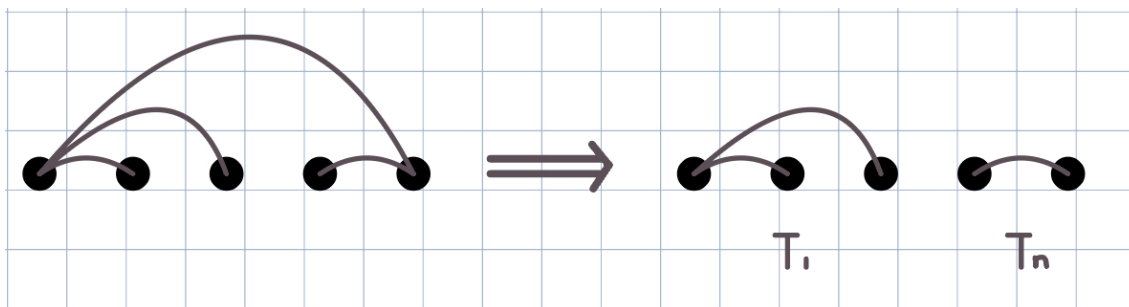
Ett ytterligare exempel av icke-korsande och alternerande träd med 5 vertex inkluderad 14 olika varianter representeras i Figur 16 ($C_5 = 14$).



Figur 16: 14 olika icke-korsande och alternerande träd

Låt T_n vara beteckningen för ett icke-korsande och alternerande träd med n vertex. Det visas tydligt i Figur 16 att T_n är acykliskt, vilket betyder att den maximala antal kanter i T är $n - 1$. Om vi tar bort en kant mellan vertex 1 och n från T_n , resulterar detta till att det som är kvar består av exakt två sammanhängande komponenter. Vi kallar komponenten som innehåller vertex $1, \dots, k$ för T_1 och komponenten som innehåller vertex $k + 1, \dots, n$ för T_n , där $k < n$, se Figur 17.

Egenskaperna som användes för att definierar ett icke-korsande och alternerande träd gäller även för dess underträd, det vill säga T_1 och T_n är också icke-korsande och alternerande träd.



Figur 17: Ett exempel av fördelning av ett icke-korsande och alternerande träd med 5 vertex

Låt oss beteckna med $T_{n,k}$ som en mängd av alla icke-korsande och alternerande träd av storlekt n och största ändpunkten k för underträdet T_1 . Vi kan uttrycka fördelningen som:

$$T_{n,k} \longrightarrow T_k \times T_{n-k}.$$

Avbildningen är subjektiv, eftersom den är reversibel, det vill säga vi kan rita en kant mellan vertex 1 och n för att sy ihop träden T_1 och T_n och bilda ett nytt icke-korsande och alternerande träd med n vertex.

Vilket betyder att om D_n betecknas med antalet icke-korsande och alternerande träd med n vertex, så gäller

$$D_n = \sum_{k=1}^{n-1} D_k D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-2} D_{k+1} D_{n-k-1} \quad (3.4)$$

vilket stämmer överens med ekvation (1.15) och medför $D_{n+1} = C_n$.

Sammanfattning:

Catalantalen beräknar antalet

1. ordnade träd med $n + 1$ vertex,
2. binära träd med n vertex,
3. fullständig träd med $2n + 1$ vertex,
4. icke-korsande och alternerande träd med $n + 1$ vertex.

4 Catalantalen och geometriska polygon

I föregående avsnitt nämndes Catalantalen och polygon och följande avsnitt ska vi introducera några exempel gällande dessa koncept.

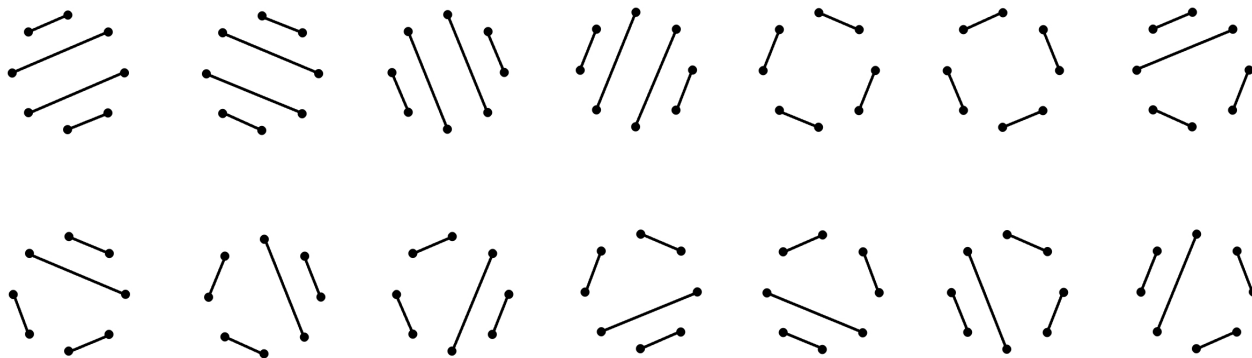
4.1 Icke-korsande linjer för polygon

En väg är kopplad mellan två hörn för en polygon med $2n$ hörn, därmed finns det n antal kombinationer av olika vägar definierad på antalet hörn ($2n$) i en polygon. Dessutom, bör dessa vägar inte korsa varandra och därtill definieras detta som **icke-korsande linjer** för en polygon.

För att räkna antalet sätt att rita icke-korsande $2n$ -polygon, bestämmer vi en rotpunkt och markerar den med v_1 och sedan markerar vi resten av hörn moturs från v_2 till v_{2n} . I alla icke-korsande linjer

för polygon, faller rotpunkt v_1 tillsammans med en linje som vi kallar för rotlinje som är kopplade till ett hörn v_{2k} ($1 \leq k \leq n$) med jämnt index, så att det finns ett jämnt antal hörn på varje sida av rotpunkten.

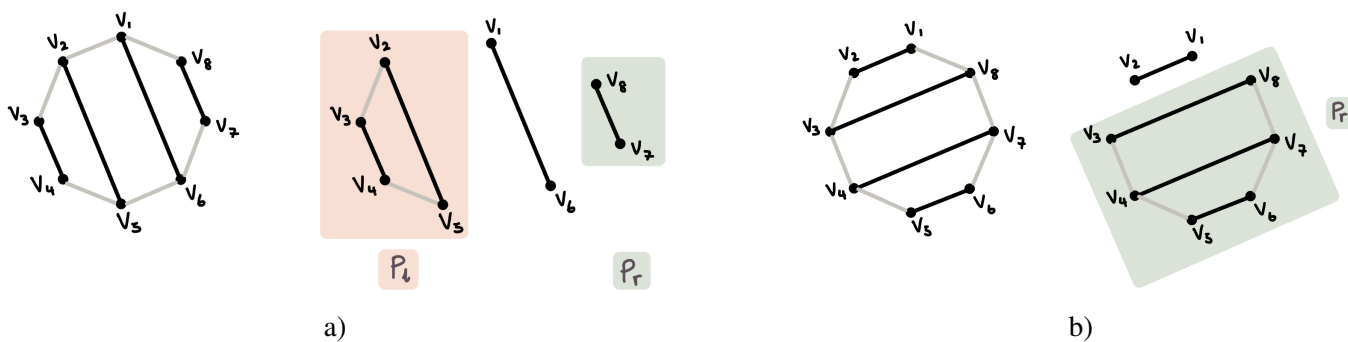
Till exempel i Figur 18 visar vi 14 olika möjliga icke-korsande vägar för en polygon med $n = 4$, det vill säga en oktagon.



Figur 18: 14 olika icke-korsande linjer i en polygon med 8 hörn

Låt P_n vara mängden av alla ackorderade $2n$ -polygon och $P_{n,k}$ vara medlemmarna i P_n , vars rotpunkt ligger intill hörn v_{2k} .

Om $P \in P_{n,k}$, då definieras rotpunkterna och rotlinjerna till en nedbrytning av P av två mindre konvexa polygoner som vi kommer kalla för P_l med storlek $2k - 2$ och P_r med storlek $2n - 2k$ (se Figur 19 a). Observera att om rotpunkten är ansluten till v_2 eller v_{2n} , kommer antingen P_l eller P_r att vara tomma, beroende på vilken punkt rotpunkten är ansluten till. Figur 19 b) illustrerar ett sådant exempel.



Figur 19: Två olika nedbrytningar för polygon P

Fördelningen kan uttryckas på följande sätt:

$$P_{n,k} \longrightarrow P_{k-1} \times P_{n-k}$$

och precis som i tidigare bevis så är fördelningen också surjektiv. Polygonerna P_l och P_r kan kombineras med hjälp av en rotlinje och koppla ihop vertexen för P_l och P_r till ett vertex för den större polygonen.

Låt D_n beteckna antalet P_n , där den uppfyller den förskjutna Catalan rekurrensrelationen

$$D_n = \sum_{k=1}^n D_{k-1} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} D_k D_{n-1-k}$$

och där $D_0 = 1$, vilket betyder att $D_n = C_n$ för alla $n \geq 0$.

4.2 Tesselationer av en trappa

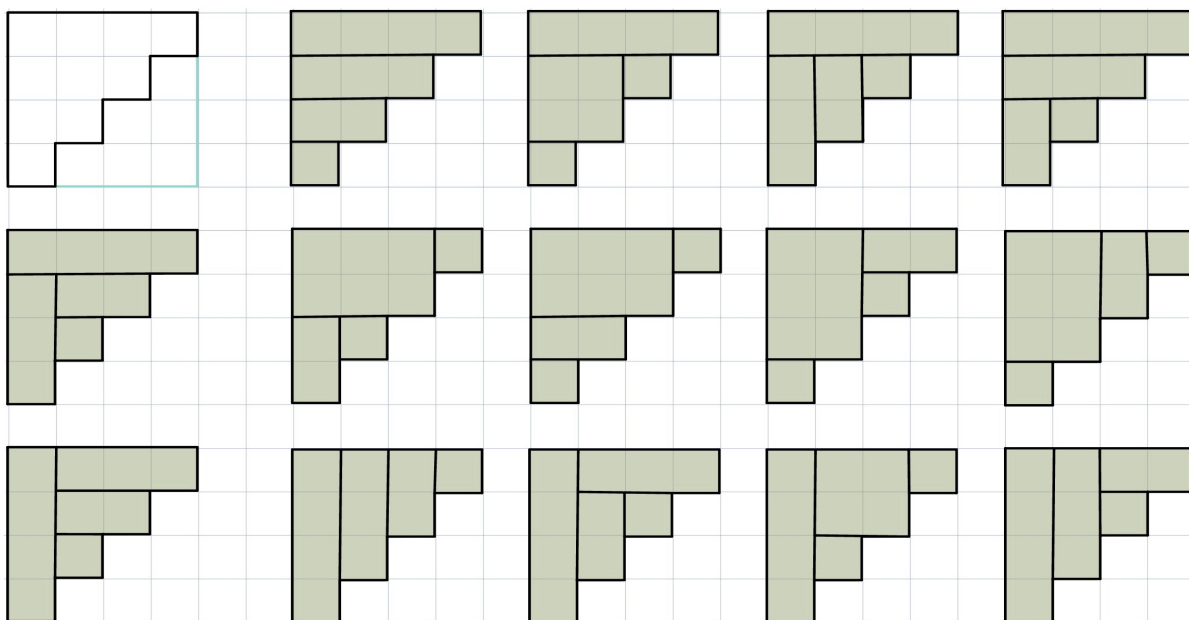
Första bilden på rad 1 i Figur 20 visas en omvänd trappa, där vi antar att dess storlek är 4×4 .

Det finns flera sätt att utföra en tesselering över en $n \times n$ omvänd trappa med exakt n rektangulära plattor. Till exempel så visas i figur 20 att en omvänd trappa med storlek 4×4 kan utföra tesselering i 14 olika sätt.

En simpel metod att räkna tesselationer av en trappa är genom att anse att området som inkluderas i den övre-vänstra hörnet av trappan är en koppling, för att fördela tesselation till två mindre områden (T_1 och T_2), se Figur 21. Kakelfigurererna har storlek $r \times c$, därmed ser vi att

$$c = n + 1 - r ,$$

där $1 \leq r \leq n$.



Figur 20: 14 olika sätt att ordna den omvänd trappa.

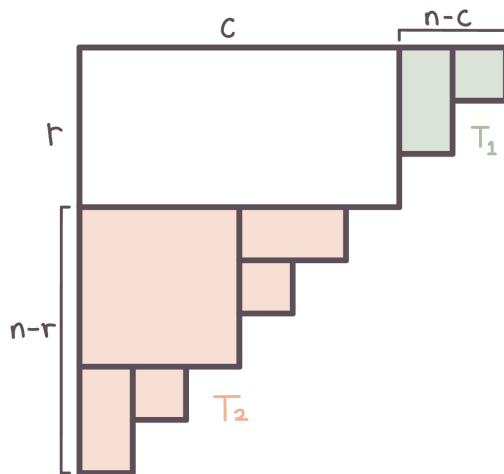
Låt T_n vara mängden av tesselationer av en $n \times n$ omvänd trappa och sedan låt $T_{n,r}$ vara en delmängd av T_n , där den övre-vänster kakel har storlek $r \times (n + 1 - r)$. Genom att ta bort den övre-vänster kakel fördelas $n \times n$ trappa till en $(r - 1) \times (r - 1)$ kakel T_1 och en $(n - r) \times (n - r)$ kakel T_2 , som visas i Figur 21. Men om $r = 1$ eller $r = n$ är en av kakeln T_1 och T_2 tomma. Därmed gäller

$$T_{n,r} \longrightarrow T_{r-1} \times T_{n-r} .$$

Fördelningen är surjektiv eftersom varje par av tesselationer T_1 och T_2 kombinerade med hjälp av en $r \times (n + 1 - r)$ kakel. Därför antar vi att om D_n är antalet $n \times n$ tesselationer, så är $D_0 = 1$ när $n = 0$. Det vill säga

$$D_n = \sum_{r=1}^n D_{r-1} D_{n-r} = \sum_{r=0}^{n-1} D_r D_{n-r-1} . \quad (4.1)$$

Till följd av detta ser vi att ekvationen överens stämmer med Catalans rekurrensrelationen. Vilket betyder $D_n = C_n$.



Figur 21: Illustration av områdsfördelning av T_1 och T_2 .

Sammanfattning:

Catalantalen beräknar

1. antalet sätt att trianguleringar av en konvex polygon med $n + 2$ hörn,
2. antalet sätt att ackordera en konvex polygon med $2n$ nod, där dess kanter inte skär varandra,
3. antalet sätt att tessellera en $n \times n$ omvänd trappa med n plattor.

5 Catalantalen och parenteser

Betrakta en binära operation definierad på en sträng med n bokstäver. Om operationen inte är associativ sträng på formen av $abcd$, så är den inte väldefinierat om vi inte sätter in parenteser. I allmänhet kan vi ignorera parenteserna längs till vänster och längs till höger utan att förlora information, men i vårt fall är det annorlunda, för att ordet $abcd$ ($n = 4$) kan definieras på fem olika sätt:

$$a(b(cd)), \quad a((bc)d), \quad (a(bc))d, \quad ((ab)c)d, \quad (ab)(cd),$$

och dessa fem sättet ger oss olika information. Till exempel $((ab)c)d$ säger att $w = abcd$ är produkten mellan $(ab)c$ och d samt $((ab)c)$ är produkten mellan ab och c . Om vi utesluter parenteserna ges ingen information utifrån dessa kombinationer.

För att beräkna antalet sätt att markera ett ord med parenteser, antar vi att ordet betecknas med bokstav w av längd n :

$$w = x_1x_2x_3 \cdots x_n.$$

Vi antar även att ett ord med fullständiga parenteser inte inkluderar parenteser som omfattar hela ord som $((x_1x_2)(x_3x_4))$ och parenteser som omfattar en enda bokstav som $x_1(x_2(x_3(x_4)))$.

Låt F_n vara mängder av helt parenteserade ord av längd n där $n \geq 3$. Vi kommer använda den

första matchande parentesen som en koppling till att dela w i mindre helt parenteserade ord. I sådana fall har w följande form:

$$w = \alpha(\beta)\gamma,$$

där α , β , och γ är helt parenteserade ord och längden för $\beta \geq 2$. Samt att en av α eller γ måste vara tomma ord, eftersom det är omöjligt att införa parenteser innan den första öppna parentesen för att gruppera α och β eller gruppera β och γ .

Dessutom måste α ha längden 0 eller 1, annars blir $w = x_1x_2x_3 \cdots (\beta)\gamma$. Detta leder till att w inte är helt ett parenteserat ord, eftersom det inte finns en öppen parentes till vänster.

Om α är tomt så är $w = (\beta)\gamma$ och kan skrivas i två möjliga former:

$$w = \begin{cases} (\beta)\gamma & \text{om } \gamma \text{ har längd } 1 \\ (\beta)(\gamma') & \text{om } \gamma \text{ har längd } > 1, \end{cases}$$

som tidigare nämdes så är både β , och γ' helt parentesade ord. Å andra sidan, om γ är ett tomt ord så har α längd 1 och w är lika med $\alpha(\beta)$.

Sammanfattning:

Om w är ett helt parenteserat ord av längd n (där $n \geq 3$), så måste w ha en av följande former:

$$w = \alpha(\beta), \quad w = (\beta)\gamma \quad \text{eller} \quad w = (\beta)(\gamma'),$$

där α , γ har längd 1 och β , γ' har en längd större än 1.

Låt $F_{n,k}$ vara en del av F_n som består av de helt parenteserade ord av typ $w = (\beta)(\gamma')$, där $2 \leq k \leq n - 2$ och längden för $\beta = k$ och för γ' är $n - k$, då har vi att

$$F_{n,k} \implies F_k \times F_{n-k}.$$

Låt $D_n = |F_n|$ och $D_0 = 1$, därtill ges den associerade återfallsrelationen,

$$D_n = \sum_{k=1}^{n-1} D_k D_{n-k},$$

så att $D_{n-1} = C_n$ för alla $n \geq 0$.

6 Catalantalen och modulatoräkning

Låt \mathbb{Z}_{n+1} vara mängden heltal mellan 0 och n , det vill säga $\mathbb{Z}_{n+1} = 0, 1, 2, \dots, n$. Sedan låt M vara en multimängd över \mathbb{Z}_{n+1} vars summa är 0 modul $(n + 1)$, vi säger att multisetet M har en noll summa. Till exempel $n = 7$, $S = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4$ så att $M = 16 \equiv 0 \pmod{8}$.

Låt Z_n vara mängden av alla multimängder över \mathbb{Z}_{n+1} med längd n som har noll summa. För att definiera en binär relation på Z_n , antar vi att $S = a_1, a_2, \dots, a_n$ som är relaterade till dess translation

$$S + k = a_1 + k, a_2 + k, \dots, a_n + k,$$

där $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$. Utifrån detta ser vi att det är en ekvivalensrelation på M_n , alltså alla möjliga multimängder.

När det gäller $n + 1$ translationer, så blir det

$$S, S + 1, S + 2, \dots, S + n$$

där alla är distinkta, eftersom n och $n + 1$ är relativt prima. För att bevisa detta så antar vi att $S + k = S + j$, där $0 \leq j \leq k \leq n$. Så att

$$\sum (S + k) = \sum S + \sum k \equiv nk \pmod{n + 1},$$

och

$$\sum (S + j) = \sum S + \sum j \equiv nj \pmod{n + 1}.$$

Vilket innebär att

$$nk \equiv nj \pmod{n + 1},$$

ger

$$k \equiv j \pmod{n + 1},$$

vilket visar att n och $n + 1$ är relativt prima. Därmed har varje ekvivalens klass storleken $n + 1$.

Vi vet också att antalet multimängder med antal element n , där n tas från andra mängder med element $n + 1$ kan betecknas på följande sätt:

$$\left(\binom{n + 1}{n} \right) = \binom{n + n + 1 - 1}{n} = \binom{2n}{n}. \quad (6.1)$$

Ekvation (6.1) måste därefter divideras med $n + 1$, eftersom en av multimängderna är en noll summa, och därmed har varje klass $n + 1$ element i sig,

$$\frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n}. \quad (6.2)$$

Vi ser tydligt att ekvation (6.2) är lika med Sats 1, vilket betyder att Catalantal kan även räkna antalet multisets med storlek n i mängd Z_{n+1} som är noll summa.

7 Tacksägelse

Det här arbetet slutfördes framgångsrikt tack vare min handledare professor Boris Shapiro som hjälpte mig att hitta detta ämne, förklarade saker som jag inte förstod och gav mig råd under skrivningsprocessen samt arbetsplaneringen. Jag vill tacka Annemarie Luger, min huvudlärare, som hjälpte mig med alla kursfrågor. Jag vill tacka mina vänner som spenderade sin tid att läsa mitt arbete och kom med förslag och förbättringar. Jag vill också tacka min familj, som har stöttat mig när jag kände mig stressade och vilse.

8 Referenser

- Roman, S. (2015). An Introduction to Catalan Numbers.
- Stanley, R. P. (2015). Catalan Numbers. Cambridge University Press.
- Triangular Number Sequence. (n.d.). <https://www.mathsisfun.com/algebra/triangular-numbers.html>
- Grimaldi, R. (2012). Fibonacci and Catalan Numbers: An Introduction. John Wiley & Sons.